HANDBUCH DER PHYSIK

UNTER REDAKTIONELLER MITWIRKUNG VON

R. GRAMMEL-STUTTGART · F. HENNING-BERLIN
H. KONEN-BONN · H. THIRRING-WIEN · F. TRENDELENBURG-BERLIN
W. WESTPHAL-BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

H. GEIGER UND KARL SCHEEL

BAND XVIII

GEOMETRISCHE OPTIK
OPTISCHE KONSTANTE
OPTISCHE INSTRUMENTE

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1927

GEOMETRISCHE OPTIK
OPTISCHE KONSTANTE
OPTISCHE INSTRUMENTE

BEARBEITET VON

H. BOEGEHOLD · O. EPPENSTEIN · H. HARTINGER
F. JENTZSCH · H. KESSLER · F. LÖWE · W. MERTÉ
M. VON ROHR

REDIGIERT VON H. KONEN

MIT 688 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1927

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.

Kapitel 2.

Allgemeine physikalische Konstanten

(September 1926)[1].

a) Mechanische Konstanten.

Gravitationskonstante	$6{,}6_5 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm² · g⁻²
Normale Schwerebeschleunigung	980,665 cm · sec⁻²
Schwerebeschleunigung bei 45° Breite	980,616 cm · sec⁻²
1 Meterkilogramm (mkg)	$0{,}980665 \cdot 10^8$ erg
Normale Atmosphäre (atm)	$1{,}01325_0 \cdot 10^6$ dyn · cm⁻²
Technische Atmosphäre	$0{,}980665 \cdot 10^6$ dyn · cm⁻²
Maximale Dichte des Wassers bei 1 atm	0,999973 g · cm⁻³
Normales spezifisches Gewicht des Quecksilbers	13,5955

b) Thermische Konstanten.

Absolute Temperatur des Eispunktes	$273{,}2_0$°
Normales Litergewicht des Sauerstoffes	1,42900 g · l⁻¹
Normales Molvolumen idealer Gase	$22{,}414_5 \cdot 10^3$ cm³
Gaskonstante für ein Mol	$0{,}8204_5 \cdot 10^2$ cm³ · atm · grad⁻¹ $0{,}8313_2 \cdot 10^8$ erg · grad⁻¹ $0{,}8309_6 \cdot 10^1$ int joule · grad⁻¹ $1{,}985_8$ cal · grad⁻¹
Energieäquivalent der 15°-Kalorie (cal)	$4{,}184_2$ int joule $1{,}1623 \cdot 10^{-6}$ int k-watt-st $4{,}186_3 \cdot 10^7$ erg $4{,}268_4 \cdot 10^{-1}$ mkg

c) Elektrische Konstanten.

1 internationales Ampere (int amp)	$1{,}0000_0$ abs amp
1 internationales Ohm (int ohm)	$1{,}0005_0$ abs ohm
Elektrochemisches Äquivalent des Silbers	$1{,}11800 \cdot 10^{-3}$ g · int coul⁻¹
Faraday-Konstante für ein Mol und Valenz 1	$0{,}9649_4 \cdot 10^5$ int coul
Ionisier.-Energie/Ionisier.-Spannung	$0{,}9649_4 \cdot 10^5$ int joule · int volt⁻¹

d) Atom- und Elektronenkonstanten.

Atomgewicht des Sauerstoffs	16,000
Atomgewicht des Silbers	107,88
Loschmidtsche Zahl (für 1 Mol)	$6{,}06_1 \cdot 10^{23}$
Boltzmannsche Konstante k	$1{,}372 \cdot 10^{-16}$ erg · grad⁻¹
$^1/_{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms	$1{,}650 \cdot 10^{-24}$ g
Elektrisches Elementarquantum e	$1{,}592 \cdot 10^{-19}$ int coul $4{,}77_4 \cdot 10^{-10}$ dyn$^{1/2}$ · cm
Spezifische Ladung des ruhenden Elektrons e/m	$1{,}76_6 \cdot 10^8$ int coul · g⁻¹
Masse des ruhenden Elektrons m	$9{,}02 \cdot 10^{-28}$ g
Geschwindigkeit von 1-Volt-Elektronen	$5{,}94_8 \cdot 10^7$ cm · sec⁻¹
Atomgewicht des Elektrons	$5{,}46 \cdot 10^{-4}$

e) Optische und Strahlungskonstanten.

Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$2{,}998_5 \cdot 10^{10}$ cm · sec⁻¹
Wellenlänge der roten Cd-Linie (1 atm, 15° C)	$6438{,}470_0 \cdot 10^{-8}$ cm
Rydbergsche Konstante für unendl. Kernmasse	109737,1 cm⁻¹
Sommerfeldsche Konstante der Feinstruktur	$0{,}729 \cdot 10^{-2}$
Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante σ	$5{,}7_4 \cdot 10^{-12}$ int watt · cm⁻² · grad⁻⁴ $1{,}37_4 \cdot 10^{-12}$ cal · cm⁻² · sec⁻¹ · grad⁻⁴
Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes	0,288 cm · grad
Wien-Plancksche Strahlungskonstante c_2	1,43 cm · grad

f) Quantenkonstanten.

Plancksches Wirkungsquantum h	$6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg · sec
Quantenkonstante für Frequenzen $\beta = h/k$	$4{,}77_5 \cdot 10^{-11}$ sec · grad
Durch 1-Volt-Elektronen angeregte Wellenlänge	$1{,}233 \cdot 10^{-4}$ cm
Radius der Normalbahn des H-Elektrons	$0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm

[1]) Erläuterungen und Begründungen s. Bd. II d. Handb. Kap. 10, S. 487—518.

Allgemeine physikalische Konstanten

(September 1926)[1].

a) Mechanische Konstanten.

Gravitationskonstante	$6{,}6_6 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm^2 · g^{-2}
Normale Schwerebeschleunigung	$980{,}665$ cm · sec^{-2}
Schwerebeschleunigung bei 45° Breite	$980{,}616$ cm · sec^{-2}
1 Meterkilogramm (mkg)	$0{,}980665 \cdot 10^8$ erg
Normale Atmosphäre (atm)	$1{,}01325_0 \cdot 10^6$ dyn · cm^{-2}
Technische Atmosphäre	$0{,}980665 \cdot 10^6$ dyn · cm^{-2}
Maximale Dichte des Wassers bei 1 atm	$0{,}999973$ g · cm^{-3}
Normales spezifisches Gewicht des Quecksilbers	$13{,}5955$

b) Thermische Konstanten.

Absolute Temperatur des Eispunktes	$273{,}2_0$°
Normales Litergewicht des Sauerstoffes	$1{,}42900$ g · l^{-1}
Normales Molvolumen idealer Gase	$22{,}414_6 \cdot 10^3$ cm^3
Gaskonstante für ein Mol	$0{,}8204_5 \cdot 10^2$ cm^3-atm · grad^{-1}
	$0{,}8313_2 \cdot 10^8$ erg · grad^{-1}
	$0{,}8309_0 \cdot 10^1$ int joule · grad^{-1}
	$1{,}985_8$ cal · grad^{-1}
Energieäquivalent der 15°-Kalorie (cal)	$4{,}184_2$ int joule
	$1{,}1623 \cdot 10^{-6}$ int k-watt-st
	$4{,}186_3 \cdot 10^7$ erg
	$4{,}268_6 \cdot 10^{-1}$ mkg

c) Elektrische Konstanten.

1 internationales Ampere (int amp)	$1{,}0000_8$ abs amp
1 internationales Ohm (int ohm)	$1{,}0005_0$ abs ohm
Elektrochemisches Äquivalent des Silbers	$1{,}11800 \cdot 10^{-3}$ g · int coul^{-1}
Faraday-Konstante für ein Mol und Valenz 1	$0{,}9649_4 \cdot 10^5$ int coul
Ionisier.-Energie/Ionisier.-Spannung	$0{,}9649_4 \cdot 10^5$ int joule · int volt^{-1}

d) Atom- und Elektronenkonstanten.

Atomgewicht des Sauerstoffs	$16{,}000$
Atomgewicht des Silbers	$107{,}88$
Loschmidtsche Zahl (für 1 Mol)	$6{,}06_1 \cdot 10^{23}$
Boltzmannsche Konstante k	$1{,}372 \cdot 10^{-16}$ erg · grad^{-1}
$^1/_{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms	$1{,}650 \cdot 10^{-24}$ g
Elektrisches Elementarquantum e	$1{,}592 \cdot 10^{-19}$ int coul
	$4{,}77_4 \cdot 10^{-10}$ dyn$^{1/2}$ · cm
Spezifische Ladung des ruhenden Elektrons e/m	$1{,}76_6 \cdot 10^8$ int coul · g^{-1}
Masse des ruhenden Elektrons m	$9{,}02 \cdot 10^{-28}$ g
Geschwindigkeit von 1-Volt-Elektronen	$5{,}94_8 \cdot 10^7$ cm · sec^{-1}
Atomgewicht des Elektrons	$5{,}46 \cdot 10^{-4}$

e) Optische und Strahlungskonstanten.

Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$2{,}998_5 \cdot 10^{10}$ cm · sec^{-1}
Wellenlänge der roten Cd-Linie (1 atm, 15° C)	$6438{,}470_0 \cdot 10^{-8}$ cm
Rydbergsche Konstante für unendl. Kernmasse	$109737{,}1$ cm^{-1}
Sommerfeldsche Konstante der Feinstruktur	$0{,}729 \cdot 10^{-2}$
Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante σ	$5{,}7_2 \cdot 10^{-12}$ int watt · cm^{-2} · grad^{-4}
	$1{,}37_6 \cdot 10^{-12}$ cal · cm^{-2} · sec^{-1} · grad^{-4}
Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes	$0{,}288$ cm · grad
Wien-Plancksche Strahlungskonstante c_2	$1{,}43$ cm · grad

f) Quantenkonstanten.

Plancksches Wirkungsquantum h	$6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg · sec
Quantenkonstante für Frequenzen $\beta = h/k$	$4{,}77_6 \cdot 10^{-11}$ sec · grad
Durch 1-Volt-Elektronen angeregte Wellenlänge	$1{,}233 \cdot 10^{-4}$ cm
Radius der Normalbahn des H-Elektrons	$0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm

[1] Erläuterungen und Begründungen s. Bd. II d. Handb. Kap. 10, S. 487—518.

Kapitel 1.

Geometrische Optik.

Mit 162 Abbildungen.

A. Allgemeines über Strahlen und Strahlensysteme.

Von

W. Merté, Jena.

a) Grundgesetze der geometrischen Optik.

1. Ausbreitung des Lichtes. Die Wahrnehmungen in der Umwelt, die mit Hilfe des Auges gemacht werden, beruhen im Regelfalle auf der Reizung der Netzhaut durch das Licht. Wir sehen also die Gegenstände und Erscheinungen unserer Umgebung durch das von ihnen ausgehende Licht; bei dessen völligem Fehlen würden jene durchaus unsichtbar sein; dabei können sie selbständig Licht aussenden, Lichtquellen sein, oder erst durch die Beleuchtung mit solchen Lichtquellen sichtbar werden. Es ist nicht verwunderlich, daß diese optischen Erscheinungen, die so wichtig für unsere Orientierung in der vielgestaltigen Umwelt sind, schon frühzeitig die wissenschaftliche Beobachtung anzogen. Daher können einige der einfachen optischen Grundgesetze zu den ersten physikalischen Erkenntnissen der Menschen gerechnet werden.

Bringt man zwischen Lichtquelle und Auge einen undurchsichtigen Körper, so sehen wir die Lichtquelle nicht mehr, sofern der Körper von der geradlinigen Verbindung zwischen Lichtquelle und Auge durchstoßen wird und nicht zu klein ist. Aus dieser Erfahrung wurde der Schluß gezogen: Das Licht pflanzt sich geradlinig fort. Eine immer wieder beobachtbare Bestätigung dieser Grundregel wurde z. B. in den Erscheinungen der Schattenbildungen und des durch kleinere Öffnungen lichtdurchlässiger Schirme durchtretenden Lichtes gefunden. Aus dem gleichen Erscheinungskomplex leitete man sich die weitere Grundregel von der Unabhängigkeit der Teile eines Lichtbündels voneinander ab; ihre Begründung wird z. B. in der Tatsache gefunden, daß ein in das Lichtbündel gebrachter undurchsichtiger Körper dem Augenschein nach entsprechend seiner Gestalt einen Schatten wirft, auf die außerhalb seines Schattens befindlichen Teile des Lichtbündels aber ohne Einwirkung bleibt.

Ein kosmisches Beispiel für die geradlinige Ausbreitung des Lichtes kann in den Erscheinungen der Sonnen- und Mondfinsternisse erblickt werden. Bedeuten in der schematischen Abb. 1 S die Sonne und M den Mond, so hat man hier zwei deutlich trennbare Schattengebiete im Gegensatz zu dem einfachen

Schatten, den eine punktförmige Lichtquelle von einem undurchsichtigen Körper entwirft. Zwischen dem völlig lichtlosen Gebiet, dem kegelförmigen Kernschatten, und dem überhaupt nicht beschatteten Teile des Raumes, befindet sich der Halbschatten. Bewegt sich die Erde auf ihrer Bahn durch den Mondschatten, so haben die Erdorte, die in den Kernschatten zu liegen kommen, eine totale Sonnenfinsternis, da zu ihnen gar kein Sonnenlicht gelangt, die in den Halbschatten fallenden Erdorte dagegen eine partielle Sonnenfinsternis, da gewisse Teile der Sonne diesen Orten Licht zusenden. In gleicher Weise sind die Mondfinsternisse zu erklären, die eintreten, wenn die Erde, zwischen Sonne und Mond befindlich, letzteren beschattet. Die Übereinstimmung der Beobachtungen mit den auf Grund der Annahme geradliniger Ausbreitung des Lichtes zu erwartenden Schattenerscheinungen ist ein Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme.

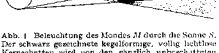


Abb. 1 Beleuchtung des Mondes M durch die Sonne S. Der schwarz gezeichnete kegelförmige, völlig lichtlose Kernschatten wird von den gänzlich unbeschatteten Teilen des Raumes durch das durch Striche kenntlich gemachte Gebiet des Halbschattens getrennt

Auch die Grundvoraussetzung der Photometrie, daß die Intensität der von einem Punkt ausgehenden Lichtstrahlung in einem nicht absorbierenden, homogenen und isotropen Medium in umgekehrtem Verhältnis zum Quadrate der Entfernung von diesem Punkte steht, beruht auf der Vorstellung geradliniger Ausbreitung des Lichtes und gibt mit ihrer experimentellen Bestätigung daher auch einen Beleg für diese Vorstellung.

Im Zusammenhang mit der Annahme geradliniger Fortpflanzung des Lichtes, die also von einem Lichtpunkt ausgehendes Licht längs einer geraden Linie zu irgendeinem Punkte des Raumes gelangen läßt, bildeten sich die geometrischen Abstraktionen des Lichtpunktes und Lichtstrahles heraus, die, zwar jeder physikalischen Wirklichkeit bar, doch für unsere hier zu behandelnde Theorie von grundlegender Bedeutung sind.

Nimmt man zu den beiden oben angegebenen Grundregeln noch weiter hinzu das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz, so hat man in diesen vier Grundannahmen das Fundament, auf welches sich die geometrische Optik aufbauen läßt. Diese Disziplin unternimmt es also nicht, auf die Wesensart des Lichtes einzugehen, sie begnügt sich damit, die Lichtausbreitung festzustellen und die hiermit zusammenhängenden geometrischen Beziehungen. Trotz dieser Beschränkung kann man wohl kaum den Wert der geometrischen Optik überschätzen, hat sie doch auf den verschiedensten Gebieten, es sei nur an die optischen Instrumente erinnert, höchste Triumphe gefeiert. Immerhin soll hier nicht vergessen werden, hervorzuheben, daß von dem Standpunkte der physikalischen Optik aus, die der eigentlichen Art des Lichtes näherzukommen sucht, jene geometrischen Abstraktionen nur (im Regelfall allerdings weitgehende) Annäherungen an die tatsächlichen Verhältnisse bedeuten können.

2. Brechung und Spiegelung des Lichtes. Die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, die jeder überall zu jeder Zeit beobachtet und die deswegen gern zu den Grunderkenntnissen unseres empirischen Wissensschatzes gerechnet zu werden pflegt, erfolgt nun im allgemeinen nur, solange wie sich das Licht in ein und demselben homogenen Medium bewegt. Wird dagegen die Homogenität gestört etwa dadurch, daß das Licht auf seinem Weg auf ein zweites Medium anderer optischer Beschaffenheit auftrifft, wie etwa das aus Luft in eine Glaslinse eintretende Licht, so sind an der Grenzfläche der beiden Medien ganz un-

vermittelt auftretende, gesetzmäßige Richtungsänderungen der Lichtstrahlen feststellbar. Der Lichtstrahl wird gewissermaßen in zwei Teile aufgespalten, in einen gespiegelten und einen gebrochenen Strahl. Der gespiegelte Strahl verbleibt im ersten Medium, der gebrochene tritt in das zweite ein. Ist die Grenzfläche nicht so glatt und regelmäßig wie die Fläche einer Linse, sondern rauh, so werden die Lichtstrahlen in alle möglichen Richtungen zurückgeworfen (diffuse Reflexion) und gebrochen. Die diffuse Reflexion an der mehr oder weniger rauhen Oberfläche eines nicht selbst leuchtenden Körpers macht überhaupt diesen dem Auge erst sichtbar; wirkt dagegen die Oberfläche eines Körpers als idealer Spiegel, so wird sie gar nicht wahrgenommen, sondern man kann nur die von ihr regelmäßig reflektierten Strahlen außerhalb von ihr liegender, lichtaussendender Körper sehen, d. h. diese selbst.

Das Gesetz, nach dem die regelmäßige Zurückwerfung (Spiegelung) erfolgt, war schon den Alten bekannt und sei an Hand nebenstehender Abb. 2 wie folgt formuliert: Ist T die Tangentialebene in dem Punkt B der Spiegelfläche, auf

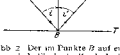


Abb. 2. Der im Punkte B auf eine spiegelnde Fläche treffende Lichtstrahl AB wird in die Richtung BA' abgelenkt, wobei AB und BA' mit der Flächennormalen BN in einer Ebene liegen, und der Einfallswinkel i und der Zurückwerfungswinkel i' der Größe nach gleich sind.

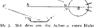


Abb. 3. Mit dem um die Achse a eines Höhenkreises beweglichen Fernrohre wird nach dem Stern s und seinem durch einen horizontalen Spiegel entworfenen Bilde s' visiert; dabei werden die Visierwinkel u und v gegen die Horizontale ha am Teilkreis als entgegengesetzt gleich abgelesen, dieselbe Beziehung gilt daher auch für den Einfallswinkel i und den Zurückwerfungswinkel i'.

den der Lichtstrahl AB trifft, BN die zugehörige Flächennormale (das Einfallslot) und BA' der zurückgeworfene Strahl, so verläuft dieser in der durch den einfallenden Strahl AB und das Einfallslot BN bestimmten Ebene (Einfallsebene) auf der entgegengesetzten Seite des Einfallslotes und schließt mit dem Einfallslot den gleichen Winkel ein wie der einfallende Strahl. Bezeichnet man mit i den Einfallswinkel und mit i' den Zurückwerfungswinkel, so ist $i = -i'$.

Eine recht genaue Bestätigung des Reflexionsgesetzes kann mit Hilfe des künstlichen Horizontes in nebenstehend skizzierter Anordnung gewonnen werden (Abb. 3). Visiert man mit einem um die Achse a eines Höhenkreises beweglichen Fernrohre nach einem Stern s und mißt u als Winkel der Visierlinie gegen die Horizontale ha und visiert dann nach dem Spiegelbild s' des Sternes, das von einem horizontal gelagerten ebenen Spiegel entworfen wird, der z. B. aus einer gewissen Menge Quecksilber oder einer anderen geeigneten Flüssigkeit in einer flachen Schale gebildet wird, so wird gegen die Horizontale ha der weitere Visierwinkel v als entgegengesetzt gleich dem Visierwinkel u gefunden. Da nun aber $i = u$ und $i' = v$ ist, so folgt, vom Vorzeichen abgesehen, $i = i'$.

Auch die Tatsache der Brechung des Lichtes beim Austritt aus einem Medium in ein zweites anderer optischer Eigenschaften war im Altertum bekannt, da z. B. die jederzeit zu beobachtende scheinbare Knickung eines teils in Luft, teils in Wasser befindlichen geraden Stockes sich nur durch eine Richtungsänderung

des Lichtes an der Grenzfläche zweier Medien erklären ließ. Die Formulierung des **Brechungsgesetzes**, wie es dem heutigen Stand unserer Kenntnis entspricht, wird allerdings erst auf Snell und Descartes zurückgeführt. Bedeuten in Abb. 4 T die Tangentialebene in dem Punkte B der Grenzfläche zweier Medien, auf den der Lichtstrahl AB trifft, BN die zugehörige Flächennormale (das **Einfallslot**) und BA' den gebrochenen Strahl, so verläuft dieser in der durch den einfallenden Strahl AB und das Einfallslot BN bestimmten Ebene (**Einfallsebene**) im zweiten Medium auf der entgegengesetzten Seite des Einfallslotes und schließt mit diesem einen Winkel (**Brechungswinkel**) ein, dessen Sinus dem Sinus des Winkels des einfallenden Strahles mit dem Einfallslot (**Einfallswinkel**) proportional ist. Bezeichnet man mit i den Einfallswinkel und mit i' den Brechungswinkel, so ist also $\sin i = n_{12} \cdot \sin i'$, worin der konstante Proportionalitätsfaktor n_{12} Brechungsindex, Brechungsquotient, Brechungsexponent, Brechungsverhältnis usw. genannt wird. Hier soll er stets mit Brechungsverhältnis oder auch Brechungszahl bezeichnet werden.

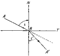


Abb. 4. Der in Punkt B auf eine 2 Medien mit der relativen Brechungszahl n_{12} trennende Fläche treffende Lichtstrahl AB wird im 2. Medium in die Richtung BA' abgelenkt, wobei AB und BA' mit der Flächennormalen BN in einer Ebene liegen und für den Einfallswinkel i und den Brechungswinkel i' die Beziehung $\sin i = n_{12} \cdot \sin i'$ besteht.

Eine einfache Nachprüfung des Brechungsgesetzes ist mit der nebenstehend abgebildeten Anordnung möglich (s. Abb. 5). Das halbkreisförmige, mit einer Teilung versehene Gefäß G ist durch eine planparallele Glasplatte P, die bis auf einen in ihrer Mitte befindlichen schmalen vertikalen Spalt S lichtdicht, z. B. durch schwarzen Anstrich, abgedeckt ist, geschlossen und zur Hälfte mit Wasser gefüllt, so daß ein in beliebiger Richtung auf den Spalt fallendes paralleles Strahlenbündel nach Passieren des Spaltes in seinem oberen Teil unverändert bleibt, in seinem unteren Teil aber im Wasser gebrochen wird. Steht die Verbindungslinie des Nullstriches der Teilung mit dem Spalt S senkrecht auf P, so kann man ohne weiteres Einfalls- und Brechungswinkel an der Teilung ablesen. Bildet man für verschiedene Einfallswinkel den Ausdruck $\sin i/\sin i'$, so findet man diesen konstant; er ist das Brechungsverhältnis des Wassers gegen Luft.

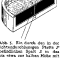


Abb. 5. Ein durch den in der lichtundurchlässigen Platte P befindlichen Spalt S in das bis etwa zur halben Höhe mit Wasser gefüllte Gefäß G eintretendes Parallelstrahlenbündel geht in seinem oberen Teil in gleicher Richtung weiter, wird dagegen im unteren Teile gebrochen. An einer Teilung der Gefäßwand kann man Einfalls- und Brechungswinkel ablesen und so die Gültigkeit des Brechungsgesetzes für Luft und Wasser nachprüfen.

Bei der Berechnung von Linsenfolgen werden sehr genaue Messungen der Brechungszahlen der verwandten Glasarten benötigt. Diese Messungen, ausgeführt für verschiedenste Einfallswinkel, können als eine zuverlässige Bestätigung der Gültigkeit des Brechungsgesetzes gewertet werden.

Die Brechungszahl n_{12} hängt von der Natur der beiden durchsichtigen Körper ab, die der gebrochene Lichtstrahl durchläuft. Tritt der Lichtstrahl

aus dem luftleeren Raum in den durchsichtigen Körper, so nennt man n_{12} die absolute Brechungszahl oder Brechungszahl schlechthin. Da aber diese Zahl sich wenig ändert, wenn das Vakuum, dem die Brechungszahl 1 zugeordnet ist, durch den lufterfüllten Raum ersetzt wird, so genügt es in vielen Fällen für diesen die Brechungszahlen der einzelnen Medien zu bestimmen.

Da durch Messungen festgestellt ist, daß für die „relativen" Brechungsverhältnisse dreier Medien 1, 2 und 3, die sinngemäß mit n_{12}, n_{13} und n_{23} bezeichnet seien, die Beziehung $n_{12} = n_{13}/n_{23}$ besteht, so folgt hieraus, wenn man als Medium 3 das Vakuum (oder auch den lufterfüllten Raum) annimmt, daß das relative Brechungsverhältnis der Medien 1 und 2 gleich dem Verhältnis ihrer absoluten Brechungszahlen ist oder ihrer Brechungszahlen schlechthin. Wählt man für das Medium vor der Brechung als Brechungszahl n und für das zweite Medium, in das der Strahl nach der Brechung eintritt, n', so läßt sich das Brechungsgesetz auch ausdrucken durch die Form

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i', \tag{1}$$

oder in Worten: Das Produkt aus Brechungszahl und Sinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und zugehöriger Flächennormale ist konstant. Es ist demnach eine optische Invariante. Für alle gut lichtdurchlässigen Stoffe ist die Brechungszahl größer als 1, sie heißen daher „optisch dichter" als das Vakuum.

Der Verlauf eines nach dem Brechungsgesetz an der Grenzfläche zweier optisch verschieden dichter Medien gebrochenen Strahls ist umkehrbar, d. h. gehört zu ihm in der einen Richtung der Einfallswinkel i, dem auf Grund des Brechungsgesetzes (1) der Brechungswinkel i' zugeordnet ist, so entspricht beim umgekehrten Verlauf des Lichtes dem Einfallswinkel i' der Brechungswinkel i. Das Spiegelgesetz läßt sich als Sonderfall des Brechungsgesetzes betrachten, wobei $n = -n'$ ist.

Fällt demnach ein Lichtstrahl senkrecht auf das Spiegelelement, so wird er senkrecht in sich zurückgeworfen, fällt er aber senkrecht auf ein Flächenelement, das zwei durchsichtige, optisch verschieden dichte Medien trennt, so läuft er ungebrochen weiter. Erleidet ein von dem Lichtpunkt P ausgehender Strahl beliebig viele Brechungen und Spiegelungen und gelangt zu dem Punkt P', so würde ein von P' ausgehender Strahl auf dem gleichen Wege, aber in umgekehrter Richtung zu P gelangen können. Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier verschiedener Medien gleicher Brechungszahl, so erfolgt keine Brechung. Aus diesem Grunde sehen wir z. B. ein Stück Glas in einer durchsichtigen Flüssigkeit, die die gleiche Brechungszahl wie dieses Glas hat, nicht, wohl aber eine Luftblase im Glase oder in der Flüssigkeit.

8. Totalreflexion. Befindet sich der einfallende Strahl, der auf die Grenzfläche zweier Medien verschiedener Brechungszahlen trifft, im optisch dichteren Mittel, ist also $n > n'$, so gibt es nach dem Brechungsgesetz zu dem einfallenden Lichtstrahl nur dann einen gebrochenen Lichtstrahl, solange $\sin i \leqq n'/n$ ist. Für $\sin i > n'/n$ wird ja $\sin i' > 1$, d. h. es gibt keinen reellen Brechungswinkel. Während im allgemeinen Falle beim Auftreffen eines Lichtstrahles auf die Grenzfläche zweier optisch verschiedener Medien sowohl eine Reflexion als auch eine Brechung eintritt, wird hier für $\sin i > n'/n$ die Intensität des gebrochenen Strahles gewissermaßen 0, und im reflektierten Strahl befindet sich fast die ganze Intensität des einfallenden Strahles. Daher nennt man diesen Vorgang Totalreflexion.

In welchem Verhältnis sich in den sonstigen Fällen der partiellen Reflexion die Intensität des einfallenden Strahles auf die beiden Strahlen, nämlich den ge-

spiegelten und den gebrochenen Strahl, verteilt, stellt die physikalische Optik fest. Es sei nur noch bemerkt, daß im allgemeinen bei durchsichtigen Körpern der gebrochene Strahl die größere Lichtwirkung erhält, dabei ist die Verteilung aber noch abhängig vom Einfallswinkel. So beträgt z. B. bei senkrechtem Einfall die Menge des an Luft/Glas zurückgespiegelten Lichtes ungefähr 4 bis 5%, um mit größer werdendem Einfallswinkel erst langsam und dann schneller zu steigen.

Bei Metallen befindet sich im reflektierten Strahl die weit überwiegende Lichtmenge. Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei so wenig durchsichtigen Stoffen, wie die Metalle es sind, das Brechungsgesetz in der hier besprochenen einfachen Form nicht mehr gültig bleibt.

Den Winkel, mit dem die Totalreflexion beginnt (streifender Austritt), nennt man den Grenzwinkel der Totalreflexion; er ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sin i = \frac{n'}{n}. \tag{3}$$

4. Dispersion. Die Brechungszahl, die nach unserer Darstellung nur von der Natur der Stoffe abhängt, so z. B. auch in gewissem Maße von deren Zustand, soweit dieser etwa durch Temperatur und Druck bestimmt wird, ist nun für ein und denselben Stoff verschieden je nach der Art des Lichtes, und zwar wächst sie im allgemeinen mit abnehmender Wellenlänge. Diese Erscheinung nennt man Dispersion.

Sehr weitgehende und außerordentlich sinnreich angelegte Untersuchungen über die verschiedene Brechbarkeit der einzelnen Strahlenarten führte schon Newton durch. Es sei hier nur einer seiner Versuche geschildert. In einem verdunkelten Raume ließ Newton ein Sonnenstrahlenbündel durch eine kleine Öffnung im Fensterladen auf die gegenüberliegende Wand fallen, wo es einen kleinen weißen kreisförmigen Fleck bildete. Brachte er nun in geeigneter Weise in den Strahlengang ein dreiseitiges Glasprisma, mit seiner brechenden Kante nach unten und rechtwinklig zur Strahlenrichtung, so verwandelte sich der kreisförmige weiße Fleck in ein in verschiedenen Farben leuchtendes Band, das bekannte Spektrum von Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett. Dabei sind die Übergänge von einer zur anderen Farbe unmerklich fein. Die sieben aufgezählten, von Newton unterschiedenen „primären" Farben können daher nur als ungefähre Anhaltspunkte dienen, um gewisse Bereiche des Spektrums festzulegen.

Die verschiedenen Versuche Newtons und seiner Nachfolger führten zu dem Ergebnis: Das weiße Sonnenlicht ist kein einfaches Licht, sondern es ist ein Mischlicht, zusammengesetzt aus verschiedenfarbigen Strahlen, die auch für unser Auge verschieden hell wirken. Bei einer Brechung des Sonnenlichtes oder jedes anderen Mischlichtes findet in der Regel eine Zerlegung oder Dispersion des zusammengesetzten Lichtes statt, weil die einzelnen farbigen Bestandteile verschieden stark abgelenkt werden, und zwar, wie bereits bemerkt, derart, daß im allgemeinen mit kürzer werdender Wellenlänge die Ablenkung zunimmt. Wählt man die Versuchsanordnung so, daß das zerlegte farbige Licht wieder vereinigt wird, so erhält man das ursprüngliche Mischlicht. Licht nicht aus sämtlichen Farben des Spektrums gemischt, ist in der Regel gefärbt und kann für unser Auge z. B. einer Spektralfarbe gleich erscheinen, sodaß man es erst durch Untersuchung etwa mit dem Prisma als Mischlicht nachzuweisen vermag.

Außer durch die Gesamtheit aller Spektralfarben kann auch durch die Mischung nur zweier Farbtöne dem Auge der Eindruck des reinen Weiß erweckt werden; zwei Farben, die in einer solchen Beziehung stehen, heißen Komplementärfarben; ein komplementäres Farbpaar ist z. B. rot und grün. Ein und

dieselbe Farbe kann also auf verschiedenste Weise zustande kommen, ohne daß das Auge einen Unterschied feststellen kann; um die Zusammensetzung des Lichtes genau zu analysieren, benutzt man daher bekanntlich besondere optische Vorrichtungen, die Spektralapparate. Auch die unserem Auge nicht mehr bemerkbaren Strahlen, die ultraroten, thermisch wirksamen, und die ultravioletten, chemisch wirksamen Strahlen sind im Regelfall den hier als Grundlagen für die geometrische Optik vorgetragenen Gesetzen unterworfen.

5. Darstellung des Brechungsgesetzes in räumlichen Koordinaten und daraus gezogene Folgerungen. Um aus den vorgetragenen Grundgesetzen weitere Erkenntnisse zu entwickeln, ist es zweckmäßig, das Brechungsgesetz auch für räumliche Koordinaten auszudrücken. Trifft der einfallende Strahl mit den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ im Punkte x, y, z auf eine brechende Fläche (s. Abb. 6), so kann man seine Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 darstellen durch die Parametergleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= x + \alpha_1 t_1, \\ \eta_1 &= y + \beta_1 t_1, \\ \zeta_1 &= z + \gamma_1 t_1, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

worin also dann der Parameter t_1 die Entfernung irgendeines Punktes ξ_1, η_1, ζ_1 des Strahles von dem Flächenpunkt x, y, z bedeutet. In analoger Weise kann weiter der gebrochene Strahl, kenntlich gemacht durch den Index 2, dargestellt werden durch

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= x + \alpha_2 t_2, \\ \eta_2 &= y + \beta_2 t_2, \\ \zeta_2 &= z + \gamma_2 t_2. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

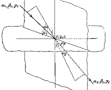


Abb. 6. Der Strahl mit den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ trifft die brechende Fläche im Punkte x, y, z und hat nach der Brechung die Richtungskosinus $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. μ_1 und μ_2 sind die Winkel, die der einfallende bzw. gebrochene Strahl mit einer Flächentangente in x, y, z einschließt, ω_1 und ω_2 sind die Winkel, die der einfallende bzw. gebrochene Strahl mit einer durch die Flächennormale mit den Richtungskosinus a, b, c gelegten Ebene bildet.

Danach ist er festgelegt, wenn seine Richtungskosinus $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bestimmt sind. Führt man noch die Richtungskosinus a, b, c der Flächennormale im Punkte x, y, z ein, mit der der einfallende Strahl den Winkel i einschließen möge, so lassen sich unter Benutzung der Beziehung (1) die gesuchten Richtungskosinus leicht berechnen, wenn man noch berücksichtigt, daß alle drei Geraden, Flächennormale, einfallender und gebrochener Strahl in einer Ebene liegen. Es wird

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 = \frac{a n' \cos(i - i') - a n + \alpha_1 n \cos i}{n' \cos i}, \quad \beta_2 = \frac{b n' \cos(i - i') - b n + \beta_1 n \cos i}{n' \cos i}, \\ \gamma_2 = \frac{c n' \cos(i - i') - c n + \gamma_1 n \cos i}{n' \cos i}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Setzt man diese Werte (5) in (4) ein, so geben die Gleichungen (4) die analytische

Formulierung des Brechungsgesetzes für den Raum, d. h. den zu dem einfallenden Strahl (3) gehörigen gebrochenen Strahl (4).

Aus dieser Darstellung des Brechungsgesetzes sind mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie einige Folgerungen zu ziehen, deren Benutzung gelegentlich vorteilhaft sein kann. Die Gleichungen

$$\xi = x + At, \qquad \eta = y + Bt, \qquad \zeta = z + Ct \tag{6}$$

stellen eine beliebige Flächentangente im Einfallspunkt x, y, z dar, wenn

$$Aa + Bb + Cc = 0 \tag{7}$$

ist. Bildet diese Tangente mit dem einfallenden Strahl den Winkel μ_1 und mit dem gebrochenen Strahl den Winkel μ_2, so folgt

$$\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = \cos\mu_1, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{an'\cos(i-i') - an + \alpha_1 n\cos i}{n'\cos i}\cdot A + \frac{bn'\cos(i-i') - bn + \beta_1 n\cos i}{n'\cos i}\cdot B \\ &\quad + \frac{cn'\cos(i-i') - cn + \gamma_1 n\cos i}{n'\cos i}\cdot C = \cos\mu_2 . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese beiden Gleichungen (8) und (9) führen unter Berücksichtigung von (7) sofort auf

$$n : n' = \cos\mu_2 : \cos\mu_1, \tag{10}$$

oder in Worten: Die Kosinus der Winkel, die einfallender und gebrochener Strahl mit einer Tangente der brechenden Fläche in dem Flächenpunkte, auf den der einfallende Strahl trifft, bilden, stehen in umgekehrtem Verhältnis der Brechungszahlen. Für den Fall der Spiegelung z. B. läßt sich dieser Satz auch so aussprechen: Einfallender und zurückgeworfener Strahl bilden mit jeder Tangente der spiegelnden Fläche im Einfallspunkte gleiche Winkel.

Das Ebenenbüschel, das durch die Flächennormale geht, hat die Gleichung

$$\xi(b + uc) - \eta a - \zeta u a - [xb - ya + u(xc - za)] = 0, \tag{11}$$

wobei u der Parameter des Büschels ist und ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten einer Büschelebene sind. Bezeichnet man mit ω_1 und ω_2 die Winkel, die der einfallende bzw. der gebrochene Strahl mit einer Ebene dieses Büschels einschließt, so ist

$$\sin\omega_1 = \frac{b\alpha_1 - a\beta_1 + u(c\alpha_1 - a\gamma_1)}{\sqrt{(b+uc)^2 + a^2 + u^2a^2}}, \quad \sin\omega_2 = \frac{b\alpha_2 - a\beta_2 + u(c\alpha_2 - a\gamma_2)}{\sqrt{(b+uc)^2 + a^2 + u^2a^2}}, \tag{12}$$

woraus folgt

$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega_2} = \frac{(\gamma + u\beta)\cdot\sin i}{(\gamma + u\beta)\cdot\sin i'} = \frac{n'}{n}, \tag{13}$$

wenn man die aus der analytischen Geometrie bekannten Beziehungen

$$b\alpha_1 - a\beta_1 = \gamma\cdot\sin i, \qquad c\alpha_1 - a\gamma_1 = \beta\cdot\sin i,$$
$$b\alpha_2 - a\beta_2 = \gamma\cdot\sin i', \qquad c\alpha_2 - a\gamma_2 = \beta\cdot\sin i'$$

benutzt, in denen β und γ die Richtungskosinus der Normalen der Einfallsebene (oder Brechungsebene) gegen die y- bzw. z-Achse bedeuten. Gleichung (13) sagt also aus, daß die Sinus der Winkel, die der einfallende und gebrochene Strahl mit irgendeiner durch die Flächennormale gelegten Ebene bilden, sich umgekehrt wie die Brechungszahlen verhalten.

Schließlich sei hier noch eine dritte Folgerung aus der räumlichen Form des Brechungsgesetzes kurz erwähnt, die sich, wie die beiden vorausgehenden

Sätze, mit einfachen Beziehungen aus der analytischen Geometrie beweisen läßt. Sie lautet

$$\sin\sigma_1 : \sin\sigma_2 = n' \cos\omega_2 : n \cos\omega_1 . \tag{14}$$

Darin sind σ_1 und σ_2 die bezüglichen Winkel, die die Projektionen des einfallenden und gebrochenen Strahls in eine durch die Flächennormale gehende Ebene mit dieser Flächennormalen bilden; d. h. also in Worten: die Sinus der Winkel zwischen dem Einfallslot und den Projektionen des einfallenden und gebrochenen Strahles in eine durch das Einfallslot gelegte Ebene verhalten sich umgekehrt wie die mit der zugehörigen Brechungszahl multiplizierten Kosinus der Winkel, die die beiden Strahlen mit der genannten Ebene bilden.

b) Allgemeine Theoreme über Brechung und Spiegelung.

6. Strahlenkongruenzen. Zu den wichtigsten Aufgaben der geometrischen Optik gehört die Betrachtung der von einem Lichtpunkt ausgehenden Strahlen, die an einer oder mehreren Flächen gespiegelt oder gebrochen werden. Zunächst bilden die Strahlen ein Bündel mit dem Lichtpunkt als Mittelpunkt; sämtliche zu diesem konzentrische Kugelflächen werden daher von den Lichtstrahlen senkrecht durchsetzt. In Übereinstimmung mit der Ausdrucksweise der Wellenlehre vom Licht werden diese Kugelflächen auch in der geometrischen Optik als Wellenflächen bezeichnet, und die Strahlen des Bündels selbst können als ein einfachstes Normalensystem angesprochen werden. Treffen diese Strahlen nun auf eine brechende oder spiegelnde Fläche, so wird das gebrochene oder gespiegelte Strahlensystem im Regelfall nicht mehr ein Strahlenbündel mit einem Mittelpunkt sein.

Um die Gesetzmäßigkeiten, die dann für die Strahlen gelten, zu bestimmen, seien hier einige Begriffe der Flächentheorie eingeführt. Diese definiert als Strahlensystem oder Strahlenkongruenz eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen im Raum, die so angeordnet sind, daß (abgesehen von etwaigen besonderen Punkten) durch jeden Raumpunkt ein Strahl oder eine endliche Anzahl von Strahlen mit einer bestimmten, im allgemeinen von Strahl zu Strahl sich stetig ändernden Richtung hindurchgeht. Hauptsächlich gefördert wurde die Geometrie der Strahlensysteme von KUMMER[1]).

Zweckmäßig wird eine Strahlenkongruenz analytisch dargestellt durch die Gleichungen

$$\xi = x + \alpha t, \qquad \eta = y + \beta t, \qquad \zeta = z + \gamma t. \tag{15}$$

Darin bedeutet t den Parameter des Strahls, d. h. die Entfernung des Strahlpunktes ξ, η, ζ von dem Strahlpunkt x, y, z. α, β, γ sowohl wie x, y, z sind entsprechend der zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit der Strahlen als Funktionen zweier unabhängiger Variablen, z. B. u und v, zu denken. Für $t = 0$ erhält man also aus (15) die Darstellung einer Fläche, die von allen Strahlen getroffen wird, sie heißt Leitfläche des Systems. α, β, γ sind die Richtungskosinus des Strahles (oder auch der Strahlen, sofern α, β, γ mehrdeutige Funktionen von u, v sind) im Flächenpunkte u, v. Bei festgehaltenem u, v und veränderlichem t durchläuft ξ, η, ζ die Punkte eines Strahles. Besteht zwischen den Variablen u, v eine Beziehung, etwa $\varphi(u, v) = 0$, so schränkt sich die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen auf eine einfache ein. Es werden aus dem Strahlensystem die Strahlen herausgegriffen, die die Leitfläche längs der auf der Leitfläche liegenden Kurve $\varphi(u, v) = 0$ treffen.

[1]) E. E. KUMMER: Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme in Crelles Journ. Bd. 57, S. 189—230. 1860.

7. Normalensysteme und Satz von MALUS. Wir sahen vorhin, daß die von einem Lichtpunkt ausgehenden Strahlen als Normalensystem betrachtet werden können. Als allgemeines Normalensystem definieren wir die Strahlensysteme, für die eine Fläche angegeben werden kann, zu der die Strahlen des Systems die Flächennormalen sind. Wir suchen jetzt im Anschluß an BIANCHI[1]) die Bedingung dafür auf, daß (15) ein Normalensystem darstellt. Es muß t als Funktion von u und v, etwa $t = \psi(u, v)$, so gefunden werden können, daß nach Einsetzen von $t = \psi(u, v)$ in (15) ξ, η, ζ die Koordinaten einer Orthogonalfläche des Strahlensystems (15) sind.

α, β, γ sind dann die Richtungskosinus der Normalen dieser Orthogonalfläche, und daraus folgt

$$\alpha\, d\xi + \beta\, d\eta + \gamma\, d\zeta = 0$$

oder

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz + dt(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + t(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma) = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz + dt = 0$$

oder

$$dt = -\left[\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z}{\partial u}\right] du - \left[\alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma \frac{\partial z}{\partial v}\right] dv. \tag{16}$$

Da dt ein totales Differential ist, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z}{\partial u}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma \frac{\partial z}{\partial v}\right\}$$

oder auch

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \tag{17}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (15) ein Normalensystem darstellt. Ist also (17) erfüllt, so gibt es eine Schar von zum Strahlensystem (15) orthogonalen Flächen, deren Parametergleichungen dadurch bestimmt sind, daß in (15)

$$t = \text{konst.} - \int\left[\left(\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z}{\partial u}\right) du + \left(\alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv\right] \tag{18}$$

eingesetzt wird.

Greifen wir jetzt wieder auf die Gleichungen (3) und (4) zurück, die also einen im Flächenpunkt x, y, z einfallenden und gebrochenen Strahl darstellen, und denken uns $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, i$ und damit auch i' als Funktionen der unabhängigen Variablen u, v, so können die Gleichungen (3) und (4) als Darstellung zweier Strahlenkongruenzen gedeutet werden, deren Leitfläche die brechende Fläche x, y, z selbst ist. Wir nehmen an, daß die einfallende Strahlenkongruenz irgendein Normalensystem ist, so daß also für sie die Bedingung (17) besteht. Dieses Normalensystem erleidet an der Leitfläche, die nicht etwa eine seiner Orthogonalflächen sei, eine Brechung und geht in Übereinstimmung mit (4) und (5) über in das Strahlensystem

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= x + \left(a\sigma + \alpha_1 \frac{n}{n'}\right) t_2, \qquad \eta_2 = y + \left(b\sigma + \beta_1 \frac{n}{n'}\right) t_2, \\ \zeta_2 &= z + \left(c\sigma + \gamma_1 \frac{n}{n'}\right) t_2, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

worin

$$\sigma = \frac{n' \cos(i - i') - n}{n' \cos i} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{n'}.$$

---

[1]) L. BIANCHI, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 274. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1910.

zur Abkürzung eingeführt ist. Zwischen den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ eines Strahles des einfallenden Strahlensystems, den Richtungskosinus a, b, c der zugehörigen Normale der brechenden Leitfläche und den Richtungskosinus $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ des zugehörigen Strahles des gebrochenen Strahlensystems bestehen demnach die Beziehungen

$$a\sigma = \alpha_2 - \frac{n}{n'}\alpha_1, \qquad b\sigma = \beta_2 - \frac{n}{n'}\beta_1, \qquad c\sigma = \gamma_2 - \frac{n}{n'}\gamma_1. \tag{20}$$

Diese Gleichungen partiell differenziert, und zwar einmal nach u und dann nach v, führen auf

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \sigma\frac{\partial a}{\partial u} &= \frac{\partial\alpha_2}{\partial u} - \frac{n}{n'}\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}, \qquad b\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \sigma\frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial\beta_2}{\partial u} - \frac{n}{n'}\frac{\partial\beta_1}{\partial u},\\ c\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \sigma\frac{\partial c}{\partial u} &= \frac{\partial\gamma_2}{\partial u} - \frac{n}{n'}\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \sigma\frac{\partial a}{\partial v} &= \frac{\partial\alpha_2}{\partial v} - \frac{n}{n'}\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}, \qquad b\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \sigma\frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial\beta_2}{\partial v} - \frac{n}{n'}\frac{\partial\beta_1}{\partial v},\\ c\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \sigma\frac{\partial c}{\partial v} &= \frac{\partial\gamma_2}{\partial v} - \frac{n}{n'}\frac{\partial\gamma_1}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Multipliziert man die Ausdrücke (21) und (22) der Reihe nach je mit

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

und addiert in leicht ersichtlicher Weise, so findet man unter Berücksichtigung, daß

$$a\frac{\partial x}{\partial v} + b\frac{\partial y}{\partial v} + c\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \tag{23}$$

ist, aus (21)

$$\left.\begin{aligned} \sigma\left[\frac{\partial a}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right] &= \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial\alpha_2}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial\beta_2}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\\ &- \frac{n}{n'}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial\beta_1}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und unter Berücksichtigung, daß

$$a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \tag{25}$$

ist, aus (22)

$$\left.\begin{aligned} \sigma\left[\frac{\partial a}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right] &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial\alpha_2}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial\beta_2}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial\gamma_2}{\partial v}\\ &- \frac{n}{n'}\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial\beta_1}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial\gamma_1}{\partial v}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Differenziert man (23) partiell nach u und (25) partiell nach v, so kann man aus den beiden sich dann ergebenden Gleichungen leicht erhalten:

$$\frac{\partial a}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial a}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{27}$$

Das Bestehen der Beziehung (27) zeigt, daß die linken Seiten der Gleichungen (24) und (26) gleich sind und damit auch ihre rechten Seiten. Setzt man diese daher einander gleich und berücksichtigt, daß infolge unserer Voraussetzung, daß das einfallende Strahlensystem ein Normalensystem sein soll, für die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Bedingung (17) erfüllt sein muß, so folgt

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\beta_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\beta_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}, \tag{28}$$

d. h. auch für das gebrochene Strahlensystem ist die Bedingung (17) erfüllt. Damit ist einer der wichtigsten Sätze der geometrischen Optik bewiesen. Er wird nach E. L. MALUS genannt, der ihn im Jahre 1807 bewies, allerdings bloß für den Spezialfall nur zweier Medien und der Voraussetzung, daß im ersten Medium ein leuchtender Punkt, also ein Strahlenbündel mit Mittelpunkt, vorliege. In voller Allgemeinheit, wie er hier erwiesen wurde, kann der Satz ausgesprochen werden: Wird ein von Lichtstrahlen gebildetes Normalensystem von beliebig vielen Flächen gebrochen oder gespiegelt (die Reflexion kann ja als Sonderfall der Refraktion betrachtet werden), so bleibt es stets ein Normalensystem.

8. Folgerungen aus dem Satze von MALUS. Die Flächen, die das gebrochene Strahlensystem orthogonal schneidet, findet man durch bezügliches Einsetzen von $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ in (18) und durch Einführung des sich so ergebenden Ausdruckes von t in (19) statt t_2. Für jeden Wert der Integrationskonstante ergibt sich eine Orthogonalfläche; greift man z. B. zwei dieser Flächen, die den Konstanten c_1 und c_2 entsprechen mögen, heraus, so erkennt man, daß ihre gegenseitige Entfernung, auf jedem Lichtstrahl gemessen, stets $c_1 - c_2$ ist; sie sind Parallelflächen. Wie dieser Satz, so sind durch eingehende flächentheoretische Untersuchungen zahlreiche andere Eigenschaften der Normalensysteme bekannt. Alle diese Kenntnisse können ohne weiteres auf Lichtstrahlensysteme, sofern diese nur orthotomisch sind, auf Grund des Satzes von MALUS übertragen werden, und darin beruht seine grundlegende Bedeutung. Demnach gehören z. B. dahin alle Lichtstrahlenkongruenzen, die von einem Lichtpunkt ihren Ausgang nehmen und Spiegelungen und Brechungen erleiden an beliebigen Flächen, die homogene und isotrope Medien trennen. Der in diesem Vorgang umfaßte Komplex von Erscheinungen macht eigentlich den Hauptinhalt der geometrischen Optik aus.

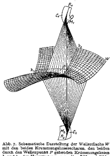


Abb. 7. Schematische Darstellung der Wellenfläche W mit den beiden Krümmungslinienscharen, den beiden durch den Wellenpunkt P gehenden Krümmungslinien k_1 und k_2, den Hauptkrümmungsradien PM_1 und PM_2, den zu k_1 und k_2 gehörigen Rückkehrkanten R_1 und R_2 und den beiden Mänteln C_1 und C_2 der Zentrafläche.

Einige Eigentümlichkeiten der Normalensysteme sollen hier noch erwähnt werden. Es läßt sich zeigen, daß die Lichtstrahlen so angeordnet werden können, daß sie längs einer Kurve der Wellenfläche (einer Krümmungslinie dieser Fläche) eine abwickelbare Fläche bilden, und zwar gibt es zwei Scharen solcher Kurven und damit auch zwei Scharen von Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen.

Der Ort dieser Rückkehrkanten sind die beiden Mäntel der Zentrafläche der Wellenflächenschar. Man nennt jene Rückkehrkanten in der geometrischen Optik Brennlinien, Kaustiken und die Zentrafläche kaustische Fläche oder Brennfläche, da sich dort gewisse benachbarte Strahlen schneiden und somit in ihnen Verdichtungen des Lichtes eintreten. Die dabei auftretenden Verhältnisse[1]) sind schematisch in Abb. 7 zur Anschauung gebracht. Die Fläche W soll die Wellenfläche darstellen; sie ist mit einem Kurvennetz überzogen, das durch die beiden Krümmungslinienscharen gebildet wird. Längs zweier durch den Punkt P gehenden Krümmungslinien k_1 und k_2 sind die Flächennormalen gezeichnet mit den zugehörigen Rückkehrkanten R_1 und R_2. Die beiden zu ihnen gehörigen Mäntel der Zentrafläche C_1 und C_2 sind schematisch angedeutet. Die beiden Hauptkrümmungsradien des Flächenpunktes P sind PM_1 und PM_2, sie haben verschiedenes Vorzeichen; P ist ein hyperbolischer Flächenpunkt. Solange das Strahlenbündel nicht zu sehr von der Homozentrizität abweicht, werden die Wellenflächen vorwiegend aus elliptischen Punkten bestehen; für solche würden M_1 und M_2 auf derselben Seite von W liegen.

9. Das Strahlenbündel, das, von einem Punkt der Rotationsachse kommend, durch ein drehungssymmetrisches Flächensystem hindurchgeht. Die Kaustik der von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen, die an einer Kugel oder bei besonderer Lage des Lichtpunktes auch an einer beliebigen Rotationsfläche gebrochen werden, läßt sich allgemein bestimmen. Um diese Bestimmung hier mit gleichzeitiger Feststellung der allgemeinen Eigenschaften solcher Kaustiken kurz durchzuführen, gehen wir im Anschluß an eine Schrift[2]) des Verfassers vor. Man denke sich, wenn die brechende Fläche eine Kugel ist, den leuchtenden Punkt mit dem Mittelpunkt der Kugel verbunden; diese Verbindungslinie sei die Achse. Die folgenden Überlegungen bleiben auch dann noch richtig, wenn die brechende Fläche eine beliebige Rotationsfläche oder sogar eine Folge von solchen Rotationsflächen ist, die alle dieselbe Rotationsachse haben, nur muß dann der leuchtende Punkt irgendwo auf dieser Rotationsachse liegen; außerdem sei angenommen, daß die Rotationsflächen des optischen Systems von der Achse in regulären Flächenpunkten durchstoßen werden, d. h. also, daß ihre Meridiankurven im Durchstoßungspunkt senkrecht auf der Achse stehen; wir wollen diese Rotationsflächen zentriert nennen.

Die Wellenflächen der Bildstrahlen, das sind die Strahlen, die die Kugelfläche oder das System von brechenden Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Achse durchsetzt haben, sind dann ebenfalls Rotationsflächen mit jener Achse als Rotationsachse. Die Achse selbst ist gleichzeitig Ding- und Bildstrahl und geht durch die Rotationspole der Wellenflächen. Die Zentrafläche dieser Wellenflächen besteht bekanntlich aus der Drehungsachse und der Rotationsfläche, die durch Drehung der Evolute der Meridiankurve irgendeiner Wellenfläche entsteht. Da ein Rotationspol als Kreispunkt aufzufassen ist, und zwar als ein solcher unendlich hoher Ordnung, hat die Evolute in dem dem Rotationspol entsprechenden Punkte eine Spitze. Diese ist identisch mit dem Gaussschen Bildpunkt, von dem später gesprochen werden wird.

Denkt man sich den Gaussschen Bildpunkt als Anfang eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes ξ, η, dessen ξ-Achse mit der Drehungsachse zusammenfalle, so kann ein Bildstrahl, der ja nach unsern Voraussetzungen die Achse

[1]) G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie Bd. II, S. 518 ff. Leipzig: Veit & Comp. 1913.

[2]) W. Merté, Über die Kaustik axialer Dingpunkte. ZS. f. Phys. Bd. 33, S. 533 ff. 1925.

schneiden, d. h. in einer Meridianebene verlaufen muß, durch

$$\xi u - \eta - u\varphi(u) = 0 \tag{29}$$

dargestellt werden, wenn u die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des Bildstrahles gegen die Achse und $\varphi(u)$ die Entfernung seines Schnittes mit der Achse vom GAUSSschen Bildpunkt bedeutet. Aus drehungssymmetrischen Gründen muß $\varphi(u)$ eine gerade Funktion von u sein; $\varphi(u)$ ist die ebenfalls später zu besprechende „sphärische Längsabweichung“[1]

Definiert man die Kaustik als Hüllfläche der Bildstrahlen, diese ist der eine Mantel der Zentraflache, so braucht man nur aus (29) und aus der nach u differenzierten Gleichung (29)

$$\xi - \varphi(u) - u\varphi'(u) = 0$$

ξ und η zu bestimmen, was ergibt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(u) + u\varphi'(u) \\ \eta &= u^2\varphi'(u), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

um in (30) eine Parameterdarstellung der Meridiankurve der Kaustiken zu haben. Diese Darstellung erlaubt es, Punkt für Punkt die Kaustik zu bestimmen und alle kennzeichnenden Eigenschaften mit den üblichen Mitteln der Differentialgeometrie festzustellen.

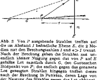


Abb. 8. Von P ausgehende Strahlen treffen auf die im Abstand 1 befindliche Ebene E, die 2 Medien mit den Brechungszahlen 1 und $n > 1$ trennt. Nach der Brechung gehen die Strahlen mit unendlich kleiner Neigung gegen das von P auf E gefällte Lot sämtlich durch G, den GAUSSschen Bildpunkt von P; die endlich gegen das genannte Lot geneigten Strahlen hingegen treffen dieses nach der Brechung in Punkten, deren Lage von der Neigung des Strahles gegen das Lot abhängt. Der zu PQ gehörige gebrochene Strahl QR' schneidet z. B. das mehrfach genannte Lot mit seiner rückwärtigen Verlängerung in P'. GP' ist also $\varphi(u)$, wobei $\tan R'\hat{P'}P = u$ ist.

Ein einfachstes Beispiel einer solchen Kaustik (vgl. Abb. 8) ergibt die Brechung der von einem leuchtenden Punkt kommenden Strahlen an einer Planfläche, die die Medien der Brechungszahlen 1 und n trennt. Es wird dann, wie man sich leicht überzeugt

$$\varphi(u) = \frac{n}{\sqrt{1 + (1 - n^2)u^2}} - n,$$

wenn man den Abstand des Dingpunktes von der brechenden Fläche als Einheit wählt.

Nebenbei sei noch bemerkt, daß sich übrigens auch die Meridiankurven der Wellenflächen in unserem Falle stets bestimmen lassen. Definieren wir diese Kurven hier als orthogonale Trajektorien der Geradenschar (29), so hat man in (29) u durch die Beziehung $d\eta/d\xi = \eta' = -1/u$ zu eliminieren, um deren Differentialgleichung zu erhalten. Das führt auf

$$\xi + \eta\eta' - \varphi\left(\frac{1}{\eta'}\right) = 0$$

[1]) S. Ziff. 54. Zu beachten andere Bedeutung von u!

oder integriert

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \cdot \left(\int \frac{\Phi(\eta')}{\sqrt{1+\eta'^2}}\, d\eta' + c\right), \\ \eta &= \frac{-1}{\sqrt{1+\eta'^2}} \cdot \left(\int \frac{\Phi(\eta')}{\sqrt{1+\eta'^2}}\, d\eta' + c\right) + \frac{\varphi\left(\frac{1}{\eta'}\right)}{\eta'}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi(\eta') = \frac{d\,\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{\eta'}\right)}{\eta'}}{d\eta'}$$

gesetzt ist. (31) ist also eine Parameterdarstellung der Meridiankurven der Wellenflächen, und zwar ist dabei die Integrationskonstante c der Parameter der Schar und η' der Parameter der Kurve.

Durch die Gleichungen (30) ist der Verlauf der Bildstrahlen genügend gekennzeichnet; dabei kann das Dingstrahlenbündel beliebig weit geöffnet sein, wofern nur das Bündel an einer einzelnen Kugelfläche gebrochen wird oder auch durch ein System zentrierter Rotationsflächen hindurchgeht. Im letzteren Falle müßte allerdings der Mittelpunkt des Dingstrahlenbündels auf der Achse liegen.

10. Das Strahlenbündel, von einem außerhalb der Rotationsachse gelegenen Punkt kommend, geht durch ein zentriertes Flächensystem hindurch. Liegt der Dingpunkt nicht auf der Achse, so ist die Kaustik, die die Lichtstrahlen, nachdem sie die zentrierte Flächenfolge durchsetzt haben, bilden, im allgemeinen keine Rotationsfläche mehr, sondern nur noch eine Fläche, die zu der durch den leuchtenden Punkt und die optische Achse gelegten Ebene, der Meridian- oder Tangentialebene, symmetrisch angeordnet ist. Diese gleiche Eigenschaft hat dann selbstverständlich auch die Wellenfläche. Alle vom leuchtenden Dingpunkt ausgehenden, in der Meridianebene verlaufenden Strahlen verbleiben bei jeder Spiegelung oder Brechung in dieser, also verlaufen die zu dem ebenen „meridionalen" oder „tangentialen" Dingstrahlenbüschel (alle in einer Ebene verlaufenden Strahlen durch einen Punkt werden hier und im folgenden Büschel genannt, die räumliche, zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen durch einen Punkt dagegen Bündel) gehörigen meridionalen oder tangentialen Bildstrahlen in der Meridianebene; sie schneiden sich demnach sämtlich untereinander.

In der rechnenden Optik wird sehr häufig die Abbildung eines nicht auf der Achse gelegenen Dingpunktes durch wenig geöffnete Strahlenbündel, die Öffnung des Bündels wird als unendlich klein von erster Ordnung angenommen, untersucht. Ein Strahl wird als Träger des engen Bündels herausgegriffen und meist als Hauptstrahl bezeichnet. Da sich die in der Meridianebene verlaufenden Bildstrahlen sämtlich schneiden, so schneiden auch die in der Meridianebene gelegenen Strahlen des engen Bündels den selbst in dieser Ebene verlaufenden Hauptstrahl. Der Schnittpunkt wird **meridionaler** oder **tangentialer Bildpunkt** genannt.

Als Normale einer Wellenfläche aufgefaßt, muß der Hauptstrahl noch von den benachbarten Normalen längs einer zweiten Krümmungslinie auf dieser Wellenfläche getroffen werden. Man nennt diesen Treffpunkt den **sagittalen Bildpunkt**. Diese zweite Gruppe von Strahlen, die auf dem Hauptstrahl einen Bildpunkt bestimmen, verlaufen in der zur Meridianebene senkrechten Ebene durch den Hauptstrahl, der Sagittalebene.

Definiert man als Bildpunkt einen solchen Punkt, durch den sämtliche vom Dingpunkt ausgehende Strahlen nach deren Brechung oder Brechungen,

wenn es sich um ein vielflächiges optisches System handelt, hindurchgehen, so kann schon bei Abbildung durch unendlich enge Bündel im allgemeinen Falle von einem Bildpunkte nicht mehr die Rede sein, sondern nur dann, wenn der sagittale und tangentiale „Bildpunkt" zusammenfallen, d. h. der zugehörige Punkt der Wellenfläche ein Kreispunkt ist. Von diesem Sonderfall abgesehen ist die Abbildung „astigmatisch", und die Entfernung des tangentialen „Bildpunktes" vom sagittalen ist ein Maß für den „Astigmatismus". Dieser Tatbestand hindert allerdings nicht, daß trotz Astigmatismus durch enge Bündel deutliche Bilder erzeugt werden können. Ein Beispiel für eine derartige Abbildung findet sich am Schluß des Abschnittes C a), β). Dort[1] wird gezeigt, daß konzentrische Kreise, deren Ebene senkrecht zur Achse eines sphärischen zentrierten Linsensystems steht und deren gemeinsamer Mittelpunkt auf der Achse liegt, scharf auf die tangentiale Bildschale abgebildet werden, während die Kreisdurchmesser deutlich auf die sagittale Schale abgebildet werden. In einem solchen Falle des Astigmatismus wird man also mit A. GULLSTRAND[2]) von abbildbaren Linien sprechen.

11. Satz von FERMAT. Dem MALUSschen Satz hinsichtlich seiner Allgemeinheit und Bedeutung für die geometrische Optik ähnlich ist der Satz von FERMAT: Erleidet ein Strahl beim Verlauf von einem Punkt P zu einem Punkt P' eine beliebige Anzahl von Spiegelungen und Brechungen, so ist die Summe der optischen Weglängen ein Grenzwert. Unter optischer Weglänge (auch Lichtweg oder reduzierter Weg genannt) in einem Medium versteht man das Produkt $n \cdot l$, worin n die Brechungszahl dieses Mediums und l die darin von dem Lichtstrahl durchlaufene Strecke bedeuten. Es ist also nach dem FERMATschen Satz der Ausdruck $\sum nl$ ein Grenzwert, d. h. diese Summe der optischen Weglängen sämtlicher tatsächlich durchlaufener Medien ist bis auf unendlich kleine Größen höherer als erster Ordnung gleich allen möglichen Summen, die für irgendeinen dem tatsächlichen Weg unendlich benachbarten Weg gebildet werden; demnach ist

$$\delta \sum n \cdot l = 0 . \qquad (32)$$



Abb. 9. Zum Beweis des FERMATschen Satzes für eine einzige Brechung. Der Strahl PA trifft in A auf eine brechende Fläche und läuft nach der Brechung zum Punkt P'. B ist ein A benachbarter Punkt jener 2 Medien trennenden Fläche, so daß AB unendlich klein von erster Ordnung ist.

Umgekehrt gilt auch, daß bei Bestehen von (32) für den Weg eines Strahles von P nach P' durch verschiedene Medien der Strahlengang nach den Gesetzen der Spiegelung und Brechung erfolgen muß. Läuft der Strahl von P nach P' zunächst nur durch ein einziges Medium (n = konst.), so ist der Satz trivial; denn die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes fordert, daß in diesem Falle der Lichtweg der kürzeste Weg zwischen P und P', also $\delta nl = 0$ sei.

Weiter beweisen wir die Richtigkeit des Satzes für eine einzige Brechung in Anlehnung an Abb. 9. Der von P ausgehende Strahl trifft in A auf die Grenzfläche der beiden Medien und läuft nach der Brechung zu P'. Ein zweiter, dem ersten

[1]) S. Ziff. 50

[2]) A. GULLSTRAND, Die reelle optische Abbildung. S. 34–37. Upsala u. Stockholm 1906.

benachbarter von P ausgehender Strahl trifft in B auf die Grenzfläche, wobei AB unendlich klein von erster Ordnung sein mag und B nicht in der Einfallsebene von PA zu liegen braucht. Schlägt man um P in der durch die beiden Strahlen PA und PB bestimmten Ebene mit PA als Radius einen Kreis, so schneidet dieser PB in C, und es kann bis auf kleine Größen zweiter Ordnung gesetzt werden:

$$PB = PA - AB \cdot \cos P\hat{A}B$$

Ebenso ist

$$BP' = AP' - AB \cdot \cos P'\hat{A}B$$

oder

$$n \cdot PB + n' \cdot BP' - n \cdot PA - n' \cdot AP' = -AB(n \cos P\hat{A}B + n' \cos P'\hat{A}B) \qquad (33)$$

Nach (10) gilt

$$n : n' = \cos(\pi - P'\hat{A}B) \cdot \cos P\hat{A}B = -\cos P'\hat{A}B \cdot \cos P\hat{A}B,$$

so daß also die rechte Seite von (33) verschwindet oder

$$n \cdot PB + n' \cdot BP' = n \cdot PA + n' \cdot AP'$$

wird. Unter Vernachlässigung kleiner Größen von höherer als erster Ordnung sind also die Lichtwege von P nach P' gleich, mögen sie nun über A, B oder einen andern Punkt der Grenzfläche, der A benachbart ist, gehen. Es ist also in der Tat $\delta(n \cdot PA + n' \cdot AP') = 0$, womit der Fermatsche Satz für eine Brechung bewiesen ist. Da nun für die Reflexion nur $n = -n'$ zu setzen ist, so ist der Beweis des Fermatschen Satzes hiermit auch für eine spiegelnde Fläche erbracht.



Abb. 10. Der von Punkt P zu Punkt P' laufende Lichtstrahl wird in Punkt A einer Ebene, die 2 Medien mit den Brechungszahlen n und n' voneinander trennt, gebrochen. Als Brechungsebene ist die x, y-Ebene, als brechende Ebene die z, x-Ebene genommen. Der Lichtweg von $P(a, b, O)$ zu $P'(a', b', O)$ ist ein Minimum.

Nimmt man nun an, daß bei dem Verlauf des Strahles von P nach P' dieser eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen erleidet, und sei in Übereinstimmung mit unseren obigen Festsetzungen l die Weglänge in irgend einem Medium der Brechungszahl n, so wird, nachdem für eine einzelne Brechung oder Spiegelung $\sum nl$ als Grenzwert für die Verschiebung der Einfallspunkte auf der Grenzfläche der beiden Nachbarmedien erwiesen ist, nach dem Grundsatz der Superposition kleiner Variationen $\sum nl$ auch dann ein Grenzwert sein, wenn der zwei Punkte verbindende Strahl beliebig viele Brechungen und Spiegelungen auf seinem Wege erfährt. Es ist also in der Tat $\delta \sum nl = 0$. Findet eine stetige Veränderung der von dem Strahl durchlaufenen Medien statt, so gilt der Fermatsche Satz ebenfalls, und es wird der Ausdruck $\int n\,dl$ ein Grenzwert oder $\delta \int n\,dl = 0$.

Die häufige Formulierung des Fermatschen Satzes, daß die Summe der Lichtwege ein Minimum sei, ist ungenau, da der Fermatsche Satz nur behauptet,

daß die erste Variation jener Summe verschwindet, über die Werte der zweiten und höheren Differentiale, die entscheidend für das etwaige Vorliegen von Extremwerten und deren Art sind, aber nichts ausgesagt wird. Was im einzelnen Fall vorliegt, Minimum, Maximum oder auch keins von beiden, ist durch besondere Betrachtungen, oft ohne Schwierigkeit, festzustellen.

Nimmt man z. B. die Brechung an einer Ebene, und sei als Brechungsebene des von P nach P' laufenden Strahles die x, y-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, und die x, z-Ebene als brechende Ebene (Abb. 10), also der Einfallspunkt A ein Punkt der x-Achse, so wird, wenn die Brechungszahl vor der Brechung n und nach ihr n' ist und die Koordinaten von P bzw. P' $a, b, 0$ bzw. $a', b', 0$ sind, $n \cdot PA + n' \cdot AP' = n\sqrt{(x-a)^2 + b^2} + n'\sqrt{(x-a')^2 + b'^2} = f(x)$, wobei die Wurzelzeichen eindeutig positiv bezeichnet zu denken seien. Dann muß sein:

$$f'(x) = \frac{n(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} + \frac{n'(x-a')}{\sqrt{(x-a')^2 + b'^2}} = 0\,. \tag{34}$$

Es ist ferner ohne weiteres zu finden, daß die zweite Ableitung $f''(x)$ für die Wurzeln dieser Gleichung (34) einen positiven Wert hat, also ein Minimum vorliegt. (34) läßt sich übrigens auch umformen in

$$\frac{n^2}{1 + \frac{b^2}{(x-a)^2}} = \frac{n'^2}{1 + \frac{b'^2}{(x-a')^2}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{n^2}{1 + \cot^2 i} = \frac{n'^2}{1 + \cot^2 i'}$$

oder

$$n \sin i = n' \cdot \sin i'\,.$$

Die Erfüllung des Brechungsgesetzes ist also eine Folge des Verschwindens von $f'(x)$.

12. Zusammenhang zwischen Brechungsgesetz, Satz von Fermat, Satz von Malus. Durch Einführung des Begriffes der optischen Weglänge oder des Lichtweges kann man die oben gegebene Formulierung des Satzes von Malus noch ergänzen. Wir hatten ihn zunächst nur so ausgesprochen, daß ein Normalenbündel beim Erleiden von beliebig vielen Spiegelungen und Brechungen stets ein solches bleibt. Weiter wurde erwähnt, daß die Abstände zwischen zwei Parallelflächen gemessen auf dem zugehörigen Normalstrahl für sämtliche Punkte dieser beiden Flächen gleich sei. Es läßt sich dieser letzte Satz, der also zunächst nur von zwei Wellenflächen in ein und demselben Medium gilt, dahin erweitern, daß der Lichtweg zwischen irgend zwei Wellenflächen eines Normalensystems, das beliebig viele Brechungen und Spiegelungen erleidet, für alle Strahlen des Systems der gleiche ist, so daß der Malussche Satz zweckmäßig auch so ausgesprochen werden kann: Die Orthotomie einer Strahlenkongruenz bleibt durch Spiegelungen und Brechungen ungeändert; der Lichtweg zwischen zwei Orthogonalflächen ist für jeden Strahl derselbe.

Wie man aus dem Fermatschen Satz das Brechungsgesetz herleiten kann, so kann dies auch aus dem Malusschen Satz in der eben ausgesprochenen ergänzten Formulierung geschehen. Die drei Sätze, das Grundgesetz der Spiegelung und Brechung, der Fermatsche Satz und der Malussche Satz hängen demnach so voneinander ab, daß, wenn der eine gilt, die beiden andern notwendig aus ihm folgen.

13. Aberrationsfreie Flächen. Eine Fläche, die von einem Punkt ausgehende Strahlen durch Spiegelung oder Brechung wieder in einem Punkte zusammenführt, also ein homozentrisches Strahlenbündel wieder in ein solches abbildet, pflegt man aberrationsfrei zu nennen. Sollen z. B. nach Abb. 11 die von dem

Punkte P kommenden Strahlen nach Reflexion an einer Fläche F wieder in einem Punkte P' zusammentreffen, so muß für alle möglichen Strahlenwege

$$PQ + QP' = \text{konst.} \tag{35}$$

sein. Für alle in der Ebene PQP' verlaufenden Strahlen gilt die Bedingung (35); der Schnitt der gesuchten Fläche mit dieser Ebene ist daher eine Ellipse mit den Brennpunkten P und P' und die gesuchte Fläche das Rotationsellipsoid mit PP' als Drehungsachse. Fällt der Punkt P mit P' zusammen, so geht die Ellipse in einen Kreis über, dessen Mittelpunkt dann sogleich Ding- und Bildpunkt ist. Liegt P im Unendlichen, so wird die Spiegelfläche ein Rotationsparaboloid. Die von dem unendlich fernen Punkt kommenden Strahlen laufen parallel zur Rotationsachse des Paraboloids und werden in dessen Brennpunkt P' wieder zur Vereinigung gebracht. Neben diesen Flächen und dem trivialen Fall des ebenen Spiegels kommt als aberrationsfreie Spiegelfläche noch das



Abb. 11. Die vom Brennpunkt P einer spiegelnden Ellipse F ausgehenden Strahlen PQ gehen sämtlich durch den 2. Brennpunkt P' der Ellipse F.



Abb. 12. Die vom Brennpunkt P eines brechenden kartesischen Ovals F ausgehenden Strahlen PQ gehen sämtlich durch den Brennpunkt P' des Ovals F.

Hyperboloid vor, das die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen nach ihrer Spiegelung mit ihren rückwärtigen Verlängerungen (d. h. virtuell) im zweiten Brennpunkt zur Vereinigung bringt.

Ist die Fläche F die Grenzfläche zweier verschiedener Medien, wie in Abb. 12 angenommen ist, und sind n und n' die Brechungszahlen vor und nach der Brechung, so wird

$$n PQ + n' QP' = \text{konst.} \tag{36}$$

(36) wird für sämtliche in der Ebene PQP' verlaufende Strahlen durch eine Kurve vierter Ordnung befriedigt, die als kartesisches Oval bezeichnet wird, und deren Brennpunkte P und P' sind. Sämtliche in allen möglichen Meridianschnitten verlaufenden, von P kommenden Strahlen werden dann nach Brechung an F in P' zur Vereinigung gelangen, wenn F die Rotationsfläche des kartesischen Ovals mit PP' als Rotationsachse ist. Fällt P wieder ins Unendliche, so geht auch hier die Meridiankurve in einen Kegelschnitt über.

14. Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten der geometrischen Optik; charakteristische Funktion und Eikonal. Die Darstellung der geometrischen Optik, d. h. im wesentlichen der Folgerungen aus dem Brechungsgesetz oder dem FERMATschen oder dem MALUSschen Satz, ist auf verschiedene Weise möglich. Diejenige Methode, die den Anforderungen der Praxis am besten entspricht, erblickt ihre Hauptaufgabe in der Entwicklung einer Theorie der Spiegel- und Linsensysteme. Indem dabei von vornherein gewisse Einschränkungen infolge der bestimmten Art der Mittel, durch die die Abbildung bewerkstelligt wird, gemacht werden, kann bei einem solchen Verfahren leicht der Zusammenhang mit den Gesetzmäßigkeiten allgemeiner Natur, wie sie sich durch die bloße Voraussetzung strahlenweiser Abbildung und der Gültigkeit eines jener Grundgesetze ergeben, zu sehr in den Hintergrund treten. Immerhin wird das Verfahren

der direkten Untersuchung optischer Flächenfolgen als das wichtigste der geometrischen Optik anzusprechen sein; einmal gibt es die Mittel, die Linsenfolgen, die gewisse optische Bilder erzeugen sollen, zu errechnen, und dann hat diese Methode trotz ihrer spezielleren Fragestellung durch Verallgemeinerung ihrer Ergebnisse zweifellos erst häufig die zugrunde liegende allgemeinere Gesetzmäßigkeit auffinden lassen.

So fand man beispielsweise die allgemeinen Sätze paraxialer Abbildung, d. h. der Abbildung von Achsenpunkten oder von unendlich wenig von der Achse entfernten Punkten durch enge, gegen die Achse wenig geneigte Strahlenbündel, natürlich durch Lösung der speziellen Aufgabe, zu einem Achsendingpunkte den Bildpunkt zu bestimmen, und zwar zunächst für eine brechende Fläche, dann für eine beliebig vielflächige zentrierte Folge. Dann trat die weitere Forderung nach Abbildung eines außerhalb der Achse gelegenen Dingpunktes hinzu, bis schließlich alle Teilergebnisse in den uns heute geläufigen, allgemeinen Gesetzmäßigkeiten paraxialer Abbildung (Kollineation) ihren zusammenfassenden Rahmen erhielten. Das so wichtige Verfahren der direkten Untersuchung optischer Flächenfolgen macht im wesentlichen den Inhalt des Abschnittes C aus.

Man kann beim Aufbau der geometrischen Optik gewissermaßen auch den umgekehrten Weg einschlagen, indem man die Möglichkeit der physikalischen Verwirklichung der optischen Abbildung etwa durch Linsen- und Spiegelsysteme zunächst dahingestellt sein läßt, vielmehr für die Abbildung nur die Annahme macht, daß für sie der Fermatsche bzw. Malussche Satz gilt.

Ausgehend von der Konstanz der optischen Weglänge zwischen zwei Wellenflächen hat W. R. Hamilton den Begriff der charakteristischen Funktion eingeführt. Setzt man

$$\sum_{0}^{x,y,z} n l = V(x, y, z) \qquad \text{oder auch} \qquad \int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} n\, dl = V(x, y, z)\,,$$

wobei von der ursprünglichen oder von einer beliebig ausgewählten Wellenfläche auszugehen ist, so wird die optische Weglänge zwischen zwei Punkten auf einem Strahle durch die Differenz der V-Werte erhalten. V heißt die charakteristische Funktion.

Kennt man V als Funktion von x, y, z, so ist auch die Richtung des Strahles in irgendeinem Punkte bekannt. Er ist bei einfach brechendem Mittel die Normale der durch den Punkt gehenden Wellenfläche. Seine Richtungskosinus α, β, γ bestimmen sich, da V die optische Weglänge bedeutet, aus

$$n\alpha = \frac{\partial V}{\partial x}\,, \qquad n\beta = \frac{\partial V}{\partial y}\,, \qquad n\gamma = \frac{\partial V}{\partial z}\,,$$

wobei

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2$$

ist. α, β und γ sind also zu bestimmen, wenn V bekannt ist.

Für ein von einem Punkte x_0, y_0, z_0 ausgehendes Strahlenbündel in einem homogenen isotropen Medium ist

$$V = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}\,.$$

Meist aber ist V unbekannt und nur durch Reihenentwicklung bestimmbar.

Einen Überblick über die Hamiltonschen Arbeiten und Entwicklungen gibt Boegehold[1]); auch die wichtigsten Untersuchungen ähnlicher Art von späteren Autoren werden von Boegehold kurz dargestellt oder erwähnt.

[1]) H. Boegehold in Czapski-Eppenstein, S. 220ff., Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente. Leipzig: J. A. Barth 1924.

Hier möge es genügen, einiges aus der Abhandlung „Das Eikonal"[1]) von H. Bruns mitzuteilen. Bruns nimmt als Ausgangspunkt seiner Entwicklung der geometrischen Theorie der optischen Abbildung die beiden Voraussetzungen, daß Ding- und Bildraum durch Strahlen aufeinander abgebildet werden, und daß ferner der Malussche Satz für die Abbildung gilt.

Bestimmt man die Strahlen σ des Dingraumes ω durch die auf ein beliebig gewähltes rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z bezogenen Strahlenkoordinaten h, k, p, q, wobei die h, k die y- bzw. z-Koordinaten des Schnittpunktes der Ebene $x = 0$ mit σ sind und die p, q die Richtungskosinus des σ gegen die beiden genannten Achsen, und sind H, K, P, Q für die Strahlen Σ des Bildraumes Ω die Strahlenkoordinaten, die ganz entsprechend der Festlegung des σ auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z im Bildraum bezogen werden, so wird durch

$$\left.\begin{aligned} H &= A(h, k, p, q) \\ K &= B(h, k, p, q) \\ P &= C(h, k, p, q) \\ Q &= D(h, k, p, q) \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

eine beliebige strahlenweise Abbildung von ω in Ω vermittelt.

Dabei können, solange nur von einer strahlenweisen Abbildung die Rede ist, A, B, C und D irgendwelche Funktionen der h, k, p und q sein, mit der Einschränkung allerdings, daß die Funktionaldeterminante für A, B, C und D gebildet nach den h, k, p und q nicht identisch verschwindet, da ja auch jedes Σ ein σ bestimmen soll.

Spezialisiert man die Abbildung nun dahin, daß der Malussche Satz für sie gilt, so heißt das, daß einer flächennormalen Strahlenkongruenz in ω auch eine solche in Ω als Bild entspricht. Betrachtet man die p, q als die unabhängigen Variabeln der Strahlenkongruenz, die h, k sind also Funktionen der p, q, so findet das Bestehen des Malusschen Satzes seinen analytischen Ausdruck in der Forderung, daß $H \cdot dP + K \cdot dQ$ ein totales Differential sei, wenn es $h \cdot dp + k \cdot dq$ ist. Durch Hinzunahme dieser letzten Bedingung zu (37) werden die gesuchten Abbildungen dargestellt.

Um aber den Abbildungsgleichungen von vornherein eine Gestalt zu geben, bei der die Malussche Bedingung von selbst erfüllt ist, wird eine Eikonal genannte Funktion $E(h, k, P, Q)$ eingeführt; es ist dann das Bestehen von

$$n \cdot p = \frac{\partial E}{\partial h}, \qquad nq = \frac{\partial E}{\partial k}, \qquad N \cdot H = \frac{\partial E}{\partial P}, \qquad NK = \frac{\partial E}{\partial Q}\,^{2)}$$

hinreichende Bedingung für eine den Malusschen Satz erfüllende Abbildung.

Den Zusammenhang zwischen der Hamiltonschen charakteristischen Funktion und dem Brunsschen Eikonal hat Klein[3]) aufgezeigt: Die Eikonale $E(h, k, H, K)$ sind die optischen Längen zwischen den Punkten der Koordinatenebenen $x = 0$ und $X = 0$.

Von den allgemeinen Ergebnissen der Brunsschen Abhandlung seien hier noch einige mitgeteilt. Der Malussche Satz läßt eine Abbildung, bei der alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkte des Dingraumes ausgehen, wieder in einem Punkte des Bild-

[1]) H. Bruns, Leipziger Abhandlgn. Bd. 21, S. 325ff. Leipzig 1895.
[2]) Im Falle der Optik sind n bzw. N die Brechungszahlen des Ding- bzw. Bildraumes.
[3]) F. Klein, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 46, S. 372ff. 1901.

raumes vereinigt werden, nur in dem Falle zu, wo die punktweise Abbildung die Form

$$X = \pm \mu x, \qquad Y = \pm \mu y, \qquad Z = \pm \mu z$$

besitzt, also eine geometrisch ähnliche ist. Dabei ist der Modul der Ähnlichkeitstransformation $\mu = n/N$, wenn n bzw. N die Brechungszahlen des Ding- bzw. Bildraumes sind. Diese Abbildung wird z. B. in dem trivialen Fall der Spiegelung an einer Ebene verwirklicht.

Ein weiterer von BRUNS abgeleiteter Satz sagt, daß bei genauer Abbildung zweier Flächenelemente ineinander eine Kurve in der Dingfläche mit einem beliebigen abbildenden Strahl σ einen Winkel einschließt, dessen Kosinus zu dem Kosinus des entsprechenden bildseitigen Winkels (Winkel zwischen Σ und Bildkurve) im festen Verhältnis steht. BRUNS weist darauf hin, daß der ABBEsche Sinussatz ein Grenzfall dieses Kosinussatzes ist.

So wichtig die Untersuchungsmethoden, die von den Grundannahmen der geometrischen Optik ohne sonstige weitere Voraussetzungen ausgehen, für die Klärung allgemeiner Zusammenhänge bzw. Gesetzmäßigkeiten sind, so wenig geeignet sind sie im allgemeinen zur Feststellung der Eigenschaften eines bestimmten Linsen- oder Spiegelsystems. Die Aufsuchung der charakteristischen Funktion oder des Eikonals ist in der Mehrzahl der praktisch wichtigen Falle ein schwieriges Unterfangen und meist nur durch Reihenentwicklungen möglich, die ganz abgesehen von den mit ihrer Benutzung etwa verknüpften Unbequemlichkeiten immer wieder die Feststellung ihres Gültigkeitsbereiches erfordern. Gewiß wird auch bei den Ansätzen des Abschnittes C, die ja in erster Linie für die Anwendung in Frage kommen, mitunter die Reihenentwicklung benutzt; sie ist aber stets nur als ein gewisser Behelf zu bewerten und am besten durch genaue Verfahren zu überprüfen (s. z. B. die Abb. 88—90 und 91—93).

Auch bei den Betrachtungen des Abschnittes C, a), die sich mit Abbildungen durch enge Bündel befassen, ist stets im Auge zu behalten, daß die Annahme unendlich enger Bündel zunächst nur eine mathematische Fiktion ist, deren genaue physikalische Verwirklichung sogar im schärfsten Widerspruch zur Natur des Lichtes steht. Als mathematische Theorie hingegen sind diese Betrachtungen durchaus einwandfrei, als physikalische Arbeitshypothese in der Theorie der optischen Instrumente nach dem heutigen Stand überhaupt nicht zu entbehren.

Ähnlich steht es mit der geometrischen Theorie der optischen Abbildung, die den Inhalt des Abschnittes B ausmacht. Sie baut sich auf der Forderung auf, daß Ding- und Bildraum sowohl strahlen- wie punktweise aufeinander abgebildet werden, d. h. daß allen von einem Dingpunkt ausgehenden Strahlen im Bildraum Strahlen entsprechen, die durch einen einzigen Punkt, den Bildpunkt, gehen. Eine solche Zuordnung der beiden Räume besteht in Wirklichkeit nur für den fadenförmigen Raum um die Achse oder bei streng ähnlicher Abbildung; im allgemeinen Falle ist sie, wie das BRUNS zeigt, mit der Forderung optischer Abbildung, wenn man darunter eine strahlenweise, dem MALUSschen Satze genügende Abbildung versteht, nicht vereinbar. Diese geometrische Theorie der optischen Abbildung, losgelöst von jeder Rücksicht auf ihre optisch-physikalische Verwirklichung, ist in vollkommener Allgemeinheit zuerst von E. ABBE in seinen Universitätsvorlesungen behandelt worden. Bei ihr werden die Gesetzmäßigkeiten der paraxialen Abbildung auf den ganzen Raum ausgedehnt. Sie stellt gewissermaßen den Idealfall der Abbildung dar, der aber in Wirklichkeit nur in trivialen Fällen vorkommen kann, da er ja im allgemeinen dem MALUSschen Satz widerspricht. Trotzdem sind die Beziehungen, die diese Theorie liefert,

nicht zu entbehren, weil sie den Abbildungsvorgang in erster Annäherung darstellen und als Grundlage der Bestimmung einer jeden Abbildung benutzt zu werden pflegen.

Die Abweichungen der Bildstrahlenvereinigung beim Gebrauch von Linsen- oder Spiegelsystemen von der idealen Abbildung ist man gewohnt, als Bildfehler zu bezeichen. Die Beseitigung oder vielmehr moglichste Verringerung dieser Fehler ist die Hauptaufgabe der rechnenden Optik.

B. Allgemeine geometrische Abbildungsgesetze.

Von

W. MERTÉ, Jena.

Die ideale Abbildung, die auch haufig als GAUSSsche Abbildung bezeichnet wird — GAUSS hat sie zuerst zu einem gewissen Abschluß gebracht —, ist an sich weiter nichts als eine rein geometrische Theorie und kann als solche synthetisch[1]) entwickelt werden; die Maßverhältnisse dieser Abbildung sind dann aus besonderen Lagebeziehungen zu ermitteln

Andererseits kann man aber auch rein analytisch vorgehen Die Zuordnung der Punkte des Raumes zueinander, die durch die GAUSSsche Abbildung bewirkt wird, ist die vieluntersuchte Kollineation, sie wird bekanntlich vermittelt durch eine gebrochene lineare Substitution. Die rein analytische Diskussion dieser Substitution ist fur die Optik wenig zweckmäßig, vielmehr ist der Mittelweg, die Substitution mit Hilfe geometrischer Vorstellungen zu untersuchen, zu bevorzugen, da sich so die Entwicklungen vereinfachen; gleichzeitig erhält man aber auch unmittelbar die für den Gebrauch des Physikers notwendigen Maßverhaltnisse. Dieser Mittelweg ist beschritten worden von den verschiedenen Vertretern[2]) der ABBEschen Schule. Ihren Darstellungen schließen sich die folgenden Entwicklungen an.

15. Die allgemeinen Abbildungsgleichungen und Folgerungen aus ihnen. Die Punkte zweier Räume, die in der geschilderten Verwandtschaft stehen, lassen sich stets durch das Gleichungstripel

$$x'_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon}, \qquad \nu = 1, 2, 3 \tag{1}$$

zueinander in Beziehung setzen. Darin sind

$$\varepsilon_\nu = a_{\nu 4} + \sum_{\varrho=1}^{3} a_{\nu\varrho}\, x_\varrho \tag{2}$$

und

$$\varepsilon = a_4 + \sum_{\varrho=1}^{3} a_\varrho\, x_\varrho\,, \tag{3}$$

die x die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des einen Raumes und die x' die der Punkte des andern. Man kann, um die beiden Räume voneinander zu unterscheiden, den einen den Ding- und den andern den Bildraum nennen, und zwar mögen hier die ungestrichenen x die Punkte des Dingraums festlegen, die gestrichenen die entsprechenden des Bildraumes.

[1]) R. BÖGER, Die optische Verwandtschaft in projektiver Darstellung. Hamburg: M. Baumann 1907; R. BÖGER, Optische Geometrie. ZS. f. math. u. naturw. Unterr. Bd. 51, S. 110—118 u. 148—164. 1920.

[2]) S. z. B. CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 33 ff., Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente. Leipzig: J. A. Barth. 1924.

Die durch (1) ausgedrückte Verwandtschaft ist scheinbar von 15 Koeffizienten — man mag von den ursprünglichen 16 Koeffizienten durch Kürzung einen z. B. auf 1 bringen — abhängig; es läßt sich jedoch die Zahl der Koeffizienten, um die Eigenschaften der Verwandtschaft oder Abbildung der beiden Räume zu untersuchen, beträchtlich reduzieren, wenn man durch geeignete Wahl der Koordinatensysteme die für die Art der Abbildung unwesentlichen Koeffizienten ausmerzt.

Zunächst lehrt (1), daß im allgemeinen zu endlichen x auch solche x' gehören. Wegen der Umkehrbarkeit der Beziehungen gilt natürlich auch das Umgekehrte. Eine Ausnahme bilden die Punkte der Ebene $\varepsilon = 0$. Sie werden sämtlich ins Unendliche abgebildet, ihr entspricht die unendlich ferne Ebene des Bildraumes. Wieder aus der Umkehrbarkeit der Beziehungen folgt, daß auch im Bildraum eine im allgemeinen Falle im Endlichen gelegene Ebene etwa $\varepsilon' = 0$ existiert, der die unendlich ferne Ebene des Dingraumes entspricht. Dabei kann

$$\varepsilon' = a'_4 + \sum_{\varrho=1}^{3} a'_\varrho x'_\varrho \tag{4}$$

gesetzt werden; analog (1) und (2) sei

$$x_\nu = \frac{\varepsilon'_\nu}{\varepsilon'}, \qquad \nu = 1, 2, 3 \tag{5}$$

$$\varepsilon'_\nu = a'_{\nu 4} + \sum_{\varrho=1}^{3} a'_{\nu\varrho} x'_\varrho. \tag{6}$$

Durch (5) wird die Abbildung des Bildraumes in den Dingraum vermittelt, die 16 Koeffizienten a'_4, $a'_{\nu 4}$, a'_ϱ und $a'_{\nu\varrho}$ sind ausdrückbar als Funktionen der a_4, $a_{\nu 4}$, a_ϱ und $a_{\nu\varrho}$. Die beiden Unstetigkeitsebenen (es sind die einzigen) $\varepsilon = 0$, die Unstetigkeitsebene des Dingraumes, und $\varepsilon' = 0$, die Unstetigkeitsebene des Bildraumes (es möge hier ausdrücklich betont werden, daß sich $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon' = 0$ im allgemeinen nicht etwa als Ding und Bild entsprechen; die Festsetzung, das Verhältnis des gegenseitigen Entsprechens als Ding und Bild durch gestrichene und ungestrichene Werte darzustellen, bezieht sich nur auf die Punktkoordinaten x bzw. x', nicht auf die Abkürzungen ε und ε') werden **Brennebenen** genannt.

In einem Sonderfall der Abbildung verschwindet die Ausnahmestellung der Ebenen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon' = 0$; es werden dann vielmehr stets im Endlichen gelegene Ebenen in ebensolche abgebildet; dabei ist

$$a_\varrho = 0, \qquad \varrho = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Die unendlich fernen Ebenen der beiden Räume entsprechen einander. Man kann sagen, daß dann die beiden Brennebenen im Unendlichen liegen. Diese Art der Abbildung wird teleskopisch genannt, da sie beim Fernrohr vorkommt. Bei der Suche nach einem geeigneten Koordinatensystem, um die Eigenschaften der Abbildung leichter diskutieren zu können, schließen wir zunächst die teleskopische Abbildung aus; d. h. wir setzen voraus, daß die a_1, a_2, a_3 nicht alle drei gleichzeitig verschwinden.

Denkt man sich nun durch

$$E' = A'_4 + \sum_{\varrho=1}^{3} A'_\varrho x'_\varrho = 0 \tag{8}$$

irgendeine Ebene im Bildraum in der sog. Normalform dargestellt, so wird dieser nach (1) im Dingraum eine Ebene

$$E = A'_4 a_4 + A'_1 a_{14} + A'_2 a_{24} + A'_3 a_{34} + \sum_{\lambda=1}^{3} A_\lambda x_\lambda = 0 \tag{9}$$

entsprechen, deren Koeffizienten A_λ sich berechnen lassen aus

$$A_\lambda = A_4' a_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{3} A_\varrho' \cdot a_{\varrho\lambda} . \tag{10}$$

Die A_λ, aus denen sich die Richtungskosinus der Normalen der Ebene E bestimmen lassen, hangen also nicht nur von den A_ϱ', die nach der angenommenen Darstellungsform $E' = 0$ gleich den Richtungskosinus der Normalen der Ebene $E' = 0$ sind, ab, sondern auch von A_4', das die Entfernung der Ebene $E' = 0$ vom Koordinatenanfang des Bildraumes angibt. Einem Buschel von parallelen Ebenen $E' = 0$ im Bildraum, das man also durch Festhalten der A_ϱ' bei Variierung von A_4' erhalt, entspricht im Dingraum im allgemeinen eine Schar von nicht untereinander parallelen Ebenen.

Werden dagegen samtliche $a_\lambda = 0$, $\lambda = 1, 2, 3$, d. h. es liegt die hier zunachst außer acht bleibende teleskopische Abbildung [s. (7)] vor, entspricht jeder Schar von Parallelebenen eine ebensolche im Dingraum, da dann die A_λ nur noch von den Richtungskosinus A_ϱ' abhängig sind.

16. Vereinfachung der Abbildungsgleichungen durch besondere Wahl der Koordinatensysteme. Wird weiter im allgemeinen Falle $A_1 : A_2 : A_3 = a_1 : a_2 : a_3$, d. h. die Ebenenschar des Dingraumes ist parallel der Brennebene des Dingraumes, so kann man dafur auch schreiben

$$\left(\sum_{\varrho=1}^{3} A_\varrho' a_{\varrho 1}\right) : \left(\sum_{\varrho=1}^{3} A_\varrho' a_{\varrho 2}\right) : \left(\sum_{\varrho=1}^{3} A_\varrho' a_{\varrho 3}\right) = a_1 : a_2 : a_3 ,$$

und es laßt sich damit weiter zeigen, daß auch die entsprechende Ebenenschar im Bildraum parallel der Brennebene des Bildraumes ist. *Die Ebenenscharen parallel ihrer zugehorigen Brennebene sind also im allgemeinen das einzige Paar konjugierter, d. h. als Ding und Bild einander entsprechender Parallelebenenscharen.* Nimmt man je eine Ebene dieser beiden Scharen zu Koordinatenebenen x_2, x_3 bzw. x_2', x_3', so wird durch die Senkrechte auf der Brennebene des Ding- bzw. Bildraumes die Richtung der x_1- bzw. x_1'-Achse festgelegt; dann muß nach dem Gesagten die Ebene x_1 = konst. = c in eine ebensolche x_1' = konst. = c' abgebildet werden, d. h. x_1' muß unabhängig von x_2, x_3 sein, demnach ist in (1) $a_{12} = a_{13} = a_2 = a_3 = 0$ zu setzen.

Dem Normalenbündel der dingseitigen Brennebene entspricht ein homozentrisches Bildstrahlenbundel, dessen Trager ein Punkt der bildseitigen Brennebene $\varepsilon' = 0$ ist. Der zur Ebene $\varepsilon' = 0$ senkrechte Strahl dieses Bildstrahlenbündels werde x_1'-Achse, der ihm entsprechende Strahl aus dem Normalenbündel der dingseitigen Brennebene x_1-Achse; d. h. es werde mit $x_2' = x_3' = 0$ auch x_2 und x_3 zu Null, also ist in (1) $a_{21} = a_{31} = a_{24} = a_{34} = 0$ zu setzen. Diese beiden Strahlen, die beide auf ihrer Brennebene senkrecht stehen und sich gegenseitig entsprechen und hier zur x- bzw. x'-Achse gewählt wurden, pflegt man die Hauptachsen der Abbildung zu nennen.

Weiter kann man die Darstellung der Abbildungsgleichungen (1) vereinfachen, wenn man bedenkt, daß nach den Gesetzen der Kollineation dem Ebenenbüschel mit der x_1-Achse als Träger als Bild ein Ebenenbüschel mit der x_1'-Achse als Träger entspricht, und daß im allgemeinen in jedem der beiden Büschel stets ein, aber auch nur ein Paar von aufeinander senkrechten Ebenen existiert, die sich als Ding und Bild entsprechen. Wählt man das im Dingraum gelegene, also durch die x_1-Achse gehende aufeinander senkrechte Paar als x_1, x_2-Ebene und x_1, x_3-Ebene, so sollen deren Bilder die x_1', x_2'-Ebene und x_1', x_3'-Ebene

sein; dann muß für $x_2 = 0$ auch $x_2' = 0$ und für $x_3 = 0$ auch $x_3' = 0$ sein, oder in (1) wird $a_{23} = a_{32} = 0$.

Es bleibt nur noch übrig, den Anfangspunkt zu bestimmen, von dem aus die x_1- bzw. x_1'-Koordinaten gezählt werden sollen. Zwei Festsetzungen zeigen sich als besonders brauchbar; die nächstliegende vielleicht ist erstens die Wahl der Unstetigkeitsebenen, der Brennebenen $r = 0$ und $r' = 0$, als Anfangsebenen. Es wird dann für $x_1 = 0$ $x_1' = \infty$ und umgekehrt für $x_1 = \infty$ $x_1' = 0$. Das hat zur Folge $a_4 = a_{11} = 0$. Damit sind dann die beiden rechtwinkligen Koordinatensysteme des Ding- und Bildraumes völlig festgelegt, und die Abbildungsgleichungen (1) nehmen die einfache Form an

$$x_1' = \frac{a_{14}}{a_1 x_1}, \qquad x_2' = \frac{a_{22}}{a_1} \frac{x_2}{x_1}, \qquad x_3' = \frac{a_{33}}{a_1} \frac{x_3}{x_1}, \tag{11}$$

ohne daß die Allgemeinheit der kollinearen Abbildung irgendwie beeinträchtigt ist.

Wählt man zweitens zwei konjugierte Ebenen zu Anfangsebenen, so wird für $x_1 = 0$ auch $x_1' = 0$, d. h. $a_{14} = 0$. Die Abbildungsgleichungen werden dann zu

$$x_1' = \frac{a_{11} x_1}{a_4 + a_1 x_1}, \qquad x_2' = \frac{a_{22} x_2}{a_4 + a_1 x_1}, \qquad x_3' = \frac{a_{33} x_3}{a_4 + a_1 x_1} \tag{12}$$

wieder unbeschadet ihres allgemeinen Charakters.

Die allgemeine Abbildung ist also durch drei wesentliche Konstante gekennzeichnet; denn die vier Koeffizienten der Darstellung (11) lassen sich durch Kürzung auf drei zurückführen, und von den fünf Koeffizienten der Darstellung (12) sind ebenfalls nur drei wesentlich, da einer durch Kürzung und ein zweiter durch die besondere Wahl der beiden konjugierten Anfangsebenen ausgeschieden werden kann.

Die durch die Substitutionen (11) oder (12) vermittelte Abbildung ist wohl bekannt. In jedem zur Hauptachse (x_1- bzw. x_1'-Achse) senkrechten konjugierten Ebenenpaar herrscht Affinität, d. h. die Vergrößerung in Richtung der beiden Nebenachsen (x_2-, x_3- bzw. x_2'-, x_3'-Achsen) ist für ein solches Ebenenpaar konstant, aber für jedes Ebenenpaar im allgemeinen verschieden, da sie von x_1 abhängt. Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß über die Lage der beiden Räume zueinander bei unseren Ableitungen nichts vorausgesetzt ist, sie also zunächst ganz willkürlich ist.

Es läßt sich weiter leicht zeigen, daß der hier bisher ausgeschlossene Fall teleskopischer Abbildung durch die Beziehungen (12) dargestellt werden kann, wenn $a_1 = 0$ gesetzt wird (a_2 und a_3 sind es bereits). Die Abbildungsgleichungen lauten dann:

$$x_1' = \frac{a_{11}}{a_4} x_1, \qquad x_2' = \frac{a_{22}}{a_4} x_2, \qquad x_3' = \frac{a_{33}}{a_4} x_3. \tag{13}$$

Bei teleskopischer Abbildung stehen also beide Räume in affinem Verhältnis. Endlichem ist Endliches, unendlich Fernem unendlich Fernes zugeordnet. Die Vergrößerung in jeder Richtung ist konstant. Die Sonderstellung der x_1-Achse fällt fort; jeder Schar paralleler Ebenen in einem Raume entspricht eine ebensolche im anderen. Bei der Darstellung (13) sind die Koordinatenachsen dadurch festgelegt, daß bei teleskopischer Abbildung im allgemeinen nur einmal drei zueinander rechtwinklige Richtungen existieren, die wieder in ebensolche abgebildet werden, und daß diese ausgezeichneten Richtungen als Achsenrichtungen gewählt sind.

17. Die verschiedenen Arten von Abbildungen entsprechend den Werten der Abbildungskonstanten. Um nun den Charakter der Abbildung für die verschiedenen Werte der Konstanten zu untersuchen, gehen wir zunächst von der

Darstellung (11) aus, und indem zur Abkürzung $\alpha_1 = a_{14}/a_1$, $\alpha_2 = a_{22}/a_1$, $\alpha_3 = a_{33}/a_1$ gesetzt wird, erhalten wir

$$x_1' = \frac{\alpha_1}{x_1}, \qquad x_2' = \alpha_2 \frac{x_2}{x_1}, \qquad x_3' = \alpha_3 \frac{x_3}{x_1}. \tag{11a}$$

Erinnern wir uns des Gesetzes der kollinearen Verwandtschaft, daß in jedem homozentrischen Dingstrahlenbündel drei aufeinander senkrechte Strahlen vorhanden sind, deren Bilder in dem zugehörigen Bildstrahlenbündel ebenfalls aufeinander senkrecht stehen, so heißt das, daß eine rechtwinklige Ecke eines solchen räumlichen Strahlenkreuzes in eine ebensolche abgebildet wird. Dabei können zwei Fälle eintreten. Bringt man zwei entsprechende Kantenpaare von Ding und Bild zur Deckung, so kann entweder das dritte Kantenpaar auch zusammenfallen, man spricht dann von rechtwendiger Abbildung, oder die eine Eckenkante bildet die Verlängerung der anderen; die Abbildung heißt dann rückwendig. Aus Stetigkeitsgründen gilt für den ganzen Abbildungsbereich, daß entweder überall nur rechtwendige oder nur rückwendige Abbildung vorkommt; denn es läßt sich leicht zeigen, daß auch an den Unstetigkeitsstellen, den Brennebenen, eine Änderung des Abbildungscharakters nicht eintritt. Nimmt man z. B. an, daß die Vergrößerung nach allen Richtungen hin gleich 1 ist, so sind bei rechtwendiger Abbildung Ding und Bild kongruent, bei rückwendiger dagegen symmetrisch. Eine Abbildung der ersten Art tritt ein, wenn das Ding eine gerade Anzahl mal an ebenen Spiegeln gespiegelt wird, der zweiten Art bei ungerader Anzahl von Spiegelungen an ebenen Flächen, oder auch allgemeiner: durch beliebig viele Brechungen oder eine gerade Anzahl von Spiegelungen oder durch diese beiden Vorgänge kommt stets eine rechtwendige Abbildung zustande; eine rückwendige dagegen durch eine ungerade Anzahl von Spiegelungen, ob nun dabei auch noch Brechungen vorkommen oder nicht.

Es bleibt nun noch übrig, gewisse Lage- und Richtungsbeziehungen festzustellen, indem den Achsen eine bestimmte positive bzw. negative Richtung zugewiesen wird. Setzt man zunächst als positiven Richtungssinn auf den Hauptachsen die Fortschreitungsrichtung des Lichtes fest, so lassen sich für die Abbildung zwei weitere Unterfälle feststellen: Entweder wächst x_1' mit x_1, d. h. wenn das Ding im Sinne der Lichtrichtung verschoben wird, so bewegt sich das Bild gleichfalls in dieser Richtung; die Abbildung wird dann rechtläufig genannt; oder aber die Bewegungen von Ding und Bild erfolgen entgegengesetzt, bezogen auf die Lichtrichtung; die Abbildung heißt dann rückläufig. Bei rechtläufiger Abbildung ist also

$$\frac{d x_1'}{d x_1} = -\frac{\alpha_1}{x_1^2} > 0 \qquad \text{oder} \qquad \alpha_1 < 0, \tag{14}$$

bei rückläufiger Abbildung dagegen wird

$$\alpha_1 > 0. \tag{14a}$$

Diese zweite Art der Abbildung kann weiterhin hier unberücksichtigt bleiben, da sie bei ununterbrochener Abbildung durch Spiegelung und Brechung an Grenzflächen homogener Körper nicht vorkommt.

Die Zuordnung von Ding- und Bildpunkt auf den Hauptachsen erfolgt dann durch $x_1 \cdot x_1' = \alpha_1 < 0$ stets so, daß zu einem positiven x_1 ein negatives x_1' gehört, und umgekehrt.

Um für die weitere Darstellung zu bequemen Festsetzungen des Richtungssinnes auf den Nebenachsen zu kommen, kann man die x_2- und x_3-Richtung gleichmäßig behandeln, damit bei den wichtigsten optischen Abbildungen, nämlich den zur x_1-Achse drehungssymmetrischen, für die beiden Nebenachsen

identische Verhältnisse erhaltend. In Berücksichtigung dessen, daß eine Punktreihe auf irgendeiner Geraden rechtläufig abgebildet wird, wenn diese Abbildung für die Hauptachse gilt, setzen wir hier fest $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Hierbei tritt der Unterschied zwischen den beiden wesentlich verschiedenen Arten der Abbildung, der rechtwendigen und der rückwendigen, in den Konstanten nicht zutage. Dieser Nachteil unserer Festsetzung wird aufgewogen durch Ersparnis von weitläufigen Vorzeichenbestimmungen bei Betrachtung achsensymmetrischer Abbildungen, denen wir uns nunmehr zuwenden. Auszugehen ist von den Gleichungen (11a), in denen infolge der Festsetzung der Koordinatenrichtungen für alle rechtläufigen Abbildungen ein für allemal

$$\alpha_1 < 0, \qquad \alpha_2 > 0, \qquad \alpha_3 > 0 \tag{15}$$

ist; bei rechtwendiger Abbildung können die Kanten der beiden körperlichen Ecken, gebildet aus den positiven Teilen der Koordinatenachsen, des Ding- bzw. Bildraumes zur entsprechenden Deckung gebracht werden, bei rückwendiger Abbildung dagegen nicht. Setzt man speziell $\alpha_2 = \alpha_3$, so erkennt man aus (11a), daß für beide Nebenachsen völlig gleiche Verhältnisse vorliegen, daß überhaupt jedes zueinander senkrechte Meridianebenenpaar in ein ebensolches abgebildet wird, und damit die Wahl der Nebenachsen willkürlich wird. Auch genügt daher statt der Betrachtung von x_2 und x_3 die von x_2 oder x_3; wir wählen hier x_2.

18. Die linearen Vergrößerungen. Eine wichtige Wirkung optischer Abbildung ist die Änderung der Größe einer Dingstrecke; man nennt das Verhältnis der Dingstrecke zur Bildstrecke die Vergrößerung.

1. Fallen diese Strecken in die Hauptachse, so spricht man insbesondere von Longitudinal-, Axial- oder Tiefenvergrößerung. Dann wird, wenn x_1 und $\bar{x}_1$ bzw. x_1' und $\bar{x}_1'$ die Abszissen der Endpunkte der Ding- bzw. Bildstrecke sind, die Axialvergrößerung gegeben durch

$$\frac{\bar{x}_1' - x_1'}{\bar{x}_1 - x_1} = -\frac{\alpha_1}{x_1 \bar{x}_1} = -\frac{x_1' \bar{x}_1'}{\alpha_1}. \tag{16}$$

Wird die abzubildende Strecke infinitesimal, und führt man die Größe α ein, so wird

$$\frac{d x_1'}{d x_1} = \alpha = -\frac{\alpha_1}{x_1^2} = -\frac{x_1'^2}{\alpha_1}. \tag{17}$$

Da $\alpha_1 < 0$ festgesetzt ist, bleibt immer $\alpha > 0$.

2. Die Vergrößerung von Strecken senkrecht zur Hauptachse wird Lateralvergrößerung oder auch Vergrößerung schlechthin genannt. Sie ist für jedes bestimmte x_1, durch das ja die Lage der achsensenkrechten Ebene, in der die Dingstrecke verläuft, festgelegt ist, konstant, wie groß die Dingstrecke auch sei. Bezeichnet man die Lateralvergrößerung mit β, so wird also

$$\beta = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{\alpha_2}{x_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_1'. \tag{18}$$

Eine in der achsensenkrechten Ebene $x_1 = \text{konst.} = c$ gelegene Zeichnung wird demnach in die Ebene $x_1' = \alpha_1/c$ ähnlich abgebildet mit der Vergrößerung α_2/c. Nicht ganz so einfach ist die Abbildung einer Figur oder Kurve in einer Meridianebene. Sei die Dingkurve gegeben durch $x_2 = f(x_1)$, so ist ihr Bild in der entsprechenden Meridianebene $x_2' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_1' f\left(\frac{\alpha_1}{x_1'}\right)$. Ist f eine lineare Funktion, d. h. $x_2 = f(x_1)$ stellt eine Gerade dar, so ist auch das Bild eine Gerade; stellt z. B. weiter $x_2 = f(x_1)$ einen Kreis mit dem Radius r um den dingseitigen

Brennpunkt dar, so wird $x_2' = \sqrt{(\alpha_2 r/\alpha_1)^2 x_1'^2 - \alpha_2^2}$; das Bild des Kreises ist demnach eine Hyperbel, die für $r = \alpha_1/\alpha_2$ gleichseitig ist.

Aus (17) und (18) läßt sich bilden $\beta^2/\alpha = -\alpha_2^2/\alpha_1$. Für eine durch die Konstanten α_1 und α_2 gegebene Abbildung ist also an jeder Stelle des Raumes das Verhältnis des Quadrates der Lateralvergrößerung zur Tiefenvergrößerung das gleiche.

19. Die Abbildungsgleichungen auf die Brennebenen bezogen. Betrachten wir jetzt einen beliebigen Strahl im Dingraum, der im allgemeinen Fall windschief zur x_1-Achse ist; er möge durch

$$x_\nu = h_\nu - x_1 \operatorname{tang} u_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \tag{19}$$

seine beiden Spuren in der x_1, x_2- bzw. x_1, x_3-Ebene festgelegt sein. Dabei sind in bekannter Weise h_2 bzw. h_3 die Abschnitte der Spurgeraden auf der x_2- bzw. x_3-Achse; u_2 und u_3 die Neigungswinkel dieser Geraden gegen die x_1-Achse; die Vorzeichen der u_2 und u_3 sind allerdings hier nicht in Übereinstimmung mit den Festsetzungen der analytischen Geometrie; sie sollen hier stets kleiner als 90° angenommen sein und dann als positiv gelten, wenn die Spur für positives x_2 bzw. x_3 auf die x_1-Achse zuläuft. Die Spuren des Strahles im Bildraum sind analog:

$$x_\nu' = h_\nu' - x_1' \operatorname{tang} u_\nu' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_1' h_\nu - \alpha_2 \operatorname{tang} u_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \tag{20}$$

so daß folgt

$$h_\nu' = -\alpha_2 \operatorname{tang} u_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \tag{21}$$

$$\operatorname{tang} u_\nu' = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot h_\nu, \qquad \nu = 2, 3. \tag{22}$$

Ist u bzw. u' der Winkel, den der Strahl im Dingraum mit der x_1-Achse bzw. im Bildraum mit der x_1'-Achse einschließt, und h bzw. h' die Entfernung des Durchstoßungspunktes des Ding- bzw. Bildstrahles in der $x_2 x_3$- bzw. $x_2' x_3'$-Ebene vom Koordinatenanfang, so ist

$$\operatorname{tang}^2 u = \operatorname{tang}^2 u_2 + \operatorname{tang}^2 u_3 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tang}^2 u' = \operatorname{tang}^2 u_2' + \operatorname{tang}^2 u_3', \tag{23}$$

$$h^2 = h_2^2 + h_3^2 \quad \text{bzw.} \quad h'^2 = h_2'^2 + h_3'^2, \tag{24}$$

so daß man unter Benutzung von (22) erhält:

$$\operatorname{tang} u' = \overset{(+)}{-} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot h. \tag{25}$$

Sämtliche Dingstrahlen also, die die x_2, x_3-Ebene in Punkten des Kreises $x_2^2 + x_3^2 = h^2$, $x_1 = 0$ durchstoßen, bilden nach der Abbildung mit der Hauptachse des Bildraumes ein und denselben Winkel u'.

Aus (24), (21) und (23) folgt:

$$h' = \overset{(+)}{-} \alpha_2 \operatorname{tang} u. \tag{26}$$

Dingstrahlen, die mit der x_1-Achse den gleichen Winkel einschließen, entsprechen im Bildraume Strahlen, die die x_2', x_3'-Ebene in Punkten treffen, die vom Koordinatenanfang des Bildraumes um die Strecke h' entfernt liegen. Das doppelte Vorzeichen in (25) und (26) ist nur von formaler Bedeutung; für den Fall, daß der Dingstrahl die Achse schneidet, indem also z. B. $u = u_2$ und $h = h_2$ wird, sind die Formeln (21) und (22) unmittelbar anwendbar; man hat demnach in (25) und (26) das negative Vorzeichen zu wählen.

Aus (25) und (26) erhellt auch die geometrische Bedeutung der beiden für unsere Abbildung maßgebenden Konstanten α_1 und α_2; α_2 entspricht einer Strecke und α_1 dem Quadrat einer solchen; um gleichartige Konstanten der

Abbildung zu erhalten, führen wir die Größen f und f' ein, indem gesetzt wird:

$$\alpha_2 = -f \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha_2}{\lambda_2} = -f'. \tag{27}$$

Auf Grund unserer Festsetzungen $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ ist stets $f < 0$ und $f' > 0$. Die Werte f bzw. f' kennzeichnen nunmehr statt α_1 und α_2 die Abbildung und werden Brennweiten, die Unstetigkeitsebenen $x_1 = 0$ bzw. $x_1' = 0$ Brennebene des Ding- bzw. Bildraumes genannt. Die Abbildungsgleichungen (11a) nehmen die Form an

$$x_1' = \frac{f \cdot f'}{x_1}, \qquad x_2' = -f'\frac{x_2}{x_1}, \tag{11b}$$

woraus für α und β folgt

$$\alpha = -\frac{f \cdot f'}{x_1'}, \tag{17a}$$

$$\beta = -\frac{f}{x_1} = -\frac{x_1'}{f'}. \tag{18a}$$

f und f' selbst sind nach (25), (26) und (27) definiert durch

$$f = \frac{h'}{\operatorname{tang} u} \qquad \text{und} \qquad f' = \frac{h}{\operatorname{tang} u'}, \tag{27a}$$

worin h' die Entfernung eines Punktes in der Brennebene von der Hauptachse im Bildraum und u der Neigungswinkel gegen die Hauptachse im Dingraum ist, der die Richtung nach dem jenem Punkte in der bildseitigen Brennebene entsprechenden Punkte in der unendlich fernen Ebene des Dingraumes angibt; analoge Bedeutung haben h und u'.

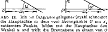


Abb. 13. Ein im Dingraum gelegener Strahl schneidet die Hauptachse in dem vom Brennpunkte O um x_1 entfernten Punkte, bildet mit der Hauptachse den Winkel u und trifft die Brennebene in einem von O um h entfernten Punkte. Die entsprechenden Bestimmungsstücke des zugehörigen Bildstrahles sind x_1', u', h'. O' ist Brennpunkt des Bildraumes.

Ein die Hauptachse schneidender Strahl wird in einen Strahl abgebildet, der im Bildraume ebenfalls die Hauptachse schneidet. Sind die Abszissen dieser Schnittpunkte x_1 bzw. x_1' und benutzt man in wohl nicht mißzuverstehender Weise die Größen u, u', h und h', so wird nach Abb. 13

$$h = x_1 \cdot \operatorname{tang} u,$$

$$h' = x_1' \cdot \operatorname{tang} u'$$

oder unter Benutzung der Definitionsgleichungen (27a) der Brennweiten

$$\frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u} = \frac{x_1}{f'} = \frac{f}{x_1'} = \gamma. \tag{28}$$

γ heißt das Konvergenzverhältnis oder die Winkelvergrößerung und ist konstant für zwei konjugierte, durch x_1 bzw. x_1' gegebene Achsenpunkte, also unabhängig von den Neigungswinkeln u und u'.

Zwischen den drei Vergrößerungswerten α, β und γ bestehen folgende leicht zu verifizierende Zusammenhänge:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{f}{f'}\cdot\frac{1}{\gamma^2}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{f'}{f}\cdot\beta = \frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{f'}{f}, \\ \beta\cdot\gamma = -\frac{f}{f'}, \qquad \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Damit ist die durch die Gleichungen (11a) vermittelte Abbildung hinlänglich diskutiert; es bleibt nur noch übrig, im Anschluß an die auf konjugierte Ebenen bezogenen Abbildungsgleichungen die bisher von der Betrachtung ausgeschlossene teleskopische Abbildung zu untersuchen; dabei leiten wir auch die für die nichtteleskopische Abbildung gültigen Gleichungen ab, die an sich natürlich nichts Neues bringen, aber die bekannten Ergebnisse in einer Form darstellen, die für viele Aufgaben der geometrischen Optik zweckmäßig zu gebrauchen ist. Wir beschränken uns auch hier auf achsensymmetrische Abbildungen.

20. Die Abbildungsgleichungen auf konjugierte Ebenen bezogen. Die teleskopische Abbildung. Den Ausgang hätten die Gleichungen (12) zu bilden, und man hätte zunächst wieder die die Abbildung kennzeichnenden Eigenschaften und Beziehungen aufzusuchen; wir benutzen aber hier der Einfachheit halber die schon gewonnenen Einsichten und verlegen nur durch Parallelverschiebung längs der Hauptachse unsere x_2, x_3- bzw. x_2', x_3'-Ebene an eine solche im Endlichen gelegene Stelle, daß die eine Ebene das Bild der anderen ist. Die x_2- bzw. x_2'-Werte bleiben dann erhalten, für die x_1- bzw. x_1'-Werte ergeben sich die Transformationsformeln

$$\bar{x}_1 = x_1 - a \qquad \text{und} \qquad \bar{x}_1' = x_1' - a'. \tag{30}$$

Wir wollen uns hier zunächst für die nichtteleskopische Abbildung auf spezielle Werte von a bzw. a' beschränken, indem wir setzen $a = -f$ und $a' = -f'$; die Beziehungen werden dann besonders einfach; die Ebenen $\bar{x}_1 = 0$ bzw. $\bar{x}_1' = 0$ heißen dann Hauptebenen, über deren Bedeutung später noch gesprochen werden wird. Daß diese Wahl von a und a' erlaubt ist, erhellt daraus, daß $a \cdot a' = f \cdot f'$ ist, also in der Tat die Abbildungsgleichung (11b) erfüllt wird; die zu a und a' gehörigen Ebenen sind demnach konjugiert. Es wird nunmehr unter Benutzung der Gleichung (11b) $(\bar{x}_1 - f)(\bar{x}_1' - f') = ff'$ oder

$$\frac{f}{\bar{x}_1} + \frac{f'}{\bar{x}_1'} = 1 \tag{31}$$

und weiter

$$\beta = \frac{f}{f - \bar{x}_1} = \frac{f' - \bar{x}_1'}{f'} \tag{18b}$$

und

$$\gamma = \frac{\bar{x}_1 - f}{f'} = \frac{f}{\bar{x}_1' - f'}. \tag{28a}$$

Um bei der teleskopischen Abbildung, für die, wie wir sehen werden, die Brennweiten unendlich groß sind, den Grenzwert bilden zu können, ist die spezielle Wahl $a = -f$ und $a' = -f'$ nicht angängig. Geht man wieder von (30) aus und führt die in den konjugierten Achsenpunkten a, a' herrschende Vergrößerung β_0 ein, so ist

$$a = -\frac{f}{\beta_0} \qquad \text{und} \qquad a' = -\beta_0 \cdot f',$$

und es wird

$$x_1 \cdot x_1' = \left(\bar{x}_1 - \frac{f}{\beta_0}\right) \cdot (\bar{x}_1' - \beta_0 \cdot f') = f \cdot f' \qquad \text{oder} \qquad \frac{f}{\beta_0}\frac{1}{\bar{x}_1} + \frac{\beta_0 f'}{\bar{x}_1'} = 1, \tag{32}$$

$$\beta = \frac{f\beta_0}{f - \bar{x}_1\beta_0} = \frac{\beta_0 f' - \bar{x}_1'}{f'} \tag{18c}$$

und

$$\gamma = \frac{\beta_0 \bar{x}_1 - f}{\beta_0 \cdot f'} = \frac{f}{\bar{x}_1' - \beta_0 f'}. \tag{28b}$$

Schreibt man (32) $\frac{\bar{x}_1'}{\bar{x}_1} + \frac{\beta_0^2 f'}{f} = \frac{\beta_0}{f} \cdot \bar{x}_1'$ und vergleicht diese Beziehung mit (13),

so erkennt man, daß für die teleskopische Abbildung $1/f = 0$ und $f'/f = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1 \cdot \beta_0^2}$ werden, d. h. f und f' sind unendlich groß, ihr Verhältnis aber endlich, die für die teleskopische Abbildung maßgebenden Gleichungen lauten also

$$\frac{x_1'}{x_1} = -\beta_0^2 \cdot \frac{f'}{f}, \qquad \beta = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \beta_0, \qquad \gamma = -\frac{f}{\beta_0 f'} = \gamma_0. \tag{33}$$

Wenn man ein unendlich fernes Ding in ein unendlich fernes Bild abbildet, kann natürlich nur noch von der Winkelvergrößerung gesprochen werden.

Die rechte Seite der ersten Gleichung von (33) gibt unmittelbar das Verhältnis konjugierter Abszissen, also, da

$$\beta = \beta_0 = -\frac{f}{\gamma_0 \cdot f'}$$

ist,

$$\alpha = -\frac{f}{\gamma_0^2 \cdot f'} = \alpha_0. \tag{34}$$

Für alle drei Vergrößerungen wird auch hier

$$\frac{\alpha_0 \cdot \gamma_0}{\beta_0} = 1. \tag{35}$$

Der Index 0 ist hier und im Vorhergehenden gesetzt, weil die Vergrößerungen konstant sind.

21. Die Grundpunkte und Grundebenen eines optischen Systems. Aus den Gleichungen für α, β und γ erkennt man, daß bei beliebiger Änderung des durch (11b) miteinander verknüpften x_1 und x_1' β und γ jeden zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegenden Wert annehmen können, α hingegen kann infolge der Beschränkung auf rechtläufige Abbildung nur positiv sein, die α-Werte liegen daher zwischen 0 und $+\infty$.

Dort, wo die Vergrößerungen Grenzwerte annehmen oder auch $+1$ werden, sind die zugehörigen Achsenpunkte bzw. die achsensenkrechten Ebenen in diesen besonders geeignet, den Abbildungsvorgang eines optischen Systems zu kennzeichnen.

Für $\alpha = \infty$ wird $\beta = \infty$, $\gamma = 0$, $x_1 = 0$ und $x_1' = \infty$, und für $\alpha = 0$ ergibt sich $\beta = 0$, $\gamma = \infty$, $x_1 = \infty$ und $x_1' = 0$. Im ersten Fall wird die Brennebene des Dingraumes in die unendlich ferne Ebene des Bildraumes abgebildet, im zweiten Falle die unendlich ferne Ebene des Dingraumes in die Brennebene des Bildraumes. Für $\alpha = 1$ lassen sich, wie aus (17a) zu erkennen, zwei Werte x_1 finden. Es gibt demnach für jede Abbildung zwei Paare konjugierte Achsenpunkte, in denen bei einer kleinen Verschiebung des Dings längs der Hauptachse auch das Bild sich um denselben Betrag längs der Hauptachse verschiebt.

Die zu $\beta = +1$ gehörigen Achsenpunkte bzw. achsensenkrechten Ebenen werden nach GAUSS Hauptpunkte bzw. Hauptebenen genannt. Diese beiden Ebenen werden aufrecht und gleich groß ineinander abgebildet. Die auf sie bezogenen Abbildungsgleichungen sind unter (31) angegeben. (31) wird häufig in der Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{36}$$

für eine unendlich dünne Linse benutzt, nachdem der Abstand eines Gegenstandes vor der Linse $a = -\bar{x}_1$, der des Bildes hinter der Linse $b = x_1'$ und $f = -f'$ gesetzt ist. Für die Hauptpunkte wird $\alpha = -f'/f$ und $\gamma = -f/f'$.

Die $\beta = -1$ entsprechenden Punkte bzw. Ebenen werden nach A. TÖPLER als die negativen Hauptpunkte und negativen Hauptebenen definiert. Letztere

werden in gleicher Größe, aber verkehrt ineinander abgebildet. Es wird

$$\alpha = -\frac{f'}{f}, \qquad \gamma = \frac{f}{f'}, \qquad x_1 = f, \qquad x_1' = f'.$$

Schließlich bleibt noch übrig $\gamma = +1$ oder $\gamma = -1$. Die zu diesem γ gehörigen Achsenpunkte zeichnen sich also dadurch aus, daß ein von einem solchen Achsenpunkt ausgehender Dingstrahl mit der Hauptachse den gleichen oder entgegengesetzt gleichen Winkel einschließt wie sein Bildstrahl mit der Hauptachse des Bildraumes. Die Punkte mit $\gamma = +1$ heißen nach J. B. LISTING Knotenpunkte, die mit $\gamma = -1$ nach A. TÖPLER negative Knotenpunkte. Für $\gamma = +1$ wird

$$\alpha = -\frac{f}{f'} = \beta, \; x_1 = f' \qquad \text{und} \qquad x_1' = f,$$

und für $\gamma = -1$ erhält man

$$\alpha = -\frac{f}{f'}, \qquad \beta = \frac{f}{f'}, \; x_1 = -f' \qquad \text{und} \qquad x_1' = -f.$$

Von den hier genannten Punktepaaren (es steht übrigens nichts im Wege, bei besonderen Untersuchungen sich auf andere Punkte, die für den Sonderfall vielleicht geeigneter sind, zu beziehen) werden für die Kennzeichnung der Abbildung am häufigsten als Bezugspunkte die Hauptpunkte und die Brennpunkte gewählt. Die angegebenen Bezeichnungen, wie Hauptpunkte usw. sind bei ihrer Einführung zunächst für Linsenfolgen bestimmt gewesen, man hat sich daran gewöhnt, sie auch bei der allgemeinen optischen Abbildung zu verwenden.

Durch (33) bzw. durch (32) oder (11b) sind die charakteristischen Beziehungen der achsensymmetrischen Abbildung festgelegt, sei sie teleskopisch oder nicht. Man ist also mit ihrer Hilfe in der Lage, in jedem Falle den Abbildungsvorgang erschöpfend zu untersuchen.

22. Die Lagebeziehung der Abbildungsräume. Über die Lage des Ding- und Bildraumes zueinander ist bisher keine Annahme gemacht. Die in der Praxis meist erfüllte ist die, daß die beiden Hauptachsen in einer Geraden liegen. Ihre physikalische Verwirklichung findet diese Abbildung z. B. durch zentrierte brechende oder auch spiegelnde Kugelflächen oder allgemeiner durch zentrierte Rotationsflächen. Setzt man also voraus, daß die Hauptachsen der einzelnen Abbildungsräume weder versetzt noch geneigt zueinander sind, so ist klar, daß eine die Hauptachse enthaltende Ebene, eine Meridianebene, mit der ihr konjugierten zusammenfällt, insbesondere also die x_1, x_2-Ebene mit der x_1', x_2'-Ebene, und die x_2-Achse wird parallel der x_2'-Achse. Dasselbe ist selbstverständlich von der x_3- und x_3'-Achse zu sagen. Es sind dann folgende beiden Fälle unterscheidbar:

1. Die Seitenachsen des Ding- und Bildraumes sind nicht nur parallel, sondern auch gleichgerichtet.

2. Die Seitenachsen des Ding- und Bildraumes sind wohl parallel, aber entgegengesetzt gerichtet.

Im ersten Falle spricht man von einem kollektiven System; die durch $x_1 > 0$ bestimmte Hälfte des Dingraumes wird aufrecht ($\beta > 0$), die andere durch $x_1 < 0$ gekennzeichnete Hälfte des Dingraumes wird verkehrt ($\beta < 0$) abgebildet.

Im zweiten Falle heißt das System dispansiv; auch hier wird für $x_1 > 0$ $\beta > 0$ und für $x_1 < 0$ $\beta < 0$; da aber jetzt die Richtung der x_2'-Achse der der x_2-Achse entgegengesetzt ist, so wird der Dingraumteil mit $x_1 > 0$ verkehrt und der andere zu $x_1 < 0$ gehörige Teil des Dingraumes aufrecht abgebildet.

Berücksichtigt man weiter, daß in beiden Fällen die Abbildung rechtwendig oder rückwendig sein kann, so werden in Übereinstimmung mit dem auf S. 27

Gesagten für kollektive wie dispansive Systeme bei rechtwendiger Abbildung die x_1-Achse und die x_1'-Achse gleichgerichtet, bei rückwendiger Abbildung aber entgegengesetzt gerichtet sein. Nur bei rechtwendiger Abbildung vermittels eines kollektiven Systems sind also die drei Koordinatenachsen des Ding- und Bildraumes gleichgerichtet; will man zu Koordinatenachsen gelangen, die bei jeder Abbildung im Ding- und Bildraum gleichgerichtet sind, so ist unsere ursprüngliche Festsetzung $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 > 0$ aufzugeben. Es ergibt sich dann für die drei Konstanten folgendes Schema von Ungleichungen: Für kollektive Systeme ist $\alpha_2 = \alpha_3 > 0$, für dispansive Systeme ist $\alpha_2 = \alpha_3 < 0$; außerdem ist für rechtwendige Abbildung $\alpha_1 < 0$, bei rückwendiger $\alpha_1 > 0$. Unter Berücksichtigung von $\alpha_1 = f \cdot f'$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -f$ sind dann hinsichtlich der Vorzeichen der Brennweiten folgende Fälle unterscheidbar. Es ist

1. bei rechtwendiger Abbildung durch
   a) kollektive Anordnungen $f < 0$, $f' > 0$,
   b) dispansive Anordnungen $f > 0$, $f' < 0$;
2. bei rückwendiger Abbildung durch
   a) kollektive Anordnungen $f < 0$, $f' < 0$,
   b) dispansive Anordnungen $f > 0$, $f' > 0$.

Im übrigen ist hier darauf zu verweisen, daß die Vorzeichen der Brennweiten von anderen Autoren auch anders festgelegt werden, worauf also bei Benutzung anderer Bücher zu achten ist.

Es sei bemerkt, daß die Abbildungsgleichungen (11b) auch jetzt, also wenn sie bezogen werden auf Koordinatensysteme, deren sich entsprechende Achsen in beiden Räumen parallel und gleichgerichtet sind, gültig bleiben, und zwar auch hinsichtlich des Vorzeichens.

28. Graphische Bildbestimmung. Jede Abbildung ist charakterisiert durch vier Bestimmungsstücke, z. B. durch die Lage der Brennebenen und die Größe der Brennweiten, oder durch die Lage der Haupt- und Brennebenen, oder durch zwei andere Paare von Grundebenen oder Grundpunkten. Mit Hilfe der Grundpunkte bzw. der Grundebenen kann man leicht zu einem Dingpunkt oder Dingstrahl den Bildpunkt oder Bildstrahl durch Zeichnung finden. Meist werden die Brennpunkte und Hauptpunkte zum Ausgang der Zeichnung genommen. In Abb. 30 ist die zeichnerische Auffindung des Bildpunktes P' zu Dingpunkt P mit Hilfe der genannten Punkte dargestellt. F bzw. H sind die dingseitigen, F' bzw. H' die bildseitigen Brenn- bzw. Hauptpunkte. Läßt man nun von P zwei Strahlen ausgehen, einen, der durch F geht, und einen zweiten, der parallel zur Hauptachse verläuft, so werden diese die dingseitige durch H gehende Hauptebene in zwei Punkten Q und R treffen und nach Durchsetzung der optischen Anordnung durch die in der bildseitigen Hauptebene gelegenen Punkte R' und Q' gehen, $R'P'$ ist dann das Bild von PR, und die Parallele zur Hauptachse durch Q' ist das Bild von PQ; der Schnitt beider Bildgeraden in



Abb. 14. Das abbildende System mit den Brennpunkten F, F' und den Hauptpunkten H, H' bildet P in den unendlich fernen Punkt P' und den unendlich fernen Punkt Q in den Punkt Q' ab.

P' ist das gesuchte Bild zu P. In Abb. 14 ist schematisch die Abbildung des Brennebenenpunktes P in den unendlich fernen Punkt P' und des unendlich fernen Punktes Q in den Brennebenenpunkt Q' gezeigt. Physikalische Beispiele für die Zeichenverfahren finden sich in Ziff. 39.

24. Die Zusammensetzung von Abbildungen zweier endlicher Linsenfolgen. Die abbildenden Systeme bestehen meist aus einer Mehrzahl von brechenden, mitunter auch spiegelnden Flächen. Der durch sie bewirkte Gesamtabbildungsvorgang kann oft mit Vorteil in Teilabbildungen zerlegt werden, etwa so, daß das Ding zunächst von der ersten Fläche abgebildet wird und das so erzeugte Bild, für die zweite Fläche als Ding betrachtet, durch diese erneut abgebildet



Abb. 15. 2 Folgen mit im Endlichen gelegenen Brennebenen F_1 und F_1' bzw. F_2 und F_2' und mit gemeinschaftlicher Achse bilden eine Folge mit gleicher Achse und den Brennebenen F und F'. Δ ist der optische Abstand. Der im Abstand h parallel zur Achse einfallende Strahl geht durch den bildseitigen Brennpunkt der ersten Folge, mit der Achse den Winkel u_1' einschließend, und durch den bildseitigen Brennpunkt der Gesamtfolge, mit der Achse den Winkel u' bildend.

wird, für die dritte Fläche wiederholt sich der gleiche Vorgang, und so geht es weiter, bis schließlich das von der vorletzten Fläche entworfene Bild durch die letzte Fläche in das endgültige, von der ganzen Flächenfolge erzeugte Bild des ursprünglichen Dinges abgebildet wird. Ebenso wie man oft eine Abbildung in eine Reihe von Einzelabbildungen zerlegen kann, ist es häufig auch notwendig, umgekehrt eine Reihe von Teilabbildungen zu einer einzigen zusammenzusetzen. Wie man dabei vorgehen kann, sei hier an den Sonderfällen der Zusammensetzung zweier beliebiger Einzelfolgen und der Zusammensetzung beliebig vieler nicht teleskopischer Einzelfolgen erörtert. Die in den letzten Betrachtungen gemachten Voraussetzungen achsensymmetrischer Abbildung und des Zusammenfallens der Hauptachsen des Ding- und Bildraumes sollen aufrechterhalten bleiben, und zwar sowohl für die Einzelfolgen als auch für die Gesamtfolge.

Wir betrachten zunächst die Zusammensetzung zweier nicht teleskopischen Abbildungen zu einer Gesamtabbildung. Es soll also, wie aus Abb. 15 ersichtlich, zu zwei Einzelfolgen, die durch ihre Brennebenen F_1 und F_1' bzw. F_2 und F_2' und ihre Brennweiten f_1 und f_1' bzw. f_2 und f_2' gegeben sind, die Gesamtfolge bestimmt werden, wenn die Lage der beiden Einzelfolgen zueinander durch den sog. optischen Abstand Δ festgelegt ist; Δ ist definiert als Abstand der dingseitigen Brennebene der zweiten Folge von der bildseitigen Brennebene der ersten Folge, demnach ist $\Delta = F_1' F_2$. Die Aufgabe ist gelöst, wenn die Brennebenen F und F' und die Brennweiten f und f' der Gesamtfolge gefunden sind. Setzt man $F_2' F' = \xi_1'$ und $F_1 F = \xi_1$, so wird offenbar nach (11 b) $\xi_1' \cdot (-\Delta) = f_2 \cdot f_2'$, da ja F' das Bild von F_1' entworfen durch die zweite Folge sein muß, oder

$$\xi_1' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}. \tag{37}$$

Betrachtet man F als Bild von F_2 entworfen durch die erste Folge, so ergibt sich analog

$$\Delta \cdot \xi_1 = f_1 \cdot f_1' \qquad \text{oder} \qquad \xi_1 = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta}. \tag{38}$$

Durch ξ_1 und ξ_1' ist die Lage der beiden Brennebenen F und F' bestimmt.

Es bleibt noch übrig, f und f' zu berechnen. Zur Bestimmung von f', das ja durch $f' = h/\operatorname{tang} u'$ definiert wird, denke man sich einen im Dingraum parallel zur Hauptachse im Abstand h von dieser verlaufenden Strahl; nach Durchschreiten der ersten Folge geht er durch den Schnittpunkt der Brennebene F_1' und der Hauptachse, mit dieser etwa den Winkel u_1' einschließend, wobei $\operatorname{tang} u_1' = h/f_1'$ ist. Dieser Strahl im Bildraum der ersten Folge wird durch die zweite Folge so abgebildet, daß er durch den Schnitt der Brennebene F' und der Hauptachse geht, mit dieser den Winkel u' bildend. Nun ist nach (28)

$$\frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u_1'} = -\frac{\Delta}{f_2'} = \frac{f_1'}{f'} \qquad \text{oder} \qquad f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}. \tag{39}$$

Ebenso findet man durch rückwärtige Verfolgung eines Strahles, der in dem Bildraume der Gesamtfolge achsenparallel verläuft,

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}. \tag{40}$$

Durch (37), (38), (39) und (40) ist die Abbildung der Gesamtfolge erschöpfend gekennzeichnet. Durch Variierung des optischen Abstandes Δ kann man demnach der Brennweite der Gesamtfolge jeden beliebigen Wert geben. Gebrauch gemacht wird von dieser Eigenschaft z. B. bei solchen photographischen Teleobjektiven, die, aus einem sammelnden Vorderglied und einem zerstreuenden Hinterglied, so gebildet werden, daß der Abstand zwischen beiden Gliedern verändert werden kann.

In dem besonderen Falle, daß $\Delta = 0$ wird, d. h. daß die hintere Brennebene der ersten Folge mit der vorderen der zweiten Folge zusammenfällt, werden f und f' unendlich, die Abbildung also teleskopisch. Das Verhältnis der Brennweiten f und f' wird für $\lim \Delta = 0$:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_2}. \tag{41}$$

Erinnert man sich, daß $\beta = x_2'/x_2$ ist, und läßt daher von einem Punkte des Dingraumes, der von der Hauptachse um die Strecke x_2 entfernt ist, einen achsenparallelen Strahl ausgehen, so geht dieser durch den Schnittpunkt der Brennebene F_1' bzw. F_2 und der Hauptachse mit dieser etwa den Winkel w bildend und verläßt schließlich die Gesamtfolge als Bildstrahl, der im Abstand x_2' parallel zur Achse verläuft. Es ist demnach

$$\beta = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_2'}{\operatorname{tang} w} : \frac{x_2}{\operatorname{tang} w} = \frac{f_2}{f_1} = \beta_0. \tag{42}$$

Nach (33) und (41) wird

$$\gamma = \gamma_0 = \frac{f_1}{f_2}. \tag{43}$$

Die Zuordnung konjugierter Achsenpunkte erfolgt nach (33) und (41) durch

$$\frac{\bar{x}_1'}{\bar{x}_2} = \frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_1'}, \tag{44}$$

wobei $\bar{x}_2$ und $\bar{x}_1'$ von konjugierten Punkten aus zu rechnen sind; ein Paar solcher konjugierter Achsenpunkte der Gesamtfolge sind der vordere Brennpunkt F_1 der ersten und der hintere Brennpunkt F_2' der zweiten Folge.

25. Die Zusammensetzung von Abbildungen zweier Folgen, von denen mindestens eine teleskopisch ist. Nehmen wir zunächst an, eine der beiden Folgen sei teleskopisch, etwa die erste. Dann fällt der hintere Brennpunkt der Gesamtfolge mit dem hinteren Brennpunkt der zweiten Folge zusammen. Der vordere Brennpunkt der Gesamtfolge ist das Bild des vorderen Brennpunktes der zweiten Folge, das durch die teleskopische erste Folge in den Dingraum entworfen wird. Um dieses Bild zu finden, nehme man an, daß es von einem Achsenpunkt P im Dingraum der teleskopischen Folge den Abstand a habe, wird P durch diese erste Folge in P' abgebildet, so sei die Lage der zweiten zur ersten Folge durch e, den Abstand der vorderen Brennebene der zweiten Folge von P' festgelegt; das Verhältnis der unendlich großen Brennweiten der ersten Folge sei $v_1 = f_1'/f_1$. Dann ist, wenn für die erste Folge die Lateralvergrößerung mit β_1 und die Winkelvergrößerung mit γ_1 bezeichnet wird, nach (33)

$$a = -\frac{e}{\beta_1^2 \cdot v_1} = -e\,\gamma_1^2 v_1, \tag{45}$$

wodurch also auch die vordere Brennebene der Gesamtfolge festgelegt ist. Definiert man die Brennweite der Gesamtfolge im Bildraum, wie üblich, durch $f' = h/\tan u'$, so ergibt sich

$$f' = -v_1\gamma_1 f_2' = \frac{f_2'}{\beta_1}. \tag{46}$$

Analog wird für die dingseitige Brennweite der Gesamtfolge:

$$f = \gamma_1 \cdot f_2 = -\frac{f_2}{v_1 \cdot \beta_1}. \tag{47}$$

Damit ist auch die Gesamtfolge festgelegt. Wäre die zweite Folge teleskopisch und hätte die erste Folge endliche Brennweiten, so sind die charakteristischen Größen sinngemäß umgekehrt zu bestimmen.

Der letzte mögliche Fall bei der Zusammensetzung zweier Folgen ist der, daß beide Folgen teleskopisch sind; dann ist es auch die Gesamtfolge. Sind die beiden Folgen bezüglich festgelegt durch die Werte β_1 bzw. β_2, γ_1 bzw. γ_2, $v_1 = f_1'/f_1$ bzw. $v_2 = f_2'/f_2$, durch die Lage je eines Paares konjugierter Punkte P_1, P_1' bzw. P_2, P_2', und ist die Lage der beiden Folgen zueinander durch den Abstand $P_1'P_2 = e$ gegeben, so wird für die Gesamtfolge:

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \qquad \text{und} \qquad \gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2. \tag{48}$$

Von in bezug auf die Gesamtfolge konjugierten Punkten lassen sich leicht sogar zwei Paare angeben. Der Punkt P_1 wird nämlich durch die Gesamtfolge in einen Punkt abgebildet, der von P_2' um $a_1' = -v_2 e \beta_2^2$ entfernt ist, ebenso wird P_2' durch die Gesamtfolge in umgekehrter Richtung in einen Punkt abgebildet, der von P_1 um $a_2 = -\frac{e}{v_1 \beta_1^2}$ entfernt liegt.

Damit sind alle Möglichkeiten, die bei der Zusammensetzung zweier Teilfolgen vorkommen können, erschöpft. Man kann das gefundene Ergebnis umkehren und jede nichtteleskopische Abbildung in zwei nichtteleskopische oder in eine nichtteleskopische und eine teleskopische zerlegen; ebenso läßt sich eine teleskopische Abbildung in zwei teleskopische aufteilen oder auch in zwei nichtteleskopische, deren optischer Abstand $\Delta = 0$ wird.

26. Die Zusammensetzung der Abbildungen beliebig vieler, endlicher Folgen. Wendet man die angestellten Betrachtungen auf beliebig viele, etwa k Folgen, die der Einfachheit halber hier sämtlich als nichtteleskopisch angenommen seien, an, so erhält man als ξ_2, das den Abstand der vorderen Brenn-

ebene der Gesamtfolge von der vorderen Brennebene der ersten Folge angibt

$$\xi_1 = \cfrac{f_1 f_1'}{\Delta_1 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_2 + \cfrac{\vdots}{\Delta_{k-2} + \cfrac{f_{k-1} f_{k-1}'}{\Delta_{k-1}}}}} \tag{49}$$

und als ξ_1' den Abstand der hinteren Brennebene der Gesamtfolge von der hinteren Brennebene der letzten Einzelfolge:

$$\xi_1' = -\cfrac{f_k f_k'}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} f_{k-1}'}{\Delta_{k-2} + \cfrac{\vdots}{\Delta_2 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_1}}}}. \tag{50}$$

Darin sind die f_ν bzw. f_ν' die vorderen bzw. hinteren Brennweiten der ν-ten Einzelfolge und die Δ_ν sind die Abstände des hinteren Brennpunktes dieser Folge und des vorderen Brennpunktes der $(\nu+1)$-ten Einzelfolge.

Die bildseitige Brennweite f' der Gesamtfolge — die dingseitige ist ganz entsprechend ausdrückbar — wird

$$f' = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{\varrho=1}^{k} f_\varrho'}{\prod_{\varrho=1}^{k-1} (\Delta_\varrho - \sigma_\varrho')}, \tag{51}$$

worin σ_ϱ' als Abstand der hinteren Brennebene des aus den ersten ϱ Folgen gebildeten Abbildungssystems von der hinteren Brennebene der ϱ-ten Folge definiert ist, so daß

$$\sigma_{\varrho+1}' = -\frac{f_{\varrho+1} f_{\varrho+1}'}{\Delta_\varrho - \sigma_\varrho'} \tag{52}$$

ist. σ_1' wird dabei selbstverständlich gleich 0, da in dem Falle $\varrho = 1$ die ϱ-te Folge und das aus den ersten ϱ Teilfolgen zusammengesetzte Abbildungssystem identisch sind und daher auch ihre hinteren Brennebenen zusammenfallen. Damit sind die zur Kennzeichnung der aus k nichtteleskopischen Folgen zusammengesetzten Gesamtfolge notwendigen Größen ξ_1, ξ_1' f' und f bestimmt.

27. Die Zusammensetzung der Abbildung durch Folgen, die keine gemeinsame Achse haben. Nicht selten kommt es in der Praxis vor, daß sich Zusammensetzungen von Teilfolgen notwendig machen, deren Achsen nicht in einer Geraden liegen, sondern z. B. durch Spiegelungen geknickt werden (Prismenfernrohre usw.). In allen diesen Fällen erscheint es vielleicht am zweckmäßigsten, um den Abbildungsvorgang zu untersuchen, auf die Abbildungsgleichungen (11 b) zurückzugreifen, die ja für ganz beliebige Lage der Abbildungsräume zueinander gültig sind. Bei Anwendung dieser Gleichungen ist stets $f < 0$ und $f' > 0$. Wenn daher z. B. bei der Zusammensetzung Teilfolgen dabei sind, die etwa wie die hier zuletzt behandelten Abbildungsvorgänge mit gemeinsamer Achse auf Koordinatensysteme bezogen sind, deren Achsen in den verschiedenen Räumen für jede beliebige Art der Folge entsprechend parallel und gleichgerichtet sind, so ist es unbedingt notwendig, die Vorzeichen der Brennweiten, wie sie sich für die verschiedenen Koordinatensysteme ergeben, miteinander in Einklang zu bringen, damit keine Fehler entstehen. Ob man dabei an den hier gewählten Vorzeichen festhält oder eine andere Wahl für zweckmäßiger erachtet, ist nicht erheblich.

C. Realisierung der Abbildung durch Kugelflächen.

Von
W. Merté, Jena.

Einleitung.

Die allgemeinen Theorien, die in den vorhergehenden Abschnitten betrachtet wurden, sind wesentlich gefördert worden durch den Bau der optischen Werkzeuge, denn einmal sind diese wichtige Einrichtungen zur Prüfung jener Theorien, in erster Linie aber war die Entwicklung der theoretischen Kenntnisse notwendig, um die fortschreitende Vervollkommnung der mannigfaltigen optischen Instrumente überhaupt erst herbeizuführen. Waren es vorher einzelne hervorragende Gelehrte wie Gauss, Seidel usw., die rechnend die beim Bau optischer Anordnungen auftretenden Probleme zu meistern suchten, so werden in dem letzten Entwicklungsabschnitt des optischen Werkzeugbaues, zu dem auch unsere Zeit zu zählen ist, besonders durch die glänzenden rechnerischen Erfolge Abbes angeregt, überall in der Welt, wo optische Instrumente gefertigt werden, rechnerische Untersuchungen zur Grundlage der Herstellung von Fernrohren, Mikroskopen, Brillen, photographischen Objektiven usw. angestellt. Die Zeiten, wo man nur durch empirisches Tatonnement beste optische Leistung zu erzielen strebte, sind endgültig vorbei. Allerdings ist auch heute noch die nachträgliche Überprüfung des theoretisch erwarteten Erfolges durchaus notwendig und mitunter das Ergebnis nicht ganz jener Erwartung entsprechend, da es meist in der Natur des zu lösenden Problems liegt, mit unseren heutigen rechnerischen Hilfsmitteln nicht sämtliche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die gewünschte Güte der Abbildung finden zu können.

Die einzelnen Abbildungsfehler, wie sphärische Aberrationen, Koma usw., sind möglichst auf solche Werte herabzudrücken, daß sie für die zu fordernde optische Leistung nicht störend werden. Dabei kommt es selbstverständlich ganz auf diese selbst an, welches Kompromiß zwischen den verschiedenen Abbildungsfehlern das günstigste ist. In der Regel handelt es sich um die Abbildung von einer Ebene in eine Ebene etwa so, daß man für ein Fernrohr die unendlich ferne Ebene des Dingraumes in die unendlich ferne Ebene des Bildraumes abbildet, für ein Mikroskop eine endliche Ebene des Dingraumes in die unendlich ferne Ebene des Bildraumes, für ein photographisches Objektiv die unendlich ferne Ebene des Dingraumes in eine endliche Ebene (Brennebene) des Bildraumes usw. Das sind natürlich keineswegs die verschiedenen Möglichkeiten ausschöpfende Beispiele; die zur Abbildung gelangenden Flächen können auch gekrümmt sein oder z. B. ein photographisches Objektiv für die Abbildung zweier endlich entfernter Ebenen in einander korrigiert sein.

Für die große Fülle der verschiedenen optischen Aufgaben sind durch die Kunst des rechnenden Optikers in mühsamer Arbeit zahlreiche Folgen von brechenden und spiegelnden Flächen gefunden worden, die jene Aufgaben mit hinreichender Abbildungsgüte lösen. Ganz überwiegend werden als spiegelnde oder brechende Flächen Kugelflächen gewählt, da ihre einwandfreie Herstellung verhältnismäßig leicht ist. Wir beschränken uns daher hier im wesentlichen auf Betrachtung der Abbildung durch Kugelflächen, später soll auch in einem kurzen Abschnitt auf die Abbildung durch nicht sphärische Flächen[1] eingegangen werden.

[1] S. H. Boegehold in Kap. 1, d) S. 156.

Außer den Abbildungsfehlern, die durch den jeweilig gewählten Korrektionszustand bedingt sind, kommen bei der Leistung eines optischen Instrumentes noch Fehler der Ausführung in Frage, wie Flächengenauigkeit, Ausrichtung der Flächen gegeneinander, Glasbeschaffenheit der Linsen usw. Es soll hier genügen, an solche technologischen Probleme erinnert zu haben.

Das Material, aus dem die optischen Flächen herausgearbeitet werden, ist, wenn man von den spiegelnden Flächen, die häufig aus Metall gebildet werden, absieht, Glas, und zwar vorwiegend optisches Glas, dessen optische Eigenschaften festgelegt werden durch seine Brechungszahl und seine Dispersion. Für besondere Zwecke kommen auch Linsen aus anderen Stoffen vor, z. B. aus Quarz, wenn es sich etwa darum handelt, daß möglichst viel kurzwelliges Licht von den Linsen hindurchgelassen wird. Das zur Verwendung kommende Glas muß frei von Schlieren und Spannungen sein, damit nicht durch mangelnde Homogenität und Isotropie der Strahlengang störend beeinflußt wird. Dagegen sind kleine Bläschen und Steinchen in den Linsen oft belanglos, da durch diese in der Regel nichts weiter als ein geringfügiger Lichtverlust bewirkt wird.

a) Abbildung durch dünne Bündel.

28. Bestimmung der sagittalen und tangentialen Schnittweiten an einer brechenden Kugelfläche. Lassen wir, wie in nebenstehender Abb. 16 skizziert von Punkt P ausgehend, einen Lichtstrahl auf die brechende Fläche F, die zwei Medien mit den Brechungszahlen n und n' trennt, fallen, so wird nach Durchgang durch A der Lichtstrahl in der Richtung AP' weiter verlaufen und der gesamte optische Weg von P nach P' $nl + n'l'$ betragen. Verschiebt man den Einfallspunkt von A aus auf der Fläche F um den kleinen Wert ds, so muß nach dem Satz von FERMAT die Variation des optischen Weges $d(nl + n'l')$ verschwinden. Nun mag gesetzt werden

$$\left.\begin{aligned} nl + n'l' + d(nl + n'l') &= nl + n'l' + \frac{d(nl + n'l')}{ds}\,ds \\ &+ \frac{1}{2!}\,\frac{d^2(nl + n'l')}{ds^2}\,ds^2 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Das Verschwinden der Variation führt auf

$$n\frac{dl}{ds} + n'\frac{dl'}{ds} = 0.$$

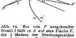


Abb. 16. Ein von P ausgehender Strahl l fällt in A auf eine Fläche F, die 2 Medien der Brechungszahlen n und n' trennt. Bei Verschieben des Einfallspunktes A um den kleinen Wert ds ändert sich der optische Weg nach Fermat nur um kleine Größen höherer Ordnung.

Fällt man von A auf den l benachbarten Strahl das Lot, so ergibt sich aus der Abb. 16 $dl/ds = \sin i$. Ebenso findet man $dl'/ds = -\sin i'$, so daß man auch erhält

$$n \sin i - n' \sin i' = 0, \qquad (2)$$

was also nichts weiter als das früher mitgeteilte Brechungsgesetz ist. Ebenso könnte man aus dem Bestehen des FERMATschen Satzes auch das Reflexionsgesetz ableiten, das ja übrigens aus (2) sowieso durch Einführung von $n = -n'$ ohne weiteres bestimmbar ist.

Solange also der FERMATsche Satz gilt, verschwindet in der Entwicklung (1) der Koeffizient von ds. Wählen wir jetzt speziell Fläche F als Kugel mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M und betrachten das enge von P ausgehende

und in der durch PAM (vgl. Abb. 17) gelegten Ebene, also einer Meridianebene, verlaufende Büschel, so soll der Punkt P' gefunden werden, für den auch der

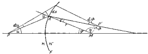


Abb. 17. Bestimmung der tangentialen Schnittweite an einer brechenden Kugelfläche. F ist eine 2 Medien mit den Brechungszahlen n und n' trennende Kugelfläche um den Mittelpunkt M mit dem Radius r. Punkt P wird durch ein enges, von ihm ausgehendes und in der Meridianebene verlaufendes Strahlenbüschel nach der Brechung an F in den tangentialen Bildpunkt P' abgebildet.

zweite Koeffizient der Potenzentwicklung (1) verschwindet; P' heiße dann **Bildpunkt für das meridionale Büschel**. Es soll also sein

$$n\frac{d^2 i}{ds^2} + n'\frac{d^2 i'}{ds^2} = 0 \tag{3}$$

oder

$$n\cos i\,\frac{di}{ds} - n'\cos i'\,\frac{di'}{ds} = 0. \tag{3a}$$

Nun ist $i = u + \varphi$ und $i' = \pi - (\eta + \vartheta)$, d. h. es wird für eine Verschiebung des Punktes A auf F

$$\frac{di}{ds} = \frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \qquad \text{und} \qquad \frac{di'}{ds} = -\frac{d\eta}{ds} - \frac{d\vartheta}{ds},$$

ferner bleibt $\varphi + \eta$ konstant, so daß also $d\varphi/ds = -d\eta/ds$ ist. Diese Werte in (3a) eingesetzt ergeben:

$$n\cos i\left(\frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}\right) + n'\cos i'\left(\frac{d\vartheta}{ds} - \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0. \tag{4}$$

Fällen wir von A auf einen benachbarten Einfallsstrahl das Lot, so sieht man, daß $\cos i = PA\cdot du/ds$ gesetzt werden darf. Ebenso läßt sich finden $\cos i' = AP'\cdot d\vartheta/ds$. Ferner kann man setzen $ds = r\cdot d\varphi$. Mit Hilfe dieser Beziehungen kann (4) übergeführt werden in:

$$\frac{n\cos^2 i}{PA} + \frac{n\cos i}{r} + \frac{n'\cos^2 i'}{AP'} - \frac{n'\cos i'}{r} = 0. \tag{5}$$

Setzt man weiter $PA = -t$ und $AP' = t'$, so kann (5) auch geschrieben werden:

$$\frac{n'\cos i' - n\cos i}{r} + \frac{n\cos^2 i}{t} = \frac{n'\cos^2 i'}{t'}. \tag{6}$$

Mit dieser Gleichung (6) kann man demnach, wenn die Entfernung t des Punktes P von der Kugelfläche F, gemessen auf Strahl PA, gegeben ist, die Entfernung t' des „meridionalen" oder „tangentialen" Bildpunktes P' von der Kugelfläche F, gemessen auf Strahl AP', berechnen. Man pflegt t bzw. t' die meridionale oder tangentiale Schnittweite des Dingpunktes P bzw. des tangentialen Bildpunktes P' zu nennen.

Aus der Tatsache, daß ein von P ausgehendes endliches Strahlenbündel nach seiner Brechung an Fläche F ein Normalensystem ist, geht nun weiter hervor, daß beim Herausgreifen eines beliebigen Strahles des Bündels dieser mit benachbarten Strahlen nicht nur eine Stelle, sondern deren zwei hat, wo benachbarte Strahlen und damit das Licht besonders eng zusammengedrängt werden. Diese Stelle auf jenem beliebig herausgewählten Strahle, der mit dieser Wahl zum Träger des unendlich engen Strahlenbündels wird, pflegt man den **sagittalen Bildpunkt** zu nennen, da er bestimmt wird durch in zur Meridianebene senkrecht stehenden Ebenen, nämlich den Sagittalschnitten des einfallenden und gebrochenen Bündelträgers, verlaufende Strahlen.



Abb. 18. Bestimmung der sagittalen Schnittweite an einer brechenden Kugelfläche. F ist eine 2 Medien mit den Brechungszahlen n und n' trennende Kugelfläche um den Mittelpunkt M mit dem Radius r. Punkt P wird durch ein enges, von ihm ausgehendes sagittales Strahlenbüschel nach der Brechung an F in den sagittalen Bildpunkt P'' abgebildet

Zur Bestimmung der Lage des sagittalen Bildpunktes sei darauf hingewiesen, daß aus drehungssymmetrischen Gründen nicht nur die einfallenden Wellenflächen, sondern auch die gebrochenen Rotationsflächen sind, und zwar ist die Verbindungslinie des Dingpunktes P und des Kugelmittelpunktes M ihre Drehungsachse. Die Zentrafläche oder Brennfläche dieser gebrochenen Wellenflächen wird einmal gebildet durch Drehung der Evolute der Meridiankurven der gebrochenen Wellenflächenschar um jene Drehungsachse und durch die Drehungsachse selbst. Die bereits bestimmten tangentialen Bildpunkte sind Punkte der Evoluten-Rotationsfläche; die sagittalen Bildpunkte müssen daher auf der Drehungsachse, der Verbindungslinie von Dingpunkt und Kugelmittelpunkt, liegen. Läßt man also von einem Dingpunkt P ein enges Strahlenbündel ausgehen und auf eine brechende Kugelfläche F um M fallen, so liegt der sagittale Bildpunkt P' im Schnittpunkt des gebrochenen Bündelträgers mit der Verbindungslinie des Dingpunktes P und des Kugelmittelpunktes M.

Ist MA wieder die Kugelnormale im Einfallspunkt des dingseitigen Bündelträgers und fällen wir auf sie die Lote PL und $P''L'$, so folgt aus Abb. 18 $PL:P''L' = LM:ML'$ oder auch

$$PA \cdot \sin i : AP'' \cdot \sin i' = (PA \cos i + r) : (AP'' \cdot \cos i' - r)$$

oder etwas umgeformt unter Benutzung von $\sin i / \sin i' = \frac{n'}{n}$,

$$\frac{n' \cos i' - n \cdot \cos i}{r} + \frac{n}{S} = \frac{n'}{S'} \tag{7}$$

wenn man noch $PA = -S$ und $AP'' = S'$ setzte. Man nennt S die dingseitige und S' die bildseitige sagittale Schnittweite. Ist die brechende Fläche durch r, n und n' gegeben und ist i der Einfalls- und i' der Brechungswinkel, so kann man für irgendeinen Dingpunkt mit der dingseitigen sagittalen Schnittweite S die Schnittweite S' seines sagittalen Bildes mit Hilfe der Gleichung (7) ermitteln. In Übereinstimmung mit dem früher allgemein über Normalensysteme

Gesagten lassen sich also nach der Brechung eines engen Strahlenbündels an einer Kugelfläche zwei verschiedene Stellen angeben, die wir als Bilder des dingseitigen Bündelmittelpunktes bezeichnet haben. Die Wellenfläche ist in diesem Falle nach der Brechung keine Kugelfläche mehr.

α) Der Hauptstrahl des engen Bündels fällt mit der optischen Achse zusammen.

29. Bestimmung der paraxialen Schnittweiten einer brechenden Kugelfläche. In dem Falle, daß die Winkel i und i' sich dem Grenzwert Null beliebig nähern, wenn also der Bündelträger senkrecht auf die brechende Kugelfläche fällt (vgl. Abb 19), wird, wie man aus (6) und (7) ersieht, für $i = 0$ auch $i' = 0$, die Beziehung zwischen Dingpunkt und Bild im engen Bündel wird eineindeutig, da sagittales und tangentiales Bild zusammenfallen; die Wellenfläche hat an der entsprechenden Stelle einen Kreis- oder Nabelpunkt. Sagittale und tangentiale Schnittweiten sollen in diesem Falle, wo sie also identisch sind, mit s und s' bezeichnet werden und ihre gegenseitige Abhängigkeit läßt sich ausdrücken durch

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \tag{8}$$

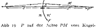


Abb 19 P auf der Achse PM vom Kugelscheitel S um die Schnittweite s entfernt wird durch Nullstrahlen in den Achsenpunkt P' mit der Schnittweite s' abgebildet

oder auch durch

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right). \tag{8a}$$

In der letzten Form nennt man die Beziehung zwischen s und s' auch Nullinvariante; die Strahlen selbst, die also in unmittelbarer Umgebung eines Bündelträgers verlaufen, der durch den Kugelmittelpunkt geht, nennt man Nullstrahlen oder Paraxialstrahlen und den Bündelträger selbst die Achse. Schreibt man (8) in der Form

$$s' = \frac{n' r s}{n r + (n' - n) s}, \tag{9}$$

so erkennt man, daß durch diese Beziehung den durch s bestimmten Dingpunkten die Bildpunkte derart zugeordnet werden, daß die Reihe der Bildpunkte projektiv oder kollinear zu den Punkten der Dingpunktreihe ist. Die Determinante der Substitution (9) ist $r^2 \cdot n n'$ und kann, da n und n' ihrer physikalischen Bedeutung nach nicht Null werden können und auch der Fall $r = 0$ physikalisch nicht zu verwirklichen ist, nicht verschwinden, so daß also durch (9) stets eine echte Kollineation, also eine eineindeutige Abbildung der Achsenpunkte vermittelt wird.

Aus unserer Festsetzung über die Größenordnung der i und i' erkennt man, daß innerhalb des Gültigkeitsbereiches der kollinearen durch (9) vermittelten Abbildung im fadenförmigen Raume um die Achse herum statt des Sinus und Tangens der Einfalls- und Brechungswinkel und auch der Neigungswinkel der Strahlen gegen die Achse die Winkel selbst genommen werden dürfen. Man sagt daher auch, daß die im paraxialen Raum stattfindende Abbildung durch die Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung erzielt werde.

Durch die übliche Festsetzung, daß die Lichtbewegung von links nach rechts als positiv gerechnet wird, daß der Radius der brechenden

Kugelfläche als positiv oder negativ zu bezeichnen ist, je nachdem die gewölbte oder hohle Seite der Kugel vom einfallenden Strahl getroffen wird und daß die Schnittweiten s, s' als positiv zu zahlen sind, wenn ihre zugehörigen Strahlenvereinigungspunkte, die Ding- bzw. Bildpunkte, rechts vom Scheitel der Kugelfläche, dem Durchstoßungspunkte der Achse, liegen, im anderen Falle dagegen als negativ zu betrachten sind, kann man mit Hilfe der Beziehung (9) das zu s gehörige s' auch vorzeichenrichtig bestimmen.

30. Abbildung eines kleinen achsensenkrechten Dinges vermittels enger, gegen die Achse wenig geneigter Bündel durch eine brechende Kugelfläche; Lateralvergrößerung. Betrachtet man im Dingraum einen weiteren Punkt P_1, der von dem Kugelmittelpunkt um denselben Betrag wie P entfernt ist und denkt sich P_1M als Achse, so ist klar, daß für diese paraxiale Abbildung P_1' der Bildpunkt ist, wobei $MP_1' = MP'$ ist. Liegen also die Dingpunkte auf einer zur brechenden Fläche konzentrischen Kugelfläche, so liegen bei der Abbildung durch enge Bündel, deren Träger sämtlich durch den Mittelpunkt der brechenden Fläche gehen, auch die Bildpunkte auf einer solchen Kugelfläche. Nimmt man nun weiter an, daß PP_1 sehr klein sei, so daß also P_1 in den paraxialen Raum der Achse PM fällt, so können P_1 mit p und P_1' mit p' innerhalb der für paraxiale Abbildung in Frage kommenden Größenordnung als zusammenfallend betrachtet werden. Für den rings um die Achse gelegenen fadenförmigen Raum kann der Satz ausgesprochen werden: Achsensenkrechte Ebenen werden stets in achsensenkrechte Ebenen abgebildet. Die Verbindungslinie zweier konjugierter in zwei konjugierten Ebenen liegender Punkte geht durch den Kugelmittelpunkt. Man pflegt die Dinggröße Pp mit y und die zugehörige Bildgröße $P'p'$ mit y' zu bezeichnen, wobei diese Größen oberhalb der Achse liegend als positiv, im entgegengesetzten Falle als negativ bezeichnet werden mögen. Aus der Abb. 20 liest sich dann ohne weiteres ab:

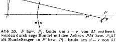


Abb. 20. P bzw. P_1, beide um $s - r$ von M entfernt, werden durch enge Bündel mit den Achsen PM bzw. P_1M als Bündelträger in P' bzw. P_1', beide um $s' - r$ von M entfernt, abgebildet. Rückt P_1 unendlich nahe an die Achse PM heran, so können die Kreisbogen PP_1 bzw. $P'P_1'$ durch die Lote Pp bzw. $P'p'$ ersetzt werden; dann ist also $P'p'$ das Bild von Pp.

$$y' : y = (s' - r) : (s - r) \tag{10}$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Beziehung für jede Lage von P und P' und sowohl für eine erhabene wie hohle brechende Kugelfläche gilt. Schreibt man (8) in der Form

$$\frac{n}{rs}(s - r) = \frac{n'}{rs'}(s' - r)$$

so kann man damit (10) auch schreiben

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s} \tag{11}$$

Es ist also dieser Quotient y'/y, den man aus naheliegenden Gründen die Lateralvergrößerung zu nennen pflegt, nur von der durch s und s' gegebenen Lage des Ding- und Bildpunktes abhängig, nicht aber von y der „Größe" des Dinges. Bezeichnet man die Lateralvergrößerung, die man oft auch Vergrößerung schlecht-

hin nennt, mit β, so kann man sagen: Für die paraxiale Abbildung durch eine brechende Kugelfläche ist die Lateralvergrößerung β in konjugierten Ebenenpaaren konstant. Nach unseren Festsetzungen sind aufrechte ($P'p'$ liegt auf derselben Seite der Achse wie Pp) und umgekehrte ($P'p'$ liegt auf der entgegengesetzten Seite der Achse wie Pp) Bilder eines achsensenkrechten kleinen Gegenstandes dadurch gekennzeichnet, daß β für ein aufrechtes Bild positiv, für ein umgekehrtes dagegen negativ sein muß. Haben demnach s und s' gleiches Vorzeichen und sind n und n' positiv, so ist das Bild aufrecht, für entgegengesetzt bezeichnete Schnittweiten dagegen umgekehrt. Für eine brechende Fläche kann man also für die Lage von Ding und Bild folgende Zusammenstellung angeben:

s	s'	Der Gegenstand liegt in bezug auf die brechende Fläche	Das Bild liegt in bezug auf die brechende Fläche	Das Bild ist
<0	<0	davor	davor	aufrecht
>0	>0	dahinter	dahinter	aufrecht
<0	>0	davor	dahinter	umgekehrt
>0	<0	dahinter	davor	umgekehrt

31. Konvergenzverhältnis und Brennweiten bei paraxialer Abbildung durch eine brechende Kugelfäche. Betrachten wir jetzt, die bis auf den Strahlenzug PBP' und die fehlenden Kreisbogen PP_1 und $P'P_1'$ mit der vorhergehenden Abbildung übereinstimmende Abb. 21, so soll PB ein im Paraxialraum verlaufender Dingstrahl sein, der also nach der Brechung durch den Bildpunkt P' gehen muß. Die Neigungswinkel des Ding- bzw. Bildstrahles sind mit u und u' bezeichnet. Für diese Winkel sei festgesetzt, daß sie als positiv zu gelten haben, wenn ihr zugehöriger Strahl oberhalb der Achse konvergiert, dagegen als negativ bei Divergenz ihres zugehörigen Strahles. In Abb. 21 ist daher u negativ und u' positiv. Es ist nun für unseren Abbildungsbereich

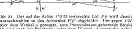


Abb. 21. Das auf der Achse PSM senkrechte Lot Pp wird durch Paraxialstrahlen in das Achsenlot $P'p'$ abgebildet. Der gegen PM unter dem Winkel u geneigte, zum Paraxialraum gehörende Strahl PB geht nach der Brechung unter dem Winkel u' gegen die Achse geneigt durch P'.

$$\operatorname{tang} u = \frac{BS}{s} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} u' = \frac{BS}{s'} \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u} = \frac{s}{s'}. \tag{12}$$

Den Quotienten $\operatorname{tang} u'/\operatorname{tang} u$, der also von den Winkeln u und u' unabhängig und konstant für ein Paar durch s und s' festgelegter konjugierter Achsenpunkte ist, nennt man Winkelvergrößerung oder Konvergenzverhältnis und bezeichnet ihn mit γ. Mit Benutzung der Gleichung (11) kann man die letzte Beziehung auch umformen in

$$\gamma = \frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{y}{y'} \tag{13}$$

oder auch, wenn man noch bedenkt, daß alle diese Ableitungen unter Voraussetzung paraxialer Abbildung gemacht wurden:

$$y' \cdot n' \cdot u' = y \cdot n \cdot u. \tag{14}$$

Bei der Brechung an einer Kugelfläche ist demnach das Produkt aus Gegenstands-

größe, dingseitiger Brechungszahl und Neigungswinkel eines beliebigen, vom Dingpunkt ausgehenden Strahles gleich dem Produkt aus den entsprechenden Größen nach der Brechung.

Schreibt man (13) in der Form

$$\beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'}, \tag{15}$$

so kann man auch sagen: Das Produkt aus Lateralvergrößerung und Konvergenzverhältnis ist bei Brechung an einer Fläche konstant, und zwar gleich dem Verhältnis der Brechungszahlen der Medien vor und hinter der brechenden Fläche.

Gehen wir wieder auf die Gleichung

$$s' = \frac{n' r s}{n r + (n' - n) \cdot s} \tag{9}$$

zurück und nehmen als Dingpunkt den unendlich fernen Achsenpunkt, so wird (9) zu

$$s' = \frac{n'}{n' - n} \cdot r. \tag{16}$$

s', das in diesem Falle mit $s_{F'}$ bezeichnet werde, gibt also den Scheitelabstand des bildseitigen Brennpunktes an.

Denkt man sich jetzt entgegen unserer sonstigen ein für allemal gemachten Annahme das Licht von rechts nach links einfallend, macht also den bisherigen Bildraum zum Dingraum und den bisherigen Dingraum zum Bildraum und setzt in (9) nunmehr $s' = \infty$, so folgt

$$s = -\frac{n}{n' - n} \cdot r, \tag{17}$$

das hier mit s_F bezeichnet werde. s_F ist dann der Scheitelabstand des dingseitigen Brennpunktes.

Fallen die achsenparallelen Strahlen wie üblich von links nach rechts fortschreitend auf die brechende Fläche und ist das zugehörige $s_{F'}$ positiv, so schneiden sich die bildseitigen Strahlen wirklich, man nennt die brechende Fläche sammelnd; wird dagegen $s_{F'}$ negativ, so heißt die brechende Fläche zerstreuend. $s_{F'}$ wird, wie man sieht, positiv, wenn r und $(n' - n)$ gleiche Vorzeichen haben. Eine brechende Fläche ist also sammelnd, wenn ihr Mittelpunkt im stärker brechenden Medium liegt, gleichviel, ob das achsenparallele Licht auf eine hohle oder erhabene Kugelfläche trifft.

Man definiert nun allgemein als bildseitige Brennweite einer optischen Anordnung das Verhältnis des Abstandes eines achsenparallel einfallenden Strahles von der Achse zur Tangente seines Neigungswinkels gegen die Achse nach der Brechung. Im Falle unserer paraxialen Abbildung an einer brechenden Fläche werden die Brennweiten f' bzw. f des Bild- bzw. Dingraumes, wie leicht einzusehen, gleich den Abständen $s_{F'}$ bzw. s_F also

$$f' = \frac{n'}{n' - n} \cdot r \tag{18}$$

$$f = -\frac{n}{n' - n} \cdot r. \tag{19}$$

Es wird demnach

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}.$$

Die Brennweiten einer brechenden Fläche haben also stets entgegengesetztes Vorzeichen, und ihr Verhältnis ist bis auf das Vorzeichen gleich dem Verhältnis der Brechungszahlen ihrer Medien.

32. Die Beziehungen des Bild- und Dingraumes bei paraxialer Abbildung durch ein System zentrierter brechender Kugelflächen. Die in der Praxis vorkommenden optischen Anordnungen werden in der Regel nicht aus nur einer Fläche bestehen; bei Spiegeln kann man allerdings in vielen Fällen mit der durch eine spiegelnde Fläche hervorgerufenen optischen Wirkung sein Auskommen finden; wir wollen aber die einfachen Spiegel, für die sich die eben für eine brechende Fläche abgeleiteten Ergebnisse nur modifizieren, als praktische Beispiele dieser Ergebnisse erst weiter unten behandeln und zunächst unsere Betrachtungen auf Anordnungen mit mehr als einer optisch wirksamen Fläche ausdehnen. Kommt nur Brechung vor, so ist fast bei jedem optischen Werkzeug eine Folge von mindestens zwei brechenden Flächen vorhanden. Die brechenden Flächen sind dem derzeitigen Stand der Technik entsprechend ganz überwiegend Kugelflächen, zu denen brechende Ebenen als Grenzfall zu rechnen sind. Die brechenden Kugelflächen sind weiter in der großen Mehrheit der Fälle zentriert, d. h. so zueinander ausgerichtet, daß ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, der optischen Achse des zentrierten Systems. Für solche Flächenfolgen also, die aus zentrierten, brechenden Kugelflächen bestehen, wollen wir jetzt die Abbildung im fadenförmigen Raum längs der Achse untersuchen.

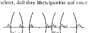


Abb 22 Schema eines Systems von k zentrierten brechenden Kugelflächen $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{\nu-1}, S_\nu, S_{\nu+1} \ldots S_k$ sind die Kugelscheitel n_ν ist die Brechungszahl des Mediums vor der ν-ten brechenden Fläche, n'_ν die Brechungszahl des Mediums hinter dieser Fläche Es ist $n'_\nu = n_{\nu+1}$

Denken wir uns entsprechend nebenstehender Abb. 22 eine Folge von k zentrierten brechenden Flächen, so sollen die Flächen selbst und ihre Krümmungsradien r durch die Indizes $1 \ldots k$, die Brechungszahlen vor der Brechung durch die Werte $n_1 \ldots n_k$ und die Brechungszahlen nach der Brechung durch die Werte $n'_1 \ldots n'_k$ kenntlich gemacht werden. Es ist dann also z. B. $n'_\nu = n_{\nu+1}$; n_1 ist die Brechungszahl des Dingraumes und n'_k die des Bildraumes

Geht dann von einem auf der Achse gelegenen Dingpunkt P_1 ein enges, gegen die Achse wenig geneigtes Strahlenbündel aus, so fällt dieses zunächst auf die erste brechende Fläche und wird durch diese so gebrochen, daß sämtliche Strahlen des Bündels im Bildpunkt P'_1 vereinigt werden, dieser Bildpunkt P_1 sendet gleichsam als Dingpunkt P_2 die ihn durchsetzenden Strahlen auf die Fläche 2, die dieselben im Bildpunkt P'_2 zum Zusammentreffen bringt; P'_2 wird dann weiter zum Dingpunkt P_3, und so wiederholt sich immer wieder das gleiche Spiel, bis das ganze System von Fläche zu Fläche durchlaufen ist. Die Punkte P_1, $P'_1 = P_2$ usw. liegen selbstverständlich sämtlich auf der Achse.

Unsere Überlegungen bleiben aber auch noch für Punkte, die nur wenig von der Achse entfernt liegen und enge, gegen die Achse gering geneigte Strahlenbündel entsenden, anwendbar. Zur Verdeutlichung diene die aus zwei brechenden Flächen bestehende Anordnung der Abb. 23. Alle von p_1 ausgehenden Strahlen werden nach Brechung an Fläche 1 in einem Punkte p'_1 vereinigt, der auf der Kugelzentralen p_1M_1 liegt. Betrachtet man nunmehr p'_1 als Dingpunkt p_2 für die zweite brechende Fläche, so kann man die von p_2 ausgehenden Strahlen als einen Teil des engen Bündels auffassen, dessen Achse die Kugelzentrale p_2M_2 ist. Der Vereinigungspunkt sämtlicher Strahlen dieses Bündels und damit auch der des genannten Teiles liegt auf p_2M_2 etwa in p'_2. Besteht die Folge aus mehr

als zwei Flächen, so kann man diese Betrachtung von Fläche zu Fläche in gleicher Weise fortsetzen. Ein dem fadenförmigen Raume längs der Achse eines aus zentrierten Kugelflächen bestehenden Systems angehöriges homozentrisches Strahlenbündel ist überall homozentrisch; insbesondere ist ein im ersten Medium, im Dingraum homozentrisches Strahlensystem, ob es nun von einem Achsenpunkt oder einem der Achse benachbarten Punkte ausgeht, nach Durchschreitung der ganzen Folge von brechenden Flächen auch im letzten Medium, im Bildraum, homozentrisch. Es besteht demnach eine eindeutige Abbildung der beiden Räume, des Ding- und des Bildraumes. Desgleichen werden auch achsensenkrechte Linien oder Ebenenstücke des Dingraumes in ebensolche durch jede einzelne Fläche nacheinander und schließlich in achsensenkrechte Linien oder Ebenenstücke des Bildraumes der ganzen Flächenfolge abgebildet.



Abb. 23. Der außerhalb, aber in Nachbarschaft der Achse der beiden zentrierten brechenden Kugelflächen 1 und 2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 liegende Punkt p_1 wird durch Fläche 1 durch ein enges, gegen die Achse $M_1 M_2$ wenig geneigtes Bündel in p_1' abgebildet und in analoger Weise $p_1' = p_2$ durch Fläche 2 in p_2'.

Aus dem für die einzelne brechende Fläche geltenden Ausdruck für die Lateralvergrößerung kann man diese für die gesamte Folge von k brechenden Flächen in nicht mißzuverstehender Weise bestimmen als

$$\left.\begin{aligned}\beta = \frac{y_k'}{y_1} = \frac{y_1'}{y_1}\cdot\frac{y_2'}{y_2}\cdots\frac{y_k'}{y_k} = \beta_1\cdot\beta_2\cdots\beta_k = \frac{n_1\cdot s_1'}{n_1'\cdot s_1}\cdot\frac{n_2\cdot s_2'}{n_2'\cdot s_2}\cdots\frac{n_k\, s_k'}{n_k'\cdot s_k}\\ = \frac{n_1}{n_k'}\cdot\frac{s_1'\cdot s_2'\cdots s_k'}{s_1\cdot s_2\cdots s_k}.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Ebenso wird für das Konvergenzverhältnis

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{u_k'}{u_1} = \frac{u_1'}{u_1}\cdot\frac{u_2'}{u_2}\cdots\frac{u_k'}{u_k} = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdots\gamma_k = \frac{n_1\cdot y_1}{n_1'\cdot y_1'}\cdot\frac{n_2\cdot y_2}{n_2'\cdot y_2'}\cdots\frac{n_k\cdot y_k}{n_k'\cdot y_k'}\\ = \frac{s_1\cdot s_2\cdots s_k}{s_1'\cdot s_2'\cdots s_k'}.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Durch Multiplikation folgt aus (20) und (21)

$$\beta\cdot\gamma = \frac{n_1}{n_k'} \quad (22)$$

oder auch

$$\beta\cdot\gamma = (-1)^p\cdot\frac{n_1}{n_k'}, \quad (22\text{a})$$

wenn die k-flächige Folge p spiegelnde Flächen enthält. Führt man in (22) $\beta = y'/y$ ein, indem y' dem bei unseren Ableitungen benutzten y_k' und y dem y_1 entspricht, und weiter $\gamma = u'/u$, wobei analog u' dem bisherigen u_k' und u dem u_1 gleichgesetzt sind, so folgt, wenn noch weiter $n_1 = n$ und $n_k' = n'$ gewählt wird:

$$n y u = n' y' u'. \quad (23)$$

Diese wichtige Beziehung zwischen Brechungszahl, Dinggröße und Strahlenneigungswinkel im Dingraum und den entsprechenden Werten des Bildraumes findet man nach HELMHOLTZ und anderen Physikern wie HUYGENS, LAGRANGE und SMITH bezeichnet.

Die Brennweite eines vielflächigen zentrierten Systems läßt sich leicht bestimmen, wenn man die Definitionsgleichung der Brennweite, nämlich

$$\text{Brennweite} = \frac{\text{Bildhöhe in der Brennebene}}{\text{Trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des einfallenden Parallelstrahlenbündels gegen die Achse}}$$

benutzt

Denkt man sich von dem im Bildraume gelegenen Brennpunkt einen Strahl, der mit der Achse den Winkel u_k' einschließt, ausgehen und das k-flächige System in der Richtung auf den Dingraum durchsetzen, so wird dieser Strahl im Dingraum parallel zur Achse im Abstand h_1 verlaufen, und es besteht die Gleichung

$$f' = \frac{h_1}{\operatorname{tang} u_k'}\,.$$

Das läßt sich auch schreiben

$$f' = \frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{h_2}{h_3}\cdots\frac{h_k}{\operatorname{tang} u_k'}\,,$$

wobei die h die Einfallshöhen an den verschiedenen Flächen bedeuten, die für unseren Abbildungsbereich auch durch die entsprechenden Kreisbögen vom Scheitel S bis zur Durchstoßung des Strahles mit der betreffenden Fläche ersetzbar sind. Aus der nebenstehenden schematischen Abb. 24 liest man ohne weiteres ab $h_{\nu-1}/h_\nu = s_{\nu-1}'/s_\nu$, wobei die brechende Fläche mit dem Scheitel S_ν beliebig herausgegriffen ist, so daß diese Beziehung natürlich für jede andere der brechenden Flächen gilt. Ebenso überzeugt man sich leicht, daß für die letzte Fläche k der ganzen optischen Flächenfolge gilt $h_k = s_k'\cdot\operatorname{tang} u_k'$. Wir erhalten also:

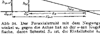


Abb. 24. Der Paraxialstrahl mit dem Neigungswinkel u_ν gegen die Achse hat an der ν-ten Kugelfläche, deren Scheitel S_ν ist, die Einfallshöhe h_ν, an der vorhergehenden mit dem Scheitel $S_{\nu-1}$ die Einfallshöhe $h_{\nu-1}$. $s_{\nu-1}'$ ist die Schnittweite nach der $(\nu-1)$ten Fläche, s_ν die Schnittweite vor der ν-ten Fläche.

$$f' = \frac{s_1'}{s_2}\cdot\frac{s_2'}{s_3}\cdots\frac{s_k'\cdot\operatorname{tang} u_k'}{\operatorname{tang} u_k'} = s_1'\cdot\frac{s_2'}{s_2}\cdots\frac{s_k'}{s_k}\,. \tag{24}$$

Nach den Gesetzen der vorliegenden kollinearen Abbildungen gilt nun ganz allgemein $\beta\cdot\gamma = -f/f'$ [s. (29) in Ziff. 19], so daß also unter Berücksichtigung von (22) die Brennweiten des Ding- und Bildraumes in die Beziehung

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_k'} \tag{25}$$

zueinander gebracht werden können oder auch

$$\frac{f}{f'} = -(-1)^p\frac{n_1}{n_k'}\,, \tag{25a}$$

wenn unter den k Flächen p spiegelnde Flächen vorhanden sind.

33. Zwei brechende Flächen als Linse. Es sollen nun jetzt an einer Reihe von Beispielen die bisher entwickelten allgemeinen Beziehungen erläutert werden. Die auf Brechung des Lichtes beruhende Wirkung optischer Werkzeuge wird ganz überwiegend erzielt durch die Benutzung von Linsen und Systemen solcher Linsen. Man kann daher die Linse gewissermaßen als ein Grundelement jeder dioptrischen Anordnung betrachten; auch läßt sich jede Folge von Linsen für den paraxialen Abbildungsbereich durch eine einzige Linse ersetzen, wenn diese gleiche Brenn- und Hauptpunkte wie die Linsenfolge hat.

Die Linse wird physikalisch gebildet aus einem durchsichtigen Stoff, der von zwei meist regelmäßigen Flächen begrenzt wird. Wir schränken hier unsere Betrachtungen auf solche Linsen ein, die aus einem homogenen isotropen Material bestehen, das zwei Kugelflächen einschließen. Je nach der Krümmung dieser Grenzflächen nach außen unterscheidet man, wie auch nebenstehende Abb. 25 schematisch zeigt: bikonkave, plankonkave, konvexkonkave, konkavkonvexe, plankonvexe und bikonvexe Linsen.

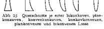


Abb. 25. Querschnitte je einer bikonkaven, plankonkaven, konvexkonkaven, konkavkonvexen, plankonvexen und bikonvexen Linse.

Bezeichnen wir jetzt die dem einfallenden Lichte zuliegende Linsenfläche mit dem Index 1 und die andere Fläche mit dem Index 2 und nehmen an, daß die Linse sich in Luft, also in einem Medium einer Brechungszahl, die dem Werte 1 sehr nahekommt, befindet, so soll gesetzt werden $n_1 = 1$, $n_1' = n_2 = n$, wobei n die Brechungszahl des Linsenstoffes ist, und $n_2' = 1$.

Lassen wir nun vom unendlich fernen Punkt der Achse einen paraxialen Strahl auf die Linse fallen, so schneidet dieser nach der Brechung an Fläche 1 die Achse in dem Bildpunkt, der die Schnittweite

$$s_1' = \frac{n_1' r_1}{n_1' - n_1} \tag{26}$$

hat, was sich mit Berücksichtigung der Formel (9) unter Verwendung von $s_1 = \infty$ ergibt. Ist d die Entfernung der Scheitel der beiden brechenden Kugelflächen, die „Linsendicke", so wird $s_2 = s_1' - d$. Benutzt man diesen Wert wieder in der Formel (9), so folgt

$$s_2' = \frac{n_2' r_2 \left(\frac{n_1' r_1}{n_1' - n_1} - d\right)}{n_2 r_2 + (n_2' - n_2) \cdot \left(\frac{n_1' r_1}{n_1' - n_1} - d\right)}$$

oder nach unseren eben getroffenen Festsetzungen für die Brechungszahlen

$$s_2' = \frac{n r_2 r_1 - r_2 d (n-1)}{(n-1)\,[n(r_2 - r_1) + (n-1) \cdot d]}. \tag{27}$$

s_2' ist die Schnittweite des bildseitigen Brennpunktes und sei als solche auch $s_{F'}$ genannt. Den Brennweitenwert selbst erhält man unter Benutzung von (24) aus $f' = s_1' \cdot s_2'/s_2$ nach Einsetzen der eben bestimmten Werte s_1', s_2 und s_2' und nach einigen Umformungen als

$$f' = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)\,[n(r_2 - r_1) + (n-1)\,d]}. \tag{28}$$

Die Differenz zwischen der Brennpunktschnittweite und der Brennweite ergibt die Hauptpunktschnittweite, also hier die Entfernung des hinteren Haupt-

punktes H' vom letzten Linsenscheitel S_2, und es ist also:

$$S_2 H' = -\frac{r_2 \cdot d}{n(r_2 - r_1) + (n-1)\,d}. \tag{29}$$

Die entsprechenden Werte des Dingraumes kann man durch umgekehrtes Durchrechnen der Linse erhalten. Es ergibt sich dann

$$s_F = \frac{-n r_2 r_1 - r_1 d\,(n-1)}{(n-1)\cdot[n(r_2 - r_1) + (n-1)\,d]}, \tag{27a}$$

ebenfalls durch Rechnung oder auch nach (25)

$$f = -f' \tag{28a}$$

und

$$S_1 H = -\frac{r_1 d}{n(r_2 - r_1) + (n-1)\cdot d}. \tag{29a}$$

Aus (29) und (29a) folgt, daß die Abstände der Hauptpunkte von den Flächenscheiteln sich wie die Krümmungsradien der zugehörigen Flächen verhalten. Der Abstand h der Hauptpunkte voneinander ist

$$h = HH' = HS_1 + S_1 S_2 + S_2 H' = d \cdot \frac{(n-1)\cdot(d + r_2 - r_1)}{n(r_2 - r_1) + (n-1)\,d}. \tag{30}$$

Für den Fall, daß die Dicke d gegen die Krümmungsradien r_1 und r_2 so klein ist, daß man mit genügender Genauigkeit höhere Potenzen von d vernachlässigen kann, lassen sich die ebengenannten Formeln (27) bis (29) unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{1}{n(r_2 - r_1) + (n-1)\cdot d} = \frac{1}{n(r_2 - r_1)}\left(1 - \frac{n-1}{n(r_2 - r_1)}\,d\right)$$

auch schreiben

$$s_1' = \frac{r_2}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_1}{n-1} - \frac{r_2}{n(r_2 - r_1)}\cdot d\right), \tag{27b}$$

$$f' = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}\left(1 - \frac{n-1}{n(r_2 - r_1)}\,d\right), \tag{28b}$$

$$S_2 H' = \frac{-r_2 \cdot d}{n(r_2 - r_1)}. \tag{29b}$$

Entsprechend formen sich für kleine d die Gleichungen (27a), (28a) und (29a) um. Aus (30) wird dann

$$h = \frac{n-1}{n}\,d. \tag{30b}$$

34. Verschiedene Linsenformen. Bei der Wichtigkeit der einzelnen Linse als Grundelement der meisten dioptrischen Anordnungen sollen jetzt diese Beziehungen (27) bis (30), die ja infolge ihrer Allgemeingültigkeit die für die Abbildung maßgebende Lage der Haupt- und Brennpunkte und die Größe der dabei eine Rolle spielenden Strecken wie Brennweiten, Schnittweiten usw. in jedem Falle ohne weiteres zu bestimmen gestatten, für verschiedene charakteristische Linsenformen ausführlich betrachtet werden. Nach dem Vorzeichen der Krümmungsradien kann man drei Fälle unterscheiden:

1. Beide Krümmungsradien haben gleiches Vorzeichen; es genügt die Annahme r_1 und $r_2 > 0$; denn wenn beide Radien negativ sind, so kann man die Ergebnisse des Falles zweier positiver Radien unmittelbar anwenden, sofern man sich die Strahlenrichtung nur umgekehrt denkt. Setzen wir zunächst voraus:

a) $r_2 \geqq r_1$. Man sieht aus (28) und (30), daß f' und h stets positiv sind; aus (29) und (29a) ergibt sich $S_1 H$ und $S_2 H'$ stets negativ. Die Linse ist also immer sammelnd, und die vier Grundpunkte folgen stets in der Anordnung

F, H, H', F' aufeinander. F und H liegen immer vor der Linse, H' immer vor dem Linsenscheitel S_2, und zwar in der Linse oder höchstens auf S_1, solange $d \geqq \frac{r_2 - n(r_2 - r_1)}{n-1}$. Ist d kleiner als dieser Ausdruck, so liegt auch H' vor der Linse. Für kleine d liegt F' hinter der Linse, wie aus (27) ersichtlich. Für $d = \frac{n r_1}{n-1}$ fällt F' mit S_2 zusammen.

b) $r_2 < r_1$. Solange $d < \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2)$ ist, zerstreut die Linse. Beide Hauptpunkte liegen hinter ihrem zugehörigen Linsenscheitel. Die Linse ist in der Mitte dünner als am Rande. Für $d = r_1 - r_2$ sind die beiden brechenden Kugelflächen konzentrisch; h verschwindet, die Hauptpunkte fallen also zusammen, und zwar in dem gemeinsamen Krümmungsmittelpunkte der Linsenflächen. Die Linse zerstreut, um allerdings für beliebig nahe zusammenfallende Werte von r_1 und r_2 zu einer ganz dünnen Kugelschale mit beinahe teleskopischer Wirkung zu werden. Bei hinreichendem Unterschied zwischen r_1 und r_2 wird die Linse erst teleskopisch, wenn $d = \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2)$. Die beiden Hauptpunkte rücken mit zunehmender Linsendicke immer weiter von der Linse im Sinne der Lichtbewegung fort, und zwar liegt zunächst der erste Hauptpunkt vor dem zweiten; von der Stelle an, wo $d = r_1 - r_2$ wird, wechselt aber die Reihenfolge der beiden Hauptpunkte; für $d = \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2)$ fallen dann beide ins Unendliche. Wird schließlich $d > \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2)$, so wird die Linse sammelnd; beide Hauptpunkte liegen vor ihrem zugehörigen Linsenscheitel.

2. Die Krümmungsradien haben verschiedenes Vorzeichen, und zwar ist $r_1 > 0$ und $r_2 < 0$. Die Linse ist also bikonvex. Für eine kleine Linsendicke d sammelt die Linse, und es liegen die Hauptpunkte im Innern der Linse, und zwar der vordere vor dem hinteren. Die Brennpunkte F bzw. F' befinden sich vor bzw. hinter der Linse. Mit wachsendem d rücken die Hauptpunkte einander näher, um zusammenzufallen ($h = 0$), wenn $d = -(r_2 - r_1)$ wird; dann fallen auch die Krümmungsmittelpunkte beider Flächen zusammen, und in ihnen liegen eben auch die beiden Hauptpunkte. Mit weiter wachsendem d rücken die Hauptpunkte wieder auseinander, nunmehr aber in umgekehrter Reihenfolge liegend, so daß der vordere Hauptpunkt hinter dem hinteren liegt. Für $d = -\frac{n}{n-1} r_2$ verschwindet nach (27a) s_F; F fällt also in seinen zugehörigen Linsenscheitel S_1. Für $d = n r_1/(n-1)$ verschwindet nach (27) $s_{F'}$, d. h. F' und S_2 fallen zusammen. Wird $d = -n(r_2 - r_1)/(n-1)$, so wird die Linse teleskopisch; die Haupt- und Brennpunkte fallen ins Unendliche. Wird die Dicke noch größer, also $d > -n(r_2 - r_1)/(n-1)$, so wird die Linse zerstreuend, trotzdem liegt der vordere Brennpunkt F immer vor der Linse und der hintere Brennpunkt F' immer hinter der Linse; allerdings liegen die Hauptpunkte noch weiter von der Linse ab, so daß die Reihenfolge der vier Grundpunkte H, F, F', H' ist.

Einige hierhergehörige Sonderfälle mögen noch betrachtet werden. Ist eine Fläche plan, also z. B. $r_2 = \infty$, so ist die Linse plankonvex, und es wird $f = r_1/(n-1)$, H fällt auf S_1, und H' liegt in der Linse von S_1 um $(n-1)d/n$ entfernt.

Ist $r_1 = -r_2$ und $d = 2r_1$, so ist die Linse eine Kugellinse. Die beiden Hauptpunkte fallen mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen. Die Brennweite wird $f' = n r_1/2(n-1)$ und die Schnittweite $s_{F'} = (2-n) r_1/2(n-1)$. Aus Symmetriegründen ist die Schnittweite des im Dingraum gelegenen Brennpunktes bis auf das Vorzeichen die gleiche.

3. Die beiden Krümmungsradien haben verschiedenes Vorzeichen, und zwar ist $r_1 < 0$ und $r_2 > 0$. Die Linse heißt bikonkav. Die Linse ist immer zerstreuend. Die Hauptpunkte liegen stets im Innern der Linse und zwar H immer vor H'; in jedem Falle liegt F hinter S_1 und F' vor S_2. Wird eine Fläche plan, also z. B. $r_2 = \infty$, so ist die Linse plankonkav und es wird $f' = r_1/(n-1)$. H fällt auf S_1, und H' liegt in der Linse von S_1 um $(n-1)\cdot d/n$ entfernt.

35. Verschwindend dünne Linsen. Für verschwindend dünne Linsen, als solche definieren wir Linsen mit $d = 0$, werden die Beziehungen zur Aufsuchung der für den Abbildungsvorgang wichtigen Punkte besonders einfach. Es ergibt sich dann für die Brennweite

$$f' = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}.$$

Diesem Werte gleich werden die Ausdrücke für $s_{F'}$ und s_F, die Hauptpunkte fallen demnach zusammen in dem gemeinsamen Flächenscheitel. Wenn solche dünne Linsen auch praktisch nicht existieren können, so ist die Kenntnis ihrer Eigenschaften doch wichtig, da man durch ihre Verwendung in vielen Fällen mit verhältnismäßig einfacher Rechnung einen Abbildungsvorgang genügend angenähert kennzeichnen kann. Dieser ist wie bei einzelnen brechenden Flächen auch bei der dünnen Linse schon durch drei Punkte bestimmbar, nämlich durch die beiden Brennpunkte und den Linsenscheitel, in dem die Hauptpunkte und Knotenpunkte liegen. Dabei besteht gegenüber der einzelnen brechenden Fläche noch die weitere Vereinfachung, daß f und f' dem absoluten Betrage nach einander gleich sind. Unsere früheren Betrachtungen über aufrechte bzw. umgekehrte Bilder und ihre Lage bei einer einzelnen brechenden Fläche bleiben auch für die verschwindend dünne Linse gültig, wenn man jene durch diese ersetzt. Die Knotenpunkte fallen allerdings bei der dünnen Linse in den gemeinsamen Scheitel. Die verschiedenen dünnen Linsen unterscheiden sich nur durch die Aufeinanderfolge der genannten drei charakteristischen Punkte F, F' und S $(= H = H')$, und zwar gibt es nur die beiden Möglichkeiten F, S, F' und F', S, F. Im ersten Falle sammelt die Linse, im zweiten zerstreut sie. Man überzeugt sich leicht, daß die bikonvexen und plankonvexen Linsen stets sammelnde, die bikonkaven und plankonkaven stets zerstreuende Linsen sind. Für die Menisken, Linsen mit gleich bezeichneten Krümmungsradien, gilt hier streng der Satz: Nach dem Rande zu dünner werdende Linsen sind Sammellinsen, nach dem Rande zu dicker werdende Linsen sind Zerstreuungslinsen.

Für die Entfernungen vom Linsenscheitel zweier konjugierter Punkte, die Entfernung des Dingpunktes sei mit s_1 und die des Bildpunktes mit s_2' bezeichnet, besteht, wie z. B. durch Durchrechnung leicht nachweisbar, die Beziehung

$$\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2'} = -\frac{1}{f'}. \tag{31}$$

Es wird mit Benutzung der entsprechenden Formeln für die einzelne brechende Fläche:

$$\beta = \frac{s_2'}{s_1} \qquad \text{und} \qquad \gamma = \frac{s_1}{s_2'}. \tag{32}$$

Die Gleichungen (31) bis (32) gelten übrigens auch für die dicke Linse, wenn man s_1 vom dingseitigen Hauptpunkt und s_2' vom bildseitigen Hauptpunkt aus rechnet.

36. Folgen aus zwei (und mehr) Linsen. Nur in den Fällen, wo ganz bescheidene Forderungen an die Leistung eines optischen Werkzeuges gestellt werden, besteht dieses aus nur einer Linse, vielmehr setzt es sich meist aus einer ganzen Reihe von Linsen zusammen. Man kann sich oft mit Vorteil für überschlägliche Rechnungen diese Linsen alle verschwindend dünn denken

und, um den Abbildungsvorgang für eine Folge solcher Linsen kennenzulernen, sich die Brenn- und Schnittweiten der Gesamtanlage durch sukzessive Durchrechnung vor und rückwärts mit Benutzung der Formeln (9), (24) und (25) bestimmen.

Die einfachste Kombination ist die von zwei Linsen (vgl. Abb 26). Beide mögen sich in Luft befinden. Bezeichnet man die Brennweite der ersten dünnen Linse L_1 mit f_1' und die der zweiten dünnen Linse L_2 mit f_2', und ist der Abstand der beiden Linsen voneinander δ, so läßt sich die Gesamtbrennweite f_{12}' des Systems aus zwei Linsen in der angegebenen Weise berechnen als



Abb 26. Schematische Darstellung der Kombination aus 2 zentrierten dünnen Linsen L_1 und L_2 mit dem Abstand δ voneinander F_{12} und F_{12}' bzw H_{12} und H_{12}' sind die Brenn- bzw Hauptpunkte der Kombination, f_{12} und f_{12}' deren Brennweiten

$$f_{12}' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}. \tag{33}$$

Die Schnittweite des Brennpunktes F_{12}', gerechnet von L_2 ab, bestimmt sich als

$$s_{F_{12}'} = \frac{f_2'(f_1' - \delta)}{f_1' + f_2' - \delta}. \tag{34}$$

Aus der Differenz $s_{F_{12}'} - f_{12}'$ folgt als Entfernung des hinteren Hauptpunktes H_{12}' des Gesamtsystems von L_2 die Gleichung

$$L_2 H_{12}' = \frac{-\delta f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}. \tag{35}$$

Durch Durchrechnen in umgekehrter Reihenfolge läßt sich die Lage von F_{12} und H_{12} bestimmen. Es wird dann, nachdem wieder die Vorzeichen in üblicher Weise gewählt sind,

$$s_{F_{12}} = \frac{f_1(f_2 + \delta)}{f_1 + f_2 + \delta} = -\frac{f_1'(f_2' - \delta)}{f_1' + f_2' - \delta} \tag{34a}$$

($s_{F_{12}}$ wird von L_1 aus gerechnet) und

$$L_1 H_{12} = \frac{\delta f_1}{f_1 + f_2 + \delta} = \frac{\delta f_1'}{f_1' + f_2' - \delta}. \tag{35a}$$

Damit sind für die Kombination aus zwei dünnen Linsen wieder die für den paraxialen Abbildungsvorgang charakteristischen vier Punkte F_{12}, H_{12}, H_{12}' und F_{12}' bestimmt. Man kann sich die beiden Linsen dann äquivalent einer einzigen Linse denken, die die gleichen Haupt- und Brennpunkte hat. Da bei dieser Äquivalentlinse die Hauptpunkte im allgemeinen nicht zusammenfallen, ist die Äquivalentlinse in der Regel nicht als dünne Linse darstellbar.

Übrigens überzeugt man sich in ganz analoger Weise, wie hier für zwei dünne Linsen geschehen, daß die eben abgeleiteten Formeln, deren Gültigkeit zunächst für zwei dünne Linsen bestand, auch für die Kombination zweier Linsen endlicher Dicke benutzbar bleiben, wenn folgende Festsetzungen berücksichtigt werden (vgl. Abb. 27). Bedeutet δ den Abstand der zugekehrten Hauptpunkte zweier merklich dicker Linsen, also z. B. $\delta = H_1' H_2$, so ist die Brennweite f_{12} entsprechend (33) gegeben durch

$$f_{12}' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - \delta} \tag{33a}$$

und die Lage der Hauptpunkte der Kombination der beiden Linsen endlicher Dicke H_{12} und H_{12}' findet man, indem man entsprechend (35) und (35a)

$$H_2' H_{12}' = \frac{-\delta f_2'}{f_1' + f_2' - \delta} \tag{35b}$$

und

$$H_1 H_{12} = \frac{\delta f_1'}{f_1' + f_2' - \delta} \tag{35c}$$

setzt. Ein einfaches Zahlenbeispiel erläutert diese Verhältnisse: Zwei plankonvexe Linsen mit gemeinschaftlicher Achse haben ihre gekrümmten Flächen, deren Krümmungsradius 50 sei, einander zugekehrt. Die Brechungszahlen seien für beide Linsen 1,5 und der Abstand der Scheitel der gekrümmten Flächen voneinander sei 50. Die Dicke der ersten Linse sei d_1 und die der zweiten d_2, und zwar sollen die beiden Fälle unterschieden werden. 1. $d_1 = d_2 = 0$ und 2. $d_1 = d_2 = 10$ (vgl. Abb. 28).

Zu 1. Es wird

$$\delta = 50, \quad f'_{12} = \tfrac{200}{3}, \quad S_4F'_{12} = \tfrac{100}{3}, \quad S_4H'_{12} = -\tfrac{100}{3},$$
$$S_1F_{12} = -\tfrac{100}{3}, \quad S_1H_{12} = \tfrac{100}{3}.$$

Zu 2

$$\delta = 50, \quad f'_{12} = \tfrac{200}{3}, \quad S_4F'_{12} = \tfrac{80}{3}, \quad S_4H'_{12} = -40,$$
$$S_1F_{12} = -\tfrac{80}{3}, \quad S_1H_{12} = 40.$$

Durch sukzessive Anwendung der Formeln (33a), (35b) und (35c) ist man in der Lage, für jede Kombination aus beliebig vielen Linsen verschwindender oder endlicher Dicke die charakteristischen Punkte ihrer Äquivalentlinse zu bestimmen.

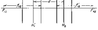


Abb. 27. Schematische Darstellung der Kombination aus 2 zentrierten Linsen endlicher Dicke. H_1 und H'_1 bzw. H_2 und H'_2 sind die Hauptebenen der 1 bzw. 2 Linse. δ ist der Abstand der zugekehrten Hauptebenen der beiden Linsen. F_{12} und F'_{12} sind die Brennpunkte, H_{12} und H'_{12} die Hauptebenen der Kombination, f_{12} und f'_{12} deren Brennweiten.

Kehren wir noch einmal zu dem Fall zweier Linsen zurück und diskutieren die verschiedenen möglichen Werte der Gesamtbrennweite f'_{12}. Für $f'_1 + f'_2 = \delta$ wird die zweilinsige Folge teleskopisch. Das kann eintreten, wenn $f'_1 > 0$, $f'_2 > 0$ ist (Grundtypus des terrestrischen Fernrohres) oder wenn f'_1 und f'_2 verschieden bezeichnet sind und $f'_1 + f'_2 > 0$ ist (Grundtypus des holländischen Fernrohres); dabei ist δ stets als positiv zu nehmen.

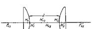


Abb. 28. Schematische Darstellung der Lage der Hauptpunkte H_{12} und H'_{12} und der Brennpunkte F_{12} und F'_{12} einer Kombination aus 2 dicken plankonvexen Linsen L_1 und L_2 mit dem Luftabstand δ. H_1 und H'_1 sind die Hauptpunkte von L_1, H_2 und H'_2 die von L_2 (vgl. nebenstehendes Zahlenbeispiel Fall 2).

Sind $f'_1 < 0$ und $f'_2 < 0$, so ist die Brennweite f'_{12} stets negativ und erreicht ihren kleinsten (absolut größten) Wert für $\delta = 0$. Mit wachsendem δ wird f'_{12} immer größer, bleibt aber negativ. Sind $f'_1 > 0$ und $f'_2 > 0$, so ist es auch f'_{12} für $\delta < f'_1 + f'_2$; wird $\delta > f'_1 + f'_2$, so wird f'_{12} negativ, nähert sich aber mit beliebig weiter wachsendem δ beliebig der Null.

Sind f'_1 und f'_2 verschieden bezeichnet, so ist, wenn 1. $f'_1 + f'_2 > 0$ ist, f'_{12} negativ, solange $\delta < f'_1 + f'_2$ ist, wird aber $\delta > f'_1 + f'_2$, so wird f'_{12} positiv und durchläuft mit wachsendem δ abnehmende positive Werte. Ist dagegen 2. $f'_1 + f'_2 < 0$, so wird f'_{12} stets positiv. Seinen größten positiven Wert hat dann f'_{12} für $\delta = 0$.

37. Folge aus zwei dünnen Linsen endlichen Abstandes von einander mit vorgeschriebener Gesamtlänge. Wenn ein für bestimmte Zwecke erforderliches

Linsensystem an vorgeschriebene Abmessungen etwa hinsichtlich seiner Länge, Schnitt- und Brennweite gebunden ist, kann man, sofern die Linsenfolge mit genügender Annäherung in zwei Teilsysteme zerlegt werden darf, mit den Formeln (33a), (35b) und (35c) sich eine gute Übersicht über die möglichen Werte jener Größen verschaffen. Im Anschluß an einen Aufsatz des Verfassers[1]) zeigen wir, wie man dabei vorgehen kann, und zwar wird den Betrachtungen eine Folge zugrunde gelegt, bei der die beiden Teilsysteme als unendlich dünn mit einem endlichen Abstand voneinander angenommen sind, also für eine Folge der Abb. 26. Setzt man dann in den Formeln (33) bis (35) $f_1' = x$, $f_2' = z$, $\delta = y$ die Objektivlänge, und führt außerdem die Gesamtlänge l, das sei die Entfernung vom vorderen Teilsystem bis zur hinteren Brennebene der Gesamtfolge, ein und weiter den Zahlenwert u, der durch $u = l/f_{12}$ definiert sei, so kann für die Gesamtlänge l gesetzt werden:

$$l = u\frac{xz}{x+z-y} = y - \frac{y \cdot z}{x+z-y} + \frac{xz}{x+z-y} \tag{36}$$

Nimmt man hierzu noch die Maßstabsgleichung

$$\frac{xz}{x+z-y} = 1\,, \tag{37}$$

so bedeutet diese weitere Bedingung keine Einengung unseres Problems, sondern nur, daß die vorkommenden Strecken in einem Maßstabe gewählt sind, dessen Einheit die Brennweite des Gesamtsystems ist. Infolge des Bestehens von (36) und (37) kann von den drei Größen x, y, z nur noch eine willkürlich gewählt werden, die beiden anderen sind dann zwangläufig zugeordnet, und zwar läßt sich dieser Zusammenhang ausdrücken durch

$$x = \frac{z-y}{z-1}\,, \qquad y^2 - uy - z(1-u) = 0 \tag{38}$$

oder durch

$$y = x + z - xz\,, \qquad z(x-1)^2 - x(x-u) = 0 \tag{39}$$

oder durch

$$z = \frac{x-y}{x-1}\,, \qquad yx - y + (1-u)\cdot x = 0\,. \tag{40}$$

Durch jedes Gleichungspaar (38) oder (39) oder (40) wird selbstverständlich über die Werte x, y, z dasselbe ausgesagt; je nachdem aber x, y oder z als unabhängige Veränderliche gewählt wird, um etwa dieser einen erwünschten Wert zu geben, kann es vorteilhafter sein, eines der drei Gleichungspaare für die Anwendung zu bevorzugen.

Die Kurve (38) ist eine Parabel mit dem Parameter $p = (1-u)/2$, den Scheitelkoordinaten $y_s = u/2$, $z_s = -u^2/4(1-u)$, und der Achsengleichung $y = u/2$. Die Kurve (39) ist von dritter Ordnung mit einem Extremum für $x = u/(2-u)$, das für $u < 1$ ein Minimum, für $u > 1$ ein Maximum ist, mit einem Wendepunkt für $x = (2u-1)/(2-u)$ und den durch $z = 1$ und $(x-1)^2 = 0$ gegebenen Asymptoten.

Kurve (40) schließlich ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Mittelpunktskoordinaten $x_m = 1$, $y_m = u - 1$, den Halbachsen $l_1 = \sqrt{2(1-u)}$, $l_2 = i\sqrt{2(1-u)}$, den Achsengleichungen $x + y - u = 0$ und $x - y - (2-u) = 0$ und den Asymptotengleichungen $x = 1$, $y = u - 1$.

Für den Wert $u = 1$, für den Gesamtlänge und Brennweite gleich werden, zerfallen die Kegelschnitte in gerade Linien, die Kurve dritter Ordnung ist eine Gerade und eine gleichseitige Hyperbel. In diesem Sonderfall wird z. B. (40)

[1]) Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1919, S. 187—190.

zu $y(x-1)=0$, d. h. entweder fallen Vorder- und Hinterglied zusammen ($y=0$), ihre Brennweiten x und z können alle beliebigen Werte annehmen, aber jedes Brennweitenpaar muß der Gleichung $xz/(x+z)=1$ genügen, oder es wird die Brennweite des Vordergliedes gleich der Gesamtbrennweite ($x=1$); dann kann einmal auch $y=1$, also ebenfalls gleich der Gesamtbrennweite werden, d. h. das Hinterglied beliebiger Brennweite steht im Brennpunkt des Vordergliedes, oder aber es ist y beliebig, und es wird $z=\infty$; das Hinterglied hat demnach dann z. B. etwa die Wirkung einer dünnen planparallelen Glasplatte.

Es läßt sich jedenfalls durch die Beziehungen (38) oder (39) oder (40) der Zusammenhang zwischen Gesamtlänge, Einzelbrennweiten der beiden dünnen Teilsysteme und Gesamtbrennweite völlig übersehen, durch sinngemäße Modifizierungen lassen sich ähnliche Beziehungen aufstellen, wenn die Teilsysteme endlicher Dicke sind, ebenso kann man z. B. auch die Aufgabe, eine im Endlichen gelegene achsensenkrechte Ebene durch eine zweiteilige Folge in eine endliche achsensenkrechte Ebene vorgeschriebener Lage abzubilden, durch entsprechende Modifikation der Gleichung (36) lösen.

Zur Verdeutlichung der Benutzbarkeit unserer allgemeinen Formeln diene ein einfaches Beispiel. Ein photographisches Teleobjektiv, bestehend aus sammelndem Vorder- und zerstreuendem Hinterglied, soll eine Gesamtlänge von 0,23 der Gesamtbrennweite erhalten; für diesen verhältnismäßig recht kleinen Wert $u=0{,}23$ wird der Wertebereich, aus dem die Brennweite z des negativen Hintergliedes ausgewählt werden kann, sehr eng. Es ist daher zweckmäßig, z als unabhängige Veränderliche zu wählen. Dabei läßt sich die Untersuchung am bequemsten an Hand der Kurve (39) führen. Man sieht, daß nur für den Bereich $0<x<0{,}23$ negative Werte von z vorkommen können.

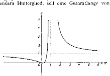


Abb. 29. Zahlenbeispiel zu Ziff. 37.

Diese Werte sind ihrem absoluten Betrage nach sehr klein, er erreicht für $x=0{,}23/(2-0{,}23)=0{,}129945$ seinen maximalen Wert, nämlich $|z_{max}|=0{,}017176$. Man hat also, um ein brauchbares Objektiv zu erhalten, den Extremwert oder einen diesem wenigstens naheliegenden Wert von z zu nehmen; x und y bestimmen sich dann aus den beiden Gleichungen (39); die Abhängigkeit zwischen x und z ist in Abb. 29 gezeigt.

38. Brechkraft dünner Linsen. Denken wir uns wieder zwei dünne Linsen kombiniert und bilden den reziproken Wert φ_{12} ihrer Äquivalentbrennweite, den reziproken Wert der Brennweite einer Linse oder eines Linsensystems pflegt man die Brechkraft der Linse oder des Linsensystems zu nennen, so läßt sich (33) schreiben:

$$\varphi_{12}=\varphi_1+\varphi_2-\delta\varphi_1\varphi_2, \tag{41}$$

wenn φ_1 bzw. φ_2 die Brechkraft von L_1 bzw. L_2 bedeuten. Berühren sich beide Linsenpaare, so wird $\delta=0$. Die sich dann vereinfachende Formel (41) läßt sich ohne weiteres auf drei oder mehr dünne in Berührung befindliche Linsen anwenden, so daß für ein solches System aus k Linsen dessen Brechkraft Φ

angegeben werden kann durch

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_k. \tag{42}$$

Bemerkt sei noch, daß als Einheit der Brechkraft häufig die Dioptrie gewählt wird. Eine Linse mit der Brennweite von 1 m hat die Brechkraft von einer Dioptrie, während eine Linse von 2 m bzw. $^1/_4$ m Brennweite eine Brechkraft einer $^1/_2$ bzw. 4 Dioptrien hat. Die Definition der Dioptrie hat zur Folge, daß bei Anwendung der Dioptrierechnung als Längeneinheit stets 1 m zu wählen ist.

39. Aufsuchung des Bildes, analytisch und graphisch an einigen Beispielen gezeigt. Die Linsen, wie wohl alle optischen Systeme, haben in der Regel die Aufgabe, Bilder zu entwerfen, z. B. ein von einem Dingpunkt ausgehendes Strahlenbündel so zu beeinflussen, daß nach dessen Durchgang durch eine Linse oder eine Linsenfolge ein konvergentes Strahlenbündel zustande kommt oder auch ein divergentes, dessen Strahlen aber rückwarts verlängert gedacht von einem einzigen Punkte herzukommen scheinen. Mit anderen Worten, es soll ein homozentrisches Strahlenbündel wieder in ein solches verwandelt werden. Die Träger dieser beiden homozentrischen Strahlenbündel sind dann der Ding- bzw. Bildpunkt; denn für den paraxialen Raum findet ja eine strenge Abbildung statt. Mit Hilfe der im vorangehenden gegebenen Formeln kann man nun für eine einzelne brechende Fläche, für viele brechende Flächen, für dünne und dicke Linsen und Kombinationen aus solchen, sofern sie nur alle eine gemeinsame Achse haben, die beiden Haupt- und Brennpunkte bestimmen. Die Kenntnis der Lage dieser vier Punkte genügt dann stets, um zu einem beliebig gelegenen Ding sein Bild zu finden, solange der Abbildungsbereich den fadenförmigen Raum um die Achse nicht überschreitet.

Bezeichnet man mit s (die Dingweite) die Entfernung eines auf der Achse gelegenen Dingpunktes vom dingseitigen Hauptpunkt H und mit s' (die Bildweite) die des konjugierten Bildpunktes vom bildseitigen Hauptpunkt H', und ist f' die bildseitige Brennweite, so gilt in Übereinstimmung mit (31) und den daran geknüpften Bemerkungen für jedes beliebige System, für dessen Ding- und Bildraum die optischen Medien gleich, z. B. Luft, sind, die Beziehung

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{f'}, \tag{43}$$

und die laterale Vergrößerung ist gleich dem Verhältnis der Bildweite zur Dingweite. Dabei wird ein kleines achsensenkrechtes Linien- oder Ebenenstück in ein ebensolches abgebildet.

Schreibt man (43) in der Form

$$s' = \frac{s \cdot f'}{s + f'}, \tag{43 a}$$

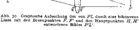


Abb. 30. Graphische Aufsuchung des von PL durch eine bikonvexe Linse mit den Brennpunkten F, F' und den Hauptpunkten H, H' entworfenen Bildes $P'L'$.

so erkennt man einmal, daß für $s = 0$ auch $s' = 0$ wird, also der dingseitige Hauptpunkt (bzw. auch die dingseitige Hauptebene) in den bildseitigen Hauptpunkt (bzw. auch in die bildseitige Hauptebene) abgebildet wird. Die laterale

Vergrößerung $s'/s = f'/(s + f')$ wird in diesem Falle 1. Durch Benutzung dieser Beziehungen und der ebenfalls aus (43) ableitbaren Tatsache, daß dingseitiger Brennpunkt bzw. die in diesem senkrechte Ebene, die Brennebene, im Bildraum ins Unendliche abgebildet werden, und daß umgekehrt dem bildseitigen Brennpunkt bzw. der bildseitigen Brennebene der unendlich ferne Achsenpunkt bzw. die unendlich ferne Ebene im Dingraum entsprechen, kann man leicht zu jedem Ding auch das Bild durch Zeichnung finden. In vorstehender Abb. 30 wird beispielsweise die Bestimmung des Bildpunktes P' zum Dingpunkt P gezeigt, wenn die von P ausgehenden Strahlen eine bikonvexe Sammellinse durchsetzen, deren Brennpunkte F und F' sind und deren Hauptebenen in H und H' die Linsenachse treffen. Vom Dingpunkt P zieht man zunächst einen achsenparallelen Strahl bis zum Schnitt R' mit der bildseitigen, durch H' gehenden Hauptebene. Zieht man weiter PF bis zum Schnitt Q mit der dingseitigen, durch H gehenden Hauptebene und legt durch Q den achsenparallelen Strahl QQ', so ist der Schnitt von $R'F'$ mit QQ' der zu P konjugierte Bildpunkt P'. Die von P und P' auf die Achse gefällten Lote PL und $P'L'$ sind Ding und Bild, und der Quotient $L'P'/LP$ gibt die laterale Vergrößerung an. Sie ist hier negativ.

Ganz analog gestaltet sich die Aufsuchung des Bildpunktes, wenn die Abbildung etwa wie in Abb. 31 durch eine bikonkave Linse erfolgt. Vom Dingpunkt P zieht man wieder einen achsenparallelen Strahl bis zum Schnitt R mit der bildseitigen Hauptebene. Dann zieht man weiter Strahl PF, der die dingseitige Hauptebene in Q trifft. Der achsenparallele Strahl QQ' wird dann von RF' in dem Bildpunkt P' getroffen. Die Achsenlote PL und $P'L'$ sind Ding und Bild, und die laterale Vergrößerung ist durch den Quotienten $L'P'/LP$ gegeben; sie ist hier positiv.



Abb. 31. Graphische Aufsuchung des von PL durch eine bikonkave Linse mit den Brennpunkten F, F' und den Hauptpunkten H, H' entworfenen Bildes $P'L'$.

Übrigens nicht nur zu achsensenkrechten Geraden, sondern auch zu solchen, die die Achse unter einem beliebigen Winkel schneiden, lassen sich mit Hilfe der Haupt- und Brennpunkte bzw. der in diesen befindlichen achsensenkrechten Ebenen die Bildgeraden bestimmen. Seien F, H, H', F' in der nebenstehenden Abb. 32 wieder die Brenn- bzw. Hauptpunkte eines Systems, dessen Ding- und Bildraum optisch gleiche Medien haben. Da dann die Hauptpunkte auch Knotenpunkte sind, so geht der zur Dinggeraden parallele Strahl durch den dingseitigen Hauptpunkt H nach Durchschreiten des ganzen Systems durch den bildseitigen Hauptpunkt H' in unveränderter Richtung weiter und trifft die bildseitige Brennebene in einem Punkt P_1', der das Bild des unendlich fernen Punktes der Dinggeraden ist. Außerdem ist das Bild P' des Schnittes P der Ding-



Abb. 32. Graphische Aufsuchung des Bildes einer Dinggeraden, das von einer optischen Anordnung mit den Brennpunkten F, F' und den Hauptpunkten H, H' entworfen wird.

geraden mit der dingseitigen Hauptebene leicht zu finden als Schnittpunkt des durch P zur Achse parallel gezogenen Strahles und der bildseitigen Hauptebene. $P'P_1'$ ist dann das Bild der Dinggeraden; z. B. ist auch P_0' das Bild von P_0. Beachten wir, daß hier nur von zentrierten Systemen die Rede ist, so folgt, daß der ganze Raum eines Kreisdoppelkegels, dessen Achse die optische Achse ist, wieder in einen solchen Kegelraum abgebildet wird, solange die Abbildungsgesetze des paraxialen Raumes gültig sind.

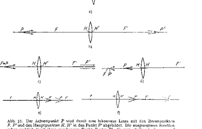


Abb. 33. Der Achsenpunkt P wird durch eine bikonvexe Linse mit den Brennpunkten F, F' und den Hauptpunkten H, H' in den Punkt P' abgebildet. Die ausgezogenen Strahlen gehen wirklich durch ihren zugehörigen Punkt P oder P', die gestrichelten laufen nur auf ihren zugehörigen Punkt zu oder scheinen von ihm herzukommen, ohne durch ihn hindurchzugehen.

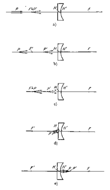
a) P liegt links von der Linse im Unendlichen, b) P liegt links von der Linse um 2 Brennweiten von H entfernt, c) P fällt mit F zusammen, d) P liegt zwischen F und H, e) P liegt zwischen H' und F', f) P liegt rechts von F'.

Einige spezielle Zahlenbeispiele sollen noch die Anwendung einiger Formeln dieses Abschnittes für die Zahlenrechnung zeigen. Zunächst wählen wir eine gleichschenklige bikonvexe Linse von der Dicke 10 und aus Glas, dessen Brechungszahl 1,5 sei. Soll dann die Brennweite einer solchen Linse 100 sein, so folgt aus (28) zur Bestimmung von $r_1 = -r_2$ die Gleichung

$$r_1^2 - 100\,r_1 + \tfrac{500}{3} = 0 \qquad \text{oder} \qquad r_1 = 98{,}3\,.$$

In vorstehender Abb. 33 ist diese Linse gezeichnet, und es sind für verschiedene Dingweiten die Bildwerten bestimmt; damit ist ja dann auch die in den einzelnen Fällen jeweilig vorliegende Vergrößerung, überhaupt die eindeutige Abbildung aller Punkte der achsensenkrechten Ebene durch den Dingpunkt in ihre kon-

jugierte Bildebene bekannt. In den Fällen, in denen der Dingpunkt rechts der Linse angenommen ist, kann man sich diesen als ein von irgendeiner Linsen-



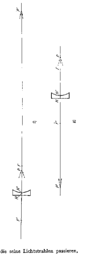


Abb. 34. Der Achsenpunkt P wird durch eine plankonkave Linse mit den Brennpunkten F, F' und den Hauptpunkten H, H' in den Punkt P' abgebildet. Von den ausgezogenen und gestrichelten Strahlen gilt das hierüber zu Abb. 33 Gesagte.

a) P liegt links von der Linse im Unendlichen, b) P liegt links von F', c) P fällt mit F' zusammen, d) P liegt zwischen F' und der Linse, e) P liegt zwischen der Linse und F, und zwar ziemlich nahe der Linse, f) P liegt zwischen der Linse und F nahe bei F, g) P liegt rechts von F.

anordnung entworfenes reelles Bild denken, die seine Lichtstrahlen passieren, ehe sie auf unsere betrachtete Linse fallen.

Für eins von diesen in Abb. 33 dargestellten Beispielen, nämlich das der Abb. 33b, geben wir noch die Zahlenrechnung in extenso an:

$$s_1 = -196{,}6\,,$$

$$s_1' = \frac{1{,}5}{-\frac{1}{196{,}6} + \frac{0{,}5}{98{,}3}} = \infty\,,$$

$$s_1' - 10 = s_2 = \infty\,,$$

$$s_2' = \frac{1}{0 + \frac{1-1{,}5}{-98{,}3}} = 196{,}6\,.$$

In Abb. 34 findet sich für verschiedene Lagen des Achsendingpunktes P der von einer plankonkaven Linse entworfene Bildpunkt P' angegeben

40. Die Planparallelplatte. Als letztes Beispiel einer dioptrischen Abbildung im Paraxialraum sei die Abbildung durch die planparallele Platte gewählt. Für eine brechende Ebene vereinfacht sich, da ja dann $r = \infty$ ist, die Beziehung (9) zu $s' = n' \cdot s/n$, Ding- und Bildweite sind demnach in diesem Fall einander proportional. Das Konvergenzverhältnis γ wird nach (12) zu $\gamma = n/n'$ und die Lateralvergrößerung β nach (11) zu $\beta = 1$. Die planparallele Platte als Folge zweier ebener brechender Flächen kann folgendermaßen durchgerechnet werden, wenn der Abstand der beiden Ebenen, die Dicke der Platte, mit d bezeichnet und berücksichtigt wird, daß $n_1' = n_2$ ist:

$$s_1' = \frac{n_1'}{n_1} \cdot s_1\,, \qquad s_2 = \frac{n_1'}{n_1} s_1 - d \qquad \text{und} \qquad s_2' = \frac{n_2'}{n_1} s_1 - \frac{n_2'}{n_2} \cdot d\,.$$

Es wird also unter Verwendung von (20) $\beta = 1$ und unter Verwendung von (21)

$$\gamma = \frac{n_1' s_1 - n_1 d}{\frac{n_1' n_2'}{n_1}\, s_1 - n_2' d} = \frac{n_1}{n_2'}\,.$$

Nimmt man den Sonderfall an, daß sich die Planplatte in Luft befindet, so daß also gesetzt werden kann $n_1 = n_2' = 1$ und $n_1' = n$, so vereinfachen sich bis auf das unverändert bleibende β die obigen Beziehungen zu $s_1' = n \cdot s_1$, $s_2 = n s_1 - d$, $s_2' = s_1 - d/n$

$$\gamma = 1\,.$$

Aus dem Ausdruck für s_2' erkennt man, daß die Planparallelplatte wie eine Luftplatte von der Dicke d/n wirkt, und weiter ist aus $s_2' + d - s_1 = d(n-1)/n = e$ zu ersehen, daß die durch die Zwischenschaltung einer Planparallelplatte erzeugte Verlagerung e eines Lichtstrahlen aussendenden Punktes stets kleiner als d ist; nur für einen unendlich großen Wert der Brechungszahl n könnte e den Wert d selbst erreichen.

In optischen Werkzeugen befinden sich häufig Prismen oder Planparallelplatten, deren „Glasweg" man mit Verwendung der eben abgeleiteten Beziehungen „auf Luft umrechnen" kann; man hat ja nur die Dicke eines solchen Glaskörpers durch seine Brechungszahl zu dividieren, um den entsprechenden Luftweg zu erhalten.

41. Konkav- und Konvexspiegel. Bei allen Ableitungen dieses Abschnittes war bisher immer nur von der Brechung die Rede; aus den früheren Betrachtungen aber wird klar, daß man die aus dem Brechungsgesetz gezogenen Folgerungen auch für den Sonderfall der Spiegelung verwenden darf, wofern man nur speziell $n'/n = -1$ setzt.

Ist die spiegelnde Fläche eine Kugel, so wird aus (9)

$$s' = \frac{r s}{2 s - r}$$

oder auch

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \tag{44}$$

Für $s = \infty$ bzw. $s' = \infty$ ergibt sich als Brennweite

$$f = f' = \frac{r}{2}; \tag{45}$$

weiter ist nach (11)

$$\beta = -\frac{s'}{s}. \tag{46}$$

Führt man durch

$$x = s - \frac{r}{2}, \qquad x' = s' - \frac{r}{2}$$

die Entfernungen des Ding- bzw. Bildpunktes vom Brennpunkt aus gemessen in (44) ein, so erhält man

$$x \cdot x' = \frac{r^2}{4}. \tag{47}$$

In Übereinstimmung mit früher getroffenen Festsetzungen ist für den Hohl- oder Sammelspiegel $r < 0$, dagegen ist $r > 0$ für den Konvex- oder Zerstreuungsspiegel. Für beide Spiegelarten ist nach (47) die Zuordnung von x zu x' völlig gleich. x und x' haben danach stets dasselbe Vorzeichen; Ding- und Bildpunkt liegen bei der paraxialen Abbildung durch einen Kugelspiegel immer auf der gleichen Seite des Brennpunktes. Außerdem folgt aus der Konstanz des Produktes $x x'$, daß Ding und Bild einander entgegengesetzt wandern, da ja einem großen Wert von x ein kleines x' entspricht und umgekehrt; die Abbildung ist aber nur scheinbar rückläufig[1]).

Wir betrachten zunächst den Fall $r < 0$. Die achsenparallel einfallenden Strahlen vereinigen sich wirklich im Brennpunkt F, der in der Mitte zwischen dem Mittelpunkt M und dem Scheitel S des Hohlspiegels liegt (s. Abb. 35). Die graphische Auffindung des Bildes $p'P'$ zu dem achsensenkrechten Ding pP geht unmittelbar aus der Abb. 35 hervor.

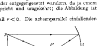


Abb. 35. Der hohle Kugelspiegel mit dem Scheitel S, dem Mittelpunkt M und dem Brennpunkt $F = F'$ entwirft von dem Achsenlot pP das achsensenkrechte reelle Bild $p'P'$.

Die rechnerische Feststellung der Lage, Größe und Richtung des Bildes, wenn das Ding von links aus dem Unendlichen kommend nach rechts bis zum Linsenscheitel vorschreitet, erfolgt leicht nach den Beziehungen (46) und (47), wobei (46) besser in der Umformung

$$\beta = -\frac{r}{2x} \tag{46a}$$

benutzt wird. Eine gewisse Übersicht über die verschiedenen möglichen Fälle

[1]) Siehe E. Wandersleb, in „Die Theorie der optischen Instrumente", herausgeg. von M. v. Rohr, Bd. 1, S. 96. Berlin: Julius Springer 1904.

der Bildlage usw. gibt die folgende Zusammenstellung, in der ϱ den absoluten Betrag des Spiegelradius bedeutet:

s	s'	β
negativ und dem absoluten Betrage nach $> \varrho/2$	negativ und dem absoluten Betrage nach $< \varrho/2$	negativ und dem absoluten Betrage nach < 1
$= \varrho/2$	$= \varrho/2$	$= 1$
$< \varrho/2$	$> \varrho/2$	> 1
0	∞	∞
positiv und dem absoluten Betrage nach $< \varrho/2$	positiv und dem absoluten Betrage nach $> \varrho/2$	positiv und dem absoluten Betrage nach > 1
$= \varrho/2$	$= \varrho/2$	$= 1$

Faßt man diese Zusammenstellung in Worte, so kann man sagen: Wandert ein achsensenkrechtes Ding von links aus dem Unendlichen kommend nach rechts zum Krümmungsmittelpunkt, so läuft sein verkleinertes reelles und umgekehrtes Bild vom Brennpunkt nach links ebenfalls zum Krümmungsmittelpunkt; in diesem selbst fallen Ding und Bild zusammen, sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet. Wandert das Ding in gleicher Richtung noch weiter bis zum Brennpunkt, so läuft sein vergrößertes verkehrtes und reelles Bild vom Krümmungsmittelpunkt nach links ins Unendliche. Wandert schließlich das Ding vom Brennpunkt bis zum Spiegelscheitel, so läuft sein vergrößertes virtuelles und aufrechtes Bild von rechts aus dem Unendlichen nach links gleichfalls zum Scheitel. In diesem fallen Ding und Bild, in Größe und Richtung gleich, zusammen.

Im zweiten Falle, wo also $r > 0$ ist, hat man einen Konvex- oder Zerstreuungsspiegel; $f' = r/2$ ist also positiv. Die von links achsenparallel einfallenden Strahlen scheinen sich rechts hinter dem Spiegel in dem virtuellen Brennpunkt F' zu vereinigen. Die graphische Auffindung des zu einem achsensenkrechten Ding pP gehörigen Bildes $p'P'$ ist aus nebenstehender Abb. 36 wieder leicht ersichtlich. Die rechnerische Feststellung der Lage, Größe und Richtung des zu einem vorgegebenen achsensenkrechten Ding gehörigen Bildes ist wieder mit den Beziehungen (46a) und (47) möglich. Läßt man z. B. das Ding aus dem Unendlichen kommend sich von links nach rechts bis zum Spiegelscheitel S hin bewegen, so läuft sein verkleinertes aufrechtes und virtuelles Bild vom Brennpunkte in entgegengesetzter Richtung ebenfalls zum Spiegelscheitel; in diesem fallen Ding und Bild, in Größe und Richtung gleich, zusammen.



Abb. 36. Der erhabene Kugelspiegel mit dem Scheitel S, dem Mittelpunkt M und dem Brennpunkt F' entwirft von dem Achsenlot pP das achsensenkrechte virtuelle Bild $p'P'$.

42. Ebene Spiegel. Als Sonderfall beider Kugelspiegel kann der ebene Spiegel aufgefaßt werden. Es wird (44) zu

$$s = -s', \tag{44a}$$

da ja $r = \infty$ ist; ferner $\beta = 1$. Das von einem ebenen Spiegel entworfene Bild eines leuchtenden Punktes liegt demnach ebenso weit hinter dem Spiegel wie der leuchtende Punkt vor diesem. Die Verbindungslinie beider Punkte steht senkrecht zur Spiegelebene, und an jeder Stelle des Bildraumes herrscht die

Vergrößerung 1. Man überzeugt sich übrigens leicht, daß man hier unsere Beschränkung auf den paraxialen Abbildungsbereich — das wäre also der fadenförmige Raum um irgendeine Spiegelnormale herum — aufgeben kann. Nach dem Reflexionsgesetz werden, wie man sich an untenstehender Abb. 37 ohne weiteres klarmachen kann, die vom leuchtenden Punkt P ausgehenden Strahlen alle so an dem ebenen Spiegel R reflektiert, daß sie vom virtuellen Bildpunkt P' herzukommen scheinen. Es gilt, wie man sieht, für jedes beliebige, also auch endliche i stets

$$\operatorname{tang} i = \frac{h}{s}, \qquad \operatorname{tang}(-i) = \frac{h}{s'} = -\frac{h}{s}, \tag{48}$$

also bleibt auch für Bündel endlicher Öffnung die Beziehung (44a) richtig.

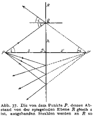


Abb. 37. Die von dem Punkte P, dessen Abstand von der spiegelnden Ebene R gleich s ist, ausgehenden Strahlen werden an R so zurückgeworfen, daß sie sämtlich von dem Punkte P', der hinter R auf dem Lote PS von S um s' entfernt liegt, herzukommen scheinen.

Was für den Punkt P gilt, ist für alle Punkte des Raumes gültig. So ist z. B. in der nächsten Abb. 38 die Abbildung der Strecke PP_1P_2 in $P'P_1'P_2'$ durch den ebenen Spiegel

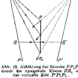


Abb. 38. Abbildung der Strecke PP_1P_2 durch die spiegelnde Ebene RR_1 in das virtuelle Bild $P'P_1'P_2'$.

RR_1 in wohl nicht mißzuverstehender Weise gezeigt. Die endliche Ausdehnung des Spiegels läßt nur einen Teil der von einem Lichtpunkte, z. B. P_2, ausgehenden Strahlen wirksam werden. Der Spiegel RR_1 wirkt wie die Öffnung einer Blende. Um die Zeichnung nicht unübersichtlich zu machen, sind nur Strahlen gezeichnet, die in der durch PP_1P_2 senkrecht zur Spiegelebene gelegten Ebene verlaufen; selbstverständlich gehen nach dem im Anschluß an Gleichung (48), die ja für jeden beliebigen von P ausgehenden Strahl gilt, Gesagten alle beliebig im Raum verlaufenden Strahlen, sofern sie nur von einem einzigen Punkt, dem Dingpunkt, ausgehen, nach Reflexion an der Spiegelebene mit ihren rückwärtigen Verlängerungen durch einen einzigen Punkt, den Bildpunkt. Die Abbildung durch einen ebenen Spiegel ordnet also Ding- und Bildraum ohne irgendeine Einschränkung der Öffnung der abbildenden Strahlenbündel Punkt für Punkt einander zu. Dabei herrscht überall die Vergrößerung 1; Ding und Bild, die beliebig räumlich angeordnet und gestaltet sein können, sind gleich groß und liegen gleich weit von der Spiegelebene entfernt, die Symmetrieebene für beide ist. Rückt das

Ding auf den Spiegel zu, so auch in gleicher Weise, aber in umgekehrter Richtung das Bild. Das durch einen ebenen Spiegel von einem Raumding entworfene räumliche Bild kann aber in keinerlei Weise mit dem Raumding zur Deckung gebracht werden. Die Abbildung wird erst dann zu einem kongruenten Bild führen, wenn eine nochmalige Spiegelung stattgefunden hat.

Allgemein läßt sich sagen: Wird ein Raumding eine gerade Anzahl mal an ebenen Flächen gespiegelt, so wird es in ein kongruentes Bild übergeführt, das sich vom Raumding nur durch seine Lage unterscheiden und durch Bewegung in das Raumding übergeführt werden kann. Wird ein Raumding eine ungerade Anzahl mal an ebenen Flächen gespiegelt, so zeigt das Bild die gleiche Gestaltsänderung, wie bei einer einzigen Spiegelung, das Bild ist dem Raumding nicht kongruent, sondern nur symmetrisch, d. h. man kann Raumding und Bild durch Bewegung so zu einer Ebene orientieren, daß diese die Verbindungslinien sämtlicher als Ding und Bild einander entsprechender Punktepaare halbiert; sie ist also Symmetrieebene. So bildet z. B. ein ebener Spiegel eine rechte Hand in eine linke ab; man kann aber niemals eine rechte und eine linke Hand zu kongruenter Deckung bringen.

48. Sonderfälle der Abbildung durch ebene Spiegel. Die Anwendung des ebenen Spiegels im täglichen Leben wie in der Wissenschaft ist vielfältig; einige Sonderfälle seien hier noch kurz besprochen. Befindet sich ein leuchtender Punkt zwischen zwei zu einander geneigten ebenen Spiegeln, so gibt es eine endliche Anzahl Spiegelbilder des Punktes. Ist in Abb. 39 P der leuchtende Punkt und als Ebene der Zeichnung, die durch P senkrecht zur Schnittkante der beiden Spiegel gelegte Ebene gewählt, so sind MS_1 und MS_2 die Schnittlinien dieser Ebene mit den beiden Spiegeln. Das durch den Spiegel MS_1 von P entworfene Bild ist dann p_1, p_1 wird von Spiegel MS_2 in p_2 abgebildet usw.



Abb. 39. Der in dem Winkelspiegel S_1MS_2 befindliche leuchtende Punkt P wird in 2 Reihen von Punkten abgebildet, nämlich $P_1, P_2, P_3 \ldots$ und $p_1, p_2, p_3 \ldots$

Ganz analog gibt es eine zweite Reihe von Bildern, wenn man P durch MS_2 in P_1 abbildet, P_1 durch MS_1 in P_2 usw. Sobald eins der Bilder einer dieser Reihen in den Scheitelraum von S_1MS_2 fällt, findet keine weitere Spiegelung statt; die Anzahl der Spiegelbilder ist daher beschränkt; sämtliche Bilder liegen auf dem durch P gehenden Kreis um M. Ist $S_1\hat{M}S_2 = \vartheta$, $S_1\hat{M}P = \varphi$ und $P\hat{M}S_2 = \psi$, also $\varphi + \psi = \vartheta$, so gibt es, solange π/ϑ eine ganze Zahl, etwa m ist, stets $(2m-1)$ Spiegelbilder[1]). Ist dagegen π/ϑ keine ganze Zahl, demnach $\pi/\vartheta = m + \chi/\vartheta$, worin m eine ganze Zahl und $\chi < \vartheta$ ist, so lassen sich folgende Unterfälle unterscheiden: Ist

1. $\chi > \vartheta/2$, so gibt es $2m+2$ Spiegelbilder,
2. $\chi = \vartheta/2$, so gibt es $2m+1$ Spiegelbilder,
3. $\vartheta/2 > \chi > \varphi$, so gibt es $2m+1$ Spiegelbilder,
4. $\psi > \chi < \varphi$, so gibt es $2m$ Spiegelbilder.

Wird $\vartheta = 0$, d. h. die beiden Spiegel sind einander parallel, so gibt es unendlich

[1]) A. KUNZEK, Studien aus der höheren Physik, S. 369ff. Wien 1856.

viele Spiegelbilder; in Wirklichkeit werden die Bilder immer lichtschwächer und würden von einem gewissen Bilde ab nicht mehr erkennbar sein. In Abb. 40 ist die Anordnung zweier paralleler Planspiegel S_1S_1' und S_2S_2' gezeichnet, zwischen denen sich der leuchtende Punkt P befindet, der nebst seinen Spiegelbildern $P', P'', P''' \cdots$ und $p', p'', p''' \cdots$ vom Auge A betrachtet wird.

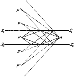


Abb. 40. Von dem leuchtenden Punkt P gelangen zu dem Punkt A (z. B. einem betrachtenden Auge) — P und A liegen zwischen 2 ebenen, zu einander parallelen Spiegeln S_1S_1' und S_2S_2' — gespiegelte Strahlen, die von den Bildpunkten $p', p'', p''' \ldots$ und $P', P'', P''' \ldots$ herzukommen scheinen.

Zwei Spiegel in den eben besprochenen Anordnungen heißen Winkelspiegel; oft kann ihr Winkel ϑ zu Messungszwecken geändert werden (Spiegelsextant). Ein im Hauptschnitt des Winkelspiegels, d. h. in der zur Schnittlinie beider Spiegelebenen senkrechten Ebene, verlaufender Strahl erfährt nach Durchlaufung des Winkelspiegels eine Ablenkung δ, die sich aus Abb. 41 leicht zu $\delta = 2\vartheta$ ergibt. Darin sind S_1S_1' und S_2S_2' die beiden Spiegel und RQ_2 der in den Winkelspiegel eintretende, und Q_1R' der den Winkelspiegel verlassende Strahl. Verläßt der Strahl erst nach mehrmaliger Spiegelung an den beiden Spiegelflächen, etwa nach m-maliger, den Winkelspiegel, so wird $\delta = 2m\vartheta$.

Häufige Anwendung als Winkelspiegel finden in optischen Werkzeugen die Spiegelprismen, bei denen, je nachdem die Ein- und Austrittsfläche senkrecht durchsetzt werden oder nicht, die Wirkung des Winkelspiegels allein in Erscheinung tritt oder noch die Wirkung brechender Flächen hinzukommt. Ein Beispiel eines Spiegelprismas, bei dem $\vartheta = 0$ ist, der Strahl durch die Spiegelung also keine Ablenkung, sondern nur eine Versetzung erleidet, ist das rhombische Prisma in Abb. 42.

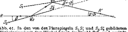


Abb. 41. In den von den Planspiegeln S_1S_1' und S_2S_2' gebildeten Winkelspiegel mit dem Winkel ϑ tritt der Strahl RQ_2 und verläßt nach Spiegelung an S_2S_2' und S_1S_1' den Winkelspiegel als Q_1R'. Die Richtungen RQ_2 und Q_1R' schließen den Winkel 2ϑ ein.

Oft benutzt wird auch der ebene Spiegel in drehbarer Anordnung, wobei von dem aus Abbildung 43 unmittelbar abzulesenden Satze Gebrauch gemacht wird: Dreht sich ein ebener Spiegel um eine zur Einfallsebene senkrechte Achse um den Winkel α, so dreht sich der gespiegelte Strahl um den Winkel 2α. Die Ebene der Zeichnung, in der der Lichtstrahl RQR' bzw. RQR'' verläuft, ist senkrecht zur Drehungsachse angenommen. QN und QN' sind die Spiegelnormalen im Einfallspunkt Q, der mit dem Schnitt durch die Drehungsachse zusammenfällt. Dieser Satz wird z. B. benutzt bei der bekannten Spiegelanordnung nach Gauss-Poggendorf, die zur Ablesung von kleinen Drehungswinkeln dient.

Im Prinzip[1]) ähnlich ist auch der optische Ausgleich der kontinuierlichen Filmbewegung im Kinematographen durch einen rotierenden Spiegelkranz. In Abb. 44 ist eine solche Anordnung schematisch dargestellt. F ist eine prismatische Linsentrommel, deren Seitenflächen von Planspiegeln gebildet werden. Der



Abb. 42. Der in das rhombische Prisma einfallende Strahl R verläßt dieses nach 2 maliger Spiegelung in gleicher Richtung, aber um die nicht spiegelnde Seitenlänge des Prismas versetzt.



Abb. 43. Der in Q den Planspiegel $S_1 S_2$ treffende Strahl RQ wird nach R' reflektiert. Der um den Winkel α in die Lage $S_1' S_2'$ gedrehte Spiegel wirft nunmehr RQ nach R''. QR' und QR'' bilden den Winkel 2α.

Film bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch das Bildfenster des kinematographischen Aufnahme- oder Wiedergabeapparates; durch die Spiegel der stetig gedrehten Trommel F wird das wandernde Bild stationar gemacht. C bzw. C' sind der obere bzw. untere Rand des Filmfensters. E ist das Objektiv, G der dem Film zugekehrte Hauptpunkt, D die Mitte eines Filmbildes, das sich in der Zeichnung gerade in der Stellung befindet, daß D von der optischen Achse des Objektivs E getroffen wird. Der Querschnitt der Trommel ist ein regelmäßiges Vieleck. Bei der Bewegung des Filmes und der Trommel tritt stets je ein Filmbild und ein Trommelspiegel miteinander in eine Wechselbeziehung, um immer von der nächsten Bild-Spiegelkonfiguration abgelöst zu werden. Bezeichnet man GD mit f und die halbe Bildhöhe mit $h = DC = DC'$, so sei der Bildhöhenwinkel w gegeben durch $\tan w = h/f$. Bewegt sich ein Punkt des Filmes vom oberen Fensterrand bis zum unteren, d. h. um zwei Bildhöhen durch das Filmfenster hindurch, so darf sich (die Verschiebung des Spiegels wird außer Betracht gelassen) nach dem eben besprochenen Satz der Spiegel nur um den Winkel w drehen. w ist demnach gleich dem Zentriwinkel des Vielecks. Die Anzahl z der Spiegel ergibt sich also zu $z = 360°/w$.

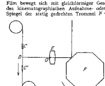


Abb. 44. Läuft der Film durch das Fenster CC' mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so wird sein von dem Objektiv E entworfenes wanderndes Bild dadurch „stationär" gemacht, daß das vom Film kommende Licht nach Durchschreitung des Objektivs E an einem Seitenspiegel der sich drehenden prismatischen Trommel F gespiegelt wird. Die Drehgeschwindigkeit läßt sich so wählen, daß die Wanderung des Bildes des Filmes gerade ausgeglichen wird.

[1]) H. LEHMANN, Über neue kinematographische Theorien und Apparate. Photogr. Korresp. 1916, S. 271 ff.

β) Der Hauptstrahl des engen Bündels hat endliche Neigung gegen die optische Achse.

Wir greifen zurück auf die Beziehungen (6) und (7) in 28, die die sagittale bzw. tangentiale Schnittweite liefern für ein enges Strahlenbündel (Elementarbündel), das von einem auf dem Hauptstrahl des Bündels gelegenen Dingpunkt ausgeht. Als Hauptstrahl könnte ein beliebiger Strahl gewählt sein, der die Achse eines zentrierten Systems schneiden oder auch windschief zu ihr sein mag. Im Regelfall, und auf ihn wollen wir uns hier im wesentlichen beschränken, schneidet der Hauptstrahl, im allgemeinen endlich gegen die Achse geneigt, diese selbst und tritt z. B. durch die Mitte der Eintrittspupille, die in der an späterer Stelle zu behandelnden Strahlenbegrenzung[1]) eine wichtige Rolle spielt, in das optische System ein. Die Verfolgung des Hauptstrahles bei seinem Verlaufe durch die Flächenfolge hindurch bis zu seinem Eintritt in den Bildraum ist unter den gemachten Voraussetzungen ermöglicht durch die Beziehungen (1) bis (12) in Ziff. 51.

Wir nehmen den Hauptstrahl hier als mit allen seinen Bestimmungsstücken und seinen Beziehungen zu den etwaigen spiegelnden und brechenden Flächen bekannt an. Die durch die tangentialen bzw. sagittalen Schnittweiten auf den Hauptstrahl festgelegten Stellen besonderer Strahlenzusammendrängung des Elementarbündels betrachten wir hier als sagittale bzw. tangentiale Bildpunkte, ohne weiter darauf einzugehen, inwieweit diese singulären Stellen im unendlich engen Strahlenbündel einen solchen Namen eigentlich verdienen.

44. Analytische und graphische Aufsuchung des sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes bei einer brechenden Fläche. Will man die bildseitige sagittale bzw. tangentiale Schnittweite direkt bestimmen, so schreibt man zweckmäßig (6) und (7) in Ziff. 28 in der Form

$$S' = \frac{S r n'}{(n'\cos i' - n\cos i) S + n r} \tag{1}$$

und

$$T' = \frac{T r n' \cos^2 i'}{(n'\cos i' - n\cos i)\, T + n r \cos^2 i}. \tag{2}$$

Es bedeuten, um es an dieser Stelle noch einmal festzulegen, hierin S bzw. T die sagittale bzw. tangentiale Schnittweite vor der Brechung, wobei im allgemeinen $S = T$ ist, wenn der Raum vor der Brechung der ursprüngliche Dingraum ist, r den Krümmungsradius der brechenden Kugelfläche, n die Brechungszahl des Mediums vor der Kugelfläche, n' die Brechungszahl des Mediums hinter dieser Fläche, i den Winkel, den der Hauptstrahl mit der zugehörigen Flächennormale vor der Brechung bildet, i' den entsprechenden Brechungswinkel nach der Brechung und S' bzw. T' die Schnittweite des sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes nach der Brechung.

Es erfahren, wie man aus (1) und (2) ersieht, die S und S' bzw. die T und T' durch diese Gleichungen eine kollineare Zuordnung.

Die zunächst nur für die rechnerische Ermittlung der sagittalen und tangentialen Bildpunkte hergeleiteten Ausdrücke (1) und (2) geben auch gleichzeitig einen Hinweis für deren zeichnerische Auffindung. Denn man sieht aus ihnen, daß für $S = 0$ auch $S' = 0$ bzw. für $T = 0$ auch $T' = 0$ wird, d. h. also, daß die durch (1) bzw. (2) gegebenen Punktreihen sagittaler bzw. tangentialer Ding- und Bildpunkte perspektiv zueinander liegen; denn im Schnittpunkt der beiden Punktreihenträger (des an der Fläche ein- und austretenden Hauptstrahls) fallen einander entsprechende Punkte je einer Reihe zusammen. Man

[1]) Siehe O. Eppenstein, Kap. 4 e) S. 168.

hat also nur die Perspektivitätszentren aufzusuchen, um zu irgendeinem Punkte auf dem einfallenden Hauptstrahl den entsprechenden Punkt auf dem gebrochenen Strahl zu finden.

Besonders einfach bestimmbar ist das Perspektivitätszentrum für die sagittalen Punktreihen; es ist nämlich der Krümmungsmittelpunkt der brechenden Kugelfläche. Ist dann zu dem einfallenden Hauptstrahl RQ der gebrochene QR' nach Konstruktion (s. Abb. 64) gefunden, so bestimmt sich zu dem Punkte P_S auf dem einfallenden Hauptstrahl RQ der sagittale Bildpunkt P'_S auf dem gebrochenen Hauptstrahl QR' als Schnitt von QR' mit $P_S M$, wobei M der Mittelpunkt der brechenden Kugel ist (vgl. Abb. 45). Daß das richtig ist, sieht man leicht ein, wenn man bedenkt, daß sämtliche von P_S ausgehende Strahlen, die die Kugel in Punkten des durch den Kugelwinkel φ bestimmten Parallelkreises treffen, durch P'_S gehen; es werden dies also auch die Strahlen tun, die von P_S ausgehen und jenen Parallelkreis in Q unendlich benachbarten Punkten treffen.

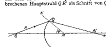


Abb. 45. Der einfallende Strahl RQ trifft die brechende Kugelfläche mit dem Mittelpunkt M in Q und wird dort in die Lage QR' gebrochen. Dem Dingpunkt P_S entspricht P'_S, der Schnitt von QR' und $P_S M$, als sagittaler Bildpunkt

Da dies unendlich kleine Parallelkreisstückchen senkrecht auf der Meridianebene, der Brechungsebene des Hauptstrahls, steht, sind die eben beschriebenen, von P_S ausgehenden Strahlen, tatsächlich Strahlen des sagittalen „Strahlenfächers" und P'_S ist in der Tat der sagittale Bildpunkt von P_S.



Abb. 46. Der einfallende Strahl RQ trifft die brechende Kugelfläche F mit dem Mittelpunkt M in Q und wird dort in die Lage QR' gebrochen. Die Verbindungslinie der Fußpunkte L und L' der Lote von M auf den einfallenden und gebrochenen Strahl und die Verbindungslinie der beiden aplanatischen Punkte P und P' schneiden sich in M_t, dem Perspektivitätszentrum der tangentialen Ding- und Bildpunktreihe. Dem Dingpunkt P_t entspricht P'_t, der Schnitt von QR' und $P_t M_t$, als tangentialer Bildpunkt.

Die Auffindung des Perspektivitätszentrums für die tangentiale Ding- und Bildpunktreihe ist weniger einfach (vgl. Abb. 46). Zunächst wird wieder die Bestimmung des einfallenden und gebrochenen Strahles nach Konstruktion (s. Abb. 64) vorausgesetzt. Fällt man dann vom Kugelmittelpunkt auf den einfallenden Strahl RQ das Lot ML und auf den gebrochenen Strahl QR' das Lot ML', so ist M_t, der Schnitt von LL' mit MP das Perspektivitätszentrum der tangentialen Punktreihen. Es bestimmt sich z. B. zu dem Punkte P_t auf dem einfallenden Hauptstrahl RQ der tangentiale Bildpunkt P'_t auf dem gebrochenen Hauptstrahl QR' als Schnitt von QR' mit $P_t M_t$.

Der Beweis dafür, daß M_t wirklich das gewünschte Perspektivitätszentrum der beiden tangentialen Punktreihen ist, läßt sich so erbringen. P und P' müssen als aplanatische Punkte (vgl. Ziff. 55) auch durch tangentiale enge Büschel ineinander

abgebildet werden, also auch als tangentialer Ding- bzw. Bildpunkt betrachtet werden können, demnach muß ihre Verbindungslinie durch das Perspektivitätszentrum gehen. Betrachtet man andererseits L als tangentialen Dingpunkt, so liest man, wenn $QL = T_t$ gesetzt wird, aus der Abb. 46 $T_t = r\cos i$ ab. Bezeichnet man die zu T_t als tangentialer Dingschnittweite zugehörige tangentiale Bildschnittweite mit T'_t, so folgt aus (2) $T'_t = r \cdot \cos i'$. Es ist also, wie man sich an Hand der Abbildung leicht überzeugt, $T'_t = QL'$, und demnach ist L' der tangentiale Bildpunkt zu dem Dingpunkt L; die Verbindunglinie der Punkte L und L' geht infolgedessen auch durch das Perspektivitätszentrum; der Schnitt der Geraden PP' und LL', das ist M_t, ist Perspektivitätszentrum der beiden tangentialen Punktreihen, nämlich der durch T gegebenen Dingpunktreihen und der durch T' gegebenen Bildpunktreihen.

Wie sich also durch (1) und (2) die rechnerische Ermittlung eines sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes zu irgendeinem Dingpunkte für eine brechende Fläche bewerkstelligen läßt, wenn der Hauptstrahl bekannt ist, so laßt sich das gleiche zeichnerisch mit Hilfe der beiden Perspektivitätszentren M bzw. M_t durchführen.

Auf einige Maßbeziehungen, deren Kenntnis bei Benutzung des Zeichenverfahrens mitunter nützlich sein kann, sei hier noch hingewiesen. $L'M_t$ steht senkrecht MP; der Abstand l der beiden Perspektivitätszentren ist

$$MM_t = l = r\sin i\sin i' \tag{3}$$

und weiter ist

$$\operatorname{tang} M_t\hat{Q}M = \frac{MM_t\sin(i+i')}{r + MM_t\cos(i+i')} = \frac{\sin i\sin i'\sin(i+i')}{1+\sin i\sin i'\cos(i+i')}. \tag{4}$$

Dieser Winkel hängt also nicht von der Krümmung der Kugelfläche, sondern nur vom Einfalls- und Brechungswinkel des Hauptstrahls ab.

Zur Bestimmung der Abszissen auf dem Hauptstrahl der ding- oder bildseitigen sagittalen bzw. tangentialen Brennpunkte F_S oder F'_S bzw. F_t oder F'_t, die dadurch definiert seien, daß sie je dem unendlich fernen Punkte der bild- oder dingseitigen sagittalen bzw. tangentialen Punktreihe perspektiv zugeordnet sein sollen, setzt man der Reihe nach $S' = \infty$, $S = \infty$, $T' = \infty$ und $T = \infty$ und erhält aus (1) bzw. (2):

$$QF_S = S_F = -\frac{nr}{n'\cos i' - n\cos i}, \tag{5}$$

$$QF'_S = S'_F = \frac{n'r}{n'\cos i' - n\cos i}, \tag{6}$$

$$QF_t = T_F = -\frac{nr\cos^2 i}{n'\cos i' - n\cos i}, \tag{7}$$

$$QF'_t = T'_F = \frac{n'r\cos^2 i'}{n'\cos i' - n\cdot\cos i}. \tag{8}$$

Unter Verwendung dieser Werte läßt sich (1) und (2) in der eleganten Form schreiben:

$$\frac{S'_F}{S'} + \frac{S_F}{S} = 1, \tag{1a}$$

$$\frac{T'_F}{T'} + \frac{T_F}{T} = 1, \tag{2a}$$

so daß also die zwischen S und S' bzw. T und T' bestehende Abhängigkeit durch eine gleichseitige Hyperbel ausgedrückt ist, wenn man S und S' bzw. T und T' als Koordinaten eines ebenen rechtwinkligen Koordinatenkreuzes deutet.

Auf den Sonderfall der brechenden Ebene sei noch kurz eingegangen; es wird dann $r = \infty$, also

$$S' = \frac{n'}{n} \cdot S \tag{9}$$

und

$$T' = \frac{n'}{n} \cdot \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} \cdot T. \tag{10}$$

Die dingseitigen sagittalen bzw. tangentialen Schnittweiten sind zu den entsprechenden bildseitigen Schnittweiten proportional; die sagittalen bzw. tangentialen Ding- und Bildpunkte bilden ähnliche Punktreihen.

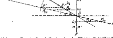


Abb. 47. Der in Q auf die brechende Ebene F treffende Strahl RQ wird in die Lage QR' gebrochen. Den Dingpunkten P_{1S}, P_{2S}, P_{3S} ... auf RQ entsprechen als sagittale Bildpunkte die Punkte P'_{1S}, P'_{2S}, P'_{3S} ... auf QR', die sich als Schnitte von QR' mit den bezüglichen Loten durch P_{1S}, P_{2S}, P_{3S} ... auf F bestimmen.

Die zeichnerische Zuordnung der sagittalen Ding- und Bildpunkte erfolgt durch die Normalen der brechenden Ebene. Bestimmt man z. B. den zu dem einfallenden Hauptstrahl RQ gehörigen gebrochenen Strahl QR' nach (Abb. 65), so findet man, wie in Abb. 47 zu sehen, zu den Dingpunkten P_{1S}, P_{2S}, P_{3S} ... die sagittalen Bildpunkte P'_{1S}, P'_{2S}, P'_{3S} ... als Schnitte des gebrochenen Hauptstrahles mit den Loten $P_{1S}L_1$, $P_{2S}L_2$, $P_{3S}L_3$ ... auf die brechende Ebene F. Es ist nämlich nach Konstruktion $QP'/QP = n'/n$ und damit auch

$$\frac{QP'_{1S}}{QP_{1S}} = \frac{QP'_{2S}}{QP_{2S}} = \frac{QP'_{3S}}{QP_{3S}} = \cdots = \frac{n'}{n},$$

also wird in der Tat (9) erfüllt.

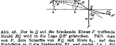


Abb. 48. Der in Q auf die brechende Ebene F treffende Strahl RQ wird in die Lage QR' gebrochen. Fällt man von P, dem Schnitte von RQ mit Kreis k_1, auf das Einfallslot in Q die Senkrechte PL und weiter $Lp \perp RQ$ und fällt man von P', dem Schnitte von QR' mit Kreis k_2, auf das Einfallslot in Q die Senkrechte $P'L'$ und weiter $L'p' \perp QR'$, so geben die bezüglichen Schnitte der Parallelen zu pp' durch die Punkte P_{1t}, P_{2t}, P_{3t} ... mit QR' die tangentialen Bildpunkte P'_{1t}, P'_{2t}, P'_{3t} ...

Zur zeichnerischen Bestimmung der tangentialen Bildpunkte hat man (vgl. Abb. 48), nachdem wieder einfallender Hauptstrahl RQ und gebrochener RQ' nach Abb. 65 als gefunden angenommen wird, auf das Einfallslot in Q die Lote PL und $P'L'$ zu fällen, ferner Lp auf den einfallenden und $L'p'$ auf den gebrochenen Strahl. Es entspricht dann p' dem Punkte p als tangentialer Bildpunkt. Es ist nämlich

$$Qp = QP \cdot \cos^2 i, \qquad Qp' = QP' \cdot \cos^2 i',$$

und da

$$n' \cdot QP = nQP' \text{ ist, so folgt } \frac{Qp'}{Qp} = \frac{n' \cdot \cos^2 i'}{n \cdot \cos^2 i}.$$

d. h. (10) ist in der Tat für Qp' und Qp erfüllt, also p' tangentialer Bildpunkt von p. Zu den Punkten $P_{1t}, P_{2t}, P_{3t} \ldots$ findet man nunmehr die tangentialen Bildpunkte $P'_{1t}, P'_{2t}, P'_{3t} \ldots$, da ja ähnliche Punktreihen vorliegen, als Schnitte des gebrochenen Strahles mit den durch $P_{1t}, P_{2t}, P_{3t} \ldots$ zu pp' gezogenen Parallelen.

45. Konvergenzverhältnis und sagittale bzw. tangentiale Brennweite bei einer brechenden Fläche. In Anlehnung an den bei Behandlung des Strahlenverlaufes der allgemeinen kollinearen Abbildung geprägten Begriff des Konvergenzverhältnisses definiert man auch hier bei der Abbildung durch enge Bündel, deren Träger (Hauptstrahl) gegen die Achse eines aus zentrierten Kugelflächen bestehenden Systems endliche Neigung (bzw. endlichen Abstand von dieser) hat, als sagittales Konvergenzverhältnis

$$\gamma_S = \frac{d\sigma'}{d\sigma}, \qquad (11)$$

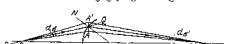


Abb 49. Der in Q auf eine brechende Kugelfläche mit dem Mittelpunkt M treffende Strahl RQ wird in die Lage QR' gebrochen. 2 von dem auf RQ gelegenen Punkt P_S ausgehende, im Sagittalschnitt verlaufende und RQ benachbarte Strahlen treffen die Kugelfläche in A und A' und laufen nach der Brechung zu dem zu P_S gehörigen sagittalen Bildpunkt P'_S. $d\sigma$ ist der Neigungswinkel von $P_S A$ gegen den Hauptstrahl RQ, und $d\sigma'$ ist der Neigungswinkel von AP'_S gegen den Hauptstrahl QR'

als tangentiales Konvergenzverhältnis

$$\gamma_t = \frac{d\tau'}{d\tau}. \qquad (12)$$

Die dabei auftretenden Größen $\sigma, \sigma', \tau, \tau'$ sind aus den Abb. 49 und 50 unmittelbar zu ersehen. Aus Abb. 49 liest man ab

$$QA = S \cdot d\sigma = S' \cdot d\sigma', \quad \text{also} \quad \gamma_S = \frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{S}{S'}. \qquad (11a)$$

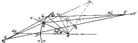


Abb. 50. Der in Q auf eine brechende Kugelfläche F mit dem Scheitel S und dem Mittelpunkt M treffende Strahl RQ wird in die Lage QR' gebrochen. Der zu dem auf RQ gelegenen Punkte P_t gehörige tangentiale Bildpunkt P'_t ist der Schnitt von QR' mit der Verbindungslinie von P_t und dem Perspektivitätszentrum M_t. P_tQ_t liegt im Meridianschnitt, schließt mit RQ den kleinen Winkel $d\tau$ ein und geht nach der Brechung in Q_t durch P'_t, mit QR' den Winkel $d\tau'$ einschließend. QL bzw. QL' sind die Lote von Q auf P_tQ_t bzw. $Q_tP'_t$. Es ist $S\hat{M}Q = \varphi$, $Q\hat{M}Q_t = d\varphi$, $R\hat{Q}N = i$, $M\hat{Q}R' = i'$.

aus Abb. 50 folgt $QQ_t = r \cdot d\varphi$, $QL = QQ_t \cdot \cos i$ und $QL' = QQ_t \cdot \cos i'$ bis auf kleine Größen erster Ordnung genau oder auch: $T d\tau = r d\varphi \cos i$ und $T' d\tau' = r \cdot d\varphi \cdot \cos i'$. Es wird demnach

$$\gamma_t = \frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{T \cdot \cos i'}{T' \cdot \cos i}. \qquad (12a)$$

Definieren wir weiter als sagittale bzw. tangentiale Brennweite den Quotienten aus dem Abstand eines dem einfallenden Hauptstrahl unendlich benachbarten und zu ihm parallel im Sagittal- bzw. Tangentialschnitt laufenden Strahles dividiert durch die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem der parallel einfallende Strahl nach der Brechung den gebrochenen Hauptstrahl schneidet, so überzeugt man sich leicht, daß, wie im paraxialen Abbildungsbereich, die sagittalen Brennweiten einer brechenden Fläche gleich den entsprechenden Schnittweiten sind. Bezeichnet man die dingseitige Brennweite mit f_S, die bildseitige mit f'_S, so wird nach (5) und (6):

$$f_S = -\frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i} = -\frac{r \cdot \sin i'}{\sin (i - i')}, \tag{5a}$$

$$f'_S = \frac{n' \cdot r}{n' \cdot \cos i' - n \cos i} = \frac{r \cdot \sin i}{\sin (i - i')}. \tag{6a}$$

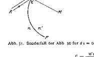


Abb. 51. Sonderfall der Abb 50 fur $d\tau = 0$.

Zur Ableitung der tangentialen Brennweite $f'_t = h_t/d\tau'$ wird Abb. 51 benutzt, die aus Abb. 50 für $d\tau = 0$ hervorgeht. Es ist wieder

$$QL = QQ_t \cdot \cos i = r \cdot d\varphi \cdot \cos i,$$

$$d\tau' = \frac{r \cdot d\varphi \cdot \cos i'}{T'},$$

also

$$f'_t = T' \cdot \frac{\cos i}{\cos i'}$$

und weiter, da hier $T' = QF'_t$ ist, mit Benutzung von (8):

$$f'_t = \frac{n' r \cos i' \cos i}{n' \cos i' - n \cos i}. \tag{8a}$$

Ebenso findet man die dingseitige tangentiale Brennweite

$$f_t = -\frac{n r \cos i \cos i'}{n' \cos i' - n \cos i}. \tag{7a}$$

Wie man sieht, besteht auch für die sagittalen bzw. tangentialen Brennweiten einer brechenden Fläche das bei der allgemeinen kollinearen Abbildung gefundene Verhältnis:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'_t}{f_t} &= -\frac{n'}{n} \\ \frac{f'_S}{f_S} &= -\frac{n'}{n} \end{aligned}\right\}.$$

46. Ermittlung des sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes und der sagittalen bzw. tangentialen Brennweite bei einer vielflächigen sphärischen zentrierten Folge. Hat man nun nicht nur eine brechende Kugelfläche, sondern deren eine Mehrzahl, und liegen die Mittelpunkte dieser Kugelflächen alle auf einer Geraden, der Achse der Flächenfolge, so hat man für die rechnerische Ermittlung des sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes zu einem auf dem dingseitigen, die Achse schneidenden Hauptstrahl gelegenen Dingpunkte die Beziehungen (1) bzw. (2) nacheinander Fläche für Fläche anzuwenden, nachdem vorher der Verlauf des stets in einem und demselben Meridianschnitt liegenden Hauptstrahles mit Hilfe der ebenfalls sukzessive Fläche für Fläche anzuwendenden Formeln (1) bis (12) in Ziff. 51 festgelegt ist. Dabei bleibt auch die

Meridianebene, in der die tangentialen Elementarbüschel liegen, immer die gleiche. Sie ist nämlich mit der Brechungsebene des Hauptstrahles identisch.

Die Ebene des engen sagittalen Strahlenfächers wechselt dagegen von Fläche zu Fläche, jedoch immer derart eindeutig festgelegt, daß sie durch den jeweiligen Hauptstrahlteil geht und auf seiner Meridianebene senkrecht steht. Nimmt man z. B. an, daß das optische System aus k zentrierten Kugelflächen besteht und daß durch S_ν bzw. T_ν die sagittale bzw. tangentiale Schnittweite vor der Brechung an der ν-ten Fläche bezeichnet wird, durch S'_ν bzw. T'_ν die bezüglichen Schnittweiten nach der Brechung an dieser Fläche, so kann man, wenn als Dingpunkt im ersten Medium der unendlich ferne Punkt des in das System einfallenden Hauptstrahles gewählt ist, durch Bestimmung sämtlicher S_ν und S'_ν bzw. T_ν und T'_ν schließlich S'_k bzw. T'_k finden, d. h. die Schnittweite des sagittalen bzw. tangentialen Brennpunktes auf dem Hauptstrahle im Bildraum.

Ganz analog wie die Brennweite des Paraxialraumes findet man als sagittale Bildbrennweite f'_S nach der Definition $f'_S = h_{1S}/d\sigma'_k$

$$f'_S = \frac{S'_1 \cdot S'_2 \ldots S'_k}{S_2 \cdot S_3 \ldots S_k}. \tag{6b}$$

Zur Bestimmung der tangentialen Bildbrennweite f'_t greifen wir auf $QL = QQ_1 \cdot \cos i$ und $QL' = QQ_1 \cos i'$ in Ziff. 45 zurück, woraus folgt, daß $QL/QL' = \cos i/\cos i'$ ist, oder allgemein $h_{\nu t}/h'_{\nu t} = \cos i_\nu/\cos i'_\nu$. Berücksichtigt man weiter $h_{(\nu-1)t}/t'_{\nu-1} = h_{\nu t}/t_\nu$, so wird aus der Definitionsgleichung $f'_t = h_{1t}/d\tau'_k$ schließlich

$$f'_t = \frac{\cos i_1}{\cos i'_1} \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i'_2} \cdots \frac{\cos i_k}{\cos i'_k} \cdot t'_1 \cdot \frac{t'_2}{t_2} \cdot \frac{t'_3}{t_3} \cdots \frac{t'_k}{t_k}. \tag{8b}$$

Will man die auf dem Hauptstrahl gelegenen Brennpunkte und die Brennweiten im Dingraume finden, so könnte man je einen zum bildseitigen Hauptstrahl



Abb. 52. Der Hauptstrahl RQ_1 trifft in Q_1 auf eine bikonvexe Linse, wird in die Lage Q_1Q_2 gebrochen und erhält nach Brechung in Q_2 die Lage Q_2R'. Durch wiederholte Anwendung der in Ziff. 44 erläuterten Zeichenverfahren lassen sich zu dem auf RQ_1 gelegenen Dingpunkt PP'_{S2} und P'_{t2} als sagittaler bzw. tangentialer Bildpunkt von P, entworfen durch die Linse, bestimmen.

parallelen und benachbarten Strahl im sagittalen bzw. tangentialen Schnitt in umgekehrter Richtung durch die ganze Flächenfolge hindurch verfolgen.

Einfacher ist die Berechnung der dingseitigen Brennweiten, nachdem die bildseitigen bestimmt sind, wenn man die auch für ein System von beliebig vielen Flächen geltenden Beziehungen

$$\frac{f_s}{f'_s} = \frac{f_t}{f'_t} = -(-1)^\varrho \frac{n_1}{n'_k}$$

benutzt, in denen ϱ die Anzahl der spiegelnden Flächen angibt.

Die zeichnerische Bestimmung des sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes erfolgt durch die an jeder Fläche wiederholte Anwendung der in den Abb. 45

und 47 bzw. 46 und 48 dargestellten Verfahren. Für eine bikonvexe Linse ist das in Abb. 52 gezeigt.

47. Astigmatismus und Bildfeldwölbung. Aus allen unseren Ableitungen geht also das Folgende hervor: Wird ein in endlicher Entfernung von der Achse einer zentrierten Kugelflächenfolge gelegener Dingpunkt vermittelst eines unendlich engen Strahlenbündels abgebildet, so lassen sich im allgemeinen im Bildraum zwei Stellen besonderer Strahlenvereinigung finden, die man sagittalen und tangentialen Bildpunkt nennt. Die Entfernung zwischen diesen beiden Punkten bezeichnet man als Astigmatismus.

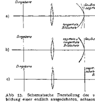


Abb 53. Schematische Darstellung der reellen Abbildung einer endlich ausgedehnten, achsensenkrechten Dingebene durch das optische System L. a) Die Dingebene wird in 2 Bildschalen abgebildet, nämlich in eine sagittale und eine tangentiale. b) Die Abbildung der Ebene ist frei von Astigmatismus, das Bildfeld aber gekrümmt. c) Das Bild der Ebene ist anastigmatisch geebnet.

Denkt man sich z. B. die Punkte einer achsensenkrechten Ebene durch enge Bündel abgebildet (in beistehender Abb. 53 ist dieser Vorgang gezeigt; als abbildendes System ist eine bikonvexe Sammellinse L gezeichnet; natürlich ist das nur schematisch gemeint; denn der Abbildungsvorgang c) z. B. läßt sich durch eine einfache Sammellinse überhaupt nicht verwirklichen), so wird die Abbildung der Punkte der Dingebene einen mit dem Abstand dieser Punkte von der Achse wechselnden, größeren oder kleineren Astigmatismus zeigen. Für den Schnittpunkt der Dingebene mit der Achse oder auch für solche Dingpunkte, deren Abstand von der Achse unendlich klein ist (d. h. also für eine Abbildung des Paraxialraumes, da ja hier die Öffnung der abbildenden Bündel als unendlich eng vorausgesetzt ist) verschwindet der Astigmatismus; dem Dingpunkt entspricht dann nur ein einziger Bildpunkt, ein „GAUSSscher" Bildpunkt. Analytisch drückt sich dieser Tatbestand dadurch aus, daß für unendlich kleine Winkel i bzw. i' die Ausdrücke (1) und (2) nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung voneinander abweichen können, wofern $S = T$ ist.

Werden nun in der hier angenommenen Weise sämtliche Punkte der Dingebene abgebildet, so besteht im Regelfall das Bild der Dingebene in zwei Flächen, der sagittalen und tangentialen Bildschale. Diese Bildschalen sind selbstverständlich Drehungsflächen mit der optischen Achse als Drehungsachse und berühren sich in ihren Rotationspolen (s. Abb. 53a).

Dort fällt ihre gemeinsame Tangentialebene mit der der Dingebene entsprechenden GAUSSschen Bildebene zusammen.

Die Beseitigung oder Verringerung des Astigmatismus auf nichtstörende Beträge ist eine bei vielen optischen Anordnungen zu erfüllende Forderung. So sind z. B. moderne Brillengläser (Menisken nach OSTWALT oder WOLLASTON) für ein Gesichtsfeld von etwa 60° so gut wie frei von

Astigmatismus. Es fallen also bei ihnen die beiden Bildschalen fast zusammen (vgl. Abb. 53b).

Häufig kommt es aber vor, daß es mit dem Zusammenfallen der sagittalen und tangentialen Bildschale noch nicht getan ist, sondern daß für diese eine bestimmte Gestalt gefordert wird, z. B. eine solche, daß die beiden zusammenfallenden Bildschalen sich nicht nur im Schnitt mit der Achse, sondern möglichst für das ganze benötigte Bildfeld der Gaussschen Bildebene anschmiegen. Es wird demnach für die Abbildung nicht nur Beseitigung des Astigmatismus, d. h. gleiche Beträge der sagittalen und tangentialen Bildfeldwölbung oder Bildkrümmung, worunter man die Entfernung der sagittalen bzw. tangentialen Bildpunkte von der Gaussschen Bildebene versteht, verlangt, sondern noch weiter, daß diese gleichen Beträge möglichst nahe gleich Null sind, d. h. daß das anastigmatische Bildfeld auch geebnet ist (s. Abb. 53c).

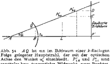


Abb. 54. AQ ist ein im Bildraum einer k-flächigen Folge gelegener Hauptstrahl, der mit der optischen Achse den Winkel u'_k einschließt. P'_{ks} und P'_{kt} sind sagittaler bzw. tangentialer Bildpunkt eines Punktes, der auf dem zu AQ gehörigen dingseitigen Hauptstrahl und auf jener achsensenkrechten Dingebene liegt, die bei idealer Abbildung in die Gausssche Bildebene $P'CD$ abgebildet wurde.

In besonderen Fällen kommen natürlich als Ding auch gekrümmte Flächen vor, oder es werden gekrümmte Bildfelder verlangt. Hier soll jedenfalls unter sagittaler und tangentialer Bildkrümmung immer die Entfernung der sagittalen bzw. tangentialen Bildpunkte von der Gaussschen Bildebene verstanden werden, wobei die konjugierten Dingpunkte auf einer achsensenkrechten Dingebene angenommen sind.

Bezeichnen wir den Astigmatismus mit A und die sagittale bzw. tangentiale Bildkrümmung mit K_s bzw. K_t, so wird, wenn wieder eine Folge von k-Flächen vorliegt, nach unseren Festsetzungen in Anlehnung an obenstehende Abb. 54:

$$A = T'_k - S'_k \tag{13}$$

$$K_s = S'_k \cdot \cos u'_k - BP' \tag{14}$$

$$K_t = T'_k \cdot \cos u'_k - BP'. \tag{15}$$

Dabei sind in Abb. 54 AQ der gegen die Achse unter dem Winkel u' geneigte, die k-flächige Folge verlassende Hauptstrahl und P'_{ks} bzw. P'_{kt} der sagittale bzw. tangentiale Bildpunkt eines bestimmten Punktes des dingseitigen Hauptstrahles; das von diesem Dingpunkt auf die Achse gefällte Lot trifft sie in einem Punkt, dessen Gaussscher Bildpunkt P' ist. QB ist die Austrittshöhe des Hauptstrahles und $S_k B$ die zugehörige Pfeilhöhe [vgl. Ziff. 51, (8), (9)].

48. Abhängigkeit des Astigmatismus und der Bildfeldwölbung von der Dingweite. Die Ausdrücke A, K_s und K_t sind natürlich nicht nur verschieden für die verschiedenen Hauptstrahlen einer optischen Flächenfolge, sondern auch von der Lage des Dingpunktes auf einem bestimmten Hauptstrahl abhängig. Die Untersuchung dieser Abhängigkeit des Astigmatismus und der Bildkrümmung von der Dingweite läßt sich leicht und übersichtlich im Anschluß an einen Aufsatz[1]) des Verfassers durchführen. Greift man wieder auf (1) bzw. (2) zurück, so ist die zwischen S und S' bzw. T und T' bestehende Zuordnung eineindeutig,

[1]) W. Merté, ZS. f. Phys. Bd. 2, S. 174. 1920.

solange die Determinante der Substitution nicht verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß in physikalisch zu verwirklichenden Fällen diese Determinante für die Zuordnung (1) der sagittalen Schnittweiten stets von Null verschieden ist; die Zuordnung der tangentialen Schnittweiten, vermittelt durch (2), dagegen ist nicht mehr eineindeutig, wenn $\cos i$ oder $\cos i'$ verschwindet, d. h. bei streifendem Ein- oder Austritt des Hauptstrahles. Schließt man diesen Grenzfall von der Betrachtung ausdrücklich aus, so erkennt man also, daß für jedes vielflächige optische System auf Grund der Gruppeneigenschaft der linearen Substitution die durch S_1 bzw. T_1 auf den in das System eintretenden Hauptstrahl definierten Dingpunktreihen projektiv zu den sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktreihen sind, die durch S'_k bzw. T'_k bestimmt sein mögen, wobei also k die Anzahl der Flächen des optischen Systems angibt.

Schematisch ist dieser Sachverhalt in untenstehender Abb. 55 gezeigt. AB ist die Achse eines zentrierten sphärischen, k-flächigen Linsensystems, aus

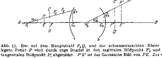


Abb. 55. Der auf dem Hauptstrahl P_1Q_1 und der achsensenkrechten Ebene PE gelegene Punkt P wird durch enge Bündel in den sagittalen Bildpunkt P'_s und in den tangentialen Bildpunkt P'_t abgebildet. $P'E'$ ist das GAUSSsche Bild von PE. Zur weiteren Erläuterung der Abb. 55 siehe Text.

dessen Front- bzw. Rückfläche durch die Brechungsebene des die Achse schneidenden Hauptstrahles $P_1Q_1P'_kQ_k$ die Kreisstücke 1 bzw. k ausgeschnitten werden; u_1 ist der Neigungswinkel des eintretenden Hauptstrahles P_1Q_1 gegen die Achse und u'_k der entsprechende Winkel des austretenden Strahles P'_kQ_k. F ist der dingseitige, F' der bildseitige GAUSSsche Brennpunkt der Gesamtflächenfolge. F_s bzw. F_t ist der dingseitige sagittale bzw. tangentiale, F'_s und F'_t der bildseitige sagittale bzw. tangentiale Brennpunkt für den Hauptstrahl $P_1Q_1P'_kQ_k$. Die Punkte P des Hauptstrahles P_1Q_1 gelten als Dingpunktreihen und seien frei von Astigmatismus; durch P'_s bzw. P'_t werden die entsprechenden sagittalen bzw. tangentialen Bildpunkte auf P'_kQ_k bezeichnet. Dann ist also der Punktreihe P, deren Punkte durch die Schnittweiten $Q_1P = S_1 = T_1$ festgelegt sind, die Punktreihe P'_s bzw. P'_t projektiv zugeordnet, und zwar sind die Punkte P'_s durch die Schnittweiten $Q_kP'_s = S'_k$ und die Punkte P'_t durch die Schnittweiten $Q_kP'_t = T'_k$ bestimmt. Es entspricht F_s der unendlich ferne Punkt der Reihe P'_s, F_t der unendliche ferne Punkt der Reihe P'_t, und umgekehrt entspricht F'_s bzw. F'_t der unendlich ferne Punkt der Reihe P.

Sind S_f bzw. S'_f die Schnittweiten des ding- bzw. bildseitigen sagittalen Brennpunktes und T_f bzw. T'_f die analogen Werte der tangentialen Brennpunkte, so kann man setzen

$$(S_1 - S_f) \cdot (S'_k - S'_f) = \mathrm{const} = -f_s^2 \qquad (16)$$

und

$$(T_1 - T_f) \cdot (T'_k - T'_f) = \mathrm{const} = -f_t^2 . \qquad (17)$$

woraus sich nach einfacher Zwischenrechnung unter Benutzung der GAUSSschen Brennweite f des Gesamtsystems und des Abbildungsmaßstabes $1/m$, der an Hand der Abb. 55 durch $FE = -m \cdot f$ definiert sei, und Einführung des Wertes $\delta = G_1 F$ ergibt:

$$S'_k = \frac{m \cdot S'_r + \dfrac{f_r^2 \cdot \cos u + S'_r \cdot S_r \cdot \cos u - S'_r \cdot \delta}{f}}{\dfrac{S_r \cos u - \delta}{f} + m}. \tag{18}$$

$$T'_k = \frac{m \cdot T'_r + \dfrac{f_r^2 \cos u + T'_r \cdot T_r \cdot \cos u - T'_r \cdot \delta}{f}}{\dfrac{T_r \cdot \cos u - \delta}{f} + m}. \tag{19}$$

Damit sind S'_k und T'_k in ihrer Abhängigkeit von m und damit auch von der jeweiligen Lage des Punktes P bestimmt.

Die zwischen S'_k und m bzw. T'_k und m bestehenden Beziehungen sind darstellbar durch gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten parallel zu den rechtwinkligen Koordinatenachsen m und S'_k bzw. m und T'_k laufen. Mit Hilfe dieser beiden Hyperbeln läßt sich analytisch zeigen, daß sich auf jedem Hauptstrahl im allgemeinen zwei Dingpunkte auffinden lassen, deren Bilder anastigmatisch sind, für die also $S'_k = T'_k$ wird. Gibt es mehr als zwei Dingpunkte, die anastigmatisch abgebildet werden, so sind die Bilder aller Dingpunkte anastigmatisch. Ein solcher Fall liegt vor, wenn der Hauptstrahl alle Flächen des Systems senkrecht trifft, d. h. bei unserer Voraussetzung zentrierter Kugelflächen mit der Achse zusammenfällt.

Auch ohne Rechnung ist der angegebene Sachverhalt ohne weiteres einleuchtend. Da die Punktreihen P'_t bzw. P'_s ein und derselben Punktreihe P projektiv zugeordnet sind, so sind sie auch unter sich projektiv. Weil ferner in zwei projektiven Punktreihen auf ein und derselben Geraden, in unserem Falle auf dem austretenden Hauptstrahle, es zwei und nur zwei sich selbst entsprechende Punkte geben kann, wofern nicht alle zusammenfallen, so folgt, daß es zwei und nur zwei Dingpunkte auf einem Hauptstrahl gibt, die anastigmatisch abgebildet werden. Sind die beiden zusammenfallenden Punkte der beiden Punktreihen P'_t und P'_s reell, so heißt die projektive Zuordnung dieser Punktreihen bekanntlich hyperbolisch, sind sie imaginär, so heißt sie elliptisch, und fallen sie zusammen, so heißt sie parabolisch.

Nach (13) berechnet sich als Astigmatismus:

$$A = T'_k - S'_k = \frac{T'_r \cdot m + A_1}{m + B_1} - \frac{S'_r \cdot m + A_2}{m + B_2}, \tag{20}$$

worin die Bedeutung der Abkürzungen A_1, A_2, B_1 und B_2 aus (18) und (19) unmittelbar klar wird.

Die zwischen A und m bestehenden Beziehungen sind also darstellbar durch eine Kurve dritten Grades. Es läßt sich demnach für jedes beliebige m, d. h. für jede beliebige Lage des Dingpunktes P aus (20) der Astigmatismus A bestimmen, es ist also damit seine Abhängigkeit von der Dingweite festgelegt. Durch die Diskussion der in (20) gegebenen Kurve dritten Grades ist eine genaue Untersuchung dieser Abhängigkeit möglich.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich auch die Abhängigkeit der Bildkrümmungen von der Dingweite ermitteln. Analog dem obigen Satz über Anastigmasie lassen sich folgende Ergebnisse finden: Es gibt auf jedem Hauptstrahl zwei Dingpunkte, deren sagittale Bildpunkte in die zugehörigen GAUSSschen Bildebenen fallen.

Gibt es deren mehr, so fallen sämtliche sagittalen Bildpunkte in die zugehörigen Gaussschen Bildebenen. Ein entsprechender Satz gilt selbstverständlich auch für die tangentialen Bildpunkte.

Ein einfaches Zahlenbeispiel für die Abhängigkeit des Astigmatismus von der Dingweite mag zeigen, wie sich auch rechnerisch leicht mit Hilfe der abgeleiteten Formeln ein Überblick über diese Abhängigkeit gewinnen läßt. Als Flächenfolge sei eine gleichschenklige bikonvexe Linse der Brechungszahl 1,5, der Dicke 10 mm, der Krümmungsradien $r_1 = -r_2 = 98{,}3$ mm gegeben; auf sie falle ein Hauptstrahl, der die Achse 25 mm vor dem vorderen Linsenscheitel trifft, und mit ihr einen Winkel von 20° einschließt. Dann wird mit der Genauigkeit, die fünfstellige Logarithmen geben, in mm

$$S_2' = \frac{93{,}184\,m + 95{,}930}{m + 0{,}09303} \qquad \text{und} \qquad T_2' = \frac{87{,}832\,m + 89{,}858}{m + 0{,}226\,995}$$

oder in graphischer Darstellung in Abb. 56 und 57.

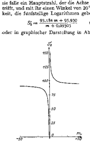


Abb. 56. Abhängigkeit der sagittalen Schnittweite S_2' von dem Abbildungsmaßstab $1/m$ für das Zahlenbeispiel des Textes.

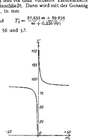


Abb. 57. Abhängigkeit der tangentialen Schnittweite T_2' von dem Abbildungsmaßstab $1/m$ für das Zahlenbeispiel des Textes.

Um den Astigmatismus für einen bestimmten Abbildungsmaßstab $1/m$ zu erhalten, hat man nur für diesen m-Wert die Differenz der Ordinaten der Kurve 57 (Verlauf der tangentialen Schnittweite) und der Kurve 56 (Verlauf der sagittalen Schnittweite) zu bilden.

49. Die Abbildung durch enge Bündel in einigen Sonderfällen. Für einige wichtige Sonderfälle mögen die allgemeinen Ableitungen dieses Abschnittes noch umgeformt werden. Die Berechnung der sagittalen bzw. tangentialen Schnittweite und die zeichnerische Auffindung des sagittalen bzw. tangentialen Bildpunktes für eine brechende Ebene ist schon weiter oben in Ziff. 44 gegeben worden. Hier sei nur noch nachgetragen, daß dann

$$\gamma_s = \frac{S}{S'} = \frac{n}{n'} \qquad \text{und} \qquad \gamma_t = \frac{n\cos^2 i}{n'\cos^2 i'} \tag{21}$$

wird. Wenn β_s bzw. β_t die sagittale bzw. tangentiale Lateralvergrößerung ist, so wird

$$\beta_s = 1 \qquad \text{und} \qquad \beta_t = \frac{\cos i'}{\cos i}. \tag{22}$$

Die Vergrößerung ist also im allgemeinen in den beiden Schnitten verschieden.

Für eine Planparallelplatte, deren Brechungszahl in bezug auf das sie umgebende Medium n sei, sind die für die einfache brechende Ebene geltenden Beziehungen zweimal nacheinander anzuwenden. Ist d die Dicke der Platte und wird $n_1'/n_1 = n_2/n_2' = n$ gesetzt, so findet man

$$S_2' = S_1 - \frac{d}{n \cos i_1'} \qquad \text{und} \qquad T_2' = T_1 - \frac{d \cos^2 i_1}{n \cos^3 i_1'}. \tag{23}$$

Ist $S_1 = T_1$, so wird der von Astigmatismus freie Dingpunkt durch die Platte in zwei Punkte abgebildet, deren astigmatische Differenz durch

$$T_2' - S_2' = \frac{d}{n \cos i_1'}\left(1 - \frac{\cos^2 i_1}{\cos^2 i_1'}\right) \tag{24}$$

gegeben wird. Diese ist demnach von der Lage des Mittelpunktes des homozentrischen Dingstrahlenbündels unabhängig, bleibt daher also auch bestehen, wenn dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt, d. h. also für ein auf die Platte fallendes Parallelstrahlenbündel. Dann wird aber nach (23) auch S_2' und T_2' unendlich, und demnach ist die astigmatische Differenz zu vernachlässigen. Deswegen führt z. B. eine Platte, auch erheblicher Dicke, vor einem photographischen Objektiv gebracht, mit dem ein sehr entfernter Gegenstand aufgenommen wird, keinen merkbaren Astigmatismus in die Abbildung ein.

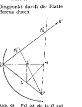


Abb. 58. PQ ist ein in Q auf einen hohlen Kugelspiegel mit dem Mittelpunkt M treffender Hauptstrahl, der in die Lage QR' gespiegelt wird. P_t' ist tangentialer, P_s' sagittaler Bildpunkt von P.

Beim Durchgang des Lichtes durch eine Planparallelplatte bleiben Vergrößerung und Konvergenzverhältnis ungeändert.

Auch für die Auffindung des sagittalen oder tangentialen Bildpunktes bei Abbildung durch eine spiegelnde Kugelfläche sind die Beziehungen (1) und (2) ohne weiteres verwendbar; es wird dann $n = -n'$ und $\cos i = \cos i'$ und damit

$$S' = \frac{S \cdot r}{2\,S \cdot \cos i - r} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2 \cos i}{r}, \tag{25}$$

$$T' = \frac{T \cdot r \cdot \cos i}{2\,T - r \cdot \cos i} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} = \frac{2}{r \cdot \cos i}. \tag{26}$$

Die zeichnerische Aufsuchung des sagittalen Bildpunktes geschieht analog dem in Abb. 45 gezeigten Verfahren; ist P der Dingpunkt, so ist demnach der sagittale Bildpunkt P_s' gleich dem Schnitt des reflektierten Hauptstrahles QR' mit der Zentralen PM (s. Abb. 58).

Dagegen ist für die zeichnerische Bestimmung des tangentialen Bildpunktes P_t' das in Abb. 46 angewandte Verfahren abzuändern (s. Abb. 58). Man hat von M aus auf den einfallenden Hauptstrahl PQ das Lot ML zu fällen und von L auf die Spiegelnormale QM das Lot LL'; dann ist L' das Perspektivitätszentrum für die Zuordnung der tangentialen Bildpunkte auf QR' zu den Dingpunkten des Strahles

PQ. In unserem Falle schneidet also die Gerade PL' den gebrochenen Hauptstrahl QR' in dem P entsprechenden tangentialen Bildpunkt P'_t. Während für $\lim i = 0$, d. h. bei paraxialen Abbildungen, und $S = s_0 < r/2$ P virtuell abgebildet wird, wie früher gezeigt ist, kann P, auch wenn seine Entfernung von der Spiegelfläche kleiner als $r/2$ ist, bei endlicher Hauptstrahlenneigung und Abbildung durch enge Bündel einen reellen sagittalen bzw. tangentialen Bildpunkt haben. Bei Drehung der ganzen geometrischen Konfiguration der Abb. 58 um die Achse PM beschreibt P'_t einen Kreis, den man als SCHELLBACHschen Kreis bezeichnet findet und der als eine Art Bild des Punktes P betrachtet werden kann.

Um einen Anhalt dafür zu geben, in welchem Maße die Bildfeldkrummung und der Astigmatismus bei der Abbildung durch eine Linse sich mit der Gestalt dieser ändert, sind in der Tafel 1 für den unendlich fernen Dingpunkt, der durch die Neigung von 20° des Hauptstrahls gegen die Achse festgelegt ist, die Beträge dieser Bildfehler für einige Linsenformen angegeben. Dabei ist angenommen, daß der Hauptstrahl 10 mm vor der ersten Linsenfläche die Achse schneidet, und daß in jedem Falle die Brechungszahl der Linse 1,5, ihre Dicke 10 mm und ihre Brennweite 100 mm ist.

In einer weiteren Tafel 2 sind die Werte der gleichen Bildfehler für die Linse $r_1 = -140$, $r_2 = -37{,}72$, $d = 10$, $n = 1{,}5$ für verschiedene Blendenlagen b angegeben. b ist die Entfernung des Schnittpunktes des dingseitigen Hauptstrahles mit der Achse vom vorderen Linsenscheitel. Der Astigmatismus wird für zwei b-Werte, die nahe bei $b = 10$ und $b = 27$ liegen, zu Null.

Tabelle 1.

r_1	r_2	A[1]	K_s[1]	K_t[1]
− 100	−34,44	+0,97	−3,35	− 2,41
− 140	−37,72	−0,01	−3,88	− 3,89
− 200	−40,7	−0,80	−4,28	− 5,05
− 500	−45,76	−1,97	−4,89	− 6,78
−1000	−47,77	−2,37	−5,10	− 7,37
+1000	−52,45	−3,19	−5,53	− 8,59
+ 500	−55,19	−3,60	−5,77	− 9,22
+ 200	−65,56	−4,88	−6,43	−11,10

[1]) A, K_s und K_t sind in Ziff. 47 definiert.

Tabelle 2

b	A[1]	K_s[1]	K_t[1]
3	−3,48	−5,56	−8,89
5	−2,30	−4,98	−7,17
7	−1,26	−4,47	−5,68
8,5	−0,60	−4,14	−4,71
10	−0,01	−3,88	−3,89
12	+0,63	−3,58	−2,98
15	+1,27	−3,26	−2,04
20	+1,50	−3,16	−1,70
25	+0,72	−3,53	−2,84
27	+0,12	−3,82	−3,70
30	−1,07	−4,40	−5,44

50. Einwirkung des Astigmatismus und der Bildfeldwölbung auf die Bildeigenschaften. Um sich eine Vorstellung von der Wirkung des Astigmatismus bzw. der Bildkrümmung auf das durch zentrierte Folgen entworfene Bild zu verschaffen, kann man die einer von ROHRschen[2]) Darstellung entnommene Abb. 59 benutzen. In ihr befindet sich am weitesten links eine enge Blende, durch deren Mitte der dick ausgezogene, gegen die strichpunktierte Achse geneigte Hauptstrahl geht. Nach Durchschreitung der Blende fällt das enge Bündel auf eine Linse. Von dem Bündel sind außer dem Hauptstrahl vier weitere Strahlen gezeichnet, die der äußeren Kontur des Bündels angehören, und zwar zwei im Meridianschnitt des Hauptstrahles gelegene Strahlen (in der Abbildung der oberste und unterste der gezeichneten einfallenden Strahlen), während die beiden übrigen Strahlen dem Sagittalschnitt des Hauptstrahles angehören sollen.

Im Bildraum sind Schnitte des Bündels nach Durchgang durch die Linse mit zum Hauptstrahl senkrechten Ebenen verschiedener Lage gezeichnet; dar-

[2]) M. v. ROHR, Die Naturwissenschaften, 1913: Die modernen Brillengläser und ihre Stellung in der technischen Optik.

unter befinden sich auch die Ebenen, in denen die Schnitte zu Linien, den Brennlinien, entarten, deren Schnittpunkte mit dem Hauptstrahl der tangentiale bzw. sagittale Bildpunkt unserer Definition S. 69 sind[1]).

Denkt man sich nun etwa eine beliebig gerichtete Linie durch enge Bündel abgebildet, so erhält man im allgemeinen sowohl in der tangentialen als auch in der sagittalen Bildschale ein undeutliches Bild jener Linie, da jeder Punkt der Linie in zwei Brennlinienstückchen auseinandergezogen wird.

Aus der Abbildung erkennt man, daß die Brennlinie der tangentialen Büschel senkrecht auf der Meridianebene des Hauptstrahles steht, so daß bei Drehung der geometrischen Konfiguration der Abb. 59 um die Achse diese Brennlinie einen achsensenkrechten Kreis umhüllt. Die Brennlinie der sagittalen Büschel dagegen liegt in dem Meridianschnitt des Hauptstrahles und ist nach der Achse

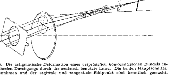


Abb. 59. Die astigmatische Deformation eines ursprünglich homozentrischen Bündels infolge schiefen Durchgangs durch die zentrisch benutzte Linse. Die beiden Hauptschnitte, die Brennlinien und der sagittale und tangentiale Bildpunkt sind kenntlich gemacht.

zu gerichtet. Nur dann, wenn sich die Brennlinien des tangentialen bzw. sagittalen Büschels für die einzelnen Punkte der Dingline übereinander lagern, kommt gewissermaßen eine Abbildung dieser Linien zustande. Auf die Bildschale der tangentialen Büschel werden daher alle Kreise, die auf der durch ihren Mittelpunkt gehenden Achse senkrecht stehen, dem Anschein nach deutlich abgebildet. Auf die Schale der sagittalen Büschel dagegen werden alle die Geraden, die in der achsensenkrechten Dingebene, zu der die sagittale Bildschale gehört, liegen und durch den Schnittpunkt der Dingebene mit der Achse selbst oder in ihren Verlängerungen gehen, gut abgebildet. Wird eine Schar achsensenkrechter konzentrischer Kreise mit dem Achsenschnittpunkt als Mittelpunkt durch ein astigmatisches System abgebildet, so werden daher die Kreise auf der tangentialen Bildschale scharf erscheinen, die Radien dieser Kreise dagegen auf der sagittalen Bildschale. Nur die Kreise mit unendlich kleinen Radien und diese Radien selbst werden gleichzeitig scharf abgebildet, nämlich in die Gaussische Bildebene, die gemeinsame Tangentialebene an die beiden Bildschalen im Achsenschnittpunkt.

Von einem Dingkreuz also, dessen Mittelpunkt sich in endlichem Abstande von der Achse befindet, können seine beiden Balken durch eine astigmatische Folge niemals gleichzeitig gut auf eine Fläche abgebildet werden. Ist die

[1]) J. C. Sturm, Liouville Journ. 1838, Bd. 3, S. 357—384; A. Gullstrand, Skand. Arch. f. Physiol. 1890, Bd. 2, S. 269—359.

Ebene des Kreuzes achsensenkrecht, und trifft der eine Balken oder seine Verlängerung die Achse in O, so wird dieser auf der sagittalen Bildschale in seiner ganzen Ausdehnung gut abgebildet. Der zu ihm senkrechte Balken wird, wenigstens zu einem Stück, auf die tangentiale Bildschale deutlich abgebildet. Dieser Sachverhalt wird anschaulich gezeigt in Abb. 60.

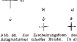


Abb. 60. Zur Erscheinungsform des Astigmatismus schiefer Bündel. In a) ist das aus einer radialen und einer peripheren Linie bestehende Dingkreuz dargestellt, in b) das Bildkreuz, wenn das Bild in der Schale der tangentialen, in c) das Bildkreuz, wenn das Bild in der Schale der sagittalen Büschel aufgefangen wird.

Beseitigung des Astigmatismus und der Bildkrümmung wird im allgemeinen von für die Photographie bestimmten Flächenfolgen zu fordern sein. Bei optischen Werkzeugen, die hingegen für den Gebrauch mit dem Auge in Frage kommen, ist die Beseitigung des Astigmatismus das wesentlichste Erfordernis. Die übrigbleibende, von der Krümmung der Netzhaut abweichende Bildfeldwölbung läßt sich meist durch Akkommodation ausgleichen oder auch dort, wo eine veränderliche Okulareinstellung vorhanden ist, durch diese bei Betrachtung verschiedener Teile des Bildfeldes kompensieren. Handelt es sich darum, Striche (etwa Teilstriche von Skalen, Spektrallinien usw.) abzubilden, so ist die Hebung des Astigmatismus nicht notwendig; sind die Striche z. B. in der Dingebene peripher angeordnet, so werden sie scharf auf die tangentiale Bildschale abgebildet; deren Ebnung ist dann z. B. bei Aufnahmen auf die photographische Platte notwendig.

b) Abbildung durch weite und mäßig geöffnete Bündel. (Sphärische Abweichungen.)

Für die durch zentrierte brechende oder spiegelnde Kugelflächen bewirkten Abbildungsvorgänge des letzten Abschnittes sind als Träger der Abbildung immer unendlich enge Strahlenbündel vorausgesetzt, bis auf die eine Ausnahme der Spiegelung an ebenen Flächen, bei der allerdings die Abbildung eines beliebig großen Raumes durch beliebig weit geöffnete Bündel als möglich erkannt wurde. Die optische Wirkung kann in diesem Falle aber bloß ein Bild ergeben, das sich von seinem Raumding nur durch eine andere Anordnung im Raume unterscheidet.

Selbst bei der Annahme unendlich enger Bündel gelingt, wie wir sahen, nur für den Fall paraxialer Abbildung, der Gaussschen Abbildung also, eine eineindeutige Zuordnung der Punkte des Ding- und Bildraumes. Die Strahlenvereinigung ist dabei von zweiter Ordnung. Bei schiefem Einfall des Trägers des Elementarbündels hört bereits die eineindeutige Zuordnung von Ding- und Bildpunkten auf; eine Abbildung, bei der sämtliche räumlich angeordnete Strahlen des engen Bündels zur Vereinigung gelangen, existiert hier nicht; vielmehr kann man von einer Abbildung nur für zwei bestimmte ebene Büschel, die aus dem Bündel als tangentiales bzw. sagittales Büschel herauszugreifen sind, sprechen. Dabei ist die Strahlenvereinigung für das tangentiale Büschel nur von erster Ordnung.

Schon vom Standpunkte der reinen geometrischen Optik ist die paraxiale Abbildung, wenn man auf diese beschränkt bleiben müßte, wenig leistungsfähig.

Ihr Ergebnis kann die Abbildung nur eines unendlich kleinen Teils eines Dinges sein, und dabei würde infolge der geringen Bündelöffnung dieses in der Ausdehnung unzulängliche Bild auch noch unendlich lichtschwach sein. In Wirklichkeit gilt ja aber für eine derartige Abbildung die geometrische Optik auch nicht als Annäherung, sondern die bei solch engen Bündeln voll ins Gewicht fallende Beugungswirkung würde die Existenz eines Bildpunktes illusorisch machen. Denn die Wellenlehre verlangt, daß die Wellenfläche des Bildraumes nicht nur eine Kugel sei, sondern auch, daß die die Abbildung bewirkende Strahlenbündel möglichst weit geöffnet sei, damit sich die Lichtwirkung der Kugel nahezu auf einen Punkt konzentriert. Um Bilder von erträglicher Helligkeit zu erhalten, fordert aber bereits die geometrische Optik, durch Steigerung der Bündelöffnung die Grenzen der GAUSSschen Abbildung zu überschreiten. Wie man die damit zwangsläufig verbundene unvollkommenere Strahlenvereinigung möglichst unschädlich zu machen hat, soll im folgenden gezeigt werden.

Flächen, die für gewisse Lagen des Dingpunktes auch ein weit geöffnetes, von diesem ausgehendes Strahlenbündel nach der Brechung oder Spiegelung wieder in einem Bildpunkte zu homozentrischer Vereinigung bringen, also jenen Dingpunkt aberrationsfrei abbilden, sind seit langem bekannt. Man nennt sie oft kartesische Flächen, da DESCARTES sich eingehend mit den aberrationsfreie Abbildung vermittelnden Flächen beschäftigt hat; ein Ergebnis seiner Untersuchungen war die Auffindung der kartesischen Ovale, Drehungsflächen, deren Meridiankurven im allgemeinen von vierter Ordnung sind, in Sonderfällen aber in Kegelschnitte übergehen (vgl. S. 19).

Für die praktische Optik haben die kartesischen Flächen keine größere Bedeutung gewonnen, schon deswegen nicht, weil fur jeden anderen Dingpunkt, der nicht in einem „Brennpunkt" einer solchen Fläche liegt, in der Regel die Vereinigung seiner Bildstrahlen so ungünstig ist, daß schon dem Brennpunkt unmittelbar benachbarte Punkte nur sehr unvollkommen abgebildet werden. Das Gesichtsfeld bleibt also bei diesen Abbildungen für die meisten Fälle ungenügend klein, wenn auch die Bündelöffnung nichts zu wünschen übrig läßt. Immerhin gibt es natürlich in der Praxis Anwendungsgebiete, wo die Benutzung solcher Flächen lohnt. Es sei an die Scheinwerferspiegel erinnert, bei denen z. B. das von einer möglichst punktförmigen Lichtquelle ausgehende Licht in einem anderen Punkte vereinigt werden soll.

Um für die wichtigsten Aufgaben der optischen Werkzeuge befriedigende Lösungen zu finden, ist man aber andere Wege gegangen. Es gibt heute eine ganze Reihe von optischen Anordnungen, die sowohl hinsichtlich Öffnung der abbildenden Strahlenbündel, also hinsichtlich der Lichtstärke, als auch in bezug auf Ausdehnung des Gesichtsfeldes ganz gewaltig über den Bereich der GAUSSschen Abbildung hinausgehen. Das Mittel, diesen Erfolg zu erreichen, wurde gefunden in der geeigneten Kombination brechender Flächen, meist sphärisch begrenzter Linsen mitunter in Zusammenwirkung mit Spiegeln. Durch solche passende Anordnungen von Linsen gelingt es, die Strahlenvereinigung der Bildpunkte so weit zu treiben, daß das Bild wirklich scharf erscheint.

Denn noch ein Weiteres ist hier zu bedenken. Alle Bilder, die von optischen Werkzeugen entworfen werden, sind für die Betrachtung durch das menschliche Auge bestimmt, das, selbst wie eine Linsenfolge wirkend, durchaus nicht frei von Abbildungsfehlern ist. Das optische Auflösungsvermögen des Auges, seine Sehschärfe, wesentlich abhängig vom Gefüge der Netzhaut, ist zwar für die verschiedenen Menschen verschieden, aber doch immer so, daß etwa zwei Dingpunkte, in Wirklichkeit getrennt voneinander, dem Auge nicht mehr unter-

scheidbar sind, sondern wie ein einziger Punkt wahrgenommen werden, wenn sie unter einem Sehwinkel erscheinen, der eine gewisse Größe (im Durchschnitt ungefähr eine Winkelminute) unterschreitet. Sollen daher die Gegenstände ebenso scharf erscheinen bei Benutzung optischer Werkzeuge, wie sonst das bloße Auge seine Umwelt zu erblicken pflegt, so genügt es offenbar vollkommen, wenn ein Dingpunkt in einen kleinen Fleck abgebildet wird, der seiner Ausdehnung nach unter der Grenze der Sehschärfe liegt.

Ganz ähnlich liegen auch die Verhältnisse bei solchen optischen Instrumenten, bei denen die Bilder zunächst nicht dem Auge dargeboten werden, sondern, z. B. wie in der Photographie auf einer lichtempfindlichen Schicht festgehalten werden. Die Struktur dieser Schicht ist, ganz entsprechend dem Gefüge der Netzhaut, wesentlich maßgebend für die Trennung von Einzelheiten im Bilde. Das Auflösungsvermögen der photographischen Objektive geht in der Regel, wenigstens was die mittleren Teile des Bildfeldes betrifft, erheblich über die Wiedergabefähigkeit der für allgemeinen Gebrauch bestimmten Trockenplatten hinaus. Das Plattenkorn ist zu „grob“ für die „Feinheit“ der durch das Objektiv vermittelten Abbildungen.

Über die Anforderungen, die an ein optisches System zu stellen sind, entscheidet der Verwendungszweck. Zu der einfachsten Folge brechender Flächen gehört die Brille. Sie ist entsprechend der starken Abblendung der abbildenden Strahlenbündel beim Sehvorgang durch die Iris nur für enge Bündel korrigiert, hat aber, damit die Beweglichkeit des Auges voll ausnutzbar bleibt, für das große Gesichtsfeld von etwa 60° scharfe Abbildung zu gewährleisten.

Ähnliche Anforderungen werden hinsichtlich Bündelöffnung und Gesichtsfeld an Okulare gestellt; diese sind allerdings meist komplizierter gebaut, da häufig noch weitere Korrektionsforderungen, wie das Verlangen nach Farbenreinheit des Bildes usw., zu befriedigen sind.

Hingegen sind bei Fernrohr- und Mikroskopobjektiven die zu erfüllenden Wünsche gerade umgekehrt. Bei ihnen kommt es nicht auf ein weit ausgedehntes Gesichtsfeld an; ein solches von etwa 10° kann schon als verhältnismäßig groß für ein einfaches Fernrohrobjektiv gelten. Dafür müssen die Öffnungen der abbildenden Bündel groß sein. Das ist in noch höherem Maße bei Mikroskopobjektiven der Fall; bei ihnen kommen Öffnungswinkel des von einem Dingpunkt ausgehenden Strahlenbündels bis über 140° vor.

Beide Forderungen, große Bündelöffnung und großes Gesichtsfeld, sind für die lichtstarken photographischen Universalobjektive zu erfüllen. Eine solche Lichtbildlinse pflegt bei einem Öffnungsverhältnis von etwa 1:4,5 (das Öffnungsverhältnis ist definiert durch den Quotienten $\frac{\text{Durchmesser der Eintrittspupille}}{\text{Objektivbrennweite}}$), in der Brennebene ein Bildfeld scharf auszuzeichnen, dessen Durchmesser der Brennweite gleichkommt. Die hier aufgestellten Korrektionsforderungen für verschiedene optische Anordnungen sollen natürlich nur roh und beispielsweise skizzieren, was von den einzelnen Linsensystemen verlangt wird; im Einzelfall ist selbstverständlich die Problemstellung immer wieder modifiziert.

In unseren weiteren Ausführungen sollen nun die Mittel gezeigt werden, wie man zu Linsenfolgen gelangt, die in ihren Leistungen so erstaunlich weit über den Bereich der GAUSSschen Abbildung hinausgehen. Dabei sollen unsere Betrachtungen auch an dieser Stelle wieder nur auf sphärische und zentrierte Flächenfolgen erstreckt werden, und Fragen, die sich aus der physikalischen Beschaffenheit des Lichtes ergeben, unbeachtet bleiben. Es soll uns hier nur auf den Verlauf der abbildenden Strahlen und ihre Zusammendrängung an gewissermaßen singulären Stellen, den Bildorten, in rein geometrischem Sinne

ankommen. Über die für die Vollkommenheit der Abbildung natürlich grundlegende Wichtigkeit der Lichtverteilung in diesen Stellen wird dagegen hier nicht gesprochen. Die Tatsache des Bestehens leistungsfähigster optischer Anordnungen, die fast ausschließlich nur mit Hilfe der Methoden der geometrischen Optik aufgefunden sind, zeigt, wie weitgehend die von dieser Disziplin gelieferten Ergebnisse, trotzdem sie nur Annäherungen sind, der Praxis genügen können.

Die Untersuchung des Verlaufs von Strahlen und Strahlenbündeln soll nun in zweifacher Weise geführt werden. Es werden einmal ein oder mehrere Strahlen endlicher Neigung in ihrem Verlauf durch das ganze optische System bis zum Bildraum verfolgt werden; man bekommt so eine völlig exakte Bestimmung der einzelnen Strahlen. Dann aber soll auch, ähnlich wie bei der Gaussschen Abbildung, ein ganzer Bereich strahlenweiser Abbildung untersucht werden, indem gewissermaßen die Gausssche Abbildung als eine Annäherung erster Ordnung durch Zusatzglieder auf eine Annäherung höherer Ordnung erweitert wird. Beide Methoden haben für den rechnenden Optiker von Fall zu Fall ihre Bedeutung. Erhält man auf dem ersten Wege exakte Ergebnisse, so gibt dieser aber nur Einzelresultate und laßt gut korrigierte Systeme bloß durch mühsames rechnerisches Tatonnement auffinden.

Auf dem zweiten Weg erhält man Aussagen über einen ganzen Abbildungsbereich und man kann, wie wir sehen werden, durch algebraische Beziehungen manche optische Systeme zwangsläufig errechnen, die gewisse Abbildungsforderungen erfüllen. Die so gewonnenen Ergebnisse haben aber infolge ihres approximativen Charakters meist nur bedingten Wert und bedürfen häufig der Vervollkommnung durch die exakte Durchrechnung. Zur „Vorrechnung" also, d. h. zur Aufsuchung von Systemen bestimmter Eigenschaften, ist die zweite Methode oft recht wertvoll.

51. Aufsuchung des Bildstrahles zu einem beliebigen auf eine brechende (oder spiegelnde) Kugelfläche treffenden Dingstrahl durch trigonometrische Rechnung. In der umstehenden Abb. 61 ist als Ebene der Zeichnung die durch den Kugelmittelpunkt und den einfallenden und gebrochenen Strahl bestimmte Ebene gewählt und es bedeutet RQ einen auf die brechende Kugelfläche F mit dem Krummungsradius r, dem Mittelpunkt M und dem Scheitel S, die zwei Medien der Brechungszahlen n bzw. n' trennt, treffenden Dingstrahl, der, wenn er nicht gebrochen würde, die Achse SM in P durchsetzte. Es ist dann i der Einfallswinkel, u der dingseitige Öffnungswinkel oder der Neigungswinkel des einfallenden Strahles gegen die Achse. Das Achsenlot QL, die Einfallshöhe, heiße h, die positiv gerechnet werde, wenn sie oberhalb der Achse verläuft; SP ist die dingseitige Schnittweite[1]) s und MP die dingseitige Mittelpunktsentfernung c. Beide, s und c, gelten als positiv, wenn P im Sinne der Lichtrichtung, die wieder wie früher von links nach rechts fortschreitend angenommen wird, rechts von den entsprechenden Bezugspunkten, nämlich von S bzw. M, liegt. Auch die Pfeilhöhe $SL = p$ sei positiv, wenn der Fußpunkt L der Einfallshöhe rechts von S liegt. Ebenfalls in Übereinstimmung mit früheren Festsetzungen wird $QM = r$ als positiv gerechnet, wenn die Kugelfläche dem einfallenden Licht ihre gewölbte Seite zukehrt. Verlaufen die Strecken im umgekehrten Sinne wie hier angenommen und in der Abb. 61 gezeichnet, so sind sie negativ.

Die gleichen Festsetzungen gelten für die Vorzeichen der zum gebrochenen Strahl QP' gehörigen Strecken, nämlich $SP' = s'$ der bildseitigen Schnittweite

[1]) Zur Unterscheidung dieses Wertes von der paraxialen Schnittweite siehe die an Gleichung (13) geknüpften Bemerkungen.

und $MP' = c'$ der bildseitigen Mittelpunktsentfernung. Das Vorzeichen von u bestimmt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} u = \frac{h}{s - p}. \tag{1}$$

Wird an allen diesen Festsetzungen ein für allemal festgehalten, so gelten die nun zu entwickelnden Beziehungen ganz allgemein; auch die Vorzeichen der Einfalls- und Brechungswinkel i und i' und des bildseitigen Öffnungswinkels u' sind dann eindeutig bestimmt.

Aus dem ΔQMP folgt

$$MP : MQ = \sin i : \sin u \qquad \text{oder} \qquad \sin i = \frac{c \cdot \sin u}{r} \tag{2}$$

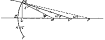


Abb. 61. Zur trigonometrischen Durchrechnung des auf eine brechende Kugelfläche F treffenden Strahles RQ, der in Q in die Lage QP' gebrochen wird. Es sind SP und SP' ding- bzw. bildseitige Schnittweite, u und u' ding- bzw. bildseitiger Neigungswinkel gegen die Achse SM, $MQ = r$ Kugelradius, QL Einfallshöhe, SL Pfeilhöhe, i und i' Einfalls- bzw. Brechungswinkel, $\varphi = S\hat{M}Q$, n und n' Brechungszahl des Mediums vor bzw. hinter F.

wobei also

$$c = s - r \tag{3}$$

ist. Nunmehr läßt sich mit Hilfe des Brechungsgesetzes i' aus

$$n \sin i = n' \sin i' \tag{4}$$

bestimmen. Weiter ist aus der Abb. 61 abzulesen, wenn der Kugelwinkel $S\hat{M}Q$ mit φ bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= u + i = u' + i' \\ \text{oder} \quad u' &= u + (i - i') \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Es soll nun zu dem einfallenden Strahl RQ, der durch s und u gegeben sei, der gebrochene Strahl QP' durch Bestimmung von s' und u' gefunden werden.

Aus $\Delta QMP'$ folgt

$$MP' : MQ = \sin i' : \sin u' \qquad \text{oder} \qquad c' = \frac{r \cdot \sin i'}{\sin u'}. \tag{6}$$

Nimmt man hierzu noch

$$s' = c' + r \tag{7}$$

so läßt sich also für ein vorgegebenes Wertepaar s, u mit Hilfe der Beziehungen (2) bis (7) das zugehörige Wertepaar s', u', d. h. der gebrochene Strahl, finden.

Die Einfallshöhe läßt sich berechnen aus

$$h = r \cdot \sin \varphi, \tag{8}$$

die Pfeilhöhe aus

$$p = r(1 - \cos\varphi) = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \tag{9}$$

Die eben abgeleiteten Formeln versagen in dem Sonderfall, daß $r = \infty$ wird, die brechende Fläche also eine achsensenkrechte Ebene ist. In nebenstehender Abb. 62 ist dann wieder der einfallende Strahl RQ gegeben durch Winkel u und $SP = s$. Es ist

$$QS = s \cdot \operatorname{tang} u = s' \operatorname{tang} u' \qquad \text{oder} \qquad s' = s \frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} u'}. \tag{10}$$

Weiter ist

$$u + i = u' + i' = 0 \tag{11}$$

und wieder

$$n \sin i = n' \cdot \sin i'.$$

Unter Benutzung der Beziehungen (10) und (11) laßt sich also s' und u' aus s und u und damit der zu dem einfallenden Strahl QP gehörige gebrochene Strahl QP' bestimmen, wenn $r = \infty$ ist.

Für den Fall, daß der Dingstrahl achsenparallel einfällt, wo also $u = 0$ und $s = c = \infty$ werden, versagt die Gleichung zur Bestimmung für i. Der einfallende Strahl ist dann durch die Einfallshöhe h festzulegen und es wird

$$\sin i = \frac{h}{r}, \tag{12}$$

die andern Beziehungen zur Auffindung des gebrochenen Strahles bleiben (s. Abb. 63) benutzbar

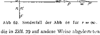


Abb 62. Sonderfall der Abb 61 für $r = \infty$.

Nebenbei sei hier bemerkt, daß die in Ziff. 29 auf andere Weise abgeleiteten Beziehungen zwischen den Schnittweiten eines Ding- und Bildpunktes des paraxialen Abbildungsbereiches auch aus den Formeln (2), (5) und (6) bestimmt werden können, wenn man nur dann u, u', i und i' als unendlich kleine Größen erster Ordnung betrachtet. Unter dieser Voraussetzung wird (2) zu

$$r i = (s - r) u \tag{2a}$$

und (6) zu

$$r i' = (s' - r) \cdot u' \tag{6a}$$

und das Brechungsgesetz nimmt die Form $n i = n' i'$ an; dagegen bleibt (5) unverändert und kann nunmehr geschrieben werden

$$u' = u \left(\frac{s}{r} - \frac{n}{n'} \frac{s - r}{r} \right).$$

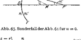


Abb. 63. Sonderfall der Abb. 61 für $u = 0$.

Setzt man diesen Ausdruck in den Quotienten von (6a) und (2a) ein, so folgt

$$\frac{i'}{i} = \frac{s' - r}{s - r} \left(\frac{s}{r} - \frac{n}{n'} \frac{s - r}{r} \right) = \frac{n}{n'}, \tag{13}$$

woraus dann sich die Beziehungen (8) und (8a) in Ziff. 29 durch Umformung gewinnen lassen. Um bei künftigen[1]) Untersuchungen die paraxialen Schnittweiten von denen der Strahlen außerhalb des Paraxialraumes unterscheiden zu können, sollen jene durch den Index 0 kenntlich gemacht werden, so daß z. B. aus (13) abgeleitet wird

$$s_0' = \frac{n'}{\frac{n}{s_0} + \frac{n' - n}{r}}. \tag{14}$$

Die Formeln (1) bis (12) gestatten in jedem Falle zu dem gegebenen einfallenden Strahl die Bestimmungsstücke des gebrochenen Strahles in für die logarithmische

[1]) Dort, wo Verwechslungen ausgeschlossen erscheinen, wird auch der Index 0 wieder fortgelassen werden.

Rechnung geeigneter Form zu finden. Nur sei noch bemerkt, daß, wenn der Radius der brechenden Fläche verhältnismäßig lang ist, und damit die Bestimmung von s' aus (7) an Genauigkeit zu wünschen übrig läßt, es zweckmäßiger ist, die Beziehung

$$s' = \frac{h}{\operatorname{tang} u'} + p = \frac{r \sin \varphi}{\operatorname{tang} u'} + 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \tag{15}$$

zu benutzen oder (6) umzuformen in

$$\frac{s'}{r} \sin u' = \sin u' + \sin i',$$

woraus folgt:

$$s' = \frac{2r \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{i' - u'}{2}}{\sin u'}. \tag{16}$$

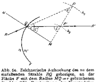


Abb. 64. Zeichnerische Aufsuchung des zu dem einfallenden Strahle RQ gehörigen, an der Fläche F mit dem Radius $MQ = r$ gebrochenen Strahles QR'. Beschreibung der Konstruktion siehe Text.

Auch durch Zeichnung läßt sich für den auf eine Kugelfläche F, die zwei Medien der Brechungszahlen n und n' trennt, treffenden Strahl der gebrochene Strahl finden (s. Abb. 64). Ist RQ wieder der einfallende Strahl, r der Radius und M der Mittelpunkt von F, so wähle man die durch RQM bestimmte Ebene als Zeichenebene und schlage um M mit $\varrho_1 = n' r/n$ den Kreis k_1 und mit $\varrho_2 = n r/n'$ den Kreis k_2. RQ schneidet k_1 in P und PM trifft k_2 in P'; dann ist QP' der gesuchte gebrochene Strahl. Zum Beweise dieser Konstruktion ziehe man noch das Einfallslot MQN. Die Dreiecke MQP und $MP'Q$ sind dann einander ähnlich, da sie bei M einen gemeinsamen Winkel haben und $MP/MQ = n'/n = MQ/MP'$ ist. Demnach ist $R\hat{Q}N = i = M\hat{Q}P = M\hat{P}'Q$ und $M\hat{Q}P' = i' = Q\hat{P}M$; also ist $\sin i : \sin i' = MP : QM = QM : MP' = n' : n$, wie verlangt.

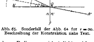


Abb. 65. Sonderfall der Abb. 64 für $r = \infty$. Beschreibung der Konstruktion siehe Text.

Wird $r = \infty$, ist also die die beiden Medien trennende Fläche F eine Ebene, so versagt die oben gegebene Konstruktion. Man verfährt dann wie in nebenstehender Abb. 65 veranschaulicht. Um den Punkt Q, in dem der einfallende Strahl RQ die brechende Ebene F trifft, beschreibt man zwei Kreise k_1 und k_2, deren Radien, an sich beliebig, sich wie $n' : n$ verhalten. RQ schneidet k_2 in P; die durch P zum Einfallslot QN gezogene Parallele trifft k_1 in P'. Dann ist $P'Q$ in seiner Verlängerung über Q hinaus der gesuchte gebrochene Strahl. Zum Beweis dieses Zeichenverfahrens nenne man den Abstand des Punktes P bzw. P' vom Einfallslot QN l; dann ist $\sin i = l/QP$ und $\sin i' = l/QP'$ oder $\sin i/\sin i' = QP'/QP = n'/n$; also ist das Brechungsgesetz befriedigt.

52. Aufsuchung des Bildstrahles zu einem in der Meridianebene eines zentrierten sphärischen Linsensystems verlaufenden Dingstrahl durch trigonometrische Rechnung und Zeichnung. Besteht die optische Anordnung, wie meist, aus einer Reihe von brechenden Flächen, die alle zentriert sind, so

sind die Gleichungen für die trigonometrische Durchrechnung eines ein solches System durchlaufenden Lichtstrahles nur dann verwendbar, wenn dieser in einer die Achse des Systems enthaltenden Ebene, in einer Meridianebene also, verläuft. Ist der Strahl dagegen windschief zur Achse der Flächenfolge, so gestaltet sich seine Durchrechnung weniger einfach, wie wir später sehen werden.

Denken wir uns also ein zentriertes Linsensystem von k brechenden Kugelflächen, deren Scheitel $S_1, S_2 \ldots S_k$ sein mögen, so nennt man die Abstände zweier aufeinanderfolgender Scheitel, etwa $S_{\nu-1}S_\nu$, die axiale Linsendicke oder die Linsendicke schlechthin und bezeichnet diese mit $d_{\nu-1}$. Es ist also z. B. $d_1 = S_1S_2$ und $d_{k-1} = S_{k-1}S_k$ die Dicke der ersten bzw. letzten Linse des Systems. Die rechnerische Verfolgung eines in der Meridianebene der Linsenfolge verlaufenden Lichtstrahles geschieht dann durch für jede einzelne Fläche sukzessiv wiederholte Anwendung der jeweilig benötigten Beziehungen aus den Formeln (1) bis (12). Der Übergang von einer Fläche $F_{\nu-1}$ zur nächsten F_ν erfolgt dann durch die Beziehungen:

$$s_\nu = s'_{\nu-1} - d_{\nu-1} \tag{17}$$

$$u_\nu = u'_{\nu-1}. \tag{18}$$

53. Optischer Mittelpunkt einer Linse. Ein paar Bemerkungen über den optischen Mittelpunkt einer Linse mögen hier noch Platz finden. Nimmt man aus der vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Dingstrahlen die Strahlen heraus, die die Achse schneiden, so erhält man eine dreifache Mannigfaltigkeit die Achse schneidender Strahlen und kann aus dieser eine zweifache Mannigfaltigkeit von Dingstrahlen wählen, die nach Durchsetzung der Linse in Bildstrahlen übergehen, die parallel zu ihren zugehörigen Dingstrahlen verlaufen. Will man diese letztgenannten Strahlen näher untersuchen, so genügt es, aus drehungssymmetrischen Gründen von ihnen nur eine einfache Mannigfaltigkeit, nämlich die in einer Achsenebene verlaufenden Strahlen zu betrachten.

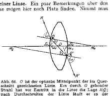


Abb. 66. O ist der optische Mittelpunkt der im Querschnitt gezeichneten Linse. Ein durch O gehender Strahl hat vor Eintritt in die Linse die Lage RQ; nach Durchschreiten der Linse läuft er in der Richtung $Q'R'$ weiter, wobei $Q'R' \| RQ$ ist.

Ist in Abb. 66 $RQOQ'R'$ ein solcher Strahl, es ist also $RQ \| Q'R'$, und zieht man die Kugelnormalen M_1Q und M_2Q', so findet man leicht an Hand der Abb. 66, daß $i_1 = i'_2$ und $i'_1 = i_2$ sind, weil $u_1 = u'_2$ ist und daß die Dreiecke QOM_1 und $Q'OM_2$ einander ähnlich sein müssen. Nun ist für beliebiges u_1

$$M_2O : M_1O = r_2 : r_1, \tag{19}$$

d. h. jeder beliebige Dingstrahl, der eine Linse, die beiderseits von Luft umgeben ist, derart durchsetzt, daß er im Bildraum zu seiner Einfallsrichtung parallel weiterläuft, geht stets durch ein und denselben Achsenpunkt O; diesen nennt man den optischen Mittelpunkt der Linse. Strahlen, die durch

den optischen Mittelpunkt gehen, erfahren daher durch die Linse keine Ablenkung, sondern nur eine Parallelverschiebung. Schreibt man die Gleichung (19)

$$(r_2 + M_2 O):(r_1 + M_1 O) = r_2 : r_1$$

und nennt

$$M_2 O + r_2 = \sigma_2, \qquad r_1 + M_1 O = \sigma_1,$$

so findet man aus

$$\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1 = 0$$

und

$$\sigma_1 - \sigma_2 - d = 0$$

die bezüglichen Abstände des optischen Mittelpunktes O von den Linsenscheiteln S_1 und S_2 als

$$\sigma_1 = \frac{d\, r_1}{r_1 - r_2},$$

$$\sigma_2 = \frac{d\, r_2}{r_1 - r_2}.$$

Im Grenzfall $i_1 = 90°$, also bei streifendem Eintritt des Dingstrahles, wird

$$\sin u_1' = \frac{1}{n\left(\frac{d}{r_1 - r_2} - 1\right)},$$

womit sich der Winkel u_1 des einfallenden (bzw. des aus der Linse austretenden) Strahles gegen die Achse unter Verwendung von (4) und (5) bestimmen läßt.

54. Sphärische Abweichung eines Achsenpunktes. Läßt man z. B. von dem Achsenpunkt, dessen paraxialer Bildpunkt am Schluß von Ziff. 39 aufgesucht wurde, einen Strahl, der gegen die Achse unter 5° geneigt ist, ausgehen, und jene Linse durchsetzen, so wäre zunächst $s_1 = -196{,}6$ und $u_1 = -5°$. Aus (2) bis (7) ergibt sich $s_1' = 8383 \cdot 3$, dann wird nach (17) $s_2 = 8471 \cdot 6$ und durch erneute Anwendung von (2) bis (7) wird gefunden $s_2' = 183{,}125$. Da $s_{02}' = 196{,}6$ ist, so geht demnach der unter 5° gegen die Achse geneigte Strahl nicht durch den paraxialen Bildpunkt, obwohl er auch von dessen zugehörigem Dingpunkt ausgeht. Die geschilderte Abbildung ist nicht frei von „sphärischer Abweichung"[1]), deren Betrag in unserem Falle durch $s_2' - s_{02}' = -13{,}475$ gemessen werden könnte.

Für die zeichnerische Verfolgung eines in der Meridianebene verlaufenden Strahles ergeben sich beim Vorliegen eines Systems aus mehreren Flächen gegenüber der einzelnen Fläche keine neuen Gesichtspunkte. Das hierfür angegebene Verfahren ist nur von Fläche zu Fläche zu wiederholen.

Für die trigonometrische Durchrechnung eines in der Meridianebene verlaufenden Lichtstrahles sind auch andere Formeln als (1) bis (12) bekannt; solche findet man z. B. von H. ERFLE[2]) angegeben. Wir benötigen für unsere weiteren Entwicklungen noch eine Darstellung des Strahles nicht durch Achsenschnittweite und Neigungswinkel gegen die Achse, sondern durch die Strecke QP (vgl. Abb. 61), die „Weglänge" a, und den Neigungswinkel u; der gebrochene Strahl soll dann bestimmt werden durch QP', die Weglänge a', und den Neigungswinkel u'. a und a' gelten als positiv, wenn man, um von Q nach P bzw. P'

[1]) Zum Unterschied von den sphärischen Abweichungen bei der Abbildung eines beliebigen Punktes durch weit geöffnete Bündel vermittelst einer sphärischen Flächenfolge werden die bei der Abbildung eines Achsenpunktes auftretenden Abweichungen sphärische Längsabweichungen genannt, sonst aber auch sphärische Abweichungen schlechthin.

[2]) H. ERFLE, Czapski-Eppenstein S. 77—78. Ein Durchrechnungsverfahren mit graphischen Hilfsmitteln von M. G. SLUSSAREFF findet sich in Revue d'Optique, 1924, S. 441—458 angegeben.

zu gelangen, im Sinne der Lichtrichtung fortzuschreiten hat. Aus der Abb. 61 liest man ohne weiteres ab:

$$h = a' \cdot \sin u' = a \cdot \sin u. \tag{20}$$

Nun folgt aber aus (2) und (3)

$$\sin u = \frac{r \cdot \sin i}{s - r} \tag{21}$$

und aus (6) und (7)

$$\sin u' = \frac{r \cdot \sin i'}{s' - r}. \tag{22}$$

Mit Benutzung des Brechungsgesetzes und der Beziehungen (21) und (22) läßt sich (20) umformen in

$$n' \cdot \frac{s' - r}{a'} = n \cdot \frac{s - r}{a}. \tag{23}$$

Aus Abb. 61 läßt sich weiter ablesen

$$a^2 = r^2 + (s - r)^2 + 2r(s - r) \cdot \cos\varphi \tag{24}$$

und

$$a'^2 = r^2 + (s' - r)^2 + 2r(s' - r) \cdot \cos\varphi, \tag{25}$$

was in (23) eingesetzt ergibt:

$$\frac{n'(s' - r)}{\sqrt{r^2 + (s' - r)^2 + 2r(s' - r)\cos\varphi}} = \frac{n(s - r)}{\sqrt{r^2 + (s - r)^2 + 2r(s - r)\cos\varphi}}. \tag{26}$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, daß bei festgehaltenem s, also bei einem bestimmten Achsendingpunkt, und variiertem φ, also für Dingstrahlen verschiedener Einfallshöhen, im allgemeinen verschiedene s' erhalten werden, die Abbildung also sphärische Längsabweichungen zeigt.

55. Die aplanatischen Punkte einer brechenden Kugelfläche. Nur für gewisse Sonderfälle ist dies nicht der Fall, nämlich einmal, wenn beide Zähler verschwinden oder dann, wenn die beiden Nenner sich nur durch einen konstanten, von φ unabhängigen Faktor unterscheiden.

Die erste Annahme führt auf

$$s = s' = r, \tag{27}$$

wofür auch tatsächlich (26) erfüllt wird, so daß also (27) wirklich einen Ding- und Bildpunkt bestimmen, die hier in den Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfallen.

Die zweite Annahme führt, wenn jener konstante Faktor mit $\sqrt{\lambda}$ bezeichnet sei, auf

$$r^2 + (s' - r)^2 + 2r(s' - r)\cos\varphi = \lambda r^2 + \lambda(s - r)^2 + 2\lambda r(s - r) \cdot \cos\varphi, \tag{28}$$

was für jedes beliebige φ gelten müßte und daher auf Befriedigung der beiden Bedingungen

$$s' - r = \lambda(s - r) \tag{29}$$

und

$$r^2 + (s' - r)^2 = \lambda r^2 + \lambda(s - r)^2 \tag{30}$$

hinausläuft. Da (29) und (30) für beliebige φ erfüllt sein sollen, so gelten sie auch für die φ-Werte des Paraxialraumes, d. h. es muß (14) für s und s' bestehen[1]); es kann also zu (29) und (30) auch noch

$$n\frac{s - r}{s} = n'\frac{s' - r}{s'} \tag{31}$$

[1]) Also nicht nur für s_0, s_0'.

hinzugezogen werden. Bestimmt man aus diesem Gleichungentripel λ, s und s', so findet man als Schnittweiten solcher Punktepaare, für die eine exakte von φ unabhängige Strahlenvereinigung, d. h. eine durch beliebig weit geöffnete Bündel bewirkte fehlerfreie Abbildung, zustande kommt, das Wertepaar

$$s = s' = 0 \tag{32}$$

Ding- und Bildpunkt fallen also in den Kugelscheitel.
Und das Wertepaar

$$\left.\begin{aligned} s &= r + \frac{n'}{n} r \\ s' &= r + \frac{n}{n'} r \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

man nennt die durch (33) bestimmten Punkte die beiden aplanatischen Punkte der Kugelfläche.

Die zeichnerische Auffindung des aplanatischen Punktepaares ist leicht; in der Abb. 64 ist P und P' ein solches Paar; sämtliche nach P zielenden auf die brechende Kugelfläche F treffenden Strahlen gehen nach der Brechung an F durch P'. Da es natürlich auf jeder Kugelzentralen ein solches aplanatisches Punktepaar gibt, so erkennt man, daß durch Brechung an der Fläche F Kreis k_1 durch weitgeöffnete Bündel fehlerfrei in Kreis k_2 abgebildet wird. Von diesen eben besprochenen Ausnahmefällen abgesehen variiert s' mit φ.

56. Die Bestimmung des ersten Gliedes der Reihenentwicklung für die sphärische Längsaberration. Läßt man φ unendlich klein von erster Ordnung werden, so wird $\cos\varphi$ bis auf kleine Größen zweiter Ordnung konstant, nämlich gleich Eins. Soweit diese Größen vernachlässigt werden dürfen, findet eine fehlerfreie Abbildung statt; für $\lim \varphi = 0$ wird dann (26) übergeführt in die Nullinvariante der GAUSSschen Abbildung.

Denkt man sich $\cos\varphi$ in eine Potenzreihe entwickelt, so kann man durch Hinzuziehung immer höherer Potenzen von φ diesen Abbildungsbereich immer mehr erweitern. Da nun s' als Funktion von φ ausgedrückt, aus drehungssymmetrischen Gründen für positive und negative Werte gleichen absoluten Betrages von φ, dieselben Beträge annehmen muß, s' also eine gerade Funktion von φ ist, und für $\varphi = 0$ zu s'_0 wird, so muß s' darstellbar sein durch die Potenzreihe:

$$s' = s'_0 + a'_2\varphi^2 + a'_4\varphi^4 + a'_6\varphi^6 + \cdots \tag{34}$$

Die Koeffizienten $a'_{2\nu}$ dieser Reihe sind abhängig von den optischen Daten der brechenden Fläche, d. h. von n, n' und r. Die Berechnung der Koeffizienten $a'_{2\nu}$ ist für größere ν recht langwierig; für $\nu = 1$ noch ziemlich einfach soll sie hier gegeben werden. Für $\nu = 2$ findet sich der Koeffizient $a'_{2\nu}$ angegeben bei v. ROHR[1]). Es möge also von einem Achsendingpunkt ein Strahlenbündel ausgehen, das ein System von k zentrierten brechenden Kugelflächen durchsetzt. Die Schnittweite irgendeines Strahles dieses Bündels vor der Brechung an irgendeiner Fläche der Linsenfolge, etwa der μ-ten, sei s_μ, nach der Brechung s'_μ und ebenso seien die Weglängen mit a_μ und a'_μ bezeichnet. Den Index μ zum Kennzeichen, daß diese Werte für die μ-te Fläche gelten, lassen wir der Einfachheit halber hier und in den folgenden Entwicklungen zunächst fort. Dann sind nach (23) durch

$$\frac{n_\mu(s_\mu - r_\mu)}{a_\mu \cdot r_\mu} = \frac{n'_\mu(s'_\mu - r_\mu)}{a'_\mu\, r_\mu} \qquad \text{oder} \qquad \frac{n(s-r)}{a\, r} = \frac{n'(s'-r)}{a' \cdot r} \tag{23}$$

[1]) Die Theorie der optischen Instrumente, Berlin, Julius Springer 1904, S. 237.

die Beziehungen zwischen Schnittweiten und Weglängen vor und nach der Brechung an der gerade betrachteten Fläche gegeben. Da Schnittweite wie Weglänge von der Einfallshöhe oder auch vom Winkel φ abhängen, muß diese Invariante, sie sei mit Q_s bezeichnet, durch eine gleichfalls nach geradzahligen Potenzen von φ fortschreitende Entwicklung darstellbar sein. Es sei also:

$$Q_s = Q_{s_0} + q_2\varphi^2 + q_4\varphi^4 + \cdots = Q_{s_0} + q_2'\varphi^2 + q_4'\varphi^4 + \cdots \tag{35}$$

Für $\varphi = 0$ wird man auf die Nullinvariante Q_{s0} geführt, also auf:

$$Q_{s_0} = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right) = Q'_{s_0}. \tag{36}$$

Da (35) für jedes beliebige φ gilt, so folgt ganz allgemein $q_{2\nu} = q'_{2\nu}$. Zur Berechnung dieses Ausdruckes für $\nu = 1$ nimmt man (23) in der Form

$$Q_s = n \cdot \frac{s}{a} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n' \cdot \frac{s'}{a'} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) = Q'_s \tag{37}$$

und erhält mit Hilfe von (24) unter Vernachlässigung höherer als der zweiten Potenzen von φ

$$a = s\left(1 - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q_{s_0}}{n \cdot s_0} \cdot \varphi^2\right),$$

was sich mit der gleichen Beschränkung auf die zweite Potenz von φ umformen läßt in

$$\frac{s}{a} = 1 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q_{s_0}}{n \cdot s_0} \varphi^2.$$

Ganz analog wird

$$\frac{s'}{a'} = 1 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q_{s_0}}{n' \cdot s_0'} \varphi^2.$$

Nach (34) läßt sich bis auf die zweiten Potenzen von φ schreiben

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s_0'} - \frac{a_2'}{s_0'^2} \cdot \varphi^2$$

und ebenso

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \frac{a_2}{s_0^2} \cdot \varphi^2.$$

Es wird also nach einiger Umformung

$$Q_s = Q_{s_0} + \left(\frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q_{s_0}^2}{n \cdot s_0} + \frac{n a_2}{s_0^2}\right)\varphi^2$$

und ebenso

$$Q_s' = Q'_{s_0} + \left(\frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q'^2_{s_0}}{n' \cdot s_0'} + \frac{n' a_2'}{s_0'^2}\right) \cdot \varphi^2,$$

und daraus folgt

$$\frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q_{s_0}^2}{n \cdot s_0} + \frac{n a_2}{s_0^2} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{Q_{s_0}^2}{n' \cdot s'} + \frac{n' a_2'}{s_0'^2}, \tag{38}$$

woraus sich der Koeffizient a_2' berechnen läßt.

Um in Übereinstimmung mit der einschlägigen Literatur zu bleiben, denken wir uns die Potenzentwicklungen für s und s' nicht nach φ, sondern nach dem Neigungswinkel u bzw. u' durchgeführt, in dem etwa gesetzt werde

$$s = s_0 + \alpha_2 u^2 + \alpha_4 u^4 + \cdots \tag{39}$$

und

$$s' = s_0' + \alpha_2' u'^2 + \alpha_4' u'^4 + \cdots \tag{40}$$

Aus

$$\sin u = \frac{r}{a} \cdot \sin\varphi$$

folgt unter Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen der Sinusreihe

$$u = \frac{r}{a} \cdot \varphi$$

und mit Unterdrückung aller Glieder mit Exponenten über zwei:

$$u^2 = \frac{r^2}{s_0^2} \cdot \varphi^2 .$$

Analog wird:

$$u'^2 = \frac{r^2}{s_0'^2} \varphi^2 .$$

Vergleicht man (34) und (40), so ergibt sich

$$a_2' = \alpha_2' \cdot \frac{r^2}{s_0'^2} ,$$

und ebenso läßt sich finden:

$$a_2 = \alpha_2 \cdot \frac{r^2}{s_0^2} .$$

Demnach kann (38) nach Kürzung von r^2 auch geschrieben werden:

$$\frac{Q_{s_0}^2}{2 n s_0} + \frac{n \alpha_2}{s_0^4} = \frac{Q_{s_0}^2}{2 n' s_0'} + \frac{n' \alpha_2'}{s_0'^4} . \tag{41}$$

Für eine Fläche ist damit aus der vor der Brechung herrschenden sphärischen Aberration, die durch α_2 gekennzeichnet wird, und aus den Elementen der Nullstrahlrechnung die sphärische Aberration nach der Brechung, bestimmt durch α_2', gefunden. Abkürzend findet man Gleichung (41) auch durch

$$\varDelta \frac{2 n \alpha_2}{s_0^4} = -Q_{s_0}^2 \varDelta \frac{1}{n s_0} \tag{42}$$

angegeben, wobei demnach

$$\varDelta \frac{2 n \alpha_2}{s_0^4} = \frac{2 n' \alpha_2'}{s_0'^4} - \frac{2 n \alpha_2}{s_0^4}$$

und

$$\varDelta \frac{1}{n s_0} = \frac{1}{n' s_0'} - \frac{1}{n s_0}$$

sind. Die eben entwickelten Ausdrücke beziehen sich auf irgendeine Fläche des k-flächigen Systems. Um die sphärische Aberration für die ganze Flächenfolge zu erhalten, d. h. den Koeffizienten α_{2k}' als Funktion von den bei der rechnerischen Aufsuchung des GAUSSschen Bildpunktes auftretenden Größen und damit als Funktion der optischen Daten des ganzen Systems zu bestimmen, ist von der rekurrierenden Eigenschaft der Darstellung (42) Gebrauch zu machen; man erhält schließlich

$$\alpha_{2k}' = \frac{-s_{0k}'^4}{2 n_k'} \cdot \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{0k}}\right)^4 Q_{\mu s_0}^2 \left(\varDelta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu \tag{43}$$

womit die sphärische Längsabweichung

$$s_k' - s_{0k}' = \alpha_{2k}' u_k'^2 \tag{44}$$

gefunden ist. Die in (43) auftretenden Größen sind alle unmittelbar der Nullstrahlrechnung zu entnehmen, denn nach Ziff. 32 (s. Abb. 24) ist

$$\frac{h_{0\,\nu-1}}{h_{0\nu}} = \frac{s_{0\,\nu-1}'}{s_{0\nu}} ,$$

also auch
$$\frac{h_{0\mu}}{h_{0k}} = \frac{s'_{0\mu}}{s_{0\mu+1}} \cdot \frac{s'_{0\mu+1}}{s_{0\mu+2}} \cdots \frac{s'_{0k-1}}{s_{0k}}$$
ohne weiteres durch die paraxialen Schnittweiten bestimmt.

57. Die Brauchbarkeit der Reihenentwicklung der sphärischen Längsaberration bis zum ersten Gliede. An einem einfachen Beispiele sei die Verwendbarkeit des Ausdruckes $\alpha'_{42} u_2'^2$ gezeigt. In den nebenstehenden beiden Tabellen 1 und 2 sind unter Annahme des unendlich fernen Achsenpunktes als Ding für eine Sammellinse der Brennweite $f = 100$, der Dicke 9 und der Brechungszahl 1,61 die Ausdrücke $s'_2 - s'_{02}$ angegeben, und zwar sind sie einmal unter Benutzung der Formeln (1) bis (7) und (12) exakt ausgerechnet und dann mit Verwendung von (44) angenähert bestimmt:

Tabelle 1

Flächenkrümmungsradien		$s'_2 - s'_{02}$ nach trigonom. Durchrechnung für 1:10	Näherungswert $s'_2 - s'_{02} = \alpha'_{42} u_2'^2$	Differenz zwischen genauem und genähertem Wert der sphärischen Längsaberration in Prozenten von dieser
r_1	r_2			
28	45,46	−1,35	−1,41	+ 4,5%
30	52,32	−1,10	−1,14	+ 2,7%
55	524	−0,22	−0,22	0 %
65	−939	−0,20	−0,20	0 %
−52,32	−30	−3,80	−4,02	+ 5,8%
−45,46	−28	−4,48	−4,79	+ 6,9%

Tabelle 2

Flächenkrümmungsradien		$s'_2 - s'_{02}$ nach trigonom. Durchrechnung für 1:2 (bzw. 1:2,5)	Näherungswert $s'_2 - s'_{02} = \alpha'_{42} u_2'^2$	Differenz zwischen genauem und genähertem Wert der sphärischen Längsaberration in Prozenten von dieser
r_1	r_2			
28	45,46	−33,76	−126,13	273,6%
30	52,32	−27,71	−76,17	174,9%
55	524	−5,91	−6,56	11 %
60	3448	−5,43	−5,86	7,9%
61	∞	−5,39	−5,78	7,2%
65	−939	−5,29	−5,61	6 %
110	−132,7	−8,26	−8,62	4,4%
120,25	−120,25	−9,06	−9,51	5 %
939	−65	−21,46	−26,50	23,5%
−3448	−60	−24,81	−32,36	30,4%
−524	−55	−29,26	−41,26	41,0%
−52,32	−30	−67,29*)	−256,28	280,9%
−45,46	−28	−83,54*)	−558,64	568,7%

Man sieht aus den Tabellen 1 und 2, daß die Übereinstimmung des angenäherten und exakten Ausdruckes sehr weitgehend von der Durchbiegung der Linse abhängt. Dabei sei hier bemerkt, daß unter Durchbiegung einer Linse die Variierung ihrer Krümmung unter Aufrechterhaltung ihrer Brennweite, Brechungszahl und Dicke zu verstehen ist; das Durchbiegen der Linsen ist ein viel benutztes Mittel, um ihre Bildfehler in erwünschter Weise zu verändern. Die exakten Durchrechnungen — sämtliche hier vorkommenden Rechnungen sind mit fünfstelligen Logarithmen durchgeführt und die Schlußergebnisse auf Hundertstel abgerundet — sind in Tabelle 1 bestimmt für eine Einfallshöhe des achsenparallelen Dingstrahls, die $^1/_{20}$ der Brennweite beträgt, und in Tabelle 2 für eine fünfmal so große Einfallshöhe. Die Übereinstimmung der wirklichen Werte mit den Näherungswerten ist für das Öffnungsverhältnis 1:10 recht gut $\left(\text{Öffnungsverhältnis} = \frac{\text{Doppelte Einfallshöhe}}{\text{Brennweite}}\right)$; sie übersteigt für die untersuchten Durchbiegungen nirgends 7% der Abweichung. Man kann aus den

wenigen Werten der Tabelle 1 wohl ohne weiteres den Schluß ziehen, daß für ein mäßiges Öffnungsverhältnis, wie es 1:10 ist, für die Linsenform geringster sphärischer Abweichung auch die Übereinstimmung zwischen wirklichem und genähertem Werte besonders gut ist.

Für das große Öffnungsverhältnis 1:2 dagegen ist ja keine gute Übereinstimmung der wirklichen und genäherten Werte zu erwarten. Immerhin zeigt sich für manche Durchbiegungen noch eine ziemlich weitgehende Übereinstimmung. Für die stärker durchgebogenen Formen, das sind die Linsen mit stark gekrümmten Außenflächen, versagt die Näherung vollkommen; um zu besseren Ergebnissen zu gelangen, müßten noch Glieder höherer Ordnung berücksichtigt werden. Allerdings kommt es wohl auch vor, daß die Reihen divergieren und damit die Reihenentwicklung gänzlich versagt. Die in Tabelle 2 mit *) versehenen Werte sind übrigens für das Öffnungsverhältnis 1:3,5 berechnet, da für ein Öffnungsverhältnis von 1:2 in diesen Fällen infolge Totalreflexion der Lichtstrahl von der zweiten Fläche wieder in die Linse zurückgeworfen wird.

Zusammenfassend kann man aber wohl sagen, daß für kleinere Öffnungsverhältnisse die Näherung (44) meist gut verwendbar ist, und man kann hiermit die Abhängigkeit der sphärischen Abweichung aus den Elementen des abbildenden Systems in geschlossener algebraischer Form darstellen und diese Elemente etwa so bestimmen, daß die sphärische Aberration gewisse vorgeschriebene Werte annimmt, während die genaue trigonometrische Rechnung nur durch Probieren zum Ziele führen kann.

So überzeugt man sich z. B. leicht, daß eine dünne Sammellinse für den unendlich entfernten Achsenpunkt als Ding stets sphärisch unterkorrigiert ist, d. h. die Dingstrahlen mit größeren Einfallshöhen vereinigen sich im Bildraum auf der Achse näher nach der Linse zu als die entsprechenden Strahlen des Paraxialraumes, die Schnittweiten werden also kleiner. Für eine dünne Zerstreuungslinse liegen die Verhältnisse umgekehrt; die virtuellen Schnittweiten wachsen mit den Einfallshöhen; ihre absoluten Beträge werden allerdings ebenfalls kleiner: man spricht dann von sphärischer Überkorrektion. Anschaulich sind die geschilderten Verhältnisse für den unendlich fernen Achsenpunkt als Ding in den Abb. 67 und 68 gezeigt.



Abb. 67. Sphärische Unterkorrektion bei einer einfachen Sammellinse. P'_0 Gaussscher Brennpunkt. P'_1 und P'_2 - Achsen-Schnittpunkte von bildseitigen Strahlen, die zu den achsenparallel einfallenden Strahlen der endlichen Einfallshöhen h_1 bzw. h_2 gehören.



Abb. 68. Sphärische Überkorrektion bei einer einfachen Zerstreuungslinse. P'_0 Gaussscher Brennpunkt. P'_1 und P'_2 Achsen-Schnittpunkte der rückwärtigen Verlängerungen von bildseitigen Strahlen, die zu den achsenparallel einfallenden Strahlen der endlichen Einfallshöhen h_1 bzw. h_2 gehören.

Hat man dagegen eine im allgemeinen aus mehreren Linsen zusammengesetzte Anordnung, so können die von einem Achsendingpunkt ausgehenden Paraxialstrahlen und die Strahlen einer endlichen Einfallshöhe einen gemeinsamen Vereinigungspunkt im Bildraum haben. Das optische System mag dann für

jene endliche Einfallshöhe sphärisch korrigiert genannt werden; der zu ihr gehörige Strahl ist oft der Strahl, der gerade noch am Rande der Eintrittspupille vorbeigeht; er heißt daher auch Randstrahl. Die Strahlen, die mit einer kleineren, aber endlichen Einfallshöhe auf die Linsenfolge treffen, die also im Dingraum zwischen Null- und Randstrahl liegen, haben im Bildraum im allgemeinen andere Schnittweiten als die Null- und Randstrahlen des sphärisch korrigierten Systems; die sich so ergebenden Differenzen der Schnittweiten dieser Strahlen und der Schnittweite des Null- bzw. Randstrahles nennt man Reste der sphärischen Aberration oder auch sphärische Zonen; oft bezeichnet man auch den Extremwert dieser Schnittweitendifferenzen als sphärische Zone schlechthin. Wie durch Zusammenwirken einer Sammel- und Zerstreuungslinse sphärische Korrektion eintreten kann, ist anschaulich in Abb. 69 gezeigt. Als Ding ist wieder der unendlich ferne Achsenpunkt angenommen; $P_0' P_1'$ bedeutet einen Restwert der sphärischen Längsaberration.



Abb. 69. Sphärische Korrektion für die Öffnung $2h_2$. Gaussscher Brennpunkt P_0' und Achsenschnittpunkt P_2' des zu dem achsenparallel einfallenden Strahle mit der endlichen Einfallshöhe h_2 gehörigen Bildstrahles fallen zusammen. Der zu dem achsenparallel einfallenden Strahle mit der Einfallshöhe h_1 gehörige Bildstrahl schneidet die Achse in P_1'.

Es ist klar, daß man durch eine Näherung für $s' - s_0'$, die bei der zweiten Potenz abbricht, den Verlauf der sphärischen Abweichungen für ein sphärisch korrigiertes System in keinem Falle mehr genügend genau darstellen kann, denn $s_k' - s_{0k}' = \alpha_{2k}' u_k'^2$ nimmt mit u_k' monoton zu bzw. ab. Es müßte vielmehr noch die vierte Potenz, also die Bestimmung von α_{4k}' hinzugenommen werden, die, wie bereits bemerkt, auch für einfachere Flächenfolgen schon recht langwierig wird. Deswegen sind Vorrechnungen, bei denen die näherungsweise Darstellung der sphärischen Abweichungen in geschlossener Form als algebraische Funktion der Elemente des abbildenden Systems verwandt wird, für weniger einfache Flächenfolgen bei Mitnahme auch der vierten Potenz in der Reihenentwicklung der sphärischen Längsaberration oft nicht zu empfehlen, sondern das Probieren mit trigonometrischen Durchrechnungen wird häufig schneller zum Erfolge führen.

58. Die Kaustik axialer Dingpunkte. Genügt zur Untersuchung der sphärischen Längsaberrationen und überhaupt des Verlaufs der Bildstrahlen, die von einem Achsendingpunkt ausgehen, die durch (44) gegebene Näherung nicht, so kann im Anschluß an die bereits erwähnte Schrift des Verfassers[1]) $s_k' - s_{0k}'$ durch eine Funktion $\varphi(u_k')$ dargestellt werden. Rechnet man nämlich eine gewisse Anzahl vom Dingpunkt ausgehender Strahlen trigonometrisch durch, so kann man die sphärischen Längsaberrationen $\varphi(u_k')$ analytisch interpolieren. Die interpolatorische Bestimmung von $\varphi(u_k')$ bleibt auch für größte Öffnungen verwendbar, da sich stets eine ausreichende Genauigkeit erreichen läßt, wenn man nur eine genügende Anzahl geeigneter sphärischer Längsaberrationen durch die trigonometrische Durchrechnung ermittelt. Benutzt man zur Interpolation die ganze rationale Funktion, so kann gesetzt werden:

$$\varphi(u_k') = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} c_{\nu\lambda} u_k'^{2\lambda}. \tag{45}$$

Sind dann außer dem Nullstrahl ϱ Strahlen endlicher Einfallshöhe bzw. end-

[1]) W. Merté, ZS. f. Phys. Bd. 33, S. 533. 1925.

lichen Öffnungswinkels trigonometrisch durchgerechnet, so sind die zugehörigen ϱ Werte von $\varphi(u_i')$ der trigonometrischen Rechnung unmittelbar zu entnehmen, und man kann aus dem linearen Gleichungssystem

$$\varphi(u_{i\,l}') = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} c_{2\lambda}\, u_{i\,l}'^{2\lambda}, \qquad l = 1 \ldots \varrho, \tag{46}$$

die ϱ Koeffizienten $c_{2\lambda}$ bestimmen, womit $\varphi(u_i')$ in der Form (45) darstellbar ist.

Die Ausdrücke (30) in Ziff. 9 für die Meridiankurve der Kaustik werden nach dem dortigen u entsprechender Änderung des u_i' und $c_{2\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sum_{\lambda=1}^{\varrho} (2\lambda + 1)\, c_{2\lambda}\, u_i'^{2\lambda}, \\ \eta &= \sum_{\lambda=1}^{\varrho} 2\lambda\, c_{2\lambda}\, u_i'^{2\lambda+1}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Sie ist also bei dieser Darstellung eine Unikursalkurve vom Grade $(2\varrho + 1)$, und die Anzahl ihrer Doppelpunkte und Spitzen ist $\varrho(2\varrho - 1)$. Einen höheren Wert als etwa $\varrho = 3$ braucht man in der Praxis äußerst selten. Für $\varrho = 3$ wird

$$\varphi(u_i') = c_2 u_i'^2 + c_4 u_i'^4 + c_6 u_i'^6.$$

Setzt man dann

$$\varphi(u_i') = 0, \qquad \varphi'(u_i') = 0 \quad \text{und} \quad \varphi''(u_i') = 0$$

und schließt das Verschwinden auch nur eines der Koeffizienten c_2, c_4 und c_6, das zu einfachen Modifikationen führen würde, aus, so liefern diese drei Gleichungen in entsprechender Reihenfolge die Wurzeln:

$$u_i'^2 = 0, \qquad u_i' = \sqrt{\frac{-c_4 \pm \sqrt{c_4^2 - 4c_2 c_6}}{2c_6}},$$

$$u_i' = 0, \qquad u_i' = \sqrt{\frac{-c_4 \pm \sqrt{c_4^2 - 3c_2 c_6}}{3c_6}},$$

$$u_i' = \sqrt{\frac{-3c_4 \pm \sqrt{9c_4^2 - 15c_2 c_6}}{15c_6}}.$$

Läßt man die Lösungen $u_i' = 0$ als trivial unbesprochen, so kann man über die übrigen Wurzeln folgendes sagen: Sind sämtliche Koeffizienten c_2, c_4 und c_6



Abb. 70. Verlauf der sphärischen Längsaberration $\varphi(u)$ bei völliger Unterkorrektion. u entspricht u_i' im Text.



Abb. 71. Verlauf der sphärischen Längsaberration $\varphi(u)$ bei gewöhnlicher Korrektion mit überkorrigierter Zone. u entspricht u_i' im Text.

gleich bezeichnet, so sind sämtliche Wurzeln imaginär. Diesem Falle entspricht völlige Unkorrektion der Längsaberrationen. Er ist schematisch für Unterkorrektion in Abb. 70 dargestellt.

Sind nur c_2 und c_4 oder nur c_4 und c_6 gleich bezeichnet, so gibt es je eine reelle Lösung (zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln sind hier als eine gezählt). Diesem Fall entspricht die gewöhnliche Korrektion der sphärischen Längsaberration; er wird schematisch mit uberkorrigierter Zone durch die Kurve der Abb. 71 veranschaulicht.

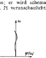


Abb 72. Verlauf der sphärischen Längsaberration $\varphi(u)$ mit doppelter Korrektion, u entspricht u_1' im Text.



Abb 73. Die Kurve der sphärischen Längsaberration $\varphi(u)$ hat 2 Extrema und 2 Wendepunkte u entspricht u_1' im Text.

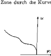


Abb. 74. Die Kurve der sphärischen Längsaberration $\varphi(u)$ hat 2 Wendepunkte. u entspricht u_1' im Text.

Sind dagegen die Vorzeichen der Koeffizienten der zweiten und sechsten Potenz einander gleich, so ergeben sich je zwei reelle Lösungen (auch hier sind zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln als eine gezählt), wenn die bezüglichen Ausdrücke:

$$c_4^2 - 4\,c_2 c_6 > 0: \text{ s. Abb. 72},$$
$$c_4^2 - 3\,c_2 c_6 > 0: \text{ s. Abb. 73},$$
$$c_4^2 - \tfrac{5}{3}\,c_2 c_6 > 0: \text{ s. Abb. 74},$$

sind, und zwar hat die Kurve der sphärischen Längsaberrationen bei Erfüllung der ersten Ungleichung zwei reelle Schnittpunkte mit der Ordinatenachse, zwei Extrema und zwei Wendepunkte, bei Bestehen der zweiten Ungleichung zwei

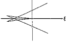


Abb. 75. Meridiankurve der Kaustik eines Systemes gewöhnlicher sphärischer Korrektion mit unterkorrigierter Zone, Die ξ-Achse ist optische Achse und der Koordinatenanfang entspricht dem Gaussschen Bildpunkte.



Abb. 76. Meridiankurve der Kaustik eines Systems, dessen sphärische Längsaberration $\varphi(u)$ vom Typus der Abb. 73 ist. Die ξ-Achse ist die optische Achse und der Koordinatenanfang entspricht dem Gaussschen Bildpunkte.

reelle Extrema und zwei Wendepunkte, bei Befriedigung der dritten Ungleichung zwei reelle Wendepunkte.

Oft kann man den Verlauf der sphärischen Längsaberrationen bei völliger Unkorrektion schon durch die Wahl $\varrho = 1$ und den der gewöhnlichen Korrektion durch $\varrho = 2$ genügend gut darstellen; nur bei Kurven vom Typus der Abb. 72 bis 74 müssen mindestens drei Koeffizienten $c_{2\lambda}$ bestimmt werden; die hier angestellten

Überlegungen behalten übrigens auch ihre Gültigkeit, wenn die Darstellung (45) als genäherte Potenzentwicklung, die bei der $2g$-ten Potenz abgebrochen ist, aufgefaßt wird; es ist dann eben $c_{2k} = a_{0,1,k}$.

In umstehenden Abb. 75 und 76 sind die Meridiankurven zweier Kaustiken schematisch dargestellt, und zwar entspricht die erste einem System gewöhnlicher sphärischer Korrektion mit unterkorrigierter Zone und die zweite einer Flächenfolge, deren sphärische Längsaberrationen vom Typus der Abb. 73 sind. Dort, wo die Meridiankurven der Kaustiken die ξ-Achse schneiden, nehmen die zugehörigen Beträge der sphärischen Längsaberrationen Extremwerte an, und die zugehörigen Parallelkreise der Wellenflächen bestehen aus Kreispunkten. Für die ausgezeichneten Punkte der Kaustik vom Typus der Abb. 75 stellen wir hier noch übersichtlich die Koordinaten zusammen:

1. $\xi = \eta = 0$: Spitze im Gaussschen Bildpunkt;
2. $\xi = -\frac{c_2^2}{5c_4}$, $\eta = \pm\frac{2c_2^2}{25\sqrt{5}\cdot c_4}\cdot\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}$: zwei außeraxiale Doppelpunkte;
3. $\xi = -\frac{c_2^2}{4c_4}$, $\eta = 0$: ein axialer Doppelpunkt;
4. $\xi = -\frac{9c_2^2}{20c_4}$, $\eta = \pm\frac{6c_2^2}{25c_4}\cdot\sqrt{\frac{-3c_2}{10c_4}}$: zwei außeraxiale Spitzen.

Erwähnt sei hier noch, daß es ganze Gruppen von Abbildungen gibt, bei denen die Kaustik der von einem Dingpunkt kommenden Strahlen in geschlossener Form bestimmbar ist. So existiert z. B. für den Fall, daß der Dingpunkt im Unendlichen liegt, die einfallenden Strahlen also parallel sind, folgender schöne allgemeine Satz[1]: Ist Q ein Punkt einer spiegelnden ebenen Kurve und M der zugehörige Krümmungsmittelpunkt, so findet man den entsprechenden Punkt Q' der Kaustik für parallele Strahlen in der Kurvenebene, indem man vom Mittelpunkt C des Krümmungsradius MQ das Lot CQ' auf den reflektierten Strahl fällt.

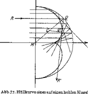


Abb. 77. Hüllkurve eines auf einen hohlen Kugelspiegel fallenden Parallelstrahlenbuschels.

Zur Verdeutlichung dieses Satzes sei als reflektierende Kurve der Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

gewählt (s. Abb. 77). RQ sei der einfallende Strahl, QR' der reflektierte. Halbiert man dann MQ durch C und fällt CQ' auf QR', so ist Q' ein Punkt der Katakaustik des Kreises. Durch Wiederholung dieser Operation kann man die ganze Katakaustik des Kreises Punkt für Punkt finden. Sie ist übrigens eine Epizykloide, die entsteht, wenn ein Kreis mit dem Radius $r/4$ auf einem an-

[1] P. Loria, Spezielle transzendente ebene Kurven. S. 665. Leipzig: B. G. Teubner 1902.

deren mit dem Radius $r/2$ abrollt. Ihre Gleichung ist

$$\xi = \frac{r}{4}(3\cos\vartheta - \cos 3\vartheta), \qquad \eta = \frac{r}{4}(3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta),$$

worin ϑ den Winkel bedeutet, den die Verbindungslinie von M und einem Punkt der Katakaustik mit der ξ-Achse einschließt. Läßt man die Epizykloide um die ξ-Achse rotieren, so ist die entstehende Rotationsfläche die Hüllfläche der sämtlichen reflektierten Strahlen, die vor der Reflexion achsenparallel auf den Kugelspiegel einfallen. Für allgemeine Lage des Dingpunktes findet sich die Katakaustik des Kreises von R. S. Heath[1]) behandelt.

59. Die Wirkung der sphärischen Längsaberration auf das Bild. Die Tatsache der sphärischen Aberration, daß also die von einem Achsendingpunkt ausgehenden Strahlen im Bildraum nicht in einem einzigen Punkte zusammentreffen, wirft zunächst die Frage auf, was eigentlich als Bild des Achsendingpunktes zu betrachten sei. Bei der Beantwortung dieser Frage können die hier abgeleiteten Beziehungen manchen Dienst leisten. So kann durch die Kenntnis der bildseitigen Strahlenkongruenz, insbesondere ihrer Kaustik, sowie die geometrische Optik überhaupt dazu ausreicht, festgestellt werden, welcher Teil des Raumes Licht erhält, und wo im großen und ganzen die Stellen besonderer Lichtzusammendrängung liegen. Dabei spielt natürlich auch die verschiedene Gestalt und Lage der Kaustik für die verschiedenen Farben, wenn vom Dingpunkt Mischlicht ausgesandt wird, eine wesentliche Rolle, doch genügt für viele Fälle die Bestimmung der Strahlenkongruenz für einige wenige Farben; auf diese Komplikation sei hier im übrigen weiter nicht eingegangen und etwa einfarbiges Licht vorausgesetzt. Dient z. B. als Bildauffangfläche eine achsensenkrechte Ebene, so ist bei Unkorrektion sowohl wie bei Korrektion der sphärischen Längsaberration, sofern wenigstens noch Reste der sphärischen Abweichung vorhanden sind, als Bild des Achsendingpunktes ein Zerstreuungskreis anzusprechen. Der Halbmesser dieses Zerstreuungskreises, den man als Maß der sphärischen Seitenaberration bezeichnen kann, ist bei Kenntnis des Verlaufes der sphärischen Längsaberration, also z. B. nach Bestimmung von $\varphi(u_k')$, stets feststellbar, wenn die Lage der Auffangebene gegeben ist.

Das eigentliche Problem ist die richtige Angabe der Auffangebene. Seine allgemeine einwandfreie Lösung steht noch aus. Es hat neben der geometrischen und physikalischen Seite, die für den Aufbau des Bildes an sich maßgebend ist, auch noch eine physiologische, wenn man die Betrachtung des Bildes durch das Auge in Betracht zieht, oft auch z. B. eine physikalisch-chemische, sofern das Bild wie in der Photographie in einer lichtempfindlichen Schicht fixiert wird. Einige Regeln, die für die Auffindung der Einstellebene bester Schärfe gegeben worden sind, seien hier mitgeteilt.

Die ziemlich oberflächliche Annahme, daß das Bild an die Stelle engster Einschnürung der Strahlenkongruenz zu verlegen sei, ist für manche Betrachtungen wohl recht bequem, findet aber anscheinend nicht häufig ihre experimentelle Bestätigung.

Trotzdem, daß die physikalischen Eigenschaften des Lichtes sicher einen entscheidenden Einfluß auf die eigentliche Lage des Bildes ausüben, sind aus rein geometrisch optischen Überlegungen Regeln über die optimale Einstellung gefunden worden, die mit Kontrollversuchen gute Übereinstimmungen ergeben

[1]) Lehrb. d. geometr. Optik von R. S. Heath, S. 120ff. Berlin: Julius Springer 1894.

haben. So gibt KOHLRAUSCH[1]) an, daß bei 30 von ihm untersuchten photographischen Objektiven die visuelle optimale Einstellung praktisch genügend genau mit den nach GAUSS berechneten Werten übereinstimmt, während der Ort der engsten Einschnürung Abweichungen von der optimalen Einstellung zeigt, die nicht durch Meßungenauigkeiten zu erklären sind. Die von GAUSS aufgestellte Regel läßt dort die beste Schärfe erwarten, wo $\int r^2 i\, ds$ zu einem Minimum wird, dabei ist ds das Ringelement des Zerstreuungskreises im Abstand r von der Achse und i die Intensität der Strahlen in jenem Flächenelement.

Es gibt übrigens auch optische Anordnungen, bei denen man mehrere Einstellebenen besonders guter, fast gleichwertiger Schärfe feststellen kann. Die große Mannigfaltigkeit der durch Versuche gewonnenen Ergebnisse darf nicht überraschen, wenn man an die verschiedenen Möglichkeiten des Verlaufs der sphärischen Längsaberrationen, von denen die Abb. 70 bis 74 Beispiele geben, denkt, ganz zu schweigen von den oben angedeuteten anderen Faktoren, die noch auf die Erscheinung einwirken.

Neuerdings ist angegeben worden, daß die beste Einstellung für optische Systeme mit gewöhnlicher sphärischer Korrektion in der achsensenkrechten Ebene liegt, die durch die beiden außerhalb der Achse gelegenen Doppelpunkte der Kaustik in Abb. 75 geht; der Quotient aus Abstand dieser beiden Punkte dividiert durch die Brennweite könnte dann als ein Maß für die Güte des Systems hinsichtlich seines sphärischen Korrektionszustandes sein. Genügende Versuchsergebnisse, die diese Regel stützen, sind wohl noch nicht bekannt. Jedenfalls ist ein allgemeines Gesetz, das für alle Arten der Abbildung die beste Einstellung festzulegen gestattet, bei der Fülle der in Frage kommenden Faktoren, wie Korrektion des Systems, Gestalt und Lichtverteilung im Gegenstand, Zustandekommen des Bildes im Auge oder auf einer photographischen Schicht usw., nicht leicht zu finden, auch wenn weitergreifende, über den Rahmen der geometrischen Optik hinausgehende Untersuchungen angestellt werden.

Neben der Bestimmung der besten Einstellung und der Beurteilung der Bildgüte aus dem Verlauf der sphärischen Längsaberrationen hat man auch versucht, aus diesem auf die beste Korrektion einer Flächenfolge bestimmter Bauart zu schließen; d. h. ob es richtiger ist, z. B. ein photographisches Objektiv für die Randstrahlen sphärisch genau auszukorrigieren oder etwas Über- oder Unterkorrektion zuzulassen.

Auch die in der heutigen Liebhaberphotographie eine gewisse Rolle spielende Frage nach der sog. Erhöhung der Tiefenschärfe hat man durch die Untersuchung der bildseitigen achsensymmetrischen Strahlenkongruenz zu klären unternommen. Es ließen sich leicht noch weitere Probleme aufzählen, bei deren Untersuchung unsere Ausdrücke für die sphärische Längsaberration, die Kaustik usw. benutzt zu werden pflegen; es mag aber mit dem bereits Gegebenen hier sein Bewenden haben, da die Anwendungsart und der Geltungsbereich dieser Ausdrücke schon damit genügend klargestellt erscheint.

60. Die Bildverschlechterung durch die sphärische Längsabweichung, wenn die Bildebene durch den GAUSSschen Bildpunkt gehend angenommen wird. Nur einige wichtige Einzelfälle seien noch als Anwendungsbeispiele erwähnt. Wählt man als Einstellebene die durch den GAUSSschen Bildpunkt gehende achsensenkrechte Ebene, so weiß man aus den vorhergehenden Dar-

[1]) K. W. F. KOHLRAUSCH, Über die sphärische Korrektion photographischer Objektive. Wiener Ber. (2a) Bd. 129, H. 6, S. 609—631. 1920. S. auch: E. LIHOTZKY, Central-Ztg. f. Opt. und Mech. 45. Jahrg. S. 207—208, 210. 1924. J. FLÜGGE, ZS. f. Instrkde. 46. Jhrg. S. 333—354 und 389—415. 1926. R. RICHTER, ZS. f. Instrkde. 45. Jhrg. S. 1—15. 1925 (Untersuchungen auf beugungstheoretischer Grundlage).

legungen, daß diese Einstellebene nur in roher Annäherung als Lage des Bildes betrachtet werden darf. Nimmt man dann mit diesem Vorbehalt den aus dem bildseitigen Winkel durch jene Ebene ausgeschnittenen Zerstreuungskreis als Maß für die Abweichungen und nennt seinen Radius l'_k, so wird $l'_k = (s'_k - s'_{0k}) \cdot \operatorname{tang} u'_k$ oder mit der Genauigkeit unserer Reihenentwicklung (44):

$$\left.\begin{aligned} l'_k = \alpha'_{3k}\, u'^3_k &= -\frac{s'^4_{0k}}{2 n'_k} \cdot u'^3_k \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{0k}}\right)^4 Q^2_{\mu s_0} \left(\Delta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu \\ &= \frac{-s'^4_{0k}}{2 n'_k}\, u'^3_k \left(\frac{h_{01}}{h_{0k}}\right)^4 \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{01}}\right)^4 Q^2_{\mu s_0} \left(\Delta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu . \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Wichtiger als die Größe des Zerstreuungskreises selbst ist oft seine Einwirkung auf die Unterscheidbarkeit von Einzelheiten im Gegenstand. Man kann den Zerstreuungskreis durch die Flächenfolge entgegen der Lichtrichtung in den Gegenstand abweichungsfrei abbilden; die Größe dieses dingseitigen Zerstreuungskreises dient dann, natürlich wieder mit dem nötigen Vorbehalt, als Maß für die Erkennbarkeit von Einzelheiten im Objekt. Nach (23) in Ziff. 32 ist für kleine Winkel $n'_k u'_k l'_k = n_1 u_1 l_1$, wenn l_1 der Radius des dingseitigen Zerstreuungskreises ist; daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} l_1 = \frac{n'_k}{n_1} \cdot \frac{u'_k}{u_1} \cdot l'_k &= -\frac{s'^4_{0k}}{2 n_1 u_1}\, u'^4_k \left(\frac{h_{01}}{h_{0k}}\right)^4 \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{01}}\right)^4 Q^2_{\mu s_0} \left(\Delta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu \\ &= -\frac{s^4_{01}}{2 n^4_1} (n_1 u_1)^3 \cdot \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{01}}\right)^4 Q^2_{\mu s_0} \left(\Delta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu . \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Mit Hilfe des von E. Abbe numerische Apertur genannten Ausdruckes $A = n_1 \sin u_1$ kann man in Rücksicht auf die hier in Frage kommende Größenordnung des u_1 auch schreiben:

$$l_1 = -\frac{s^4_{01}}{2 n^4_1} A^3 \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{01}}\right)^4 Q^2_{\mu s_0} \left(\Delta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu . \tag{50}$$

l_1 wächst demnach mit der dritten Potenz der numerischen Apertur des einfallenden Bündels.

Für einen unendlich entfernten Gegenstand, also $s_{01} = \infty$, wird, wenn $n_1 = 1$ angenommen ist, unter Berücksichtigung von $u_1 s_{01} = h_{01}$ als Winkelmaß λ_1 des Radius des in der unendlich fernen Ebene des Dingraumes liegenden Zerstreuungskreises erhalten:

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{s_{01}} = -\frac{h^3_{01}}{2} \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{h_{0\mu}}{h_{01}}\right)^4 Q^2_{\mu s_0} \left(\Delta \frac{1}{n s_0}\right)_\mu , \tag{51}$$

d. h. die Wirkung der sphärischen Abweichung ist bei unendlich entferntem Gegenstand der dritten Potenz der linearen Öffnung der Flächenfolge proportional. Nun muß die Summe der rechten Seite für geometrisch ähnliche Linsenfolgen endlicher Brennweite der dritten Potenz dieser Brennweite, sie sei f', umgekehrt proportional sein, so daß sich (51) auch schreiben läßt:

$$\lambda_1 = -\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3 p , \tag{52}$$

wenn $1/\varepsilon = 2 h_{01}/f'$ das Öffnungsverhältnis der Folge und $16\,p$ der Wert jener

Summe in (51) für die Brennweite $f' = 1$ ist. Die Verundeutlichung eines unendlich entfernten Gegenstandes ist demnach bei Berücksichtigung nur des ersten Gliedes der Reihenentwicklung für die sphärische Abweichung proportional der dritten Potenz des Öffnungsverhältnisses. Der Proportionalitätsfaktor p hängt nur ab von der Bauart der Flächenfolge, nicht aber von deren Brennweite. Der Winkelwert λ_1 ist demnach für geometrisch ähnliche Linsenfolgen beliebiger Brennweite immer der gleiche.

61. Die sphärische Längsabweichung in einigen Sonderfällen. Um beispielsweise Gleichung (53) für eine bestimmte Folge zu diskutieren, sei eine unendlich dünne, in Luft befindliche Linse, deren Brechungszahl n sei, als diese Folge gewählt. Dann wird, da $n_1 = n_2' = 1$ und $h_{01} = h_{02}$ ist, vom Vorzeichen abgesehen:

$$\lambda_1 = \frac{h_{01}^3}{2}\left[\frac{n+2}{n}\varphi\,\varrho_1^2 - \frac{2n+1}{n-1}\varphi^2\varrho_1 + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\varphi^3\right], \tag{53}$$

wenn mit ϱ_1 die Krümmung der ersten, mit ϱ_2 die Krümmung der zweiten Fläche und mit $\varphi = (n-1)(\varrho_1 - \varrho_2)$ die Brechkraft oder Stärke der dünnen Linse bezeichnet wird. Beim Durchbiegen der Linse, d. h. bei festgehaltener Brechungszahl und Stärke, was letzteres sich dann durch $\varrho_1 - \varrho_2 =$ konst. analytisch ausdrücken läßt, ergibt sich ein Minimum für λ_1, wenn von den beiden Krümmungen die der ersten Fläche als unabhängige Variable betrachtet wird, aus der Gleichung

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varrho_1} = 0,$$

woraus sich bestimmt:

$$\varrho_1 = \frac{n}{2}\cdot\frac{2n+1}{n^2+n-2}\cdot\varphi. \tag{54}$$

Der Minimalwert $\bar{\lambda}_1$ wird demnach:

$$\bar{\lambda}_1 = \left(\frac{h_{01}\varphi}{2}\right)^3\cdot\frac{n(4n-1)}{(n-1)^2(n+2)}. \tag{55}$$

In der folgenden Zusammenstellung[1]) sind für einige Linsenformen und die Brechungszahlen $n = 1{,}5$, $n = 2{,}0$ und $n = 2{,}424$ (Diamant) die Werte $2\lambda_1/(h_{01}\varphi)^3$ angegeben:

Tabelle 5.

	$n = 1{,}5$			$n = 2{,}0$			$n = 2{,}424$		
Gestalt der Linse .	$\frac{\varrho_1}{\varphi}$	$\frac{\varrho_2}{\varphi}$	$\frac{2\lambda_1}{(h_{01}\varphi)^3}$	$\frac{\varrho_1}{\varphi}$	$\frac{\varrho_2}{\varphi}$	$\frac{2\lambda_1}{(h_{01}\varphi)^3}$	$\frac{\varrho_1}{\varphi}$	$\frac{\varrho_2}{\varphi}$	$\frac{2\lambda_1}{(h_{01}\varphi)^3}$
Ebene Vorderfläche	± 0	-2	$+9$	± 0	-1	$+4$	± 0	$-0{,}702$	$+2{,}898$
Gleichseitige Linse	$+1$	-1	$+\frac{10}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+2$	$+0{,}351$	$-0{,}351$	$+1{,}680$
Ebene Hinterfläche	$+2$	± 0	$+\frac{7}{3}$	$+1$	± 0	$+1$	$+0{,}702$	± 0	$+0{,}914$
Günstigste Form . (Aberration = Minimum)	$+\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{15}{7}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{8}$	$+1{,}125$	$+0{,}423$	$+0{,}587$

Man ersieht aus dieser Tafel, daß unter sonst gleichen Umständen $2\lambda_1/(h_{01}\varphi)^3$ mit wachsender Brechungszahl abnimmt.

In den folgenden beiden weiteren Zusammenstellungen sind für verschiedene Formen der Linse mit der endlichen Dicke $d = 9$, der Brechungszahl $n = 1{,}61$ und der Brennweite $f' = 100$ die sphärischen, durch trigonometrische Rechnung

[1]) Entnommen Czapski-Eppenstein S. 243.

Für den Abbildungsmaßstab 1 : ∞ ist:

Radius der Frontfläche	50	55	60	62	64	65	66	68	70	90	100	110	115	120,25	125	132,7
s'_{0k}	93,21	93,81	94,32	94,50	94,67	94,75	94,84	94,99	95,12	96,19	96,57	96,90	97,03	97,15	97,27	97,43
$s'_k - s'_{0k}$	−2,63	−2,24	−2,06	−2,02	−2,02	−2,01	−2,01	−2,02	−2,04	−2,51	−2,82	−3,11	−3,26	−3,42	−3,54	−3,75

Für den Abbildungsmaßstab 1 : 1 ist.

Radius der Frontfläche	50	55	60	62	64	65	66	68	70	90	100	110	115	120,25	125	132,7
s'_{0k}	193,24	193,81	194,32	194,49	194,67	194,74	194,84	194,99	195,10	196,14	196,55	196,90	197,03	197,11	197,27	197,43
$s'_k - s'_{0k}$	−22,67	−18,72	−15,90	−15,00	−14,21	−13,84	−13,52	−12,90	−12,35	−9,44	−8,93	−8,72	−8,70	−8,69	−8,71	−8,79

nach (1) bis (12) bestimmten Längsabweichungen angegeben, und zwar einmal für einen unendlich entfernten Gegenstand und dann für die Abbildung, bei der Ding und Bild umgekehrt und gleich groß sind; die für die Durchrechnung benutzte Einfallshöhe ist stets $h_1 = 15,71$, so daß im Falle des unendlich entfernten Dinges das Öffnungsverhältnis $2h_1/f = 1/3,2$ ist.

In Abb. 78 sind die Werte der beiden letzten Tafeln durch Schaulinien dargestellt; ein Minimum der Abweichungen liegt für den Maßstab 1 : ∞ zwischen den Werten 60 und 70 für den Frontradius, für den Maßstab 1 : 1 bei $r_1 = 120,25$, d. h. die Linse hat entgegengesetzt gleiche Krümmungsradien.

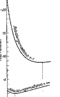


Abb. 78. Abhängigkeit der sphärischen Längsaberrationen einer Sammellinse der Brennweite $f' = 100$ und der Dicke $d = 9$ für verschiedene Durchbiegungen und zwar einmal für einen unendlich entfernten Gegenstand und dann für den Fall der Bildgleichheit. Als Brechungszahl der Linse ist stets $n = 1,61$ und als Öffnungsverhältnis 1/3,2 angenommen.

62. ABBES Sinusbedingung. Das Bestehen sphärischer Aberrationen macht sich nach zwei Richtungen hin bemerkbar, einmal ist sie der Grund dafür, daß die Schärfe in dem Punkt, in welchem die Bildebene von der Achse getroffen wird, geringer ist, als wie sie bei völlig fehlerfreier Abbildung sein würde, und dann gibt sie Anlaß zur Einstelldifferenz, d. h. die optimale Einstellung für den Achsenpunkt verlagert sich mit der Änderung der Öffnung der abbildenden Bündel, die z. B. durch mehr oder weniger weites Öffnen einer Irisblende bewirkt werden kann. Wäre die sphärische Aberration völlig gehoben, so würden auch für Linsenfolgen sehr großen Ausmaßes diese Unvollkommenheiten der Abbildung nicht in Erscheinung treten können.

Über die Güte der Abbildung eines dem fehlerfrei abgebildeten Achsenpunkte seitlich benach-

barten Punktes würde im allgemeinen zu sagen sein, daß sie hinter der des Achsenpunktes zurücksteht, und zwar bei erheblicher Bündelöffnung derart, daß die Abweichungen von der Größenordnung der Entfernung dieses seitlich der Achse gelegenen Punktes von der Achse sind, d. h. daß von einer eigentlichen Abbildung nicht gesprochen werden konnte. Es bedarf also, damit bei fehlerfreier Abbildung des Achsenpunktes auch das achsensenkrechte Flächenstückchen durch diesen Achsenpunkt genau abgebildet wird, neben der Hebung der sphärischen Aberration noch weiterer besonderer Eigenschaften der abbildenden Strahlenbündel. Diese finden ihren Ausdruck in der Abbeschen Sinusbedingung.

Eine Abbildung, bei der ein Achsenpunkt und das in ihm achsensenkrechte Flächenelement durch weit geöffnete Bündel fehlerfrei abgebildet wird, haben wir bereits kennengelernt. Der geometrische Ort der aplanatischen Punktepaare einer brechenden Kugelfläche, die beiden Kreise k_1 und k_2 der Abb. 64 werden, wie wir sahen, durch weit geöffnete Bündel fehlerfrei ineinander abgebildet. Sind diese Kreise, wieder mit k_1 und k_2 bezeichnet, in Abb. 79 für die brechende Kugelfläche F mit dem Mittelpunkt M dargestellt und wird der in Q auf F treffende Strahl PQ nach QP' gebrochen, so liegt nach dem Früheren P' auf der Zentrale MP und ist als Bildpunkt zu P anzusprechen.

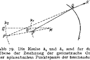


Abb. 79. Die Kreise k_1 und k_2 sind für die Ebene der Zeichnung der geometrische Ort der aplanatischen Punktepaare der brechenden Kugelfläche F mit dem Mittelpunkt M. Das zur Achse PM senkrechte Flächenelement PP_1 wird streng durch weitgeöffnete Bündel in das achsensenkrechte Flächenelement $P'P_1'$ abgebildet.

Allgemein gilt für die ding- und bildseitigen Mittelpunktentfernungen nach (2) und (6)

$$\frac{c}{c'} = \frac{\sin i}{\sin u} \cdot \frac{\sin u'}{\sin i'} = \frac{n' \cdot \sin u'}{n \cdot \sin u}.$$

Bei der Abbildung von P in P' wird, da diese ja frei von sphärischer Aberration ist, $n' \sin u'/(n \cdot \sin u) = \text{konst.}$

Betrachtet man nun auf k_1 den von P um das unendlich kleine Linienelement PP_1 entfernten Punkt P_1, so ist der Schnitt von MP_1 mit k_2 dessen Bildpunkt P_1'. Dann ist

$$c' : c = P'P_1' : PP_1 \qquad \text{oder} \qquad P'P_1' = PP_1 \cdot \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'}.$$

Da $P'P_1'$ unendlich klein von erster Ordnung ist und exakt durch weit geöffnete Bündel abgebildet wird, so wird es das auch erst recht durch unendlich enge, wenig gegen die Achse geneigte Bündel, d. h. also es bestehen für diese Abbildungen auch die Abbildungsgesetze des Paraxialraumes. Es kann also nach (11) in Ziff. 30 gesetzt werden:

$$\frac{P'P_1'}{PP_1} = \beta \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{56}$$

Wenn demnach ein achsensenkrechtes Flächenstückchen durch eine brechende Kugelfläche in ein ebensolches Flächenstückchen streng abgebildet wird, so ist die Bedingung (56) erfüllt.

Wird nunmehr ein Achsenpunkt durch eine zentrierte Flächenfolge völlig fehlerfrei abgebildet, so ist für die **gesamte** Flächenfolge, die Erfüllung von

(56) d. h. der sog. Sinusbedingung, notwendig und hinreichend dafür, daß auch ein ganzes achsensenkrechtes Flächenstückchen in diesem Achsenpunkte durch die Flächenfolge vermittels weit geöffneter Bündel in ein achsensenkrechtes Flächenstückchen genau abgebildet wird.

Für den Beweis dieser Behauptung beschränken wir uns hier auf Strahlen in einem Meridianschnitt, es sei aber ausdrücklich betont, daß bei Hebung der sphärischen Aberrationen und Erfüllung der Sinusbedingung für einen Achsenpunkt sämtliche, also auch außerhalb eines Meridianschnittes verlaufende Strahlen, die von irgendeinem Punkte des dingseitigen achsensenkrechten Flächenelementes herkommen in dem entsprechenden Bildpunkte zur Vereinigung gelangen. In Abb. 80 seien P und P' zwei konjugierte Achsenpunkte, deren Abbildung ineinander völlig streng sei. Durch PP_1 sei ein achsensenkrechtes Flächenelement in P kenntlich gemacht, und es sei angenommen, daß es streng durch weit geöffnete Bündel in $P'P_1'$, das ebenfalls ein achsensenkrechtes Flächenelement darstellen soll, abgebildet werde; d. h. es sollen also nicht nur alle von P kommenden Strahlen in P', sondern z. B. auch alle von P_1 kommenden Strahlen in P_1' zur Vereinigung gelangen. Die Erfüllung der ersten Forderung bedeutet völlige Beseitigung der sphärischen Abweichungen. Die Bedingung zur Befriedigung der zweiten Forderung ist noch aufzusuchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir je zwei von P bzw. P_1 ausgehende Strahlen, die sich entsprechend parallel seien, und zwar möge von P aus ein Strahl längs der Achse und der zweite mit einem Neigungswinkel u gegen die Achse verlaufen; dann sind die durch P_1 gehenden Strahlen P_1R_1 und P_1R_2. Die Schnittpunkte der im Dingraum parallelen Strahlen seien im Bildraum A_1 bzw. A_2. Infolge der strengen Abbildung von P in P' sind die optischen Wege $\overrightarrow{PA_2P'}$ und $\overrightarrow{PA_1P'}$ (es bedeutet also z. B. $\overrightarrow{PA_2P'}$ die Summe der mit den Brechungszahlen der jeweiligen Medien multiplizierten Teilstrecken eines von P über A_2 nach P' laufenden Strahles) einander gleich. Nun soll aber auch P_1 in P_1' fehlerfrei abgebildet werden, d. h. die optischen Wege $\overrightarrow{P_1A_2P_1'}$ und $\overrightarrow{P_1A_1P_1'}$ sind ebenfalls einander gleich. Also ist $\overrightarrow{PA_2P'} = \overrightarrow{PA_1P'}$ und $\overrightarrow{P_1A_2P_1'} = \overrightarrow{P_1A_1P_1'}$ oder durch Subtraktion:

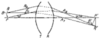


Abb. 80. Zum Beweis der ABBEschen Sinusbedingung für Strahlen im Meridianschnitt. Das Flächenelement PP_1 wird durch die Flächenfolge $1\ k$ vermittelst weit geöffneter Strahlenbündel streng in $P'P_1'$ abgebildet. Ein von P ausgehender Strahl mit dem Neigungswinkel u geht im Bildraum durch P' mit der Achse den Winkel u' bildend. Ein von P_1 ausgehender Strahl P_1R_2 mit dem Neigungswinkel u geht nach Durchschreitung der Folge ebenso wie der von P_1 ausgehende achsenparallele Strahl P_1R_1 durch P_1'.

$$\overrightarrow{P_1A_2P_1'} - \overrightarrow{PA_2P'} = \overrightarrow{P_1A_1P_1'} - \overrightarrow{PA_1P'} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1P_1'} - \overrightarrow{PA_1} - \overrightarrow{A_1P'}.$$

Da weiter $\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{P_1A_1}$ ist, weil P und P_1 auf einer Wellenfläche für achsenparallele, sich im weiteren Verlauf in A_1 schneidende Strahlen liegen, so wird:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{P_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_1'} - \overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{A_2P'} &= \overrightarrow{A_1P_1'} - \overrightarrow{A_1P'} \\ \text{oder}\quad \overrightarrow{P_1A_2} - \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{A_2P_1'} - \overrightarrow{A_2P'} &= \overrightarrow{A_1P_1'} - \overrightarrow{A_1P'}. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Fällt man $PB \perp P_1R_2$ und $P'B' \perp A_2P_1'$, so wird $\overrightarrow{BA_2} = \overrightarrow{PA_2}$, weil B und P

auf einer Wellenfläche liegen, deren durch P und B gehende Normalen sich im weiteren Verlauf in A_2 schneiden. Es ist nun

$$\overrightarrow{BA_2} - \overrightarrow{BP_1} = \overrightarrow{P_1A_2} = \overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{BP_1};$$

also wird aus (57)

$$-\overrightarrow{BP_1} + \overrightarrow{B'P_1'} = \overrightarrow{A_2P_1'} - \overrightarrow{A_2P'}, \tag{58}$$

da noch

$$\overrightarrow{A_2P_1'} = \overrightarrow{A_2P'} + \overrightarrow{B'P_1'}$$

ist. Da $P'P_1'$ unendlich klein von erster Ordnung ist, so ist $\overrightarrow{A_2P_1'} - \overrightarrow{A_2P'}$ klein von zweiter Ordnung, und daher kann gesetzt werden $\overrightarrow{BP_1} = \overrightarrow{B'P_1'}$, oder wenn n bzw. n' die Brechungszahlen des Ding- bzw. Bildraumes sind

$$n \cdot PP_1 \sin u = n' \cdot P'P_1' \cdot \sin u',$$

was auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{59}$$

Damit ist die Erfüllung der Sinusbedingung in dem angekündigten Umfang als notwendig dafür erwiesen, daß achsensenkrechte Flächenelemente in aberrationsfreien Achsenpunkten durch weit geöffnete Bündel streng ineinander abgebildet werden.

Die Sinusbedingung ist zuerst von ABBE aufgestellt worden. Sie ist für den mehrfach erwähnten Abbildungsvorgang, daß nämlich ein achsensenkrechtes Flächenelement in einem aberrationsfreien Achsenpunkte in ein ebensolches durch weit geöffnete Bündel fehlerfrei abgebildet werde, notwendig und hinreichend. ABBE hat vorgeschlagen, die früher übliche Bezeichnung eines **aplanatischen Punktepaares** für ineinander ohne Abweichungen abgebildete Achsenpunkte nur noch auf solche Punkte anzuwenden, für die außer der Hebung der sphärischen Längsaberration auch noch die Sinusbedingung erfüllt sei. So sind z. B. die früher von uns bestimmten Ding- und Bildpunkte einer brechenden Kugelfläche, die im Scheitel- oder Mittelpunkt zusammenfallen, oder die durch $c = n'r'/n$ und $c' = rn/n'$ gegeben werden (vgl. Ziff. 55), aplanatische Punkte im ABBEschen Sinne, nicht aber beispielsweise die Brennpunkte eines spiegelnden Rotationsellipsoids.



Abb. 81. Zur Formulierung der Sinusbedingung, wenn das eine der beiden konjugierten achsensenkrechten Flächenelemente, nämlich das ding- oder das bildseitige, im Unendlichen liegt. Für das dingseitige Flächenelement im Unendlichen z. B. wird $\sigma_1 = \sigma_2 = \infty$.

ABBE konnte übrigens nachweisen, daß auch die vor der Entdeckung der nach ihm genannten Sinusbedingung hergestellten Mikroskopobjektive großer Öffnung eine recht gute Erfüllung dieser Bedingung erkennen ließen, ein Zeichen dafür, wie wichtig ihre Befriedigung für Mikroskopobjektive ist, da also auch das empirische „Tatonnement" bereits zu ihrer unbewußten Erfüllung geführt hatte.

Die Sinusbedingung vereinfacht sich, wenn der Träger des achsensenkrechten Flächenelements, der Achsending- oder Achsenbildpunkt im Unendlichen liegt. Bezeichnet man mit σ_1 die Entfernung eines Achsendingpunktes von dem Fußpunkt der zu dem Winkel u_1 gehörigen Einfallshöhe h_1 und mit σ_2 die Entfernung

des gleichen Achsenpunktes von dem Fußpunkt der zu dem Winkel u_2 gehörigen Einfallshöhe h_2, so wird nach Abb. 81

$$\sin u_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + \sigma_1^2}} \qquad \text{und} \qquad \sin u_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + \sigma_2^2}}\,.$$

Bei Erfüllung der Sinusbedingung ist

$$\frac{\sin u_1}{\sin u_2} = \frac{\sin u_1'}{\sin u_2'} = \text{konst}\,.$$

Für $\lim \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \infty$ wird $\sin u_1/\sin u_2 = h_1/h_2$, also nimmt die Sinusbedingung die Form an:

$$\frac{h_1}{\sin u_1'} = \frac{h_2}{\sin u_2'} = \text{konst.} = \frac{h}{\sin u'}\,. \tag{60}$$

Da für die u'-Werte der paraxialen Abbildung $h/\sin u' = h/\operatorname{tang} u' = f'$ gilt, so kann man schließlich die Sinusbedingung schreiben

$$\frac{h}{\sin u'} = f' \qquad \text{oder} \qquad \frac{h'}{\sin u} = f\,, \tag{60a}$$

je nachdem der Ding- oder Bildpunkt im Unendlichen liegt; darin bedeuten, um es noch einmal festzulegen, h bzw. h' die Einfallshöhen von achsenparallel einfallenden bzw. austretenden Strahlen, u und u' die Neigungswinkel der ihnen entsprechenden Strahlen und f bzw. f' die GAUSSschen Brennweiten.

Aus Abb. 82 liest man ohne weiteres ab: Die Schnittpunkte der verlängerten achsenparallelen Einfallsstrahlen mit ihren konjugierten Bildstrahlen liegen auf einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Brennpunkt F' und deren Radius gleich der GAUSSschen Brennweite f' ist, wenn F' und unendlich ferner Achsenpunkt ein aplanatisches Punktepaar sind.

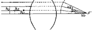


Abb. 82. Der bildseitige Brennpunkt F' und der unendlich ferne Achsenpunkt des Dingraumes bilden ein aplanatisches Punktepaar. Die achsenparallel einfallenden Dingstrahlen schneiden gehörig verlängert ihre zugehörigen Bildstrahlen in Punkten einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkt F' und dem Krümmungsradius f'.

Im allgemeinen ist nun die Abbildung eines Achsenpunktes in einen anderen mit sphärischen Aberrationen behaftet; selbst wenn sphärische Korrektion vorliegt, also Null- und Randstrahl im Bildraum gleiche Schnittweite haben, so ist das kein Hinderungsgrund für das Vorhandensein von Resten der sphärischen Aberration. Nach der Voraussetzung, die der Aufstellung der Sinusbedingung zugrunde liegt, nämlich der fehlerfreien Abbildung der Achsenschnittpunkte der ineinander abgebildeten Flächenelemente, erscheint der Wert der Sinusbedingung, wenn nicht die sphärischen Abweichungen völlig beseitigt sind, zunächst fraglich. Um auch bei vorhandenen sphärischen Aberrationen für die Abbildung achsensenkrechter Flächenelemente keine weitere Verschlechterung der Schärfe gegenüber der des Achsenbildpunktes zu erhalten, ist die Forderung, daß die Kaustik des Achsenpunktes kongruent der Kaustik eines nicht auf der Achse gelegenen Punktes des Flächenelementes sei, zu erfüllen. Ihre analytische Formulierung ist letzthin von LIHOTZKY[1]) und STAEBLE[2]) aufgestellt worden.

[1]) E. LIHOTZKY, Wiener Ber. Bd. 128, S. 85–90. 1919.
[2]) F. STAEBLE, Münchener Ber. 1919, S. 163–196.

Bei sehr vielen optischen Systemen, die z. B. in üblicher Weise, d. h. mit Zonen behaftet, sphärisch korrigiert sind, gibt die nahezu erfüllte einfache von ABBE aufgestellte Sinusbedingung einen Anhalt dafür, daß auch in der seitlichen Nachbarschaft der abgebildeten Achsenpunkte ausreichende Schärfe zu erwarten ist. Bei einem aplanatischen Punktepaar wird also der Achsenpunkt sowohl wie seine seitliche unmittelbare Umgebung, soweit sie wenigstens auf der durch ihn gehenden achsensenkrechten Ebene angeordnet ist, genau abgebildet.

63. Die HERSCHELsche Bedingung und die Sinusbedingung. Die Frage, ob auch die dem aplanatischen Punktpaare benachbarten Teile der Achse genau abgebildet werden, ist im allgemeinen zu verneinen. Es läßt sich nämlich für die von sphärischer Aberration freie Abbildung zweier benachbarter Achsenpunkte x_1 und $x_1 + dx_1$ in die ebenfalls benachbarten Achsenbildpunkte x_1' und $x_1' + dx_1'$ die zuerst von HERSCHEL ausgesprochene Forderung finden:

$$\frac{dx'}{dx_1} = \alpha = \frac{n \cdot \sin^2 \frac{u}{2}}{n' \cdot \sin^2 \frac{u'}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \frac{u'}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\alpha}} = \text{konst.}, \tag{61}$$

was mit Rücksicht auf $\alpha = n' \cdot \beta^2/n$ [s. (29) Ziff. 19] geschrieben werden kann:

$$\frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{u'}{2}} = \frac{n'}{n} \cdot \beta. \tag{61a}$$

Werden also zwei benachbarte Achsenpunkte genau abgebildet, so ist die Sinusbedingung, gebildet für die halben Öffnungswinkel, erfüllt. Im allgemeinen ist die HERSCHELsche Forderung für endliche u nicht vereinbar mit der ABBEschen Sinusbedingung. Nur wenn für alle u $u = u'$ ist, lassen sich (59) und (61a) gleichzeitig erfüllen; dann wird $\beta = n/n' = \alpha$, was im Endlichen nur für die Knotenpunkte möglich ist, wenn nicht überhaupt die Vergrößerung für die Abbildung des ganzen Raumes allgemein n/n' ist.

Auch bei teleskopischer Abbildung kann die ABBEsche Sinusbedingung und die HERSCHELsche Forderung gleichzeitig erfüllt werden; für $\lim u = u' = 0$ liegen dabei Bild und Ding beide im Unendlichen.

In allen anderen Fällen werden die dem aplanatischen Punktepaar benachbarten Achsenpunkte mit sphärischen Abweichungen behaftet abgebildet, deren Betrag durch $dx_1' - dx_{1,0}'$ gegeben sei; der Index 0 soll anzeigen, daß der damit versehene Wert sich auf paraxiale Abbildung bezieht. Aus Abb. 80 liest man unmittelbar ab

$$dx_2 = dx_1 \cdot \operatorname{tang} u$$

und unter Berücksichtigung, daß der Winkel zwischen Achse und $A_2 P_1'$ nur um einen unendlich kleinen Betrag von u' verschieden ist,

$$dx_2' = dx_1' \cdot \operatorname{tang} u',$$

wenn $PP_1 = dx_2$ und $P'P_1' = dx_2'$ gesetzt werden und weiter das Achsenstückchen vom Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung des Strahles $P_1 R_2$ mit der Achse bis zu P dx_1 genannt wird und das entsprechende bildseitige vom Schnittpunkt des Strahles $A_2 P_1'$ mit der Achse bis zu P' dx_1'. Daraus folgt, wenn α, β hier für Strahlen einer bestimmten endlichen Öffnung gelten,

$$\frac{dx_1'}{dx_1} = \alpha = \frac{dx_2'}{dx_2} \cdot \frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} u'} = \beta \cdot \frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} u'}.$$

Ist nun
$$\beta = \text{konst.} = \beta_0 = \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'},$$
so wird
$$\alpha = \beta_0^2 \frac{n'}{n} \cdot \frac{\cos u'}{\cos u}.$$
Berücksichtigt man $\alpha_0 = n' \beta_0^2 / n$, so folgt weiter
$$d x_1' - d x_{1,0}' = (\alpha - \alpha_0) \cdot d x_1 = A = \beta_0^2 \frac{n'}{n} \left(\frac{\cos u'}{\cos u} - 1 \right) d x_1,$$
was sich unter Verwendung der Beziehung
$$\frac{\cos u'}{\cos u} - 1 = \frac{\cos^2 u' - \cos^2 u}{\cos u \, (\cos u' + \cos u)} = \frac{\sin^2 u - \sin^2 u'}{\cos u \, (\cos u' + \cos u)}$$
$$= \frac{\sin^2 u'}{\cos u \, (\cos u' + \cos u)} \cdot \left[\left(\frac{\sin u}{\sin u'} \right)^2 - 1 \right]$$
umformen läßt zu:
$$A = \frac{n'}{n} \cdot \beta_0^2 \frac{\sin^2 u' \left(\frac{n'^2}{n^2} \beta_0^2 - 1 \right)}{\cos u \, (\cos u' + \cos u)} \cdot d x_1. \tag{62}$$

Damit ist die sphärische Aberration A eines einem aplanatischen Punkte benachbarten Achsenpunktes bestimmt; A wächst demnach mit der Vergrößerung β_0, um für große Beträge von β_0 mit der vierten Potenz dieses Wertes zuzunehmen.

Ist andererseits für einen aberrationsfreien Achsenpunkt die Herschelsche Gleichung erfüllt, so macht sich die dann im allgemeinen nicht mögliche Erfüllung der Sinusbedingung dadurch bemerkbar, daß ein achsensenkrechtes Linienelement in jedem Achsenpunkt durch tangentiale Büschel mit anderer Vergrößerung abgebildet wird als durch sagittale Büschel.

64. Bestimmung der schiefen Dicke. Recht verwickelt liegen die geometrischen Verhältnisse bei der Abbildung von Punkten, die nicht auf der Achse oder in deren unmittelbarer Nachbarschaft liegen. Einfach bleiben die dabei auftretenden Beziehungen nur, solange die Abbildung durch Elementarbündel erfolgt; dann läßt sich der ganze Abbildungsvorgang, wie in Kap. 1, C a) gezeigt ist, restlos geometrisch und analytisch erfassen. Es sind z. B. durch die Formeln (1) bis (12), (17) und (18) die Träger der engen Bündel, die Hauptstrahlen, und durch die Beziehungen (6) und (7) in Ziff. 28 zu irgendeinem Punkt auf einem solchen Hauptstrahl die sagittalen und tangentialen Bildpunkte zu bestimmen, und zwar für ein beliebig flächiges System, wenn man noch die schiefen Dicken benutzt, deren Definition aus nebenstehender Abb. 83 ersichtlich ist. Dabei sind, wenn durch ν und $\nu + 1$ zwei aufeinanderfolgende Flächen eines zentrierten Kugelflächensystems bezeichnet sind, $Q_\nu R_\nu'$ der an Fläche ν und $Q_{\nu+1} R_{\nu+1}'$ der an Fläche $\nu + 1$ gebrochene Hauptstrahl, dessen schiefe Dicke $\delta_{\nu,\nu+1} = Q_\nu Q_{\nu+1}$ ist. Aus der Abb. 83 liest man, wenn in Übereinstimmung mit früheren Festsetzungen h_ν bzw. $h_{\nu+1}$ die Einfallshöhen des Hauptstrahles an den Flächen ν und $\nu + 1$

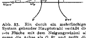


Abb. 83. Ein durch ein mehrflächiges System gehender Hauptstrahl verläßt die ν-te Fläche mit dem Neigungswinkel u_ν' gegen die Achse als $Q_\nu R_\nu'$ und trifft die $(\nu + 1)$-te Fläche in $Q_{\nu+1}$, wo er durch diese in die Lage $Q_{\nu+1} R_{\nu+1}'$ gebrochen wird. $Q_\nu Q_{\nu+1}$ ist die schiefe Dicke des Hauptstrahles zwischen der ν-ten und $(\nu + 1)$-ten Fläche; h_ν und $h_{\nu+1}$ sind seine Einfallshöhen an der ν-ten bzw. $(\nu+1)$-ten Fläche.

und u_ν sein Neigungswinkel gegen die Achse nach der Brechung an Fläche ν sind, ohne weiteres ab:

$$\delta_{\nu,\nu+1} = \frac{h_{\nu+1} - h_\nu}{\sin u'_\nu}, \tag{63}$$

und es wird für die sagittalen bzw. tangentialen Schnittweiten der Übergang von der ν-ten zur $(\nu+1)$-ten Fläche vermittelt durch die Beziehungen:

$$S'_\nu - \delta_{\nu,\nu+1} = S_{\nu+1} \qquad \text{und ebenso} \qquad T'_\nu - \delta_{\nu,\nu+1} = T_{\nu+1}. \tag{64}$$

65. Aufsuchung der sagittalen und tangentialen Bildpunkte nach M. Lange. In diesem Zusammenhange sei (obwohl dieser Abschnitt eigentlich nur die Abbildung durch weiter geöffnete Bündel zu behandeln hat) noch ein zweites Gleichungspaar zur Aufsuchung der sagittalen und tangentialen Bildpunkte gegeben, da es gegenüber den Beziehungen (1) und (2) in Ziff. 44 in mancher Hinsicht Vorzüge hat. Die Ableitungen erfolgen im Anschluß an die Dissertation von M. Lange[1]). Die Brechungsebene des Hauptstrahles sei zur xy-Ebene genommen s. Abb. 84; er schneide die ν-te Kugelfläche im Punkte x_ν, y_ν, 0; auf diesem Hauptstrahle liege der Punkt $Q_\nu(X_\nu, Y_\nu, 0)$, von dem aus, mit dem Hauptstrahl einen unendlich kleinen Winkel einschließend, ein weiterer Strahl ausgeht und die Kugelfläche im Punkte $Q'_\nu(x_\nu, y_\nu, dz_\nu)$ trifft. Es ist dieser Strahl also ein Strahl im sagittalen Strahlenfächer des Punktes Q_ν und bildet mit seinem Einfallslot, wenn der Mittelpunkt der ν-ten Kugelfläche zum Koordinatenanfangspunkt gewählt ist, die durch die drei Punkte $(X_\nu, Y_\nu, 0)$, (x_ν, y_ν, dz_ν) und $(0, 0, 0)$ gehende Ebene, in der er selbstverständlich auch nach der Brechung verbleibt. Die Gleichung dieser Ebene ist

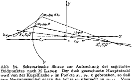


Abb. 84. Schematische Skizze zur Aufsuchung des sagittalen Bildpunktes nach M. Lange. Der dick gezeichnete Hauptstrahl wird von der Kugelfläche ν im Punkte x_ν, y_ν, 0 gebrochen, so daß sein Neigungswinkel gegen die Achse u_ν übergeht in $u_{\nu+1}$. Vom Hauptstrahlpunkt X_ν, Y_ν, 0 (im Text Q_ν genannt) geht ein dem Hauptstrahl benachbarter und in dessen sagittalen Strahlenfächer verlaufender Strahl aus, der die Kugel in x_ν, y_ν, dz_ν (im Text Q'_ν genannt) trifft und nach seiner Brechung den gebrochenenen Hauptstrahl in X'_ν, Y'_ν, 0, dem sagittalen Bildpunkt von X_ν, Y_ν, 0, schneidet. Die Verbindungslinie von X_ν, Y_ν, 0 und X'_ν, Y'_ν, 0 geht durch den Koordinatenanfang 0, den Mittelpunkt der Kugelfläche ν.

$$Y_\nu \cdot dz_\nu \cdot x - X_\nu \cdot dz_\nu \cdot y + (X_\nu y_\nu - Y_\nu x_\nu) \cdot z = 0. \tag{65}$$

Ihre Schnittgerade mit der Meridianebene des Hauptstrahles, der x, y-Ebene, ist dann gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} Y_\nu \cdot dz_\nu \cdot x - X_\nu\, dz_\nu \cdot y = 0\,, \\ z = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

geht also durch den Dingpunkt Q_ν und den Kugelmittelpunkt. Die Gleichung

[1]) M. Lange, Vereinfachte Formeln für die trigonometrische Durchrechnung optischer Systeme, S. 20—23. Dissertation, Rostock.

des gebrochenen Hauptstrahles ist

$$y = -x \operatorname{tang} u_{\nu+1} + c'_\nu \cdot \operatorname{tang} u_{\nu+1} \tag{67}$$

($u_{\nu+1}$ hat das Vorzeichen nach der Festsetzung S. 88). Der Schnitt von (66) und (67) ergibt den gesuchten Grenzwert, den sagittalen Bildpunkt. Seine Koordinaten sind also:

$$X'_\nu = \frac{X_\nu \cdot c'_\nu \operatorname{tang} u_{\nu+1}}{Y_\nu + X_\nu \operatorname{tang} u_{\nu+1}}, \quad Y'_\nu = \frac{Y_\nu c'_\nu \operatorname{tang} u_{\nu+1}}{Y_\nu + X_\nu \operatorname{tang} u_{\nu+1}}. \tag{68}$$

Da Q_ν auf dem einfallenden Hauptstrahl liegt, also X_ν, Y_ν, 0 dessen Gleichung

$$y = -x \operatorname{tang} u_\nu + c_\nu \operatorname{tang} u_\nu \tag{69}$$

erfüllen müssen, so kann man die Ordinate Y'_ν auch schreiben:

$$Y'_\nu = \frac{c'_\nu}{\operatorname{cotg} u_{\nu+1} - \operatorname{cotg} u_\nu + \dfrac{c_\nu}{Y_\nu}}, \tag{70}$$

was dasselbe wie

$$\frac{c'_\nu}{Y'_\nu} = \frac{c_\nu}{Y_\nu} - \operatorname{cotg} u_\nu + \operatorname{cotg} u'_\nu \tag{71}$$

ist, woraus man auch ersieht, daß $c_\nu/Y_\nu - \operatorname{cotg} u_\nu$ eine optische Invariante ist.

Es genügt, nur die Ordinate Y'_ν für die Festlegung des sagittalen Bildpunktes zu bestimmen, da ja dieser auch noch auf dem gebrochenen Hauptstrahle liegt. Setzt man nun noch die Werte für c_ν und c'_ν in (71) ein, so folgt nach Division mit $n_\nu r_\nu \sin i'_\nu$

$$\frac{1}{n'_\nu Y'_\nu \sin u'_\nu} = \frac{1}{n_\nu Y_\nu \sin u_\nu} + \frac{\operatorname{cotg} u'_\nu - \operatorname{cotg} u_\nu}{n_\nu r_\nu \sin i_\nu}. \tag{72}$$

Da weiter $n'_\nu = n_{\nu+1}$, $u'_\nu = u_{\nu+1}$ und $Y'_\nu = Y_{\nu+1}$ ist, so kann man (72) mit Berücksichtigung von $u_\nu - u'_\nu = i'_\nu - i_\nu$ umformen in

$$\frac{1}{n_{\nu+1} Y_{\nu+1} \sin u_{\nu+1}} = \frac{1}{n_\nu Y_\nu \sin u_\nu} + \frac{\sin(i'_\nu - i_\nu)}{n_\nu r_\nu \sin i_\nu \sin u_\nu \sin u_{\nu+1}}, \tag{73}$$

womit eine Rekursionsformel für $Y_{\nu+1}$ gefunden ist. Es wird also durch Summation:

$$\frac{1}{n_{\nu+1} Y_{\nu+1} \sin u_{\nu+1}} = \frac{1}{n_1 Y_1 \sin u_1} + \sum_{\varrho=1}^{\nu} \frac{\sin(i'_\varrho - i_\varrho)}{n_\varrho r_\varrho \sin i_\varrho \sin u_\varrho \sin u_{\varrho+1}}. \tag{74}$$

Diese Formel ist für die Zahlenrechnung etwas einfacher als (7) in Ziff. 28, da sie nur solche Werte enthält, die bei der Durchrechnung des Hauptstrahls bereits bestimmt sind; außerdem ist bei Verwendung von (74) bei einem etwaigen Fehler dieser zu berichtigen, ohne daß sich eine wiederholte Berechnung sagittaler Bildpunkte für weitere Flächen nötig macht, wie das bei Benutzung von (7) in Ziff. 28 die Regel sein würde.

Zur Bestimmung der sagittalen Bildkrümmung K_s verwendet man Abb. 54 und (14) in Ziff. 47 und erhält, wenn wie dort ein k-flächiges System, also $\nu = k$ angenommen wird:

$$K_s = Y_{k+1} \operatorname{cotg} u_{k+1} - AP', \tag{75}$$

da ja $LP'_{ks} = Y_{k+1}$ ist.

Liegt der Dingpunkt wie häufig im Unendlichen, so wird auch, wenn wir hier vom unendlich fernen Achsenpunkt und seiner unmittelbaren Nachbarschaft absehen, stets $Y_1 = \infty$. Es wird dann also

$$Y_{k+1} \cdot \operatorname{cotg} u_{k+1} = \frac{\operatorname{cotg} u_{k+1}}{n_{k+1} \cdot \sin u_{k+1} \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin(i'_\nu - i_\nu)}{n_\nu r_\nu \sin i_\nu \sin u_\nu \sin u_{\nu+1}}} \tag{76}$$

worin, wenn das letzte Medium Luft ist, noch $n_{k+1} = 1$ zu setzen ist.



Abb. 85. Die Ebene der Zeichnung ist die Meridianebene des dick gezeichneten Hauptstrahles und zur x, y-Ebene gewählt, deren x-Richtung mit der durch den Mittelpunkt C_ν der brechenden Kugelfläche ν gehenden optischen Achse zusammenfällt. Auf dem Hauptstrahl, dessen Neigungswinkel gegen die Achse vor bzw. nach der Brechung u_ν bzw. u'_ν und dessen Einfalls- und Brechungswinkel i_ν bzw. i'_ν sind, liegt der Dingpunkt festgelegt durch die Ordinate Y_ν und der tangentiale Bildpunkt festgelegt durch die Ordinate $Y'_\nu = Y_{\nu+1}$. Ein vom Dingpunkt ausgehender, mit dem Hauptstrahl den kleinen Winkel du_ν einschließender und in der Meridianebene verlaufender Strahl läuft nach der Brechung von Fläche ν zum tangentialen Bildpunkt.

Zur Feststellung des entsprechenden Grenzwertes in der Meridianebene, des also durch diesen bestimmten tangentialen Bildpunktes, benutzen wir Abb. 85. Es ist wieder eine Meridianebene, die Brechungsebene des Hauptstrahles, als x, y-Ebene angenommen und der Dingpunkt auf dem Hauptstrahl durch die Ordinate Y_ν festgelegt, Y'_ν sei jetzt die Ordinate des tangentialen Bildpunktes. Differenziert man der Reihe nach die Formeln (2), (4), (5) und (6), so ergibt sich, teilweise nach geringer Umformung:

$$\operatorname{cotg} i_\nu \cdot d i_\nu = \frac{d c_\nu}{c_\nu} + \operatorname{cotg} u_\nu \cdot d u_\nu , \tag{77}$$

$$\operatorname{cotg} i'_\nu \cdot d i'_\nu = \operatorname{cotg} i_\nu \cdot d i_\nu , \tag{78}$$

$$d u'_\nu = d u_\nu + d i_\nu - d i'_\nu , \tag{79}$$

$$\operatorname{cotg} i'_\nu \cdot d i'_\nu = \frac{d c'_\nu}{c'_\nu} + \operatorname{cotg} u'_\nu \cdot d u'_\nu . \tag{80}$$

Aus Abb. 85 kann man ablesen:

$$Y_\nu = \frac{d c_\nu}{d u_\nu} \cdot \sin u'_\nu . \tag{81}$$

Aus (77) folgt:

$$\frac{d c_\nu}{d u_\nu} = c_\nu \left(\frac{d i_\nu}{d u_\nu} \operatorname{cotg} i_\nu - \operatorname{cotg} u_\nu \right) = M_\nu \cdot \operatorname{cotg} u_\nu \tag{82}$$

so daß also die neu eingeführte Größe M_ν durch (82) definiert ist. Berücksichtigt man weiter, daß $d c'_\nu = d c_{\nu+1}$ und $u'_\nu = u_{\nu+1}$ ist, so folgt aus der Definitionsgleichung

$$M'_\nu = \frac{d c'_\nu}{d u'_\nu} \cdot \operatorname{tang} u'_\nu \tag{83}$$

auch die Beziehung

$$M'_\nu = M_{\nu+1} . \tag{84}$$

Nun ist nach (80): $\frac{dc'_\nu}{du'_\nu} = c'_\nu \left(\frac{di'_\nu}{du'_\nu} \operatorname{cotg} i'_\nu - \operatorname{cotg} u'_\nu\right)$, so daß sich (84) auch schreiben läßt:

$$M_{\nu+1} = M'_\nu = c'_\nu \left(\frac{di'_\nu}{du'_\nu} \frac{\operatorname{cotg} i'_\nu}{\operatorname{cotg} u'_\nu} - 1\right). \tag{85}$$

Aus (83) folgt: $di_\nu/du_\nu = (M_\nu + c_\nu) \cdot \operatorname{cotg} u_\nu/(c_\nu \cdot \operatorname{cotg} i_\nu)$, was unter Berücksichtigung von (78) und (85) auf

$$M'_\nu + c'_\nu = c'_\nu \frac{di'_\nu}{du_\nu} \cdot \frac{du_\nu}{du'_\nu} \cdot \frac{\operatorname{cotg} i'_\nu}{\operatorname{cotg} u'_\nu} = c'_\nu \frac{M_\nu + c_\nu}{c_\nu} \cdot \frac{\operatorname{cotg} u_\nu}{\operatorname{cotg} u'_\nu} \cdot \frac{du_\nu}{du'_\nu}, \tag{86}$$

führt. Mit Benutzung von (79) und einiger der eben abgeleiteten Beziehungen gelangt man zu $du'_\nu/du_\nu = 1 + (M_\nu + c_\nu) \sin(i_\nu - i'_\nu) \cdot \cot u_\nu / c_\nu \cos i_\nu \cos i'_\nu$ und erhält aus (86) schließlich:

$$M'_\nu + c'_\nu = \frac{c'_\nu (M_\nu + c_\nu) \cos i_\nu \cos i'_\nu \operatorname{tang} u'_\nu}{c_\nu \cos i_\nu \cos i'_\nu \operatorname{tang} u_\nu + (M_\nu + c_\nu) \sin(i_\nu - i'_\nu)} = \frac{Z_\nu}{N_\nu} \tag{87}$$

oder

$$M_{\nu+1} = M'_\nu = \frac{Z_\nu}{N_\nu} - c'_\nu \tag{88}$$

Durch (87) und (88) ist eine Rekursionsformel für $M_{\nu+1}$ gefunden und damit auch für die Ordinate $Y_{\nu+1}$ des tangentialen Bildpunktes; denn es ist analog (81):

$$Y_{\nu+1} = Y'_\nu = \frac{dc'_\nu}{du'_\nu} \cdot \sin^2 u'_\nu = M_{\nu+1} \sin u_{\nu+1} \cos u_{\nu+1}. \tag{89}$$

Für den Dingpunkt, dann ist also $\nu = 1$, folgt

$$M_1 = \frac{p_1}{\cos^2 u_1}. \tag{90}$$

Mit Benutzung von (90) und (88) kann man demnach M_ν und $M_{\nu+1}$ für beliebige ν berechnen und daher auch mit Hilfe von (81) bzw. (89)

$$Y_\nu \text{ bzw. } Y_{\nu+1} \qquad \text{oder z. B. auch} \qquad p_\nu \text{ bzw. } p'_\nu = M_{\nu+1} \cdot \cos^2 u'_\nu. \tag{91}$$

Im Sonderfall der brechenden Ebene, wenn also $r_\nu = \infty$ wird, kann man sich, ganz ähnlich wie für $r_\nu \neq \infty$, die Rekursionsformel

$$M'_\nu = M_{\nu+1} = \frac{s'_\nu}{s_\nu} M_\nu + s'_\nu (\operatorname{tang}^2 u_\nu - \operatorname{tang}^2 u_{\nu+1}). \tag{92}$$

ableiten.

66. Abbildung beliebig weit von der optischen Achse entfernter Punkte durch weit geöffnete Bündel. Nehmen wir nunmehr an, daß der seitlich der Achse in merklicher Entfernung von ihr gelegene Dingpunkt durch ein weit geöffnetes Bündel abgebildet wird. Irgendein Strahl dieses Bündels könnte dann auch als Hauptstrahl ausgewählt werden, z. B. ein Strahl, der die Achse der zentrierten Linsenfolge schneidet und durch die Mitte einer etwa vorhandenen, zur optischen Achse senkrechten und konzentrischen Blende geht, so daß er also dingseitig als Achse eines schiefen, das gesamte Strahlenbündel umfassenden Kreiskegels erscheint, dessen Spitze der Dingpunkt und dessen Grundfläche die Eintrittspupille, d. h. die kreisförmige Blende bzw. deren Bild im Dingraum, ist. Es herrscht dann nach Durchgang des Bündels durch das optische System in der bildseitigen Strahlenkongruenz selbstverständlich keine Symmetrie in bezug auf die optische Achse, wie sie bei Abbildung eines auf der Achse gelegenen Dingpunktes vorliegt; aber selbst hinsichtlich des Hauptstrahles des Bündels ist in der Regel Symmetrie nicht vorhanden; es sei denn, der betreffende

Dingpunkt werde z. B. vollkommen streng abgebildet, und das abbildende System zeige für die in Frage kommende Bündelneigung keine Vignettierung. Im allgemeinen Falle jedenfalls ist die Symmetrie um den Hauptstrahl herum gestört, und zwar gerade im Meridianschnitt, in dem der Hauptstrahl verläuft; natürlich ist diese Ebene selbst, die also auch Dingpunkt und optische Achse enthält, Symmetrieebene für die Strahlenkongruenz.

Die Abweichungen von der strengen Vereinigung der bildseitigen Strahlen in einem Punkte hat man sphärische Abweichungen genannt; die bereits besprochenen sphärischen Abweichungen eines auf der optischen Achse gelegenen Bildpunktes, die sphärischen Abweichungen schlechthin, erscheinen dann als einfachster Spezialfall. Zur Unterscheidung von ihm kann man gewisse unsymmetrische Abbildungsfehler eines außerhalb der Achse gelegenen Bildpunktes unter dem Sammelnamen Koma zusammenfassen. Dieser Name hängt mit dem Aussehen der Zerstreuungsfiguren zusammen.

Bringt man nämlich eine achsensenkrechte ebene Auffangfläche zum Schnitt mit der Kaustik eines außerhalb der Achse gelegenen Dingpunktes, so erhält man in Übereinstimmung mit unseren Erörterungen Durchschnittsfiguren, die in Richtung der Schnittlinie der Meridianebene und der Auffangebene unsymmetrisch geformt sind, in bezug auf diese Schnittlinie selbst aber symmetrisch sind. Da diese Figuren infolge der „radialen" Unsymmetrie oft einen kometenschweifartigen Anblick gewähren, ist man zu der obigen Bezeichnung gekommen, wobei man mitunter auch noch innere und äußere Koma unterschieden findet, je nachdem der Schweif der Achse zu- oder abgekehrt ist.

Um sich ein Bild von den wirklich vorliegenden Verhältnissen im Einzelfall zu machen, bleibt bei erheblicher Bündelöffnung und Hauptstrahlenneigung gegen die Achse nur die exakte trigonometrische Durchrechnung einer genügenden Anzahl von passenden Strahlen übrig. Für mäßige Bündelöffnungen und Hauptstrahlenneigungen ist die Lage allerdings günstiger, man kann dann, wie noch gezeigt[1]) werden wird, geschlossene algebraische Ausdrücke finden, die die Abweichungen von der idealen Strahlenvereinigung angeben.

67. Meridionale Koma. Bei der trigonometrischen Durchrechnung begnügt man sich häufig mit solchen Strahlen des Bündels, die in der Meridianebene des Dingpunktes verlaufen; man stellt nur die „meridionale" Koma fest. Da dann sämtliche untersuchten Strahlen im Meridianschnitt liegen, kann man für ihre Durchrechnung mit den Formeln (1) bis (12) sein Auskommen finden. Besondere Formeln für den hier betrachteten Fall, in denen die Bestimmungsstücke der Strahlen aus dem meridionalen Büschel auf den gegen die Achse geneigten Hauptstrahl bezogen sind, finden sich bei CZAPSKI-EPPENSTEIN, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., S. 81ff., angegeben. Hat man die verschiedenen Strahlen, die vom Dingpunkt ausgehen, durch das Flächensystem hindurch verfolgt, so kann man, ähnlich wie die sphärischen Längsaberrationen als Abstände der Schnittpunkte der Strahlen verschiedener Einfallshöhen oder Öffnungswinkel mit der Achse vom GAUSSschen Bildpunkt festgelegt sind, im Bildraum die Entfernungen der Schnittpunkte der einzelnen Strahlen des meridionalen Büschels mit den Hauptstrahlen vom tangentialen Bildpunkt als ein Maß für die meridionale Koma bestimmen.

Nimmt man nämlich ein $k$flächiges System als vorliegend an, und ist im Bildraum der Hauptstrahl durch s'_{hk}, u'_{hk}, irgendein anderer Strahl des meridionalen Büschels durch s'_k, u'_k bestimmt, so ergibt sich an Hand nebenstehender Abb. 86 für die Entfernung e des Schnittpunktes C'_k des Strahles s'_k, u'_k mit dem

[1]) Ziff. 71.

Hauptstrahl vom tangentialen Bildpunkt P'_t als:

$$e = \Delta s'_k \frac{\sin u'_k}{\sin \Delta u'} - (T'_k - a'_k). \tag{93}$$

Darin ist $\Delta s'_k = s'_k - s'_{hk}$, $\Delta u' = u'_k - u'_{hk}$, T'_k die Schnittweite des tangentialen Bildpunktes P'_t gemessen auf dem Hauptstrahle von Q_k an und $a'_k = Q_k P'_1$. Alle diese Werte sind aus den Bestimmungsstücken des Hauptstrahles und des betreffenden meridionalen Büschelstrahles ohne weiteres zu berechnen.

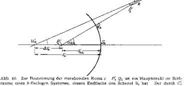


Abb 86 Zur Bestimmung der meridionalen Koma e $P'_k Q_k$ ist ein Hauptstrahl im Bildraume eines k-flachigen Systemes, dessen Endfläche den Scheitel S_k hat Der durch C'_k gehende Strahl mit dem Neigungswinkel u'_k gegen die Achse kommt von demselben Dingpunkt, zu dem auch der tangentiale Bildpunkt P'_t gehort.

Ein Zahlenbeispiel fur meridionale Koma ist in Abb. 87 dargestellt Die abbildende Flachenfolge ist das durch die Krümmungsradien:

$r_1 = 25,368$, $r_2 = -156,700$, $r_3 = -56,819$, $r_4 = 25,921$,
$r_5 = -42,511$, $r_6 = -51,842$, $r_7 = -210,824$, $r_8 = -36,082$;

die Dicken:

$d_1 = 3,525$, $d_2 = 1,935$, $d_3 = 1,244$, $d_4 = b + b = 3,525 + 3,525$,
$d_5 = 1,935$, $d_6 = 0,069$, $d_7 = 2,143$

und die Brechungszahlen:

$n_1 = n_3 = n_5 = n_7 = n'_8 = 1$, $n_2 = 1,61091$, $n_4 = 1,57521$, $n_6 = 1,57521$, $n_8 = 1,61091$

bestimmte photographische Objektiv (Zeiß-Unar).

Von dem in der Meridianebene verlaufenden und mit der Achse einen Winkel von 14,6371° bildenden Parallelstrahlenbüschel, das an der ersten Fläche in das Objektiv eintritt, sind 7 Strahlen ausgewählt und ihr Weg durch die Linsenfolge hindurch mit Hilfe der Gleichungen (1) bis (7) berechnet. Strahl 0 geht zwischen Fläche 4 und 5 durch die Mitte der Blende hindurch und ist als Hauptstrahl des Büschels zu betrachten. Im Diagramm haben die Strahlen I und —I vom Hauptstrahl einen achsensenkrechten Abstand von 4,590, die entsprechenden Werte für II und —II bzw. III und —III sind 6,498 bzw. 7,955. Unterhalb des Objektivquerschnittes ist in 50facher Vergrößerung gegen-

über dem Maßstab des Objektivquerschnittes die Konfiguration der 7 ausgewählten Strahlen in der Nähe der GAUSSschen Bildebene gezeichnet; durch die Zahlen +III, +II, +I, 0, −I, −II, −III sind die Durchstoßungspunkte dieser 7 Strahlen in der genannten Ebene kenntlich gemacht. Die Punkte +III, +II, +I, −I, −II, −III auf dem Hauptstrahle sind die Schnittpunkte dieses Strahles mit dem jeweilig entsprechenden Strahle des Büschels; der Punkt 0, auf dem Hauptstrahl zwischen den Punkten −II und −III liegend, ist der tangentiale Bildpunkt. Die Brennweite des Unars ist $f' = 100$. Die Entfernungen der Punkte +III, +II, +I, −I, −II, −III auf dem Hauptstrahl von dem tangentialen Bildpunkte 0 sind in entsprechender Reihenfolge −0,684, −0,394, −0,111, −0,193, −0,090, +0,449. Diese Werte sind also die Beträge der meridionalen Koma. Die Entfernungen der Durchstoßungspunkte +III, +II, +I, −I, −II, −III in der GAUSSschen Bildebene von dem Durchstoßungspunkte 0 des Hauptstrahles sind in entsprechender Reihenfolge: −0,111, −0,073, −0,040, +0,043, +0,055, +0,025.

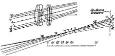


Abb. 87. Der obere Teil der Abbildung zeigt den Querschnitt eines Zeiß-Unars mit 7 gegen die Achse geneigten dingseitigen parallelen Strahlen und deren weiteren Verlauf durch das Unar hindurch in den Bildraum hinein. Strahl 0 ist der durch die Blendenmitte gehende Hauptstrahl. Der untere Teil der Abbildung zeigt den Verlauf jener 7 Strahlen in der Nähe der GAUSSschen Brennebene in 50facher Vergrößerung gegenüber dem Maßstab des Objektivquerschnitts. Durch die Zahlen in der GAUSSschen Brennebene werden die Durchstoßungspunkte der Strahlen mit der entsprechenden Zahl kenntlich gemacht, durch die Zahlen auf dem Hauptstrahl die Schnittpunkte jener Strahlen mit dem Hauptstrahl, während der Punkt 0 auf dem Hauptstrahl den tangentialen Bildpunkt angibt. Die einzelnen numerischen Werte siehe Text

68. Die Durchrechnung gegen die optische Achse windschiefer Strahlen. Um sich, wenn nötig, noch einen weiteren Anhalt für die Kenntnis der Strahlenvereinigung im Bild eines von der Achse in erheblicher Entfernung liegenden Dingpunktes zu verschaffen, ist die Betrachtung auch auf den Verlauf windschiefer Strahlen durch die optische Flächenfolge hindurch auszudehnen, d. h. auf Strahlen, die nicht in einer Achsenebene liegen, vielmehr gegen die durch Dingpunkt und Achse bestimmte Meridianebene endlich geneigt sind.

Die analytische Festlegung eines solchen Strahlenverlaufs ist grundsätzlich einfach. Denkt man sich nämlich einen windschiefen Dingstrahl, z. B. auf die Vorderfläche eines optischen Systems fallen, so verläuft die Brechung des Dingstrahls in der durch ihn und das zugehörige Flächeneinfallslot bestimmten Brechungsebene in bekannter Weise; der gebrochene Strahl fällt dann auf die zweite Fläche, und es wiederholt sich derselbe Vorgang wie an der ersten Fläche, und so geht es fort, bis das ganze System durchlaufen ist und der Dingstrahl in den Bildraum gelangt. Der Unterschied gegenüber den in einem Meridianschnitt verlaufenden Strahlen besteht nur darin, daß bei windschiefen Strahlen die Brechungsebene von Fläche zu Fläche wechselt; es sind also stets erneut für jede Fläche gewisse Bezugsstücke zu berechnen, die die jeweilige Brechungsebene oder den in ihr verlaufenden Strahl festzulegen gestatten. Dadurch wird die zahlenmäßige Durchrechnung solcher Strahlen sehr langwierig

und deswegen nur in solchen Fällen, wo es unbedingt notwendig erscheint, angewandt.

Es sind sehr viele und recht verschiedene Formelsysteme für die strenge Durchrechnung windschiefer Strahlen hauptsächlich aus dem Bestreben heraus angegeben[1]) worden, die Rechenarbeit zu mindern. Sie bleibt aus dem erwähnten Grunde immer erheblich.

Hier soll im Anschluß an unsere Beziehungen (3) bis (5) in Ziff. 5 ein Formelschema für die Brechung eines windschiefen Strahles an einer Fläche und den Übergang zur nächsten Fläche abgeleitet werden. Diese brechende Fläche sei die ν-te eines beliebig vielflächigen Systems und durch

$$(x - m_\nu)^2 + y^2 + z^2 - r_\nu^2 = 0 \tag{94}$$

dargestellt; die optische Achse wird mit der x-Achse zusammenfallend angenommen. In Übereinstimmung mit (3) in Ziff. 5 wird durch:

$$\xi_1 = x_{\nu-1} + \alpha_\nu \cdot t, \qquad \eta_1 = y_{\nu-1} + \beta_\nu t, \qquad \zeta_1 = z_{\nu-1} + \gamma_\nu t \tag{95}$$

der an der ν-ten Fläche einfallende Strahl dargestellt; dann bedeutet $x_{\nu-1}$, $y_{\nu-1}$, $z_{\nu-1}$ den Durchsetzungspunkt des betrachteten Strahles auf der $(\nu-1)$-ten Fläche. Die ν-te Fläche treffe er in dem Punkte x_ν, y_ν, z_ν; dann muß also in (94) t durch ein gewisses t_ν ersetzt werden, so daß dann $\xi_1 = x_\nu$, $\eta_1 = y_\nu$ und $\zeta_1 = z_\nu$ werden und der Gleichung (94) genügen, was auf:

$$t_\nu^2 + 2t_\nu(\bar{x}_{\nu-1}\alpha_\nu + y_{\nu-1}\beta_\nu + z_{\nu-1}\gamma_\nu) + \bar{x}_{\nu-1}^2 + y_{\nu-1}^2 + z_{\nu-1}^2 - r_\nu^2 = 0 \tag{96}$$

führt, wenn noch zur Abkürzung $(x_{\nu-1} - m_\nu) = \bar{x}_{\nu-1}$ gesetzt wird. Aus (96) folgt sofort

$$\left.\begin{aligned} t_\nu = &-(\bar{x}_{\nu-1}\alpha_\nu + y_{\nu-1}\beta_\nu + z_{\nu-1}\gamma_\nu) \\ &\pm\sqrt{(\bar{x}_{\nu-1}\alpha_\nu + y_{\nu-1}\beta_\nu + z_{\nu-1}\gamma_\nu)^2 - \bar{x}_{\nu-1}^2 - y_{\nu-1}^2 - z_{\nu-1}^2 + r_\nu^2}, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

und damit ist x_ν, y_ν, z_ν bestimmt.

Multipliziert man der Reihe nach die Koordinaten des Einfallpunktes auf der ν-ten Fläche mit α_ν, β_ν und γ_ν, so folgt:

$$x_\nu\alpha_\nu = x_{\nu-1}\alpha_\nu + \alpha_\nu^2 t_\nu, \qquad y_\nu\beta_\nu = y_{\nu-1}\beta_\nu + \beta_\nu^2 t_\nu, \qquad z_\nu\gamma_\nu = z_{\nu-1}\gamma_\nu + \gamma_\nu^2 t_\nu,$$

was durch Summation auf

$$x_\nu\alpha_\nu + y_\nu\beta_\nu + z_\nu\gamma_\nu = x_{\nu-1}\alpha_\nu + y_{\nu-1}\beta_\nu + z_{\nu-1}\gamma_\nu + t_\nu$$

führt. Subtrahiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung $m_\nu\alpha_\nu$ und berücksichtigt, daß die Richtungskosinus des Einfallslotes:

$$a_\nu = \frac{x_\nu - m_\nu}{r_\nu}, \qquad b_\nu = \frac{y_\nu}{r_\nu}, \qquad c_\nu = \frac{z_\nu}{r_\nu} \tag{98}$$

sind, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} r_\nu \cdot \cos i_\nu &= \bar{x}_{\nu-1}\alpha_\nu + y_{\nu-1}\beta_\nu + z_{\nu-1}\gamma_\nu + t_\nu \\ &= \pm\sqrt{(\bar{x}_{\nu-1}\alpha_\nu + y_{\nu-1}\beta_\nu + z_{\nu-1}\gamma_\nu)^2 - \bar{x}_{\nu-1}^2 - y_{\nu-1}^2 - z_{\nu-1}^2 + r_\nu^2}. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

---

[1]) M. v. Rohr, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten, Berlin 1904, Julius Springer, S. 52—73; F. Staeble, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech., 45. Jhrg. 1924, S. 149—151, 163—164, 166, 177—179; K. Schwarzschild, Über Differenzformeln zur Durchrechnung optischer Systeme, Göttinger Nachr. d. Math.-phys. Klasse, 20. Juli 1907. M. Herzberger, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech., 46. Jhrg., S. 100—105, 1925.

Nun läßt sich nach (3) bis (5) in Ziff. 5 die Gleichung des gesuchten gebrochenen Strahles schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\xi_2 &= x_{\nu-1} + \alpha_\nu t_\nu + \alpha'_\nu t\,,\\ \eta_2 &= y_{\nu-1} + \beta_\nu t_\nu + \beta'_\nu t\,,\\ \zeta_2 &= z_{\nu-1} + \gamma_\nu t_\nu + \gamma'_\nu t\,.\end{aligned}\right\}\tag{100}$$

Darin sind $x_{\nu-1}$, $y_{\nu-1}$, $z_{\nu-1}$, α_ν, β_ν, γ_ν bekannt als die Bestimmungsstücke des gegebenen einfallenden Strahles, t_ν ist bestimmbar aus (97), und nach (5) oder (19) in Ziff. 5 bzw. 7 ist:

$$\left.\begin{aligned}\alpha'_\nu = a_\nu \frac{n'_\nu \cos i'_\nu - n_\nu \cos i_\nu}{n'_\nu} + \alpha_\nu \frac{n_\nu}{n'_\nu}\,, \quad \beta'_\nu = b_\nu \frac{n'_\nu \cos i'_\nu - n_\nu \cos i_\nu}{n'_\nu} + \beta_\nu \frac{n_\nu}{n'_\nu}\,,\\ \gamma'_\nu = c_\nu \frac{n'_\nu \cos i'_\nu - n_\nu \cos i_\nu}{n'_\nu} + \gamma_\nu \frac{n_\nu}{n'_\nu}\,.\end{aligned}\right\}\tag{101}$$

Auch diese Werte sind nunmehr alle bestimmbar; denn a_ν, b_ν, c_ν ergeben sich aus (98), $\cos i_\nu$ aus (99) und dann $\cos i'_\nu$ mit Hilfe des Brechungsgesetzes. Der gebrochene Strahl ist also völlig festgelegt. Ist demnach der an der ν-ten Fläche einfallende Strahl durch seine Richtungskosinus α_ν, β_ν, γ_ν und seinen Einfallspunkt $x_{\nu-1}$, $y_{\nu-1}$, $z_{\nu-1}$ an der $(\nu-1)$-ten Fläche gegeben, so wird der gebrochene Strahl durch seine Richtungskosinus α'_ν, β'_ν, γ'_ν und seinen Einfallspunkt an der ν-ten Fläche:

$$x_\nu = x_{\nu-1} + \alpha_\nu t_\nu\,, \qquad y_\nu = y_{\nu-1} + \beta_\nu t_\nu\,, \qquad z_\nu = z_{\nu-1} + \gamma_\nu t_\nu \tag{102}$$

bestimmt; dieser gebrochene Strahl wird nunmehr für die $(\nu+1)$-te Fläche zum einfallenden Strahl, zu dem in ganz gleicher Weise der gebrochene Strahl auffindbar ist.

Für die einfache Zahlenrechnung kann man sich natürlich die hier abgeleiteten Beziehungen noch logarithmisch geschickter machen. Die Zweideutigkeit für t_ν und $\cos i_\nu$ läßt sich folgendermaßen beseitigen. Bei der Anwendung kommt für den einfallenden Strahl nur ein Durchstoßungspunkt mit der brechenden Kugelfläche in Betracht, und zwar der zuerst vom Strahl getroffene, so daß also für t_ν der kleinere Wert zu nehmen ist, wenn die brechende Fläche dem einfallenden Lichte eine erhabene Seite zukehrt, im anderen Falle ist für t_ν der größere Wert zu wählen; $\cos i_\nu$ ist positiv zu nehmen, wenn die brechende Fläche ihre hohle Seite dem einfallenden Lichte zukehrt, sonst negativ. r_ν ist für die hier gegebene Durchrechnung in jedem Falle als positiv zu betrachten.

69. Beispiele von Zerstreuungsfiguren bei Abbildung durch weit geöffnete, gegen die optische Achse endlich geneigte Strahlenbündel. Einige Beispiele für das Aussehen der Zerstreuungsfiguren, die bei der Abbildung eines seitlich der Achse gelegenen Punktes durch Bündel endlicher Öffnung auftreten, geben die Abb. 88, 89 und 90.

Der linke Teil der Abb. 88, ein System von drei konzentrischen Kreisen, soll den Schnitt eines gegen die Hauptachse im Dingraum unter dem Winkel von 14,6371° geneigten Parallelstrahlenbündels mit der Ebene der Eintrittspupille — diese sei hier die achsensenkrechte Ebene im Schnittpunkt des einfallenden Hauptstrahles mit der Achse (er liegt um 10,287 hinter dem ersten Linsenscheitel) — des auf Seite 119 angegebenen Zeiß-Unars darstellen, und zwar entspricht der innere Kreis Strahlen, deren Durchstoßungspunkte in der Ebene der Eintrittspupille, von deren Mitte einen Abstand von 4,590 haben, der mittlere Kreis entspricht Strahlen, bei denen der genannte Abstand 6,498 ist und der dritte Kreis Strahlen mit einem Abstand von 7,955. Von jedem dieser drei ding-

seitigen Strahlenzylinder sind acht Strahlen durch ihre mit Nummern bezeichneten Durchstoßungspunkte in der Eintrittspupille kenntlich gemacht. Die zu 7, 8, 9, 19, 20 und 21 gehörigen Strahlen liegen im Meridianschnitt des Hauptstrahles, die zu 1, 2, 3, 13, 14 und 15 gehörigen verlaufen im Sagittalschnitt des Hauptstrahles, die übrigen Strahlen mit den Durchstoßungspunkten 4, 5, 6, 16, 17, 18 und 10, 11, 12, 22, 23, 24 liegen je in einer der beiden Ebenen, die die Winkelräume zwischen der Meridianebene und der Sagittalebene halbieren. Der rechte Teil der Abb. 88 stellt die Durchstoßungsfiguren (Zerstreuungsfiguren) der drei Strahlenzylinder nach der zweiten Fläche, d. h. nach Durchgang der Strahlen durch die Frontlinse des Unars, in der dem unendlich fernen Achsenpunkt entsprechenden Gaussschen Bildebene dar.

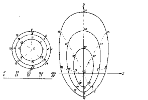


Abb 88. Der linke Teil der Abbildung zeigt die Durchschnittsfiguren 3 er Parallelstrahlenzylinder und den Durchschnittspunkt 0 des Hauptstrahles in der Eintrittspupille des auf S. 119 angegebenen Unars. Von jedem dieser 3 Strahlenzylinder sind 8 Strahlen durch ihre mit Zahlen bezeichneten Durchstoßungspunkte in der Eintrittspupille kenntlich gemacht. Die zu 7, 8, 9, 19, 20, 21 gehörigen Strahlen liegen in der Meridianebene des Hauptstrahles, die zu 1, 2, 3, 13, 14, 15 gehörigen in seiner Sagittalebene und die zu 4, 5, 6, 16, 17, 18 bzw. 10, 11, 12, 22, 23, 24 gehörigen in je einer der beiden den Winkelraum zwischen Meridianebene und Sagittalebene halbierenden Ebenen, die Schnittgeraden dieser 4 zuletzt genannten Ebenen mit der Ebene der Eintrittspupille sind gestrichelt. Der rechte Teil der Abbildung zeigt die Zerstreuungsfiguren der 3 genannten Strahlenzylinder in der bildseitigen Gaussschen Brennebene der 1 Linse des Unars. Der Durchstoßungspunkt des Hauptstrahles in dieser Ebene ist als Koordinatenanfang gewählt, ihr Schnitt mit der Meridianebene des Hauptstrahles als y-Achse. Die Zuordnung entsprechender Punkte und Linien im Ding- und Bildraum ist durch die Zahlen festgelegt. Der rechte Teil der Abbildung ist gegenüber dem linken 10 mal vergrößert. Die Größenverhältnisse sind durch den beigegebenen Maßstab feststellbar, dessen obere Zahlen für den linken, dessen untere Zahlen für den rechten Teil der Abbildung gelten. Die einzelnen numerischen Werte s. Text und Tabelle 4.

Die in Abb. 89 gezeigte Zerstreuungsfigur wird erhalten, wenn man statt der Gaussschen Bildebene, die durch den tangentialen Bildpunkt gelegte achsensenkrechte Ebene zum Schnitt mit der Strahlenkongrunz bringt, und zwar ist hier nur die Schnittfigur, die dem äußersten jener drei Strahlenzylinder entspricht, gezeichnet. Die mit Nummern versehenen Punkte der Durchstoßungsfiguren sind berechnet; sie entsprechen den zur gleichen Nummer in der Eintrittspupille gehörigen Strahlen; die übrigen Teile der Zerstreuungsfiguren sind zeichnerisch interpoliert. Die eigentlichen Zahlenwerte der Koordinaten der berechneten Kurvenpunkte finden sich in den beiden folgenden Tafeln 4 und 5, bei deren Zahlenangaben für ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz y, z der zu dem Hauptstrahl gehörige Durchstoßungspunkt, das ist z. B. für die Tafel 5 der tangentiale

Bildpunkt, als Koordinatenanfangspunkt angenommen und als y-Achse der Schnitt der Ebene der Durchstoßungsfiguren mit der Meridianebene des Hauptstrahles gewählt ist.

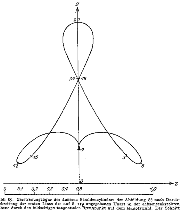


Abb. 89. Zerstreuungsfigur des äußeren Strahlenzylinders der Abbildung 88 nach Durchschreitung der ersten Linse des auf S. 119 angegebenen Unars in der achsensenkrechten Ebene durch den bildseitigen tangentialen Brennpunkt auf dem Hauptstrahl. Der Schnitt dieser Ebene mit der Meridianebene ist y-Achse, der tangentiale Brennpunkt ist Koordinatenanfang. Die Größenverhältnisse der Zerstreuungsfigur sind durch den beigegebenen Maßstab feststellbar. Die einzelnen numerischen Werte s. Text und Tabelle 5.

In der weiteren Tafel 6, deren Werte sich auf ein ganz entsprechendes Koordinatensystem, wie das der Tafel 1 und 2, beziehen, sind die Koordinaten y, z der Durchstoßungspunkte des Hauptstrahles und der je acht Strahlen unserer drei Strahlenzylinder in der Gaussschen Brennebene der Gesamtflächenfolge angegeben; in Abb. 90 sind dann die den drei Strahlenzylindern entsprechenden Zerstreuungsfiguren mit Hilfe dieser Durchstoßungspunkte zeichnerisch inter-

poliert; diese Figuren sind also die drei Zerstreuungsfiguren in der GAUSSschen Brennebene des Unars, die dem unendlich fernen Punkte, der durch die Hauptstrahlrichtung gegen die Achse von 14,6371° im Dingraum festgelegt ist, entsprechen, je nach dem dieser von einem Strahlenbündel mit der in der Eintrittspupille gemessenen Öffnung von 4,590 bzw. 6,498 bzw. 7,955 abgebildet wird.

Tabelle 4

Punkt	y	z	Punkt	y	z
0	0	0	13	+ 0,066	− 0,371
1	+ 0,066	+ 0,371	14	+ 0,138	− 0,631
2	+ 0,138	+ 0,631	15	+ 0,214	− 0,920
3	+ 0,214	+ 0,920	16	+ 0,736	− 0,341
4	− 0,427	+ 0,191	17	+ 1,255	− 0,621
5	− 0,598	+ 0,301	18	+ 1,770	− 0,924
6	− 0,748	+ 0,421	19	+ 1,070	0
7	− 0,587	0	20	+ 1,830	0
8	− 0,808	0	21	+ 2,620	0
9	− 1,009	0	22	+ 0,736	+ 0,341
10	− 0,427	− 0,191	23	+ 1,255	+ 0,621
11	− 0,598	− 0,301	24	+ 1,770	+ 0,924
12	− 0,748	− 0,421			

Tabelle 5

Punkt	y	z
0	0	0
3	− 0,197	+ 0,321
6	+ 0,144	+ 0,417
9	+ 0,238	0
12	+ 0,144	− 0,417
15	+ 0,197	− 0,321
18	+ 0,748	+ 0,003
21	+ 1,153	0
24	+ 0,748	− 0,003

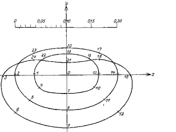


Abb. 90. Zerstreuungsfiguren der 3-Strahlenzylinder der Abbildung 88 nach Durchschreitung des auf S. 119 angegebenen Unars in dessen bildseitiger GAUSSscher Brennebene. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit dem Hauptstrahl ist Koordinatenanfang, ihre Schnittgerade mit der Meridianebene des Hauptstrahles ist y-Achse. Die Größenverhältnisse der Zerstreuungsfiguren sind durch den beigegebenen Maßstab feststellbar. Die einzelnen numerischen Werte s. Text und Tabelle 6.

Tabelle 6

Punkt	y	z	Punkt	y	z	Punkt	y	z
0	0	0	9	− 0,111	0	17	+ 0,046	+ 0,064
1	+ 0,003	− 0,063	10	− 0,026	+ 0,055	18	+ 0,032	+ 0,065
2	+ 0,002	− 0,102	11	− 0,052	+ 0,073	19	+ 0,044	0
3	− 0,003	− 0,126	12	− 0,077	+ 0,101	20	+ 0,056	0
4	− 0,026	− 0,055	13	+ 0,003	+ 0,063	21	+ 0,026	0
5	− 0,052	− 0,073	14	+ 0,002	+ 0,102	22	+ 0,035	− 0,045
6	− 0,077	− 0,101	15	− 0,003	+ 0,126	23	+ 0,046	− 0,064
7	− 0,039	0	16	+ 0,035	+ 0,045	24	+ 0,032	− 0,065
8	− 0,073	0						

70. Erweiterung des Gaussschen Abbildungsbereiches durch Hinzunahme der Glieder 3. Ordnung. Die sehr langwierigen Durchrechnungen der windschiefen Strahlen sind gerade wegen des benötigten großen rechnerischen Aufwandes für das Auffinden von Systemen gewünschter Korrektion der schiefen Bündel durch Probieren denkbar ungeeignet. In vielen Fällen findet man aber sein Auskommen mit Näherungsformeln, die durch algebraische Funktionen der Konstanten eines Systems, d. h. der Krümmungsradien, Dicken und Brechungszahlen, den Verlauf der bildseitigen Strahlen angeben und daher wohl geeignet sind, ein gewissen vorgeschriebenen Anforderungen genügendes System zu berechnen.

Auch in dem anderen Falle, die Wirkung einer schon vorhandenen optischen Anordnung zu untersuchen, leisten jene Näherungen oft gute Dienste.

Die in Abschnitt B behandelte Gausssche Theorie geht von der Annahme aus, daß alle Strahlen unendlich wenig geneigt gegen die Achse sind (bzw. im Sonderfall des achsenparallelen Strahles, daß dieser der Achse unendlich benachbart ist), so daß die dritten und höheren Potenzen der Neigungswinkel der Strahlen gegen die Achse vernachlässigt werden können. An früherer Stelle ist schon darauf hingewiesen worden, daß die Bilder dieses Abbildungsbereiches nur unendlich lichtschwach und unendlich wenig ausgedehnt sein können. Eine Erweiterung des paraxialen Abbildungsgebietes ist von Seidel, vor dem sich auch Petzval mit diesem Problem beschäftigt hat, auf uns überkommen. Anschließend an die Gausssche Reihenentwicklung hat er diese auf Glieder dritter Ordnung erweitert, so daß, da sich zeigen läßt, daß Glieder vierten Grades nicht auftreten, die von ihm bestimmten Ausdrücke bis auf Glieder fünfter Ordnung genau sind. Sie sind daher ausreichend für die Untersuchung optischer Systeme mäßiger Öffnung und mäßigen Gesichtsfeldes.

Es sollen hier im engen Anschluß an die grundlegende Arbeit von Seidel[1]: „Über die Entwicklung der Glieder dritter Ordnung, welche den Weg eines außerhalb der Ebene der Achse gelegenen Lichtstrahles durch ein System brechender Medien bestimmen", die Gedankengänge, die zur Lösung des Problems führen, kurz skizziert und diese selbst angegeben werden.

71. Die Seidelsche Bestimmung der Glieder dritter Ordnung. Abweichend von unserer bisherigen Bezeichnungsweise mögen für die folgenden Betrachtungen alle auf die Fläche eines Systems bezüglichen Größen, wie Einfallshöhen, Krümmungsradien, durch geraden Index kenntlich gemacht werden; alle auf die Medien bezüglichen Größen, wie Dicken, Neigungswinkel, Schnittweiten und Brechungszahlen durch ungeraden Index, derart, daß die Zählung mit 0 entsprechend der ersten Fläche begonnen wird, die dann die Medien der Brechungszahlen n_{-1} und n_{+1} trennt.

[1] L. Seidel, Astron. Nachr. Bd. 43, Nr. 1027/29. 1856.

Laßt man nun einen Strahl auf eine optische Anordnung fallen und diese durchsetzen, so kann man sich den Strahl in jedem jeweiligen Medium durch die beiden Schnittpunkte, die er mit zwei in jenem Medium gelegenen Ebenen hat, festgelegt denken. Diese zunächst ganz willkürlichen Ebenen werden zweckmäßig so gewählt, daß sie achsensenkrecht und die GAUSSschen Bilder zweier im Diagramm gelegenen achsensenkrechten Ebenen sind; letztere seien A_{-1} und B_{-1} genannt, und zwar möge A_{-1} das abzubildende Ding sein; als B_{-1} wird man häufig die Ebene der Eintrittspupille, so wie sie sich nach den Gesetzen paraxialer Abbildung bestimmt, mit Vorteil wählen.

An Stelle der eigentlichen optischen Konstanten, der r, d und n, verwendet SEIDEL die von diesen abhängigen Größen h, σ, ν, wobei h die Einfallshöhe und σ die Neigung eines Paraxialstrahles ist, wie sie durch Abb. 24 definiert sind, so daß dem dortigen h_ν etwa h_{2i} und dem dortigen u_ν die Größe σ_{2i-1} entspräche. Es ist dann z. B. die Mittendicke zwischen $(2i-2)$-ter und $2i$-ter Fläche

$$d_{2i-1} = \frac{h_{2i-2} - h_{2i}}{\sigma_{2i-1}}. \tag{103}$$

ν ist der reziproke Wert der Brechungszahl, also

$$\nu_{2i-1} = \frac{1}{n_{2i-1}}. \tag{104}$$

Schreibt man noch zur Abkurzung

$$N_{2i} = \nu_{2i-1} - \nu_{2i+1}, \tag{104a}$$

so läßt sich aus der Nullstrahlinvariante finden

$$r_{2i} = \frac{N_{2i} h_{2i}}{\nu_{2i-1}\sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i-1}}. \tag{105}$$

Durch (103) bis (105) kann man also ein durch die Elemente eines Paraxialstrahles h, σ, ν bestimmtes System wieder durch die sonst üblichen Größen r, d, n kennzeichnen.

Die Orientierung im Raum geschieht durch ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz ξ, η, ζ, dessen ξ-Achse mit der optischen Achse zusammenfalle; die Orientierung in einer Ebene A_{2i-1} durch das den η-, ζ-Achsen parallele ebene Koordinatenkreuz η_{2i-1}, ζ_{2i-1} und entsprechend für eine Ebene B_{2i-1} durch das Koordinatensystem η'_{2i-1}, ζ'_{2i-1}; auch die σ, h, die zu der Ebenenfolge B_{-1}, B_1, B_3 ... gehören, werden durch Striche kenntlich gemacht. Der Abstand der beiden Ebenen A_{2i-1} und B_{2i-1} ist dann also gegeben durch

$$\frac{h_{2i}}{\sigma_{2i-1}} - \frac{h'_{2i}}{\sigma'_{2i-1}} = \frac{h_{2i-2}}{\sigma_{2i-1}} - \frac{h'_{2i-2}}{\sigma'_{2i-1}}. \tag{106}$$

Da sowohl durch h, σ, ν als auch durch h', σ', ν die Konstanten der Flächenfolge, nämlich r, d und n, bestimmbar sind, sind die Wertesysteme h, σ, ν und h', σ', ν nicht unabhängig voneinander. Eine solche Abhängigkeit findet SEIDEL im Bestehen der fortlaufenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_0\sigma'_{-1} - h'_0\sigma_{-1}}{\nu_{-1}} &= \frac{h_0\sigma'_1 - h'_0\sigma_1}{\nu_1} = \frac{h_2\sigma'_1 - h'_2\sigma_1}{\nu_1} = \frac{h_2\sigma'_3 - h'_2\sigma_3}{\nu_3} = \cdots \\ &= \frac{h_{2i}\sigma'_{2i-1} - h'_{2i}\sigma_{2i-1}}{\nu_{2i-1}} = \frac{h_{2i}\sigma'_{2i+1} - h'_{2i}\sigma_{2i+1}}{\nu_{2i+1}} = \cdots = T, \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

worin T eine Konstante ist. Einen Strahl in dem Medium $2i-1$ legt man dann fest durch den Punkt $\eta_{2i-1} + \Delta\eta_{2i-1}$, $\zeta_{2i-1} + \Delta\zeta_{2i-1}$ in der Ebene A_{2i-1} und durch den Punkt $\eta'_{2i-1} + \Delta\eta'_{2i-1}$, $\zeta'_{2i-1} + \Delta\zeta'_{2i-1}$ in der Ebene B_{2i-1}. Dabei bezeichnen die ersten Glieder dieser zweiteiligen Ausdrücke

die Näherungswerte, die man bei Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung erhalten würde; sie sind demnach mit den Gleichungen der GAUSSschen Abbildung zu berechnen; die zweiten Glieder stellen also Zusatzgrößen dar, durch die auch die Glieder dritter Ordnung berücksichtigt werden. Es ist dann nach (23) in Abschnitt C, a, α):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sigma_{-1}\,\eta_{-1}}{\nu_{-1}} &= \frac{\sigma_1\,\eta_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{\sigma_{2i-1}\,\eta_{2i-1}}{\nu_{2i-1}} = \cdots = H,\\
\frac{\sigma'_{-1}\,\eta'_{-1}}{\nu_{-1}} &= \frac{\sigma'_1\,\eta'_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{\sigma'_{2i-1}\,\eta'_{2i-1}}{\nu_{2i-1}} = \cdots = H',\\
\frac{\sigma_{-1}\,\zeta_{-1}}{\nu_{-1}} &= \frac{\sigma_1\,\zeta_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{\sigma_{2i-1}\,\zeta_{2i-1}}{\nu_{2i-1}} = \cdots = Z,\\
\frac{\sigma'_{-1}\,\zeta'_{-1}}{\nu_1} &= \frac{\sigma'_1\,\zeta'_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{\sigma'_{2i-1}\,\zeta'_{2i-1}}{\nu_{2i-1}} = \cdots = Z'.
\end{aligned}\right\}\qquad(108)$$

SEIDEL schlägt daher vor, die Größen H, Z und H', Z' die reduzierten Koordinaten des genäherten Durchschnittspunktes des Strahles mit der jeweiligen Ebene A_{2i} bzw. B_{2i} zu nennen, weil man bei der Wahl von passenden Maßstäben zur Messung der Koordinaten in den A- bzw. B-Ebenen die Koordinaten jenes genäherten Durchschnittspunktes in allen Ebenen A durch die Koordinaten H, Z bzw. in allen Ebenen B durch die Koordinaten H', Z' ausdrücken kann. Dann sind auch die Korrektionsglieder, die zu den reduzierten Koordinaten hinzugefügt, die Koordinaten des wirklichen Durchschnittspunktes (bei diesen Festlegung also noch die Glieder dritter Ordnung berücksichtigt sind) ergeben, in den von Ebene zu Ebene verschiedenen Maßstäben zu messen, so daß allgemein gilt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\nu_{2i-1}}{\sigma_{2i-1}}\left(H + \Delta H_{2i-1}\right) &= \eta_{2i-1} + \Delta\eta_{2i-1}\\
\frac{\nu_{2i-1}}{\sigma_{2i-1}}\left(Z + \Delta Z_{2i-1}\right) &= \zeta_{2i-1} + \Delta\zeta_{2i-1}\\
\frac{\nu_{2i-1}}{\sigma'_{2i-1}}\left(H' + \Delta H'_{2i-1}\right) &= \eta'_{2i-1} + \Delta\eta'_{2i-1}\\
\frac{\nu_{2i-1}}{\sigma'_{2i-1}}\left(Z' + \Delta Z'_{2i-1}\right) &= \zeta'_{2i-1} + \Delta\zeta'_{2i-1}.
\end{aligned}\right\}\qquad(109)$$

Im weiteren Verlauf der SEIDELschen Ableitung stellt sich dann die Einführung von Polarkoordinaten in den A- und B-Ebenen als zweckmäßig heraus. Als Pole werden die Schnittpunkte jener Ebenen mit der Achse gewählt und als Polarachsen die η- bzw. η'-Achsen. Bezeichnet man den Fahrstrahl mit r bzw. r' und das Argument mit v bzw. v', so wird der wirkliche Durchstoßungspunkt z. B. in der Ebene A_{2i-1} gegeben durch r_{2i-1}, v_{2i-1}, und es bestehen, wenn man den Fahrstrahl in denselben Maßeinheiten wie die reduzierten Koordinaten mißt, die Beziehungen (ν_{2i-1} durch Index von Flächenradius unterscheidbar):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\nu_{2i-1}}{\sigma_{2i-1}}\left(R + \Delta R_{2i-1}\right) &= r_{2i-1} + \Delta r_{2i-1}\\
\frac{\nu_{2i-1}}{\sigma'_{2i-1}}\left(R' + \Delta R'_{2i-1}\right) &= r'_{2i-1} + \Delta r'_{2i-1}.
\end{aligned}\right\}\qquad(110)$$

Die zugehörigen Neigungswinkel des Fahrstrahles gegen die Polarachse sind $v_{2i-1} + \Delta v_{2i-1}$ bzw. $v'_{2i-1} + \Delta v'_{2i-1}$ und der Übergang zu den reduzierten Koordinaten wird vermittelt durch:

$$\left.\begin{aligned}
H &= R\cdot\cos v, & Z &= R\cdot\sin v\\
H' &= R'\cdot\cos v', & Z' &= R'\cdot\sin v'.
\end{aligned}\right\}\qquad(111)$$

SEIDEL findet nun die Korrektionsänderung $\Delta H_{2i+1} - \Delta H_{2i-1}$ bei der Brechung des betrachteten Strahles an der $2i$-ten Fläche als:

$$\begin{aligned} \Delta H_{2i+1} - \Delta H_{2i-1} &= \frac{1}{2}\,\frac{H(\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1}) - H'(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})}{N_{2i} T^2} \\ &\cdot \Big\{ R^2 \Big[\frac{\nu_{2i+1}\sigma'_{2i+1} - \nu_{2i-1}\sigma'_{2i-1}}{N_{2i}} h_{2i}(\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1}) + (\nu_{2i+1}\sigma'_{2i-1} - \nu_{2i-1}\sigma'_{2i+1}) T\Big] \\ &+ R'^2 \frac{h_{2i}(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})}{N_{2i}} (\nu_{2i+1}\sigma_{2i+1} - \nu_{2i-1}\sigma_{2i-1}) \\ &- 2RR' \frac{h_{2i}}{N_{2i}} (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1})(\sigma'_{2i+1} - \sigma'_{2i-1}) \cdot \cos(v' - v) \Big\}. \end{aligned} \tag{112}$$

$\Delta Z_{2i+1} - \Delta Z_{2i-1}$ ist gleich der rechten Seite der letzten Gleichung, wenn darin H bzw. H' durch Z bzw. Z' ersetzt werden. Aus (111) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \Delta H \cdot \cos v + \Delta Z \cdot \sin v \\ R \cdot \Delta v &= -\Delta H \sin v + \Delta Z \cdot \cos v . \end{aligned} \tag{113}$$

Man hat also:

$$\begin{aligned} \Delta R_{2i+1} - \Delta R_{2i-1} &= (\Delta H_{2i+1} - \Delta H_{2i-1}) \cdot \cos v + (\Delta Z_{2i+1} - \Delta Z_{2i-1}) \cdot \sin v \\ R(\Delta v_{2i+1} - \Delta v_{2i-1}) &= -(\Delta H_{2i+1} - \Delta H_{2i-1}) \cdot \sin v + (\Delta Z_{2i+1} - \Delta Z_{2i-1}) \cdot \cos v. \end{aligned}$$

Dann wird unter Berücksichtigung von (112) und des entsprechenden Ausdruckes für $\Delta Z_{2i+1} - \Delta Z_{2i-1}$ nach Umformung gefunden;

$$\begin{aligned} 2T^2(\Delta R_{2i+1} - \Delta R_{2i-1}) &= R'^3 \cos(v' - v) \cdot h_{2i} \Big(\frac{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}}{N_{2i}}\Big)^2 (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) \\ &- R'^2 R [1 + 2\cos^2(v' - v)] \\ &\cdot h_{2i} \frac{(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})}{N_{2i}} \cdot \frac{(\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1})}{N_{2i}} (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) \\ &+ R' R^2 \cdot \cos(v' - v) \Big[2h_{2i} \Big(\frac{\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1}}{N_{2i}}\Big)^2 (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) \\ &+ h_{2i} \frac{(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})(\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1})}{N_{2i}\;N_{2i}} (\nu_{2i-1}\sigma'_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i+1}) \\ &+ \frac{T}{N_{2i}} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})(\nu_{2i-1}\sigma'_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i-1}) \Big] \\ &- R^3 \Big[h_{2i} \Big(\frac{\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1}}{N_{2i}}\Big)^2 (\nu_{2i-1}\sigma'_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i+1}) \\ &+ \frac{T}{N_{2i}} (\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1})(\nu_{2i-1}\sigma'_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i-1}) \Big] \end{aligned} \tag{114}$$

und

$$\begin{aligned} &2RT^2(\Delta v_{2i+1} - \Delta v_{2i-1}) \\ &\quad = R' \sin(v' - v) \cdot \Big\{ R'^2 h_{2i} \Big(\frac{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}}{N_{2i}}\Big)^2 (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) \\ &\quad - 2RR' \cos(v' - v) \\ &\quad \cdot h_{2i} \frac{(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}) \cdot (\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1})}{N_{2i}\;N_{2i}} (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) \\ &\quad + R^2 \Big[h_{2i} \frac{(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}) \cdot (\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1})}{N_{2i}\;N_{2i}} (\nu_{2i-1}\sigma'_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i+1}) \\ &\quad + \frac{T}{N_{2i}} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}) \cdot (\nu_{2i-1}\sigma'_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i-1}) \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{115}$$

Damit ist die Änderung der beiden Korrektionsglieder ΔR und Δv infolge der Brechung an der $2i$-ten Fläche festgestellt. Für eine Folge von $k+1$ Flächen, i läuft von 0 bis k, ergibt sich dann durch Summation für die linke Seite der Beziehungen (114) bzw. (115) $2T^3 \Delta R_{2k+1}$ bzw. $2T^3 R \Delta v_{2k+1}$, wenn die Ausgangswerte ΔR_{-1} bzw. Δv_{-1} als 0 angenommen sind, während auf der rechten Seite die von R, R', v, v' abhängigen Ausdrücke unverändert bleiben, diese Ausdrücke selbst aber nicht mehr mit nur von den $h_{2i}, \sigma_{2i-1}, \sigma_{2i+1}, \sigma'_{2i-1}, \sigma'_{2i+1}, \nu_{2i-1}, \nu_{2i+1}$ abhängigen Größen zu multiplizieren sind, sondern mit den für alle Flächen gebildeten Summen dieser Größen.

Um die Lage der bildseitigen Strahlen vollständig zu kennen, wären noch die Zusatzgrößen $\Delta R'_{2k+1}$ und $\Delta v'_{2k+1}$ zu berechnen, die dann die Abweichungen des wirklichen Durchstoßungspunktes von den nach den GAUSSischen Formeln nur genähert berechneten Durchstoßungspunkt eines bildseitigen Strahles in der Ebene B_{2k+1} bestimmen. Es ist klar, daß man, um $\Delta R'_{2k+1}$ bzw. $\Delta v'_{2k+1}$ zu erhalten, in den eben beschriebenen Ausdrücken für ΔR_{2k+1} und Δv_{2k+1} nur umzutauschen hat

R	und	ΔR	mit	R'	und	$\Delta R'$
v	und	Δv	mit	v'	und	$\Delta v'$
		k	mit	k'		
		σ	mit	σ'		
		T	mit	$-T$.		

Nach (110) ist dann durch $\nu_{2k+1}(R + \Delta R_{2k+1})/\sigma_{2k+1} = r_{2k+1} + \Delta r_{2k+1}$, $v_{2k+1} + \Delta v_{2k+1}$ der wirkliche Durchstoßungspunkt in A_{2k+1} und durch $\nu_{2k+1}(R' + \Delta R'_{2k+1})/\sigma'_{2k+1} = r'_{2k+1} + \Delta r'_{2k+1}$, $v'_{2k+1} + \Delta v'_{2k+1}$ der wirkliche Durchstoßungspunkt in B_{2k+1} eines bildseitigen Strahles gegeben und damit dieser Strahl selbst.

Es ist also die gestellte Aufgabe, den Strahlenverlauf durch eine zentrierte Kugelflächenfolge vom Dingraum in den Bildraum unter Berücksichtigung der dritten Potenzen der Strahlenneigungswinkel gegen die Achse zu bestimmen, gelöst.

Mit den hier gegebenen Entwicklungen ist für jedes fertig vorliegende zentrierte optische System die Feststellung der Abbildungsfehler für den SEIDELschen Bereich durchführbar; dagegen mag es für die Berechnung erst noch zu findender optischer Anlagen bestimmter Abbildungseigenschaften störend sein, daß die eigentlichen optischen Konstanten, die r, d und n, sowohl durch das Wertesystem h, σ, ν wie durch das Wertesystem h', σ', ν ausgedrückt sind. Man wird das eine Wertesystem, etwa h', σ', eliminieren, was durch die von SEIDEL angegebenen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1} &= (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}) \cdot \Big(\chi - T\sum^{i}\Big) + \frac{TN_{2i}}{h_{2i}}, \\
\nu_{2i-1}\sigma'_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i+1} &= (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) \cdot \Big(\chi - T\sum^{i}\Big) \\
&\quad + \frac{2TN_{2i}\mu_{2i}}{h_{2i}}, \\
\nu_{2i-1}\sigma'_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i-1} &= (\nu_{2i-1}\sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i-1}) \cdot \Big(\chi - T\sum^{i}\Big), \\
h'_{2i} &= h_{2i}\Big(\chi - T\sum^{i}\Big).
\end{aligned}\right\} \quad (116)$$

[für $i = 0$ fallen die Summen $\sum$ zur Rechten ganz weg].

möglich wird, in denen abkürzend gesetzt ist:

$$\frac{h'_0}{h_0} = \chi\,, \qquad \nu_{2i-1} + \nu_{2i+1} = 2\,\mu_{2i}\,, \qquad \sum = \sum_{p=1}^{i} \frac{\nu_{2p-1}\, d_{2p-1}}{h_{2p-2}\, h_{2p}}.$$

Es wird dann schließlich gefunden:

$$\left.\begin{aligned} \Delta R_{2k+1} = {} & R'^3 \cos(v'-v)\frac{S(1)}{2T^3} - R'^2 R\cdot[1+2\cos^2(v'-v)]\cdot\frac{\chi S(1) + T\cdot S(2)}{2T^3} \\ & + R' R^2 \cos(v'-v)\,\frac{3\chi^2 S(1) + 6\chi T S(2) + T^2\,[2\,S(3) + S(4)]}{2T^3} \\ & - R^3\,\frac{\chi^3 S(1) + 3\chi^2 T S(2) + \chi T^2\,[2S(3) + S(4)] + T^3 S(5)}{2T^3} \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

und

$$\left.\begin{aligned} R\,\Delta v_{2k+1} = {} & R' \sin(v'-v)\cdot\Big\{R'^2\frac{S(1)}{2T^3} - 2R'R\cos(v'-v)\,\frac{\chi S(1) + T S(2)}{2T^3} \\ & + R^2\,\frac{\chi^2 S(1) + 2\chi T S(2) + T^2 S(4)}{2T^3}\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (118)$$

worin ist:

$$\left.\begin{aligned} S(1) &= \sum_{i=0}^{k} h_{2i}\left(\frac{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}}{N_{2i}}\right)^2 (\nu_{2i-1}\,\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{k}(1), \\ S(2) &= \sum_{i=0}^{k}(1)\,U_{2i} = \sum_{i=0}^{k}(2)\,, \\ S(3) &= \sum_{i=0}^{k}(2)\,U_{2i} = \sum_{i=0}^{k}(3)\,, \\ S(4) &= \sum_{i=0}^{k}\left[(3) - \frac{N_{2i}}{r_{2i}}\right] = \sum_{i=0}^{k}(4)\,, \\ S(5) &= \sum_{i=0}^{k}(4)\,U_{2i}\,, \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

dabei ist U_{2i} definiert durch:

$$U_{2i} = \frac{1}{h_{2i}}\cdot\frac{N_{2i}}{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}} - \sum_{p=1}^{i}\frac{\nu_{2p-1}\,d_{2p-1}}{h_{2p-2}\,h_{2p}}.$$

(für $i = 0$ fällt rechts die Summe weg).

Die Größen r und d sind der einfacheren Schreibweise wegen neben h, σ, durch die sie sich nach Gleichung (103) bis (105) ausdrücken lassen, mitverwandt worden.

72. Folgerungen aus den SEIDELschen Ausdrücken. Hält man an der Festsetzung fest, daß A_{-1} das Ding und B_{-1} die Eintrittspupille ist, so ist also R maßgebend für die Größe des Gesichtsfeldes und R' für die Öffnung des abbildenden Bündels. Das Verschwinden der vier Summen $S(1)$, $S(2)$, $2S(3) + S(4)$ und $S(5)$ vernichtet alle Fehler dritter Ordnung in Richtung des Fahrstrahles, und das Verschwinden von $S(1)$, $S(2)$ und $S(4)$ die Fehler gleicher Ordnung senkrecht zum Fahrstrahl. Verschwinden sämtliche Summen $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ und $S(5)$, so ist das Bild bis auf Fehler fünfter Ordnung genau.

Nimmt man $R = 0$, d. h. ein Achsenpunkt kommt zur Abbildung, so wird diese im SEIDELschen Bereich fehlerfrei, die sphärischen Aberrationen sind also beseitigt, wenn $S(1) = 0$ wird.

Können die durch den Schnittpunkt der Ebene B_{-1} mit der Achse gehenden Strahlen, sie sind bestimmt durch $R' = 0$, als Träger der abbildenden Lichtstrahlenbündel und ihre Durchstoßungspunkte mit der GAUSSschen Ebene A_{2k+1} als die Orte der Bildpunkte betrachtet werden, so ist dann das Verschwinden des Koeffizienten von R^3 in (117) die Forderung unverzerrter Abbildung; d. h. also $\chi^3 S(1) + 3\chi^2 T S(2) + \chi T^2 [2S(3) + S(4)] + T^3 S(5) = 0$. Verschwindet jener Koeffizient nicht, so ist er mit R^3 multipliziert ein Maß für die Verzeichnung.

Die Gleichungen (117) und (118) geben zunächst nur die Abweichungen in der Ebene A_{2k+1}, sind aber schon allein geeignet, auch die Verhältnisse in einer A_{2k+1} unmittelbar benachbarten Ebene zu untersuchen, solange wenigstens deren Abstand von A_{2k+1} genügend klein ist gegenüber ihrem Abstand von B_{2k+1}. Dann reicht es aus, sich den bildseitigen Strahl unter Vernachlässigung von $\Delta R'_{2k+1}$ und $\Delta v'_{2k+1}$ festgelegt zu denken durch R', v' und $R + \Delta R_{2k+1}$, $v + \Delta v_{2k+1}$. SEIDEL kommt auf diesem Wege zu folgenden Ergebnissen: Wird, wenn die sphärische Abweichung gehoben ist, auch $S(2) = 0$, so gibt es eine Stelle im Bildraum (in der Nähe von A_{2k+1}), in der ein seitlich der Achse gelegener Dingpunkt ohne radiale Fehler abgebildet wird, und eine zweite Stelle, wo er ohne seitliche Fehler abgebildet wird. Läßt man R variieren, d. h. der Abstand des Dingpunktes von der Achse wird geändert, so ändert sich auch der Abstand der beiden Brennlinien von der Ebene A_{2k+1}; ein achsensenkrechtes Ebenenstück von der Größe, wie sie dem SEIDELschen Bereich entspricht, wird gewissermaßen auf zwei Rotationsflächen F und F' abgebildet, die sich im Schnitt mit der Achse berühren, wo das präzise Bild der Mitte des Gegenstandes liegt. Auf F werden alle Punkte des Gegenstandes durch laterale, auf F' durch radiale kurze Bildstriche abgebildet.

Ist R klein von zweiter Ordnung, so können in (117) und (118) die mit R^2 und R^3 multiplizierten Glieder für den SEIDELschen Bereich vernachlässigt werden, und es findet dann für $S(1) = S(2) = 0$ eine genaue Abbildung des Achsenpunktes und seiner unmittelbaren Umgebung, wie diese durch die Größe von R festgelegt ist, statt; die Bedingung $S(1) = 0$ ist gewissermaßen eine Spezialisierung des ABBEschen Sinussatzes auf den SEIDELschen Abbildungsbereich. SEIDEL schlägt vor, sie nach FRAUNHOFER zu nennen, da sie in dessen bekanntem Königsberger Heliometerobjektive schon nahezu erfüllt war.

Verschwindet außer $S(1)$ und $S(2)$ auch noch $S(3)$, so fallen F und F' zusammen; die übrigbleibende eine Rotationsfläche ist als Bild des ausgedehnten Gegenstandes zu betrachten, und nur wenn die drei Gleichungen $S(1) = S(2) = S(3) = 0$ erfüllt sind, kann überhaupt von einem eigentlichen Bilde des ausgedehnten Gegenstandes gesprochen werden.

Verschwindet auch noch die Summe $S(4)$, so wird nach (118) $\Delta v_{2k+1} = 0$ und nach (117) ΔR_{2k+1} unabhängig von R', d. h. also die von einem bestimmten, durch R, v gegebenen Dingpunkte herkommenden Strahlen gehen in der Ebene A_{2k+1} alle durch einen und denselben Punkt. Diese Ebene ist also das bis auf Größen fünfter Ordnung genaue Bild der Ebene A_{-1}; der einzigen Fehler dritter Ordnung, den es noch enthalten kann, ist eine Verzerrung der äußeren Teile, die Verzeichnung, zu deren Aufhebung auch noch $S(5) = 0$ zu machen wäre.

Es läßt sich noch leicht die Krümmung des Bildes, wenn $S(1) = S(2) = S(3) = 0$ ist, bestimmen. Diese kann durch die Krümmung der Schmiegungskugel im Rotationspol gemessen werden; denn die Abweichung beider Flächen von-

einander fällt in Größenordnungen, die hier vernachlässigt sind. Ist g_{2k+1} der Radius jener Kugel, so läßt dieser sich leicht finden durch die Gleichung:

$$-\frac{n_{2k+3}}{g_{2k+1}} = \sum_{\iota=0}^{k} \frac{N_{2\iota}}{r_{2\iota}}. \tag{120}$$

Für die Ebnung des Bildes wird aus (120) gefunden:

$$\sum_{\iota=0}^{k} \frac{N_{2\iota}}{r_{2\iota}} = 0, \tag{121}$$

eine Bedingung, die nach PETZVAL[1]), der sie 1843 aufstellte, genannt wird. Mit der sonst von uns benutzten Bezeichnungsweise läßt sie sich schreiben:

$$\sum_{\varrho=1}^{k+1} \frac{1}{r_\varrho}\left(\frac{1}{n'_\varrho} - \frac{1}{n_\varrho}\right) = \sum_{\varrho=1}^{k+1} \frac{1}{r_\varrho}\,\Delta\frac{1}{n_\varrho} = 0 = \sum_{\varrho=1}^{k+1}\left[\frac{1}{r_\varrho}\left(\frac{1}{n_{\varrho+1}} - 1\right) - \frac{1}{r_\varrho}\left(\frac{1}{n_\varrho} - 1\right)\right]$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{k+1}\left[\frac{1}{r_\varrho}\cdot\frac{1-n_{\varrho+1}}{n_{\varrho+1}} - \frac{1}{r_\varrho}\,\frac{1-n_\varrho}{n_\varrho}\right] = \frac{1-n_{k+2}}{n_{k+2}\,r_{k+1}} - \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{1}{n_{\varrho+1} f_\varrho} - \frac{1-n_1}{n_1 r_1},$$

wobei dann f_ϱ die Brennweite der dünnen, von Flächen mit den Krümmungsradien r_ϱ und $r_{\varrho+1}$ begrenzten Linsen, deren Material die Brechungszahl n_ϱ hat, ist.

Befindet sich die Linsenfolge in Luft, d. h. $n_1 = n_{k+2} = 1$, so läßt sich die Petzvalbedingung schreiben:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\varphi_\lambda}{n_\lambda} = 0, \tag{121a}$$

wenn hierin n_λ die Brechungszahl und φ_λ die Stärke der λ-ten dünnen Linse und m die Anzahl der Linsen in der ganzen Linsenfolge ist.

Weiter zeigt SEIDEL, daß es unmöglich ist, ein optisches System, dessen Wirkung nicht die eines ebenen Spiegels oder einer unendlich dünnen Planplatte ist, aus beliebig vielen unendlich dünnen einander berührenden Linsen anzugeben, das innerhalb unseres Bereiches eine Ebene genau in eine Ebene abbildet, vielmehr muß für die Ermöglichung einer solchen Abbildung wenigstens einigen der brechenden Flächen ein merklicher Abstand voneinander gegeben werden.

Entsprechend der auf S. 112 gezeigten Unvereinbarkeit der HERSCHELschen Bedingung mit dem Sinusgesetz weist SEIDEL bereits darauf hin, daß die FRAUNHOFERsche und HERSCHELsche Bedingung nur gleichzeitig nebeneinander bestehen können, wenn $\sigma^2_{-1} = \sigma^2_{k+1}$ ist, d. h. in den eigentlichen und in den negativen Knotenpunkten und bei teleskopischer Abbildung.

Im Anschluß an die SEIDELsche Arbeit hat S. FINSTERWALDER[2]) die von optischen Systemen größerer Öffnung und größeren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder, die Gestalt der Brennflächen und ebene Schnitte durch diese und die Lichtverteilung in den in diesen Schnitten entstehenden Zerstreuungsfiguren untersucht.

[1]) Näheres s. bei A. GULLSTRAND, Zur Würdigung der Petzvalschen Bedingung. ZS. f. Instrkde. Bd. 4, S. 97 ff. 1910.

[2]) S. FINSTERWALDER, Abhandlg. d. k. bayr. Akad. d. Wiss., II. Kl., Bd. 17, 3. Abt., S. 519—587. München 1891.

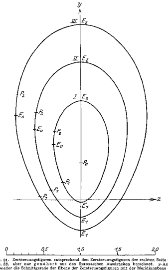


Abb. 91. Zerstreuungsfiguren entsprechend den Zerstreuungsfiguren der rechten Seite der Abb. 88, aber nur genähert mit den SEIDELschen Ausdrücken berechnet. y-Achse ist wieder die Schnittgerade der Ebene der Zerstreuungsfiguren mit der Meridianebene des Hauptstrahles, Koordinatenanfang ist nicht der hier mit P_0 bezeichnete Durchstoßungspunkt des Hauptstrahles, sondern ein um -0.771 von P_0 auf der y-Achse entfernt liegender Punkt. Die Größenverhältnisse der Zerstreuungsfiguren sind durch den beigegebenen Maßstab feststellbar. Die einzelnen numerischen Werte siehe Text und Tabelle 7.

K. SCHWARZSCHILD[1]) hat in seinen „Untersuchungen zur geometrischen Optik" die SEIDELschen Bildfehler[2]) aus dem Eikonal entwickelt, und zwar gleichzeitig unter Ausdehnung seiner Betrachtungen auf achsensymmetrische, deformierte Systeme. Auch die Fehler fünfter Ordnung sind von dem gleichen

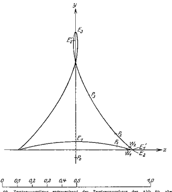


Abb. 92. Zerstreuungsfigur entsprechend der Zerstreuungsfigur der Abb. 89, aber nur genähert mit den SEIDELschen Ausdrücken berechnet. y-Achse ist wieder die Schnittgerade der Ebene der Zerstreuungsfigur und der Meridianebene des Hauptstrahles, Koordinatenanfang ist nicht der hier mit P_0 bezeichnete Durchstoßungspunkt des Hauptstrahles, sondern ein um 0,0819 von P_0 auf der y-Achse entfernt liegender Punkt. Die Größenverhältnisse der Zerstreuungsfigur sind durch den beigegebenen Maßstab feststellbar. Die einzelnen numerischen Werte siehe Text und Tabelle 8.

---

[1]) I und II a. d. Abhandlgn. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., N. F. Bd. 4, Nr. 1 u. 2. 1905; III Berlin: Weidmannsche Buchhandlung 1905.

[2]) A. KERBER, Entwicklung der Formeln für die Abweichungen dritter Ordnung nach LUDWIG SEIDEL. ZS. f. Instrkde. Bd. 41, S. 289—299, 324—332, 337—348. 1921.

Verfasser untersucht worden; weiter hat er seine allgemeinen Ergebnisse angewandt auf die Theorie der Spiegelteleskope und die Untersuchung astrophotographischer Objektive verschiedenen Baues.

Auch die numerische Berechnung der Bildfehler innerhalb des SEIDELschen Abbildungsbereiches vermittels der fünf Summenausdrücke $S(1) \ldots S(5)$ ist verhältnismäßig einfach, da ja diese nur aus Elementen der Nullstrahlrechnung aufgebaut sind. Zum Vergleich mit den in Abb. 88, 89 und 90 dargestellten Zerstreuungsfiguren, die mit Hilfe von der Achse endlich entfernter und zu ihr endlich geneigter, d. h. zur Achse windschiefer Strahlen bestimmt sind, werden in Abb. 91, 92 und 93 Zerstreuungsfiguren gezeigt, welche ganz dem gleichen dingseitigen Parallelstrahlenbündel wie jene entsprechen, aber nur näherungsweise unter Benutzung der SEIDELschen Ausdrücke berechnet sind. Es wird also angenommen, daß ein unter 14,6371° gegen die Achse geneigtes Parallelstrahlenbündel auf das Seite 119 angegebene Unar fällt. Aus diesem Strahlenbündel sind drei Strahlenzylinder ausgesondert, die die „Ebene" der Eintrittspupille — sie liegt im Sinne der Lichtrichtung um 10,287 hinter dem ersten Linsenscheitel — in drei zu ihrer Mitte konzentrischen Kreisen schneiden, deren Radien der Reihe nach $r'_I = 4{,}590$, $r'_{II} = 6{,}498$, $r'_{III} = 7{,}955$ sind. Die einzelnen Punkte dieser Kreise werden dann gegeben durch die verschiedenen ϑ', das sind die Neigungswinkel des Radiusvektors gegen die η'_{-1}-Achse, wie das in Abb. 94 gezeigt ist. Der Durchstoßungspunkt des Hauptstrahles in den einzelnen Ebenen, nämlich der GAUSSschen Brennebene der Frontlinse des Unars, der achsensenkrechten Ebene durch den tangentialen Bildpunkt des meridionalen Büschels nach Fläche 2 und schließlich der GAUSSschen Brennebene des Gesamtobjektivs, ist jeweilig mit P_0 bezeichnet und abweichend von den Abb. 88, 89 und 90 nicht als Koordinatenanfangspunkt gewählt, sondern als außerhalb der z-Achse auf der y-Achse liegender Punkt; die y-Achse ist wieder der Schnitt der Meridianebene des Hauptstrahls und der Ebene der Zerstreuungsfiguren. Die zu den Koordinaten y, z der einzelnen Punkte der Durchstoßungsfiguren, wie E_1, P_2 usw., in der Ebene

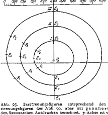


Abb. 93. Zerstreuungsfiguren entsprechend den Zerstreuungsfiguren der Abb. 90, aber nur genähert mit den SEIDELschen Ausdrucken berechnet. y-Achse ist wieder die Schnittgerade der Ebene der Zerstreuungsfiguren und der Meridianebene des Hauptstrahles, Koordinatenanfang ist nicht der hier mit P_0 bezeichnete Durchstoßungspunkt des Hauptstrahles, sondern ein um $-0{,}0211$ von P_0 auf der y-Achse entfernt liegender Punkt. Die Größenverhältnisse der Zerstreuungsfiguren sind durch den beigegebenen Maßstab feststellbar. Die einzelnen numerischen Werte siehe Text und Tabelle 9.

der Eintrittspupille gehörigen r'- und v'-Werte sind aus den Tabellen 7, 8 und 9 zu ersehen.

Tabelle 7

Punkt	v'	y	z	Punkt	v'	y	z	Punkt	v'	y	z
E_1	0°	−0,440	0,000	E_1	0°	−0,252	0,000	E_1	0°	−0,0325	0,000
P_1	60°	+0,046	−0,559	P_1	60°	+0,140	−0,405	P_1	60°	+0,250	−0,354
P_2	120°	+1,526	−0,852	P_2	120°	+1,263	−0,600	P_2	120°	−0,984	−0,352
E_2	180°	+2,520	0,000	E_2	180°	+1,994	0,000	E_2	180°	+1,436	0,000
E_0	109,05°	+1,221	−0,873	E_0	108,21°	+1,019	−0,618	E_0	105,88°	+0,798	−0,366
	r'_{III}				r'_{II}				r'_I		

Tabelle 8

Punkt	v'	y	z
E_1	0°	+0,060	0,000
P_1	30°	+0,0276	+0,284
W_1	45,02°	+0,0055	+0,363
E_2	54,70°	−0,0007	+0,384
F_1	57,83°	+0,0007	+0,385
W_2	69,04°	+0,0159	+0,370
P_2	90°	+0,113	+0,275
P_3	120°	+0,392	+0,0918
E_2'	159,92°	+0,777	−0,0145
E_3	180°	+0,841	0,000
	r'_{III}		

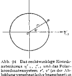


Abb. 94. Das rechtwinklige Koordinatenkreuz η'_{-1}, ζ'_{-1} und das Polarkoordinatensystem r', v' (in der Abbildung versehentlich v bezeichnet) in der Eintrittspupille des Zeiß-Unars.

Tabelle 9

Punkt	v'	y	z	Punkt	v'	y	z	Punkt	v'	y	z
E_1	0°	−0,177	0,000	E_1	0°	−0,120	0,000	E_1	0°	−0,067	0,000
P_1	60°	−0,0816	−0,198	P_1	60°	−0,053	−0,140	P_1	60°	−0,026	−0,0836
P_2	120°	+0,144	−0,218	P_2	120°	+0,105	−0,153	P_2	120°	+0,067	−0,0904
E_2	180°	+0,275	0,000	E_2	180°	+0,196	0,000	E_2	180°	+0,119	0,000
E_0	95,37°	+0,0477	−0,240	E_0	95,08°	+0,037	−0,169	E_0	94,29°	+0,0255	−0,101
	r'_{III}				r'_{II}				r'_I		

Die berechneten, in den Tafeln angegebenen Kurvenpunkte sind in der yz-Ebene genau eingetragen, die übrigen Teile der Zerstreuungsfiguren sind zeichnerisch interpoliert. Der Vergleich der genäherten Zerstreuungsfiguren mit denen genauer Durchrechnung in Abb. 88, 89 und 90 zeigt im allgemeinen Bau der Kurven eine verhältnismäßig recht gute Übereinstimmung. Der quantitative Vergleich wird ermöglicht durch die sämtlichen Zerstreuungsfiguren beigegebenen Maßstäbe. Die numerischen Abweichungen sind zum Teil nicht unerheblich. Dort, wo überhaupt von einer Korrektion der Bildfehler nicht gesprochen werden kann, das ist bei den Zerstreuungsfiguren nach der zweiten Fläche des Unars der Fall, sind die genäherten Abweichungen kleiner als die genauen. Die Zerstreuungsfiguren in der Brennebene des Unars zeigen dagegen das umgekehrte Verhalten. Die SEIDELsche Näherung gibt hier zu ungünstige Werte, weil offenbar, wie man das auch aus Abb. 90 schließen kann, die Glieder höherer Ordnung zur Verminderung der Koma beitragen.

c) Farbenabweichungen.

73. Die Farbfehler und ihre Einteilung in zwei Gruppen. Die beiden Grundvoraussetzungen, auf denen sich im wesentlichen unsere bisherigen Entwicklungen stützen, sind die Annahme geradliniger Ausbreitung des Lichtes, aus der der Begriff des Lichtstrahles zu abstrahieren ist, und des Bestehens des Brechungsgesetzes. Aus dem letzteren folgt, daß die Lage des gebrochenen zum einfallenden Strahl abhängig ist von der Brechungszahl; nur wenn der Einfallswinkel und damit auch der Brechungswinkel Null ist, besteht diese Abhängigkeit nicht; es findet dann niemals, welches auch die Brechungszahlen der beiden aneinanderstoßenden Medien seien, eine Brechung statt, sondern der Strahl läuft ohne Richtungsänderung weiter.

Wie der Fall $i = i' = 0$ also eine Ausnahme darstellt, so bietet auch die Spezialisierung des Brechungsgesetzes auf die Spiegelung, bei der $n = -n'$ wird, insofern eine Besonderheit, als auch hier eigentlich nicht mehr von einer Abhängigkeit des Strahlenverlaufes von der Brechungszahl gesprochen werden kann. Läßt man aber diese beiden Sonderfälle, nämlich den senkrechten Durchtrittes des Strahles durch die brechende Fläche und den der Spiegelung, hier außer acht, so ändert sich der Verlauf eines bestimmten Lichtstrahles unter sonst gleichen Umständen mit der Brechungszahl.

Denkt man nun daran, daß das Licht, welches die Abbildungsvorgänge vermittelt, in den weitaus meisten Fällen Mischlicht ist, so ergibt sich für die Abbildung durch dioptrische Systeme eine wesentliche Komplikation des Abbildungsvorganges. Von einem Gegenstand, der nicht monochromatisches Licht aussendet, werden nämlich entsprechend den verschiedenen Farben seines Lichtes durch eine dioptrische Anordnung ebenso viele verschiedene farbige Bilder, deren Zahl z. B. bei natürlichem Sonnenlicht eigentlich unendlich groß ist, entworfen. Wenn daher die Bildfehler einer Linsenfolge nur für *eine* bestimmte Farbe beseitigt oder auf nicht merkbare Beträge herabgedrückt sind, so wird doch eine solche Linsenanordnung unbrauchbar sein, wenn die vor- bzw. hinter- und möglicherweise aufeinanderliegenden Bilder der verschiedenen Farben sich gegenseitig so stören, daß ein eigentlicher Bildeindruck, sei es bei subjektiver Betrachtung, sei es bei objektiver Fixierung des Bildes auf einer lichtempfindlichen Schicht nicht zustande kommen kann. Um ein farbenreines Bild zu erhalten, sind daher die Farbfehler zu beseitigen oder genügend zu verringern. In welchem Maße dieses zu geschehen hat, wird ganz von den Anwendungsgebieten, für die die betreffende Linsenfolge bestimmt ist, abhängen.

Die einzelnen Farbfehler, die Farbenabweichungen oder chromatischen Aberrationen, unterteilt man, um sich einen Überblick über sie zu verschaffen, zweckmäßig in zwei Gruppen, nämlich einmal in die Abweichung der einzelnen Farbbilder voneinander, soweit diese durch die Gesetze des GAUSSschen Bereiches bestimmt werden, und dann in die Farbenabweichungen der einzelnen Bildfehler. Die Farbenabweichungen der ersten Gruppe sind im allgemeinen für die Farbenreinheit des Bildes am schädlichsten; sind *sie* nicht gehoben, so sind ja Lage und Größe der Bilder für verschiedene Farben bereits in der ersten Annäherung voneinander abweichend.

Für die Bestimmung der Farbfehler beider Gruppen sind in den vorangehenden Abschnitten alle notwendigen Hilfsmittel bereitgestellt; es brauchen ja nur die Werte der Schnittweite, Vergrößerung und der Bildfehler für die den verschiedenen Farben entsprechenden Brechungszahlen bestimmt zu werden, um die Abweichungen dieser für den Charakter der Abbildung maßgebenden Größen voneinander durch Unterschiedsbildung für die einzelnen Farben zu erhalten.

Derartige Untersuchungen werden im wesentlichen den Inhalt dieses Abschnittes ausmachen.

Sind für zwei verschiedene Wellenlängen die Farbenabweichungen der Lage oder Größe oder irgendeines Fehlerrestes des Bildes gehoben, so spricht man von **Achromatisierung** der Linsenfolge für den betreffenden Abbildungswert, und die optische Anordnung selbst wird als **achromatisch** hinsichtlich jener Größe bezeichnet; auch nennt man wohl das Linsensystem schlechthin achromatisch, wenn wenigstens der für seine Anwendungszwecke störendste Farbfehler gehoben ist.

74. Optische Eigenschaften des Glases. Bei der verhaltnismäßig großen Auswahl optischen Glases, das heute dem Erbauer optischer Werkzeuge zur Verfügung steht, ist es häufig nicht allzu schwierig, Achromasie einer Linsenfolge herbeizuführen; ja, es ist oft möglich, ein System erst für monochromatisches Licht von Bildfehlern in wünschenswerter Weise zu befreien und dann nachträglich durch geeignete Glasarten zu achromatisieren, ohne daß es sich nötig macht, das System wesentlich oder überhaupt zu ändern. Es gibt nämlich eine ganze Reihe von Glasarten, die bei einer gleichen oder nahezu gleichen mittleren Brechungszahl erheblich voneinander abweichende Dispersionen haben, und daher kann durch geeignete Auswahl des Glases für die einzelnen Linsen das System mitunter nachträglich achromatisiert werden, ohne daß bei seiner ursprünglichen Anlage Rücksicht auf Farbabweichungen genommen wird.

Um die optischen Eigenschaften einer Glasart zu kennzeichnen, benutzt man nach ABBE die fünf Linien A', C, D, F und G' des Spektrums, die sich durch künstliche Lichtquellen jederzeit leicht herstellen lassen. In dem neuesten[1]) Verzeichnis der optischen Glasarten des Glaswerks Schott & Gen. sind auch noch für einige andere Spektrallinien die Brechungszahlen angegeben, so daß man diese für folgende Linien, denen gleichzeitig Element und Wellenlänge beigeschrieben sind, dort finden kann:

Farbe	Rot		Gelb		Grün	Blau			Violett
Zeichen . .	A' Mitte d. Doppell.	C	D Mitte d. Doppell.	d	e	F	g	G'	h helle Linie
Element . .	K	H	Na	He	Hg	H	Hg	H	Hg
Wellenlänge in $\mu\mu$ . .	768,5	656,3	589,3	587,6	546,1	486,1	435,9	434,1	404,7

Um eine Glasart festzustellen, genügt die Kenntnis ihrer mittleren Brechung, das ist die Brechungszahl für die d-Linie, und der ABBEschen Zahl $\nu = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$, die man wohl auch als reziproken Wert der relativen mittleren Dispersion bezeichnet. Den Gang der Farbenzerstreuung kann man aus den fünf partiellen Dispersionen $A' - C$, $C - e$, $e - F$, $F - g$ und $g - h$ entnehmen. In der folgenden Tabelle 1 sind für eine Reihe von Glasschmelzungen des Jenaer Glaswerkes, die durch Nummern bezeichnet sind, einige Brechungszahlen und Dispersionen angegeben.

α) Farbenabweichungen innerhalb des GAUSSschen Abbildungsbereiches.

75. Achromasie einer einfachen Linse. Eine teilweise Achromasie läßt schon eine einfache Linse zu. Entweder kann man nämlich die Bilder zweier verschiedener Farben in ein und dieselbe Ebene fallen lassen, oder man kann

[1]) Etwa 1924 erschienen.

Tabelle 1.

Schmelznummer	n_D	ν	$C-F$	$A'-C$	$C-e$	$e-F$	$F-g$	$g-h$	F	G'	Bezeichnung nach Schott
3296	1,4990	66,6	0,00749	—	—	—	—	—	1,50424	1,50840	ähnlich *BK* 3 Bor-Kron
3832	1,51633	64,0	0,00806	0,00287	0,00439	0,00367	0,00432	0,00356	1,52191	1,52641	*BK* 7 „ „
12034	1,51052	63,4	0,00805	0,00285	0,00439	0,00366	0,00433	0,00357	1,51617	1,52068	*BK* 1 „ „
15656	1,59234	61,0	0,00971	0,00336	0,00528	0,00443	0,00520	0,00431	1,59918	1,60465	*SK* 5 Schwer-Kron
138	1,52790	60,2	0,00872	0,00304	0,00473	0,00399	0,00476	0,00395	1,53404	1,53898	*BaLK* 1 Baryt-Leicht-Kron
2071	1,61293	58,6	0,01046	0,00360	0,00567	0,00479	0,00570	0,00473	1,62021	1,62614	*SK* 4 Schwer-Kron
2075	1,61132	58,4	0,01045	0,00360	0,00567	0,00478	0,00570	0,00473	1,61870	1,62462	*SK* 4 „ „
3039	1,57254	57,1	0,01003	0,00341	0,00543	0,00460	0,00545	0,00454	1,57963	1,58537	*BaK* 1 Baryt-Kron
3046	1,61132	56,2	0,01080	0,00369	0,00584	0,00496	0,00592	0,00493	1,61895	1,62514	*SK* 1 Schwer-Kron
2001	1,52110	51,8	0,01006	—	—	—	—	—	1,52820	1,53397	ähnlich *KzF* 2 Kurz-Flint
3439	1,52790	51,6	0,01025	0,00353	0,00555	0,00470	0,00563	0,00473	1,53513	1,54104	*KzF* 2 „ „
2355	1,60457	43,9	0,01377	0,00450	0,00736	0,00641	0,00787	0,00673	1,61436	1,62252	*BaF* 4 Baryt-Flint
12738	1,62418	39,2	0,01593	0,00513	0,00847	0,00746	0,00927	0,00800	1,63555	1,64517	*BaSF* 1 Baryt-Schwer-Flint
10799	1,59704	39,1	0,01529	0,00492	0,00814	0,00715	0,00877	0,00756	1,60794	1,61718	*F* 8 Flint
118	1,61293	37,0	0,01659	0,00532	0,00880	0,00779	0,00966	0,00837	1,62464	1,63473	*F* 3 „
3964	1,61419	36,9	0,01664	0,00532	0,00883	0,00781	0,00966	0,00837	1,62609	1,63622	*F* 3 „
103	1,62004	36,3	0,01706	0,00545	0,00906	0,00800	0,00995	0,00862	1,63210	1,64249	*F* 2 „
5916	1,62410	35,7	0,01750	0,00558	0,00928	0,00822	0,01026	0,00892	1,63662	1,64732	*F* 1 „

Verhältnis der Teildispersionen von:

118 und 3832	2,058	1,854	2,005	2,123	2,236	2,352
118 „ 2071	1,586	1,478	1,552	1,626	1,695	1,769
3439 „ 138	1,176	1,161	1,173	1,178	1,183	1,198

die Brennweiten für beide Farben gleichmachen. Setzen wir z. B. für die Brennweite F der Linse in Übereinstimmung mit (28) in Ziff. 33.

$$F = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)\{n(r_2 - r_1) + (n-1) d\}} \tag{1}$$

und führen zur Abkürzung:

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{F(r_2 - r_1) + 2dF + r_1 r_2}{F(r_2 - r_1) + Fd} \tag{2}$$

ein, so erhält man bei einem bestimmten F für n die beiden Werte:

$$n = A \pm \sqrt{A^2 - \frac{d}{r_2 - r_1 + d}}, \tag{3}$$

für die demnach die Brennweite achromatisiert ist. n kann für zwei verschiedene Farben nicht erheblich voneinander abweichende Werte haben; daher muß der Wurzelausdruck klein sein, d. h. $d/(r_2 - r_1 + d)$ darf von A^2 nicht erheblich abweichen, und A selbst muß einer mittleren Brechungszahl entsprechen. Bei der verhältnismäßig begrenzten Auswahl für A, es müßte etwa zwischen 1,45 und 1,75 liegen, kann man leicht übersehen, in welcher Größe r_1, r_2 und d zu wählen sind, um überhaupt ausführbare Linsen zu erhalten; infolge der für die praktische Ausführung sich ergebenden ungünstigen Formen, die außerdem mit anderen Aberrationen besonders stark behaftet sind, haben die teilweise achromatisierten einfachen Linsen keine große Bedeutung; es ist im allgemeinen in jeder Hinsicht günstiger, die Achromasie lieber durch zwei Linsen herbeizuführen.

76. Farbenfehler dünner Linsen und Linsensysteme. Nimmt man z. B. zwei dünne, in Luft befindliche Linsen, die sich berühren, und deren Brechkräfte:

$$\varphi_1 = (n_1 - 1) \cdot m_1, \tag{4}$$

$$\varphi_2 = (n_2 - 1) \cdot m_2 \tag{5}$$

seien, worin n_1 und n_2 die entsprechenden Brechungszahlen und m_1 und m_2 die entsprechenden Differenzen der reziproken Krümmungsradien der beiden Linsenflächen sind, so ist dann die Gesamtbrechkraft:

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{6}$$

n_1 und n_2 gelten für eine bestimmte Wellenlänge λ; läßt man λ um eine beliebige endliche oder unendlich kleine Größe variieren und entspräche dieser Variation des λ eine Dispersion von Δ_1 und Δ_2 und eine Veränderung $\Delta\Phi$ der Gesamtbrechkraft, so wird:

$$\Delta\Phi = \Delta_1 \cdot m_1 + \Delta_2 \cdot m_2, \tag{7}$$

was sich auf beliebig viele, etwa k dünne und einander berührende Linsen ausdehnen läßt, so daß allgemein gilt:

$$\Delta\Phi = \sum_{\varrho=1}^{k} \Delta_k m_k = \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\varphi_k}{\mu_k}, \tag{7a}$$

wenn noch $\mu_k = (n_k - 1)/\Delta_k$ gesetzt wird.

Wird $\Delta\Phi = 0$, so bedeutet das, daß für die betreffenden zwei Farben die Brennweiten und, da Linsen und Linsensystem als unendlich dünn angenommen sind, auch die Schnittweiten einander gleich sind; man spricht dann im Hinblick auf die achromatisierte Brennweite von der Hebung der chromatischen Vergrößerungsdifferenz, und im Hinsehen auf die gehobenen Farbenabweichungen der Schnittweiten von der Korrektion der Farbenlängsabweichungen. Wenn also überhaupt einer von diesen beiden Farbenfehlern

beseitigt ist, so ist es bei dünnen Systemen von Linsen auch der andere, und zwar wie leicht einzusehen, für alle möglichen Dinglagen. Dabei ist es auch ganz gleichgültig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Linsen angeordnet sind.

Auch bei Nichtbeseitigung der Farbenabweichung der Brennweite läßt sich durch deren Wert $\Delta\Phi$ die chromatische Längsaberration ausdrücken. Nennt man nämlich die Dingentfernung von dem dünnen, k-linsigen System s_1, die Bildweite s'_k und die bildseitige Brennweite des ganzen Systems f_k, so ist entsprechend (31) in Ziff. 35

$$\frac{1}{s'_k} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_k} \tag{8}$$

für eine bestimmte Farbe, für eine zweite Farbe wird dann:

$$\frac{1}{s'_k + \Delta s'_k} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_k + \Delta f_k}.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\frac{1}{s'_k + \Delta s'_k} - \frac{1}{s'_k} = -\frac{\Delta f_k}{f_k(f_k + \Delta f_k)} = \Delta\Phi, \tag{9}$$

woraus $\Delta s'_k$, die Farbenlängsabweichung, zu berechnen ist, können die Differenzen als klein von erster Ordnung betrachtet werden, sie seien dann durch das Symbol δ kenntlich gemacht, so folgt:

$$\delta s'_k = -s'^2_k \delta\Phi \tag{9a}$$

Nimmt man nun in (7a) $k = 2$, so besteht bei Beseitigung der chromatischen Längsabweichung und Vergrößerungsdifferenz neben (6) noch

$$\frac{\varphi_1}{\mu_1} + \frac{\varphi_2}{\mu_2} = 0, \tag{10}$$

so daß also wird:

$$\varphi_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\Phi, \qquad \varphi_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\Phi, \tag{11}$$

oder auch:

$$m_1 = \frac{\Phi}{(\mu_1 - \mu_2)\Delta_1}, \qquad m_2 = \frac{\Phi}{(\mu_2 - \mu_1)\Delta_1}. \tag{11a}$$

Bei positivem Werte von μ_1 und μ_2 haben φ_1 und φ_2 entgegengesetztes Vorzeichen und sind um so größer, je größer die μ-Werte und je kleiner ihre Differenz ist.

Würde man fordern, daß die Schnittweiten und Brennweiten für drei Farben zusammenfallen, so würde, wenn die μ-Werte und die Dispersionen für diese weiteren Farben durch Striche kenntlich gemacht würden, noch die Gleichung zu erfüllen sein:

$$\frac{\varphi_1}{\mu'_1} + \frac{\varphi_2}{\mu'_2} = 0, \tag{10a}$$

was in Verbindung mit (10) auf die Bedingung $\mu_1/\mu'_1 = \mu_2/\mu'_2$ oder, wenn man die Definition der μ-Werte benutzt, auf $\Delta'_1/\Delta_1 = \Delta'_2/\Delta_2$ führt. Damit also das System aus zwei dünnen, einander berührenden Linsen für drei Farben, deren Brechungszahlen n_1, $n_1 + \Delta_1$, $n_1 + \Delta'_1$ bzw. n_2, $n_2 + \Delta_2$, $n_2 + \Delta'_2$ sind, gleiche Schnitt- und Brennweiten hat, müssen die beiden in Frage kommenden Dispersionen der einen Glasart den beiden Dispersionen der anderen Glasart proportional sein, d. h. wenn man die Beseitigung der Farbenlängsabweichungen und der chromatischen Vergrößerungsdifferenz für alle Farben des Spektrums fordert, daß die Spektra der beiden Glasarten im geometrischen Sinne einander streng ähnlich sein müssen.

77. Farbenabweichungen zweier dünner Linsen mit endlichem Abstand voneinander. Nimmt man nun an, daß die betrachteten beiden dünnen Linsen, deren Brennweiten f_1 und f_2 seien, sich nicht mehr berühren, sondern einen endlichen Abstand, der δ sein möge, voneinander haben, so erinnern wir uns, um die Achromatisierung der Brennweite dieses Systems zu untersuchen, der Beziehungen (35) und (35a) in Ziff. 36:

$$L_1 H_{12} = \frac{\delta f_1}{f_1 + f_2 - \delta}$$

und

$$L_2 H'_{12} = \frac{-\delta f_2}{f_1 + f_2 - \delta},$$

aus denen sich die Lage der Hauptpunkte H_{12} und H'_{12} unserer Anlage bestimmt. Die Brennweite ist nach (33) in Ziff 36

$$f_{12} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - \delta}. \tag{12}$$

Aus diesen Beziehungen sieht man sofort, daß, wenn ein Hauptpunkt, sagen wir H_{12}, durch geeignete Wahl von δ für zwei beliebige Farben den gleichen Ort hat, also frei von chromatischen Längsaberrationen ist, dann $f_1/(f_1 + f_2 - \delta)$ für diese beiden Farben den gleichen Wert haben muß; es ist also daher, wie aus (12) folgt, nicht möglich, daß auch f_{12} für die betreffenden beiden Farben den gleichen Wert annimmt, es sei denn, f_2 wäre selbst dafür achromatisiert. Zum gleichen Ergebnis kommt man für f_1, wenn man vom zweiten Hauptpunkt ausgeht. Es ist demnach unmöglich, ein System aus zwei unendlich dünnen Einzellinsen in endlicher Entfernung voneinander vollständig zu achromatisieren, selbst wenn sie aus verschiedenem Material hergestellt sind. Vollkommene Achromasie ist nur zu erlangen, wenn jede der beiden dünnen Linsen schon für sich achromatisiert ist, d. h. es müßte jede von ihnen mindestens aus zwei dünnen einander berührenden Linsen bestehen.

Eine teilweise Achromasie des Systems aus zwei dünnen merklich getrennten Linsen ist aber schon lediglich durch passende Wahl von δ zu erreichen. Soll z. B. die Brennweite für zwei Farben die gleiche sein, so muß offenbar

$$\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - \delta} = \frac{(f_1 + \Delta f_1) \cdot (f_2 + \Delta f_2)}{f_1 + \Delta f_1 + f_2 + \Delta f_2 - \delta} \tag{13}$$

werden, worin f_1 und f_2 die Brennweiten der Einzelglieder für die eine Farbe und $f_1 + \Delta f_1$, $f_2 + \Delta f_2$ die Brennweiten für die zweite Farbe sind. Aus (13) berechnet sich, wenn Δf_1 und Δf_2 als so klein betrachtet werden, daß Produkte von ihnen vernachlässigbar sind,

$$\delta = \frac{f_2^2 \Delta f_1 + f_1^2 \Delta f_2}{f_2 \Delta f_1 + f_1 \Delta f_2}. \tag{14}$$

Nun ist:

$$f_1 = \frac{r_1 r_2}{(n_1 - 1)(r_2 - r_1)}, \qquad \text{daher} \qquad \frac{d f_1}{d n_1} = -\frac{1}{(n_1 - 1)} \cdot \frac{r_1 r_2}{(n_1 - 1)(r_2 - r_1)}$$

$$\text{oder} \qquad \frac{d f_1}{f_1} = -\frac{d n_1}{n_1 - 1} = -\frac{1}{\mu_1} \qquad \text{und ebenso} \qquad \frac{d f_2}{f_2} = -\frac{1}{\mu_2}.$$

Es wird demnach aus (14):

$$\delta = \frac{f_2 \frac{d f_1}{f_1} + f_1 \frac{d f_2}{f_2}}{\frac{d f_1}{f_1} + \frac{d f_2}{f_2}} = \frac{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{15}$$

woraus also δ für jede Kombination von zwei dünnen Einzellinsen, deren

Äquivalentbrennweiten für die betreffenden Farben gleich groß sind, zu bestimmen ist.

Sind z. B. beide Linsen aus derselben Glasart, so ist $\mu_1 = \mu_2$, und es wird

$$\delta = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{15a}$$

die Bedingung für Achromasie der Brennweite, und zwar in diesem Falle selbstverständlich für alle Farben des Spektrums. Solchen Linsenanordnungen entsprechen weitgehend manche Okulare. So besteht das Okular von HUYGENS in seiner ursprünglichen Bauart aus zwei einfachen Sammellinsen mit den Brennweiten f_1 und f_2, wobei $f_1 = 3f_2$ und der Abstand der beiden Linsen voneinander $\delta = 2f_2$ ist; in einer späteren Ausführungsform ist häufig ein Okular benutzt worden, bei dem $f_1 = 2f_2$ und $\delta = \frac{3}{2}f_2$ ist. Für beide Formen ist (15a) erfüllt und damit die Unabhängigkeit der Okularbrennweite von der Farbe gewährleistet. Man kann dann noch bei solchen Okularen durch die Durchbiegung der beiden Linsen für ein nicht zu großes Gesichtsfeld störende Bildfehler beseitigen. Auch bei der Urform des RAMSDENschen Okulars, bei der $f_1 = f_2 = \delta$ ist, wird (15a) befriedigt.

78. Farbenlängsabweichung und chromatische Vergrößerungsdifferenz einer beliebigen zentrierten Flächenfolge. Läßt man die Voraussetzung dünner Linsen fallen, und sucht ganz allgemein die chromatische Längsabweichung und Vergrößerungsdifferenz für ein beliebiges, aus k Kugelflächen bestehendes zentriertes dioptrisches System, so geht man zweckmäßig von der Nullstrahlinvariante (vgl. S. 43):

$$Q_{s\varrho} = n'_\varrho\left(\frac{1}{r_\varrho} - \frac{1}{s'_\varrho}\right) = n_\varrho\left(\frac{1}{r_\varrho} - \frac{1}{s_\varrho}\right)$$

aus, in der abweichend von (36) in Ziff. 56 der Index 0 der Einfachheit halber fortgelassen ist, und auch im folgenden immer fortgelassen werden wird, solange keine Mißverständnisse zu befürchten sind. Nimmt man dazu noch die Beziehung:

$$s'_\varrho - s_{\varrho+1} = d_\varrho,$$

so folgt durch infinitesimale Variation:

$$n_\varrho \frac{\delta s_\varrho}{s_\varrho^2} - n'_\varrho \frac{\delta s'_\varrho}{s'^2_\varrho} = Q_{s\varrho}\left(\frac{\delta n'_\varrho}{n'_\varrho} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right) \quad \text{und} \quad \delta s'_\varrho = \delta s_{\varrho+1}. \tag{16}$$

Dabei bezeichnen die einzelnen Variationen die mit einer bestimmten Änderung der Wellenlänge verbundenen Änderungen der betreffenden Werte. Die Variationen sind als klein angenommen, weil diese Annahme in den meisten Fällen der Praxis genügt und die strengen Differenzenformeln etwas schwerfälliger sind. Ist also der betrachtete Spektralbereich genügend klein, so werden die Ergebnisse genau, im anderen Falle sind sie als Näherungen zu werten.

Multipliziert man (16) mit h_ϱ^2 und berücksichtigt $h_{\varrho+1}/h_\varrho = s_{\varrho+1}/s'_\varrho$ (vgl. Abb. 24.) so wird

$$n_\varrho\left(\frac{h_\varrho}{s_\varrho}\right)^2 \cdot \delta s_\varrho - n'_\varrho\left(\frac{h_{\varrho+1}}{s_{\varrho+1}}\right)^2 \delta s_{\varrho+1} = h_\varrho^2\, Q_{s\varrho}\left(\frac{\delta n'_\varrho}{n'_\varrho} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right). \tag{17}$$

Summiert man unter Benutzung von $n'_\varrho = n_{\varrho+1}$ über sämtliche k Flächen des Systems, so folgt

$$n_1\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 \delta s_1 - n'_k\left(\frac{h_k}{s'_k}\right)^2 \cdot \delta s'_k = \sum_{\varrho=1}^{k} h_\varrho^2\, Q_{s\varrho}\left(\frac{\delta n'_\varrho}{n'_\varrho} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right). \tag{18}$$

Nimmt man das Ding als frei von chromatischen Längsabweichungen an, d. h. $\delta s_1 = 0$, dann ist die Bedingung ihrer Beseitigung für das Bild

$$\delta s'_k = 0 = \sum_{\varrho=1}^{k} h_\varrho^2 Q_{s\varrho} \left(\frac{\delta n'_\varrho}{n'_\varrho} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right). \tag{18a}$$

Neben der Beseitigung des Farbfehlers der Lage tritt natürlich auch hier bei dem allgemeinen k-flächigen System weiter die Forderung nach Hebung der chromatischen Vergrößerungsdifferenz auf, wenn man ein völlig farbfreies Bild im Bereiche der GAUSSschen Dioptrik verlangt. Die Vergrößerung zwischen Bild und Objekt ist nach (20) in Ziff. 32:

$$\beta = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{s'_1 \cdot s'_2 \ldots s'_k}{s_1 \cdot s_2 \ldots s_k}.$$

Daraus folgt durch logarithmische Variation:

$$\frac{\delta\beta}{\beta} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_k}{n'_k} + \sum_{\varrho=1}^{k}\left(\frac{\delta s'_\varrho}{s'_\varrho} - \frac{\delta s_\varrho}{s_\varrho}\right). \tag{19}$$

Damit ist bereits die Abweichung $\delta\beta$ bestimmt, allerdings zunächst in Abhängigkeit von den chromatischen Längsabweichungen an den einzelnen Flächen. Für viele Untersuchungen ist es aber bequemer, $\delta\beta$ in einer anderen Form, in der es auch gleich unmittelbar als Funktion der Änderungen der Brechungszahl erscheint, zu benutzen. Dazu formt man (19) um zu

$$\frac{\delta\beta}{\beta} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_k}{n'_k} + \frac{\delta s'_k}{s'_k} - \frac{\delta s_1}{s_1} - \sum_{\varrho=2}^{k} d_{\varrho-1} \frac{\delta s_\varrho}{s'_{\varrho-1} s_\varrho}. \tag{20}$$

Zur weiteren Umgestaltung des letzten Summenausdruckes definieren wir den Ausdruck:

$$l_\varrho = l_1 + \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \frac{d_\nu}{n_{\nu+1} h_\nu h_{\nu+1}} \tag{21}$$

dann wird:

$$\sum_{\varrho=2}^{k} d_{\varrho-1} \frac{\delta s_\varrho}{s'_{\varrho-1} s_\varrho} = \sum_{\varrho=2}^{k} (l_\varrho - l_{\varrho-1})\, n_\varrho \left(\frac{h_\varrho}{s_\varrho}\right)^2 \delta s_\varrho$$

oder, wenn man nach den l_ϱ ordnet, nach (16) und (17):

$$\sum_{\varrho=2}^{k} d_{\varrho-1} \frac{\delta s_\varrho}{s'_{\varrho-1} s_\varrho} = -n_1 \left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 l_1 \delta s_1 + n'_k l_k \left(\frac{h_k}{s'_k}\right)^2 \delta s'_k + \sum_{\varrho=1}^{k} l_\varrho h_\varrho^2 Q_{s\varrho} \left(\frac{\delta n'_\varrho}{n'_\varrho} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right).$$

Es wird also $\delta\beta/\beta$ als Funktion der Änderungen δn der Brechungszahlen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta\beta}{\beta} = \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n'_k}{n'_k} + \frac{\delta s'_k}{s'_k} - \frac{\delta s_1}{s_1} + n_1 \left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 l_1 \delta s_1 - n'_k \left(\frac{h_k}{s'_k}\right)^2 l_k \delta s'_k \\ - \sum_{\varrho=1}^{k} l_\varrho h_\varrho^2 Q_{s\varrho} \left(\frac{\delta n'_\varrho}{n'_\varrho} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

Meist wird sich dieser Ausdruck für $\delta\beta/\beta$ vereinfachen; wenn das optische System nur an ein Medium, d. h. $n_1 = n'_k$, grenzt, so wird natürlich $\delta n_1/n_1 - \delta n'_k/n'_k = 0$;

desgleichen wird man für das Ding Farbenfreiheit voraussetzend, in der Regel $\delta s_1 = 0$ setzen dürfen. Dann ergibt sich

$$\frac{\delta\beta}{\beta} = \left[\frac{1}{s_k'} - n_k' l_k \left(\frac{h_k}{s_k'}\right)^2\right] \delta s_k' - \sum_{\varrho=1}^{k} l_\varrho h_\varrho^2 Q_{s\varrho} \left(\frac{\delta n_\varrho'}{n_\varrho'} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right). \tag{19b}$$

Zur Bestimmung der durch (21) definierten l_ϱ sei noch bemerkt, daß l_1 willkürlich angenommen werden kann; bei Bildfehlerberechnungen ist es oft zweckmäßig, $l_1 = e_1(s_1 - e_1)/s_1$ zu setzen, worin e_1 den Abstand der Eintrittspupille des Systems vom Scheitel der ersten brechenden Fläche bedeutet. Ist die Bedingung für die Beseitigung der chromatischen Langsaberrationen erfüllt, also $\delta s_k' = 0$, so nimmt die Forderung nach gleicher Vergrößerung für zwei Farben, also $\delta\beta = 0$, die Gestalt an

$$\sum_{\varrho=1}^{k} l_\varrho h_\varrho^2 Q_{s\varrho} \left(\frac{\delta n_\varrho'}{n_\varrho'} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right) = 0, \tag{19c}$$

wird demnach der Bedingung für farbfreie Lage des Bildes im Aufbau sehr ähnlich, was für Berechnung solcher Systeme, bei denen beide Korrektionen herbeigeführt werden sollen, eine Erleichterung ist. Die beiden chromatischen Bedingungen (18a) und (19c), die hier der Einfachheit halber als erste und zweite bezeichnet sein mögen, sind von SEIDEL in einer anderen auch oft recht brauchbaren Form angegeben worden, die man aus der unsrigen findet, wenn man aus

$$\frac{h_{\varrho+1}}{h_\varrho} = \frac{s_{\varrho+1}}{s_\varrho'} = 1 - \frac{d_\varrho}{s_\varrho'} \qquad \text{und} \qquad \frac{h_\varrho}{h_{\varrho-1}} = \frac{s_\varrho}{s_\varrho + d_{\varrho-1}}$$

s_ϱ und s_ϱ' bestimmt und in $Q_{s\varrho}$ einsetzt. Nach kurzer Rechnung wird alsdann

$$h_\varrho \cdot Q_{s\varrho} = n_\varrho' \left(\frac{h_\varrho}{r_\varrho} + \frac{h_{\varrho+1} - h_\varrho}{d_\varrho}\right) = n_\varrho \left(\frac{h_\varrho}{r_\varrho} + \frac{h_\varrho - h_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}}\right),$$

woraus sich weiter

$$-h_\varrho Q_{s\varrho}\left(\frac{1}{n_\varrho'} - \frac{1}{n_\varrho}\right) = \frac{h_\varrho - h_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}} - \frac{h_{\varrho+1} - h_\varrho}{d_\varrho}$$

folgern läßt. Man kann diese Formel ganz allgemein gelten lassen, wenn man noch die für $\varrho = 1$ bzw. $\varrho = k$ auftretenden Größen $h_0 = 0$ und $d_0 = -s_1$ bzw. $h_{k+1} = 0$ und $d_k = s_k'$ festsetzt. Führt man weiter die Größe

$$M_\varrho = \frac{\dfrac{\delta n_\varrho'}{n_\varrho'} - \dfrac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}}{\dfrac{1}{n_\varrho'} - \dfrac{1}{n_\varrho}}$$

ein, so folgt:

$$-h_\varrho^2 \cdot Q_{s\varrho}\left(\frac{\delta n_\varrho'}{n_\varrho'} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right) = \left[\frac{h_\varrho - h_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}} - \frac{h_{\varrho+1} - h_\varrho}{d_\varrho}\right] h_\varrho M_\varrho .$$

Wenn man diesen Ausdruck für sämtliche k Flächen bildet und addiert, so erhält man schließlich unter Berücksichtigung von $h_0 = h_{k+1} = 0$

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{\varrho=1}^{k} h_\varrho^2 Q_{s\varrho}\left(\frac{\delta n_\varrho'}{n_\varrho'} - \frac{\delta n_\varrho}{n_\varrho}\right) &= \frac{h_1^2 M_1}{d_0} + \frac{h_k^2 M_k}{d_k} \\ &+ \sum_{\varrho=1}^{k-1} \frac{h_{\varrho+1} - h_\varrho}{d_\varrho}(h_{\varrho+1} M_{\varrho+1} - h_\varrho M_\varrho) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

als erste chromatische Bedingung und

$$\frac{h_1^2 M_1 l_1}{d_0} + \frac{h_k^2 M_k l_k}{d_k} + \sum_{\varrho=1}^{k-1} \frac{h_{\varrho+1} - h_\varrho}{d_\varrho} (h_{\varrho+1} M_{\varrho+1} l_{\varrho+1} - h_\varrho M_\varrho l_\varrho) = 0, \tag{19d}$$

als zweite chromatische Bedingung.

Ein wichtiges Ergebnis läßt sich sofort aus (18b) ablesen. Läßt man Luft und die gleiche Glasart immer abwechseln, so werden sämtliche M einander gleich, und (18b) kann geschrieben werden:

$$\frac{h_1^2}{d_0} + \frac{h_k^2}{d_k} + \sum_{\varrho=1}^{k-1} \frac{(h_{\varrho+1} - h_\varrho)^2}{d_\varrho} = 0. \tag{22}$$

Da die Dicken d_1 bis d_{k-1} des Systems positiv sind, so ist diese Gleichung nur zu erfüllen, wenn $d_0 = -s_1$ und $d_k = s_k'$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Nimmt man also z. B. s_1 als negativ an, d. h. nach unseren Festsetzungen am Schluß von Ziff. 29, daß der Gegenstand vor der Linsenfolge liegt, so muß auch s_k' negativ sein, wenn (22) erfüllt sein soll; das Bild des Gegenstandes ist demnach nicht hinter der Linsenfolge auffangbar; eine solche Linsenanordnung daher z. B. nicht als photographisches Objektiv brauchbar, wohl aber z. B. als Okular mit virtuellem Bild.

79. Wirkung der Farbenlängsabweichung und chromatischen Vergrößerungsdifferenz auf das Bild. Hebung dieser Fehler je nach dem Verwendungszwecke der Linsenfolge. Die Frage nach der Bildverschlechterung durch Farbfehler, nach der besten chromatischen Korrektion, nach der besten Einstellung unter Berücksichtigung der Farbenerscheinungen usw., sind wie die ähnlichen Fragen, die infolge sphärischer Aberrationen auftreten (vgl. Ziff. 59), hinsichtlich ihrer letzten Entscheidung der physikalischen Optik zu überlassen. Es ist daher nur als rohe Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse aufzufassen, wenn man z. B. als Farbenseitenabweichung c_k den Radius des Zerstreuungskreises definiert, in dem das aus Strahlen der zweiten Farbe bestehende, von einem Achsendingpunkt stammende Bündel von der im Bildort der ersten Farbe achsensenkrechten Ebene geschnitten wird. Es ist daher

$$c_k = u_k' \cdot \delta s_k' \tag{23}$$

worin u_k' der halbe bildseitige Öffnungswinkel ist.

Ist das optische System nur teilweise achromatisierbar, d. h. ist nur (18) oder nur (19) erfüllbar, so kommt es selbstverständlich ganz auf den Verwendungszweck an, welche Achromasie vorzuziehen ist. Liegt z. B. der Gegenstand genügend genau im vorderen Brennpunkt (für die beiden in Frage kommenden Farben wird dieser im allgemeinen nicht ganz an derselben Stelle liegen), so wird, wenn die Brennweiten achromatisiert sind, wegen der für beide Farben geltenden Beziehung $h/\mathrm{tang}\,w' = f$ w' für beide Farben so gut wie gleich sein. Es erscheinen demnach bei visuellem Gebrauche des Instrumentes die verschiedenfarbigen Bilder unter gleichem Sehwinkel, sie kommen also beim Betrachten mit dem Auge zur Deckung. Daher können Okulare oder Lupen, auch wenn die Bildlagen für verschiedene Farben nicht zusammenfallen, praktisch farbfreie Bilder liefern.

Wenn vollständige Achromasie herbeigeführt ist, so daß Bildlage und Größe gleich werden, so besteht diese Achromasie selbstverständlich zunächst nur für eine ganz bestimmte Lage bzw. Vergrößerung; mit dem Wandern des Gegenstandes wird im allgemeinen die Beseitigung der Farbfehler wieder hinfällig; nur wenn, das verlangen offenbar die in Abschnitt B dargelegten Gesetzmäßigkeiten der Gaussschen Abbildung, deren vier Grundpunkte, das sind die beiden Brenn-

punkte und Hauptpunkte, für zwei Farben sämtlich zusammenliegen, ist für jede Lage des Dinges völlige Achromasie des Bildes gewährleistet; man nennt dann die Linsenfolge **stabil achromatisch**.

Um die bisher gefundenen allgemeinen Ergebnisse auch durch wirklich vorkommende Zahlenwerte zu erläutern, wird die folgende Zusammenstellung in Tafel 2 gegeben, zu deren näherem Verständnis zunächst noch kurz auf die Bedeutung der durch μ definierten Werte eingegangen sei. Bei der Kombination aus zwei dünnen, sich berührenden Linsen sahen wir oben, daß für positive μ-Werte zur Achromasie die Brechkräfte der beiden Einzellinsen entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen und wir sahen weiter, daß im allgemeinen bei Hebung der Farbfehler für zwei Farben diese nicht auch für sämtliche übrige Farben des Spektrums gehoben sind; dazu müßten nämlich die Spektren der beiden Glasarten einander geometrisch ähnlich sein; in Wirklichkeit besteht im allgemeinen ein verwickelterer Zusammenhang zwischen den Dispersionen zweier Glasarten. Der Regelfall ist demnach vielmehr der, daß alle Strahlen anderer Wellenlänge als die beiden, die für die Farbenkorrektion ausgewählt sind, andere Schnitt- und Brennweiten haben; diese Erscheinung nennt man **sekundäres Spektrum**, über das noch gesprochen werden wird.

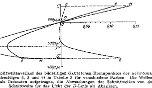


Abb. 95. Schnittweitenverlauf des bildseitigen Gaussschen Brennpunktes der achromatischen Flächenfolgen 6, 8 und 11 in Tabelle 2 für verschiedene Farben. Die Wellenlängen sind als Ordinaten aufgetragen, die Abweichungen der Schnittweiten von der Schnittweite für das Licht der D-Linie als Abszissen.

Es ist nun notwendig, je nach dem Verwendungszweck des optischen Instrumentes das Farbenpaar, für das achromatisiert werden soll, auszuwählen. Die für das Auge wirksamsten Strahlen liegen etwa in dem durch die Fraunhoferschen Linien C und F begrenzten Gebiet des Spektrums. Um also für die diesem Bereich entsprechenden Strahlen möglichst nahe beieinander liegende Bilder zu erhalten, kann man für C und F achromatisieren; die dazwischen liegenden Farbbilder weichen dann regelmäßig auch nicht sehr voneinander ab, besonders wenn gerade, wie in Abb. 95 bei Kurve 6 ersichtlich, ein flachverlaufender Extremwert der Schnittweiten zwischen C und F eintritt. Um also in unserem Falle zu achromatisieren, müßte $\mu = (n_G - 1)/(n_F - n_C)$ gesetzt werden. Dieser Wert ist der an früherer Stelle erwähnten Abbeschen Zahl ν sehr nahe gleich und daher findet man in der einschlägigen Literatur meist ν statt μ verwandt.

Die zum Bau für optische Instrumente zur Verfügung stehenden Glasarten haben ν-Werte etwa zwischen 25 und 70, ohne daß dieser Bereich lückenlos

erfüllt ist. Durch Bildung einer Linse aus mehreren Teillinsen ist natürlich die Möglichkeit gegeben, sowohl solche Lucken auszufüllen, als auch über die angegebenen Grenzen hinauszukommen, insbesondere sich auch Linsen mit negativen ν-Werten zu verschaffen. So werden z. B. Linsen verwandt, die aus zwei Teillinsen bestehen, deren mittlere Brechungszahlen n_d gleich oder nahezu fast gleich sind. Eine solche zusammengesetzte Linse hat die gleiche Wirkung, insbesondere denselben Bildfehler, für die mittlere Brechungszahl wie die Einzellinse gleicher Gestalt und gleicher mittlerer Brechungszahl. Durch eine derartige Kombination zweier Glasarten kann man z. B. den positiven Bestandteil

Tabelle 2

Nr.	Linsensystem			Bild-Schnittweiten für unendlich entfernten Achsendingpunkt			
				C	D	F	G'
1	$r_1 = 101{,}8$ $r_2 = -101{,}8$	$d_1 = 10$	$n_1 = n_2' = 1$ $n_2 = 3832$[1])	97,38	96,90	95,86	95,03
2	$r_1 = 121$ $r_2 = -121$	$d_1 = 10$	$n_1 = n_2' = 1$ $n_2 = 118$[1])	97,92	97,13	95,29	93,76
3	$r_1 = -126$ $r_2 = 126$	$d_1 = 10$	$n_1 = n_2' = 1$ $n_2 = 103$[1])	−103,96	−103,12	−101,17	−99,56
4	$r_1 = 121$ $r_2 = -30$ $r_3 = -121$	$d_1 = 9$ $d_2 = 1$	$n_1 = n_3' = 1$ $n_2 = 118$[1]) $n_3 = 2071$[1])	98,11	97,13	94,82	92,87
5	$r_1 = 121$ $r_2 = -10$ $r_3 = -121$	$d_1 = 9$ $d_2 = 1$	$n_1 = n_3' = 1$ $n_2 = 118$[1]) $n_3 = 2071$[1])	99,45	97,13	91,71	87,27
6	$r_1 = 104$ $r_2 = -8{,}25$ $r_3 = -104$	$d_1 = 9$ $d_2 = 1$	$n_1 = n_3' = 1$ $n_2 = 138$[1]) $n_3 = 3439$[1])	96,85	96,84	96,85	96,96
7	$r_1 = -58{,}0$ $r_2 = 47{,}68$ $r_3 = 561{,}67$	$d_1 = 3{,}3$ $d_2 = 9{,}2$	$n_1 = n_3' = 1$ $n_2 = 3039$[1]) $n_3 = 3964$[1])	−107,30	−107,08	−106,65	−106,39
8	$r_1 = 48{,}49$ $r_2 = -34{,}06$ $r_3 = -33{,}00$ $r_4 = -210{,}52$	$d_1 = 3{,}70$ $d_2 = 1{,}06$ $d_3 = 1{,}57$	$n_1 = n_3 = n_4' = 1$ $n_2 = 12034$[1]) $n_4 = 12738$[1])	94,17	94,06	93,95	93,98
9	$r_1 = \infty$ $r_2 = 10$ $r_3 = \infty$	$d_1 = 1$ $d_2 = 9$	$n_1 = n_3' = 1$ $n_2 = 2071$[1]) $n_3 = 118$[1])	−5887,9	∞	2251,8	1158,6
10	$r_1 = 21{,}52$ $r_2 = \infty$ $r_3 = -74{,}19$ $r_4 = 20{,}77$ $r_5 = -111{,}29$ $r_6 = 25{,}23$ $r_7 = -36{,}73$	$d_1 = 3{,}34$ $d_2 = 1{,}85$ $d_3 = 1{,}11$ $d_4 = 5{,}93$ $d_5 = 1{,}11$ $d_6 = 2{,}97$	$n_1 = n_3 = n_5 = n_7' = 1$ $n_2 = 2075$[1]) $n_4 = 2355$[1]) $n_6 = 2001$[1]) $n_7 = 3046$[1])	91,55	91,49	91,38	91,45
11	$r_1 = 18{,}09$ $r_2 = -38{,}83$ $r_3 = -36{,}68$ $r_4 = 38{,}74$ $r_5 = -10{,}40$ $r_6 = -9{,}43$ $r_7 = -17{,}13$	$d_1 = 3{,}33$ $d_2 = 0{,}13$ $d_3 = 0{,}83$ $d_4 = 23{,}91$ $d_5 = 1{,}89$ $d_6 = 0{,}75$	$n_1 = n_3 = n_5 = n_7' = 1$ $n_2 = 15656$[1]) $n_4 = 10799$[1]) $n_6 = 5916$[1]) $n_7 = 3296$[1])	49,79	49,65	49,50	49,61

[1]) Diese Zahlen sind die Schmelznummern von optischen Gläsern, deren Brechungszahlen aus Tabelle 1 in Ziff. 74 feststellbar sind.

einer positiven Doppellinse aus einer Glasart herstellen, deren Dispersion stärker ist als die Dispersion des Glases des negativen Gliedes; man kann auf diese Weise gewissermaßen ν-Werte, die kleiner als 25 sind, erhalten. Eine Doppellinse der geschilderten Art nennt man hyperchromatisch.

Die Linse (1) unserer Zusammenstellung heißt chromatisch unterkorrigiert; überhaupt werden alle optischen Systeme, deren paraxialen Schnittweitenwerte für die verschiedenen Farben den gleichsinnigen Gang wie die Schnittweiten einer dünnen Sammellinse haben, als chromatisch unterkorrigiert bezeichnet, während Linsenfolgen mit entgegengesetztem Verlauf der Schnittweiten chromatisch überkorrigiert heißen.

Linse (2) ist ebenfalls chromatisch unterkorrigiert, aber in erheblich höherem Maße wie Linse (1); das beruht auf Verwendung des Flintglases 118, das, wie man aus der Tafel 1 ersieht, eine wesentlich größere Dispersion hat, als das in Linse (1) benutzte Borkron 3832.

Linse (3) ist ein Beispiel für chromatische Überkorrektion. Linsenfolgen (4) und (5) sind als hyperchromatisch zu bezeichnen, und zwar (5) in besonders hohem Grade. Den Schnittweitenverlauf der vier Folgen (1), (2), (4) und (5) für die verschiedenen Farben ersieht man aus beistehender Abb. 96.

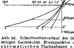


Abb. 96. Schnittweitenverlauf des bildseitigen Gaussschen Brennpunktes der chromatischen Flächenfolgen 1, 2, 4 und 5 in Tabelle 2 für verschiedene Farben. Die Wellenlängen sind als Ordinaten aufgetragen, die Abweichungen der Schnittweiten von der Schnittweite für das Licht der D-Linie als Abszissen.

(6) ist eine Zweilinsenfolge, die für C und F chromatisch korrigiert ist, also „optisch achromatisiert"; (7) ist eine im Verhältnis zu (3) schwach überkorrigierte Anordnung.

Die Systeme (8), (10) und (11) zeigen photographische oder aktinische Achromasie; die Schnittweiten für D und G' fallen nahezu zusammen. Bei photographischen Aufnahmen wird in der Regel mit dem Mattscheibenbild scharf eingestellt; es ist also dafür Sorge zu tragen, daß das Bild der optisch wirksamsten Strahlen und das Bild der Strahlen, für die die photographische Emulsion besonders empfindlich ist, an der gleichen Stelle liegen, und das wird eben mit der Achromatisierung für D und G' erreicht. Die optische Korrektion für C und F oder die photographische für D und G' sind also die für optische Werkzeuge hauptsächlich in Betracht kommenden Korrektionslagen.

Für besondere Zwecke wird man gelegentlich auch die Bilder anderer Farben zusammenlegen. Bei astrophotographischen Instrumenten z. B. erhält man ein besonders starkes Zusammendrängen der Bilder der chemisch wirksamsten Strahlen, in dem etwa die Schnittweiten für F und Hg gleichgemacht werden. Scharfeinstellung mit der Mattscheibe ist für solche Instrumente nicht nötig, da ja die einmalige richtige Ermittlung der Lage der Brennebene genügt, im Hinblick auf die stets unendlich entfernten Sterne. Eine solche ganz rein aktinisch korrigierte Anordnung würde bei visuellem Gebrauch ein recht farbiges Bild geben. Durch Einfügung eines mehr oder weniger strengen Filters in den Strahlengang könnte ein mehr oder weniger der Einfarbigkeit sich näherndes und damit deutliches Bild erhalten werden.

Die Folge (9) unserer Zusammenstellung ist gewissermaßen eine chromatische Planparallelplatte; für Licht der D-Linie ist sie afokal, während sie für andere

Farben Brechkräfte besitzt, z. B. für G' schon etwa $+0,9$ Dioptrie. Das Prinzip der schon früher bekannten chromatischen Planparallelplatte ist neuerdings bei den Görz-Mollarlinsen verwandt worden. Diese Linsen werden vor ein photographisch korrigiertes Objektiv, das auf den Aufnahmegegenstand scharf eingestellt ist, nachträglich angebracht. Ist die Mollarlinse etwa für G' afokal, so wird durch ihr Hinzufügen zum richtig eingestellten Objektiv das Bild der photographisch wirksamsten Strahlen unverändert liegen bleiben; für die übrigen Farben werden aber ziemlich erhebliche Abweichungen eingeführt. Die mit einer solchen Anordnung: Mollarlinse + photographisches Objektiv gewonnenen Bilder zeigen infolgedessen keine genaue Schärfe, sondern vielmehr eine sog. „künstlerische Unschärfe mit erhöhter Tiefenerstreckung des Bildes".

80. Das sekundäre Spektrum. Die Hebung der Farbenabweichung für zwei verschiedene Farben hat, wie wir bereits sahen, nicht die Beseitigung der betreffenden Abweichungen für andere Farben zur Folge; es bleiben im Regelfall chromatische Restfehler, sekundäres Spektrum genannt. Seine Untersuchung mag hier allgemein für den praktisch wichtigsten Fall der Längsabweichung durchgeführt werden. Sind n und $n + \delta n$ die Brechungszahlen der beiden Farben, für die Achromasie besteht, so pflegt man δn die Grunddispersion zu nennen. Bezeichnet $n + \delta\bar{n}$ die Brechungszahl einer dritten Farbe, deren sekundäre Farbenlängsabweichung zu bestimmen ist, so wird $\delta\bar{n}$ die Teildispersion genannt. Ist weiter $(n-1)/\delta n = \mu$, so wird $\bar{\mu} = (n-1)/\delta\bar{n} = \mu/\vartheta$, wenn $\vartheta = \delta\bar{n}/\delta n$ als relative Teildispersion eingeführt wird. Ist s_k' die bildseitige Schnittweite der beiden Farben, für die Achromasie besteht, so sei $\bar{s}_k'$ die entsprechende Größe für die Brechungszahl $n + \delta\bar{n}$. Wenn nun der Achsendingpunkt farbfrei und erstes und letztes Medium Luft, also $n_1 = n_k' = 1$ ist, so erhält man das sekundäre Spektrum $\delta\bar{s}_k'$ nach (18) und (18b).

$$\left.\begin{aligned}\delta\bar{s}_k' &= -\left(\frac{s_k'}{h_k}\right)^2 \sum_{\varrho=1}^{k} h_\varrho^2 Q_{s\varrho}\left(\frac{\delta\bar{n}_\varrho'}{n_\varrho'} - \frac{\delta\bar{n}_\varrho}{n_\varrho}\right)\\ &= \left(\frac{s_k'}{h_k}\right)^2 \cdot \left[\frac{h_1^2}{d_0}\bar{M}_1 + \frac{h_k^2}{d_k}\bar{M}_k + \sum_{\varrho=1}^{k-1}\frac{h_{\varrho+1}-h_\varrho}{d_\varrho}\left(h_{\varrho+1}\bar{M}_{\varrho+1} - h_\varrho\bar{M}_\varrho\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

für eine aus k zentrierten Kugelflächen bestehende Folge; dabei ist:

$$\bar{M}_\varrho = \frac{\dfrac{\delta\bar{n}_\varrho'}{n_\varrho'} - \dfrac{\delta\bar{n}_\varrho}{n_\varrho}}{\dfrac{1}{n_\varrho'} - \dfrac{1}{n_\varrho}}.$$

$\delta\bar{s}_k'$ verschwindet mit $\delta s_1'$, d. h. das sekundäre Spektrum ist gehoben, wenn die relativen Teildispersionen ϑ_ϱ für sämtliche Linsen dieselben sind, was wir bereits im Sonderfall zweier dünner, einander berührender Linsen oben sahen. Es erhebt sich nun die Frage, wann das sekundäre Spektrum zu beseitigen ist, da die eben aufgestellte Forderung

$$\delta\bar{n}_\varrho = \vartheta \cdot \delta n_\varrho,$$

worin ϑ eine Konstante ist, im allgemeinen nicht erfüllt ist. Zu ihrer Beantwortung nehmen wir hier an, daß n_ϱ bzw. $n + \delta n_\varrho$ die Brechungszahlen der C- bzw. F-Linie sind, $n_\varrho + \delta\bar{n}_\varrho$ sei die Brechungszahl der G'-Linie. Für die älteren Glasarten, vorwiegend Silikatgläser, gilt die genäherte Beziehung:

$$\delta\bar{n}_\varrho = 1{,}674\,\delta n_\varrho - 0{,}0018\,(n_\varrho - 1), \tag{25}$$

während es neuere Borosilikatgläser gibt, für die sich die genäherte Gleichung:

$$\delta \bar{n}_\varrho = 1{,}667\, \delta n_\varrho - 0{,}0018 (n_\varrho - 1) \tag{25a}$$

aufstellen laßt. Untersucht man bei einer beliebigen dioptrischen Folge, die nur aus Glasarten, für die z. B. (25) gilt, besteht, das sekundare Spektrum, so erhält man dieses aus (24) innerhalb des Gültigkeitsbereiches unserer Differenzialausdrücke unter Benutzung von $\bar{M}_\varrho = 1{,}674\, M_\varrho + 0{,}0018$ als

$$\delta \bar{s}_k' = \left(\frac{s_k'}{h_k}\right)^2 \cdot \left\{ 1{,}674 \left[\frac{h_1^2}{d_0} M_1 + \frac{h_k^2}{d_k} M_k + \sum_{\varrho=1}^{k-1} \frac{h_{\varrho+1} - h_\varrho}{d_\varrho} (h_{\varrho+1} M_{\varrho+1} - h_\varrho M_\varrho) \right] \right.$$
$$\left. + 0{,}0018 \left[\frac{h_1^2}{d_0} + \frac{h_k^2}{d_k} + \sum_{\varrho=1}^{k-1} \frac{(h_{\varrho+1} - h_\varrho)^2}{d_\varrho} \right] \right\}.$$

Die erste eckige Klammer verschwindet, wenn für C und F Achromasie besteht; die zweite mit 0,0018 multipliziert, gibt dann das sekundäre Spektrum. Benutzt man weiter die an Gleichung (22) geknüpften Bemerkungen, so ergibt sich, daß eine beliebige Linsenfolge aus alten Glasarten, oder überhaupt aus lauter Glasarten, für die die Beziehung $\bar{M}_\varrho = A M_\varrho + B$, worin A und B Konstante sind, gilt, von einem greifbaren Ding niemals ein greifbares Bild erzeugen kann, bei dem das sekundäre Spektrum verschwindet; um Abbildungssysteme mit greifbarem Ding und Bild ohne sekundares Spektrum zu erhalten, dürfen die verwandten Glasarten, dargestellt durch die Punkte einer Ebene, die auf ein ebenes rechtwinkliges Koordinatenkreuz bezogen sind, dessen Achsen den ν- und ϑ-Werten entsprechen, nicht sämtlich auf einer Geraden liegen[1]). Schreibt man nämlich (25) allgemein: $\delta \bar{n}_\varrho = \alpha\, \delta n_\varrho + \beta (n_\varrho - 1)$, wobei α und β Konstante sind, so folgt

$$\frac{\delta \bar{n}_\varrho}{\delta n_\varrho} = \vartheta_\varrho = \alpha + \beta \nu\,,$$

da ja $(n_\varrho - 1)/\delta n_\varrho$ nach unseren Festsetzungen mit ν nahezu übereinstimmt.

Die Kurven der Abb. 95 zeigen den Verlauf des sekundären Spektrums; Linsenfolge (6) ist für C und F achromatisiert, (8) und (11) sind für photographische Zwecke bestimmt, für die ja die D- und G'-Bilder zusammengelegt werden sollen; das ist bei (8) und (11) nicht genau geschehen, vielmehr erkennt man durch Extrapolation der Kurvenwerte, daß die Schnittweiten für D und eine etwas kleinere Wellenlänge als G' gleich sein werden.

Die Folge (6) hat in dem Bereich $C - F$, für dessen Grenzen es achromatisiert ist, so gut wie gar kein sekundäres Spektrum; das hat seinen Grund darin, daß die relativen Teildispersionen der in Linsenfolge (6) befindlichen beiden Glasarten in dem genannten Bereich fast gleich sind, wie aus der Tabelle 1 (letzte Zeile) zu ersehen ist; man könnte also bei dieser für C und F achromatisierten Linsenfolge von gehobenem oder wenigstens stark vermindertem sekundären Spektrum sprechen.

Damit sind die Erscheinungen der Farbenabweichungen, soweit sie von der GAUSSschen Abbildungstheorie umfaßt werden, kurz skizziert und Methoden gezeigt, wie sie zu untersuchen sind. Nochmals sei darauf hingewiesen, daß dort, wo Differenzenausdrücke verwendet sind, die Ergebnisse genau sind; dort, wo man Differentiale benutzt, kann in der Regel nur von Näherungen gesprochen werden. Diese geben aber meist über die verschiedenen Möglichkeiten eine gute Übersicht. Die eigentliche genaue Bestimmung der Farbfehler geschieht

[1]) A. KÖNIG in „Die Theorie der optischen Instrumente", herausgeg. von M. v. ROHR, S. 359ff. Berlin: Julius Springer 1904.

ja in der Praxis sowieso vorwiegend durch numerische Durchrechnung unter sukzessiver, von Fläche zu Fläche erfolgender Verwendung der Nullstrahlbeziehung

$$s_0' = \frac{n'}{\frac{n}{s_0} + \frac{n'-n}{r}}$$

für die einzelnen Farben.

β) Die chromatischen Variationen der sphärischen Abweichungen.

Wie die Abbildung des fadenförmigen Raumes um die Achse von den Brechungszahlen der Linsen, d. h. also auch von den Farben der Lichtstrahlen abhängt, so gilt das natürlich auch von der Erweiterung des genannten Abbildungsbereiches, die durch die SEIDELschen Entwicklungen gegeben wird. Solange man sich aber überhaupt auf Fehler dritter Ordnung beschränkt, genügt es natürlich im allgemeinen vollkommen, die Farbenabweichungen nur soweit zu berücksichtigen, als sie durch die Formeln der GAUSSschen Dioptrik, die den Beziehungen des vorhergehenden Abschnittes α) zugrunde liegen, berechnet werden; denn in der Regel sind die mit der Änderung der Lichtwellenlänge verbundenen Variationen der SEIDELschen Fehlerausdrücke klein gegen ihre eigenen Beträge, sind also zu vernachlässigen, solange wenigstens ein Abbildungsvorgang durch die SEIDELsche Annäherung ausreichend dargestellt wird. Anders liegen dagegen die Verhältnisse, wenn die Abbildung durch weit geöffnete Bündel erfolgt oder ein ausgedehntes Bildfeld umfaßt.

Ehe wir einiges über die dabei auftretenden Farbenabweichungen sagen, möge aber noch eine kurze Bemerkung über die Seite 133 aus den SEIDELschen Ausdrücken abgeleitete Petzvalbedingung und die Erfüllung der für dünne Linsen gültigen Achromasiebedingung (7a) des vorigen Abschnittes α) gemacht werden. Schreibt man für dünne Linsen die erstere $\sum \varphi/n = 0$ und die zweite $\sum \varphi/\nu = 0$, wobei die Summe also über die Anzahl der Linsen zu erstrecken ist, so erkennt man, daß die gleichzeitige Befriedigung beider Bedingungen von den n- und ν-Werten der Glasarten des Systems abhängt. Man kann z. B. für zweiteilige Fernrohrobjektive die Werte der Funktion $\sum \varphi/n$ für verschiedene Glassorten von HARTING[1]) angegebenen Tafeln entnehmen.

81. Chromatische Differenz der sphärischen Aberrationen. Wenden wir uns nun den Farbfehlern zu, die bei über die Grenzen der GAUSSschen und SEIDELschen Abbildung hinausgehenden Bündelöffnungen oder Bündelneigungen vorkommen, so wären also hier die chromatischen Variationen der sphärischen Abweichungen, der Koma, des Astigmatismus bzw. der Bildfeldwölbung und der Verzeichnung, zu untersuchen.

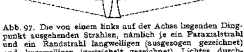


Abb. 97. Die von einem links auf der Achse liegenden Dingpunkt ausgehenden Strahlen, nämlich je ein Paraxialstrahl und ein Randstrahl langwelligen (ausgezogen gezeichnet) und kurzwelligen (gestrichelt gezeichnet) Lichtes durchschreiten die Flächenfolge. Die Paraxialstrahlen beider Farben vereinigen sich in einem Achsenpunkte, während die Randstrahlen verschiedene Schnittweiten haben.

Wir beschränken uns hier im wesentlichen auf die erste dieser Farbenabweichungen; man nennt sie chromatische Differenz der sphärischen Aberrationen. Ist z. B. bei der Abbildung eines Achsenpunktes für eine bestimmte

[1]) H. HARTING, ZS. f. Instrkde. Bd. 5, S. 140—141. 1899.

Farbe sphärische Korrektion herbeigeführt, so besteht in der Regel für eine Farbe größerer Wellenlänge Unter- und für eine solche kleinerer Wellenlänge Überkorrektion.

In Abb. 97 ist eine Linsenfolge gezeigt, bei der die Nullstrahlschnittweiten für Rot und Blau gleich sind; dabei liegt der Schnittpunkt des Randstrahles mit der Achse für Rot näher nach der Linse zu, der für Blau hingegen weiter fort. In Abb. 98 haben die Randstrahlen für Blau und Rot gleiche Schnittweiten; der Bildpunkt des Nullstrahles liegt für Blau näher an der Folge und der für Rot weiter von ihr entfernt.



Abb. 98. Die von einem links auf der Achse liegenden Dingpunkt ausgehenden Strahlen, nämlich je ein Paraxialstrahl und ein Randstrahl langwelligen (ausgezogen gezeichnet) und kurzwelligen (gestrichelt gezeichnet) Lichtes durchschreiten die Flächenfolge. Die Paraxialstrahlen beider Farben haben verschiedene Schnittweiten, während die Randstrahlen sich in einem Achsenpunkte vereinigen.

Um sich ein anschauliches Bild über den sphärochromatischen Zustand eines Systems zu verschaffen, kann man etwa entsprechend den Abb. 70 bis 74 den Verlauf der sphärischen Aberrationen für verschiedene Farben auf ein und dasselbe Koordinatenkreuz beziehen; einen besseren Einblick erhält man aber, wenn man die für die Darstellung der sphärochromatischen Abweichung von v. Rohr[1]) eingeführte Isoplethenmethode benutzt. Ist $s_{\lambda,h}$ die Schnittweite, die zu der Wellenlänge λ und der Einfallshöhe h gehört, so ist offenbar $s_{\lambda,h} = \varphi(\lambda, h)$ eine gewisse Funktion von λ und h für eine bestimmte Linsenfolge. Hat diese für eine Wellenlänge, es sei z. B. die der D-Linie entsprechende gewählt, die Nullstrahlbrennweite $f_{D,0} = 100$ mm und die Nullstrahlschnittweite $s_{D,0}$, so ist auch die Differenz $d_{\lambda,h} = s_{\lambda,h} - s_{D,0} = \varphi(\lambda, h) - s_{D,0}$ eine solche Funktion, deren Werte geometrisch durch eine Fläche dargestellt werden. Für $d_{\lambda,h} =$ konst. erhält man ebene, zur λ, h-Ebene parallele Schnitte durch diese Fläche. Projiziert man diese in die λ, h-Ebene, so bekommt man für je einen ausgewählten $d_{\lambda,h}$-Wert je eine Kurve. In Abb. 99 ist die v. Rohrsche Darstellung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberrationen eines Petzvalschen Porträtobjektivs 1:3, 4. $f_{D,0} = 100$ mm angegeben. Die an die Kurven geschriebenen Zahlen sind die zugehörigen $d_{\lambda,h}$-Werte in

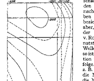


Abb. 99. Darstellung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberrationen nach M. v. Rohr[1]) für ein Petzvalsches Porträtobjektiv, 1:3,4 $f_{D,0} = 100$ mm. Die Abszissen ergeben die Wellenlängen, gekennzeichnet durch die Fraunhoferschen Linien C, D, F, G'. Die Ordinaten sind die 4fach vergrößerten Einfallshöhen. Isoplethendarstellung für die Schnittweitendifferenzen gegen $s_{D,0}$ in tausendstel Millimeter von 0,050 zu 0,050 mm fortschreitend.

[1]) M. v. Rohr, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, S. 66ff. Berlin: Julius Springer 1899.

tausendstel Millimetern. Die Häufung der Kurven nach dem violetten Ende des Spektrums hin ist ein Zeichen dafür, daß dort die sphärische und chromatische Korrektion schlechter wird.

Für welche Farbe sphärisch und für welche Zone chromatisch zu korrigieren ist, hängt von dem Verwendungszweck der Linsenfolge ab und ist endgültig nur auf dem physikalischen Boden der Optik zu entscheiden[1].

Die chromatische Differenz der sphärischen Aberrationen spielt bei Mikroskopobjektiven wegen deren großer wirksamer Apertur eine besondere Rolle; bei Fernrohrobjektiven hingegen, ein solches mit Korrektion der sphärochromatischen Abweichungen ist zuerst von GAUSS[2] angegeben worden, wird die Erfüllung der Gaußbedingung als weniger wichtig betrachtet; bei diesen Linsenfolgen ist es wesentlicher, das sekundäre Spektrum zu vermindern. Bei Mikroskopobjektiven beseitigt man meist die chromatische Differenz der sphärischen Aberrationen für eine Zone zwischen Mitte und Rand. Ebenso wird nur bei starken Mikroskopobjektiven die Farbenabweichung des Sinusverhältnisses von Bedeutung. ABBE hat eine Linsenfolge, die für zwei Farben aplanatisch ist, und ein gehobenes sekundäres Spektrum hat, als **apochromatisch** bezeichnet. Der Begriff des Apochromaten wird allerdings oft erweitert benutzt; so findet man z. B. Linsenfolgen mit gehobenem oder vermindertem sekundären Spektrum ebenfalls als Apochromate bezeichnet. In der Photographie werden z. B. für Reproduktionen (Dreifarbendrucke) Apochromatobjektive benutzt, die in der Regel auch nicht der strengen ABBEschen Begriffsbestimmung voll genügen.

82. Die Farbenabweichung der Bildgröße. Nimmt man z. B. eine stabil achromatische Folge als vorliegend an, bei der also die Haupt- und Brennpunkte der GAUSSschen Dioptrik für die beiden Farben, für die Achromasie besteht, zusammenfallen, so kann durch die Variation der Verzeichnung mit der Farbe bei ausgedehnterem Bildfeld die für die einzelnen Farben verschiedene Bildgröße störend werden. Es empfiehlt sich dann, die Verzeichnung für die beiden Farben so zu bemessen, daß die Bildgrößenunterschiede über das benötigte Bildfeld hin möglichst klein bleiben, für einen mittleren Bildwinkel sogar verschwinden.

Beispielsweise sei hier besonders auf die Wirkung einer Planparallelplatte in konvergentem oder divergentem Strahlengang aufmerksam gemacht; sie kann bei erheblicher Schiefe der abbildenden Bündel, d. h. der Hauptstrahlen, gegen die Achse recht merkliche Verzeichnungsbeträge einführen. Ist nämlich d die Dicke und n die Brechungszahl der Platte und i der Neigungswinkel eines Hauptstrahles gegen die Achse, so beträgt dessen Parallelverschiebung v, wenn die Platte achsensenkrecht angeordnet ist, $v = d(\tan i - \tan i')$, wobei $\sin i' = \frac{\sin i}{n}$ ist.

Bei Benutzung von Farbfilterküvetten z. B., die ja meist eine durchaus nicht unbedeutende Dicke haben, ist für die Herstellung von Dreifarbenreproduktionen, bei denen eine gut übereinstimmende Größe der drei Farbbilder nötig ist, darauf zu achten, daß jener Betrag v natürlich mit der Farbe variiert.

[1] K. STREHL, ZS f. Instrkde. 1897, S. 50ff., 77ff., 168ff.; 1903, S. 210ff.

[2] C. F. GAUSS, Werke Bd. V, S. 504–508, 2. Abdruck, Göttingen 1877.

d) Linsenfolgen mit nichtsphärischen Flächen.

Von
H. Boegehold, Jena.

83. Achsensymmetrische Flächenfolgen. Die Gaussische Theorie der Abbildung ist völlig die nämliche wie bei Kugelflächen, statt der Halbmesser der einzelnen Flächen sind ihre Krümmungshalbmesser in der Achse einzusetzen. Die Durchrechnungsformeln bei der trigonometrischen Rechnung, sowohl wie die Summenformeln bei der Theorie nach Seidel, Kerber, Schwarzschild sind durch Zusatzglieder zu ändern. Die Durchrechnungsformeln sind allgemein schon von J. F. W. Herschel[1]) angegeben worden. Es ist die Gleichung der Meridiankurve einer Fläche

$$y = f(x)\,, \tag{1}$$

wo die Achse der Folge als X-Achse gewählt sei, oder in Polarkoordinaten

$$R = f(\varphi)\,; \tag{1a}$$

hier ist φ der Winkel des Fahrstrahls mit der Achse (die Anomalie), R der zugehörige Radiusvektor. Wie man auch den Koordinatenanfang wählen mag, die Gleichung des durch u und s gegebenen einfallenden Strahles wird (Abb. 100)



Abb. 100 Zur Brechung an einer nichtsphärischen Umdrehungsfläche. SO ist die Achse, BO der einfallende Strahl, C der (willkürliche) Koordinatenanfang, BC' die Normale im Flächenpunkte B. $BC = R$, $SO = s$, $CS = x_0$ (in der Zeichnung negativ). Der gebrochene Strahl ist nicht gezeichnet.

$$y = -(x - x_0 - s)\,\mathrm{tg}\,u\,, \tag{2}$$

wo x_0 die Koordinate des Flächenscheitels ist, oder in Polarkoordinaten

$$R = (s + x_0)\sin u/\sin(\varphi - u)\,. \tag{2a}$$

Aus (1) und (2) oder (1a) und (2a) ist durch algebraische Auflösung oder durch ein Näherungsverfahren x, y; φ, R für den Einfallspunkt B zu bestimmen. Sodann ist der Winkel ψ, den die Flächennormale in B mit der Achse bildet, gegeben durch

$$\mathrm{tg}\,\psi = -dx/dy \tag{3}$$

oder

$$\mathrm{tg}(\psi - \varphi) = -R'/R\,, \tag{3a}$$

wo $R' = dR/d\varphi$ ist. Weiter wird

$$i = \psi - u\,, \tag{4}$$

$$\sin i' = n\sin i/n'\,, \tag{5}$$

$$u' = \psi - i'\,, \tag{6}$$

$$s' = x - x_0 + y\,\mathrm{ctg}\,u' \tag{7}$$

oder

$$s' = -x_0 + R\sin(\varphi - u')/\sin u'\,. \tag{7a}$$

Hiermit ist die sphärische Abweichung und durch $\sin u'/\sin u$ die Abweichung von der Sinusbedingung festzustellen. Bei einer Folge mehrerer Flächen hat man diese Formeln für jede anzuwenden oder, wenn ein Teil Kugelflächen sind, zwischen ihnen und (2) bis (7) Ziff. 51 entsprechend zu wechseln, der Übergang von einer Fläche zur anderen bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

[1]) J. F. W. Herschel, Vom Licht. Stuttgart und Tübingen: Cotta 1831, Nr. 109 (das englische Werk 1828 und 1849, genauer Titel s. bei Czapski-Eppenstein).

Für die Berechnung des Astigmatismus ist vom Blendenorte auszugehen, und die Hauptstrahlen sind, wie eben angegeben, zu rechnen.

Für jeden Punkt außerhalb der Achse folgt aus Symmetriegründen, daß die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der brechenden Fläche zum Meridianschnitte und dem dazu senkrechten Schnitte gehören, und daß für den letztgenannten, den Sagittalschnitt, gilt:

$$r_t = B\,C' = R \sin\varphi/\sin\psi. \tag{8}$$

Für den meridionalen oder tangentialen Krümmungsradius ergeben die Lehrbücher der Geometrie

$$r_f = (R^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}/(R^2 + 2R'^2 - R R''), \tag{9}$$

wo $R'' = d^2R/d\varphi^2$ ist.

An die Stelle der Formeln (6) und (7) Ziff. 28 tritt sodann

$$n'/f' = n/f + (n'\cos i' - n\cos i)/r_f. \tag{10}$$

$$n'\cos^2 i'/t' = n\cos^2 i/t + (n'\cos i' - n\cos i)/r_t. \tag{11}$$

Da auch die Übergangsformeln dieselben sind wie bei einer Folge von Kugelflächen, so ist hiermit die Rechnung erledigt.

Für die Bestimmung der Verzeichnung ist das Verfahren bei Kugelflächen ohne weiteres anzuwenden.

Man wird versuchen, durch passende Wahl des Anfangspunktes C die Rechnung zu vereinfachen. Ist der Radiusvektor der Meridiankurve (1a) durch eine Taylorsche Reihe darstellbar, so folgt aus der Symmetrie ohne weiteres, daß diese die Form hat

$$R = r + r_2\varphi^2 + r_4\varphi^4 + r_6\varphi^6 + \cdots$$

Legt man nun den Pol C in den zum Scheitel S gehörenden Krümmungsmittelpunkt, so wird $r = SC$, $r_2 = 0$. Statt nach φ pflegt man die Reihe nach dem Bogen des Krümmungskreises

$$l = r\varphi$$

fortschreiten zu lassen und setzt[1])

$$R = r + \sigma = r + \varkappa l^4 + \lambda l^6 + \cdots \tag{12}$$

In der Gleichung (2a) ist jetzt $x_0 = -r$ zu setzen; die Formeln für die Auflösung durch Näherung, wie die Gleichungen für die Krümmungshalbmesser vereinfachen sich mehr oder weniger, wenn man sich mit einer oder mit zwei Deformationskonstanten $\varkappa$, λ zufrieden geben kann. Eine andere Art der Vereinfachung bietet der Fall, daß sämtliche Flächen Kegelschnitte zu Meridiankurven haben[2]).

Für die Durchrechnung windschiefer Strahlen vgl. man die Arbeit von Linnemann[3]).

Die Reihenentwicklungen für Vorrechnungen lassen sich ebenso ableiten wie bei Folgen von Kugelflächen. Z. B. tritt an die Stelle der Formel (43), Ziff. 56

---

[1]) M. v. Rohr, Die Theorie der optischen Instrumente, S. 26, etwas abweichend S. 323. Berlin: Julius Springer 1904.

[2]) M. Lange, Durchrechnungsformeln für die Lichtbrechung an Kegelschnitten. ZS. f. Instrkde. Bd. 34, S. 273–281, 1914.

[3]) M. Linnemann, Über nicht-sphärische Objektive, § 6. Dissert. Göttingen 1905.

für die sphärische Abweichung nach der k-ten Fläche

$$\alpha'_{3k} = -\frac{s'_{3k}}{2n'_k}\sum_{\mu=1}^{k}\left(\frac{h_{3\mu}}{h_{0k}}\right)^4\left\{Q^2_{\mu s_0}\left(\Delta\frac{1}{n s_0}\right)_\mu + 8\varkappa_\mu \Delta n_\mu\right\}, \tag{13}$$

und in ähnlicher Weise sind die Formeln in Ziff. 71 zu ändern[1]).

In einfacheren Fällen kann man die Meridiankurve einer Fläche (oder mehrerer) zeichnen oder berechnen, wenn gewisse Anforderungen gestellt sind. Schon DESCARTES[2]) zeichnete Flächen, die einen Punkt scharf abbilden, und HUYGENS[3]) verallgemeinerte dies dahin, daß er Linsen angab, deren eine Fläche beliebig war, während die zweite so konstruiert wurde, daß die scharfe Abbildung eines Punktes zustande kam. Über die Anwendung auf Spiegelung vgl. man Kap. 2, Ziff. 113 und die dort angeführten Abhandlungen.

Nach ABBEs Entdeckung der Sinusbedingung war die Aufgabe gestellt, daß nicht nur ein Achsenpunkt scharf abzubilden war, sondern auch die Sinusbedingung zu erfüllen. Die Lösung für eine Linse mit zwei nichtsphärischen Flächen gab LINNEMANN[4]). R. STRAUBEL[5]) hat die Aufgabe in praktisch ausreichender Weise für eine Linse mit einer Kugelfläche und einer nichtsphärischen Fläche gelöst. Die Anwendung auf zwei spiegelnde Flächen — CASSEGRAINsches oder GREGORYsches Fernrohr — findet man bei K. SCHWARZSCHILD[6]), auch bei H. CHRÉTIEN[7]). Die Benutzung nichtsphärischer Flächen zur Erreichung eines großen, von Astigmatismus freien Bildfeldes ist bei starken Brillen (Katralgläsern) üblich (s. Kap. 2, Ziff. 85).

84. Zweifach symmetrische Flächenfolgen. Übersicht. Die Mittel sind durch zweifach symmetrische Flächen voneinander getrennt, die beiden aufeinander senkrechten Symmetrieebenen sind für alle Flächen dieselben; ein Teil der Grenzflächen kann auch achsensymmetrisch sein. Die Symmetrieebenen schneiden einander in einer Geraden, der Achse der Folge, die wohl von den im folgenden aufgeführten Achsen einzelner Flächen zu unterscheiden ist. Als Begrenzungsflächen kommen vor allem in Frage:

Zylinderflächen. Die Zylinderachse steht zur Achse der Folge senkrecht. Werden mehrere Zylinder verwandt, so müssen ihre Achsenrichtungen entweder alle zusammenfallen, oder zwei zueinander senkrechte Lagen haben.

Torische Flächen (s. Kap. 2, Ziff. 86), die durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, aber nicht durch den Mittelpunkt gehende Achse entstehen. Eine solche Fläche ist gekennzeichnet durch den Halbmesser des Kreises (Meridianradius r_m) und den Abstand der Drehachse vom Scheitel (Rotationsradius, Äquatorialradius r_a). Soll die aus solchen Flächen zusammengesetzte Folge zweifach symmetrisch (nicht aber achsensymmetrisch) sein, so

[1]) Die gesamten Gleichungen gibt M. v. ROHR, Die Theorie der optischen Instrumente (Berlin: Julius Springer 1904) auf S. 326; es ist zu beachten, daß $\varkappa$ dort den 4fachen Wert des hier im Texte gegebenen hat.

[2]) R. DESCARTES, Œuvres de Descartes VI. La dioptrique (79/228) 179/81; La géométrie (367/485) 424/40.

[3]) CHR. HUYGENS, Traité de la lumière. 1690. Deutsch: Abhandlung über das Licht: E. LOMMEL. Ostwalds Klassiker Nr. 20, 3. Aufl., Kap. VI. 1913.

[4]) M. LINNEMANN, Über nicht-sphärische Objektive. Dissert. Göttingen 1905.

[5]) C. ZEISS, Improvements in collective lenses with a deformed surface. E. P. 7144/09 v. 25. III. 09; acc. 27. V. 09.

[6]) K. SCHWARZSCHILD, Untersuchungen zur geometrischen Optik. II. Theorie der Spiegelteleskope. Göttinger Abh. 1905, N. F. Bd. 4, Nr. 2.

[7]) H. CHRÉTIEN, Le télescope de Newton et le télescope aplanétique. Rev. d'opt. Bd. 1, S. 13/22, 49/64, 1922. Bespr. von H. BOEGEHOLD, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 227—228. 1922.

müssen die Drehachsen zur Achse der Folge senkrecht stehen, ihre Richtungen aber entweder zusammenfallen oder zwei zueinander senkrechte Lagen haben.

Dreiachsige Flächen zweiter Ordnung. Für alle Flächen muß eine Achse mit der Achse der Folge zusammenfallen, auch die beiden anderen Achsenrichtungen müssen für alle Flächen dieselben sein.

Wie bei achsensymmetrischen Folgen kann auch hier zunächst ein Raum um die Achse der Folge untersucht werden, die Schnittpunkte mit ihr seien als Scheitel bezeichnet. Ferner sei vorausgesetzt, daß keiner der Scheitel auf eine Kante oder Spitze fällt.

Unter dieser Annahme ist die Achse der Folge im Scheitel überall die Flächennormale (folgt aus der Symmetrie). Man lege durch die Achse ein Ebenenbüschel, das Büschel der Normalschnitte für sämtliche Flächenscheitel. Die Krümmungshalbmesser der Schnittkurven werden sich von Ebene zu Ebene ändern, für jede Fläche aber werden der längste und der kürzeste Halbmesser, die beiden Hauptkrümmungsradien, zu den Symmetrieebenen gehören. Für eine Zylinderfläche sind sie ∞ und r (Zylinderradius), für eine torische Fläche r_m und r_a.

Der bequemeren Ausdrucksweise halber sollen im folgenden die Symmetrieebenen als wagerecht und senkrecht angenommen werden.

85. Die abbildbaren Linien und die Bildlinien. Strahlen, die in einer Symmetrieebene verlaufen, werden auch nach der Brechung in ihr verbleiben.

Geht man von einem Achsenpunkte O aus und betrachtet zunächst nur das in einer wagerechten Ebene verlaufende Büschel, so wird dieses offenbar ebenso gebrochen werden, als hätte man eine achsensymmetrische Folge, deren Flächenradien mit den Hauptkrümmungshalbmessern des wagerechten Schnittes $r_1, r_2 \ldots r_k$ übereinstimmen. Das Entsprechende gilt von dem in senkrechter Ebene verlaufenden Büschel, für das die Hauptkrümmungsradien des senkrechten Schnittes $R_1, R_2 \ldots R_k$ in Frage kommen. Die beiden astigmatischen Bildpunkte O' und O'' (vgl. Ziff. 28 und 90) sind also nach der Gaussschen Theorie zu erhalten, die Begriffe der Brennpunkte, Hauptpunkte ... Brennweiten lassen sich ohne weiteres auf den vorliegenden Fall anwenden, nur daß jeder doppelt, für das wagerechte und für das senkrechte Büschel, vorkommt. Strahlen, die von O, nicht in einer Symmetrieebene verlaufend, ausgehen, werden im allgemeinen die Achse nach der Brechung nicht schneiden. Wohl aber werden in diesem Falle, wie aus Ziff. 87 für $l = L = 0$ abzuleiten ist, alle Strahlen des astigmatischen Bündels bis auf Größen dritter Ordnung durch zwei auf der Achse und aufeinander senkrechte Gerade gehen; die eine geht durch O' und ist senkrecht, die andere geht durch O'' und ist wagerecht.

Denkt man sich nun durch O eine Dingfläche, beispielsweise eine achsensenkrechte Ebene, gelegt, so entsprechen jedem ihrer Punkte zwei Bildpunkte, der Ebene also zwei Bildflächen bei O' und O''; die Berührungsebenen in O' und O'' stehen auf der Achse senkrecht. Nach Gullstrand gehen durch O zwei abbildbare Linien (vgl. Ziff. 90), eine Betrachtung der Symmetrieverhältnisse oder auch eine analytische Untersuchung der Strahlenbündel zeigt, daß sie in den Symmetrieebenen liegen müssen. Einer senkrechten Geraden OO_1 entspricht also bis auf Größen höherer Ordnung eine senkrechte Linie auf der Bildfläche der wagerechten Büschel bei O'.

Der Gegenstand sei eine in wagerechter Richtung von O aus verlaufende Teilung, deren Teilstriche demnach senkrecht sind wie OO_1. Wieder folgt aus der Symmetrie, daß die nächsten Teilstriche auf derselben Bildfläche durch Linien abgebildet werden, deren Tangenten in den Schnittpunkten mit der wagerechten Symmetrieebene senkrecht sind. Die Vergrößerung des Teilungsabstandes aber wird nur durch das in der wagerechten Ebene verlaufende Büschel bestimmt, d. h. also,

die Abbildung der Teilung erfolgt ebenso, als hätte man eine achsensymmetrische Folge mit den Halbmessern $r_1, r_2 \dots r_k$, abgesehen davon, daß allgemein nichts darüber gesagt werden kann, wie die verschiedenen Teile eines Teilstrichs auf seinem Bilde wiedergegeben werden und wie lang der einzelne Teilstrich erscheint.

86. Die verzerrte Abbildung. Es ist nun zu untersuchen, was eintrifft, wenn die Punkte O' und O'' zusammenfallen. Jetzt wird O mit gleicher Güte abgebildet wie bei der achsensymmetrischen Folge. Dehnt man die Abbildung nun in ähnlicher Weise wie in Abschnitt B auf ein enges Gebiet um die Achse aus, so könnte etwas Neues insofern eintreten, als die Vergrößerung nicht rings um die Achse dieselbe zu sein brauchte, sondern wechselte; aus der Projektivität der Abbildung läßt sich ableiten, daß sie jedenfalls in den beiden Symmetrieebenen das Maximum und Minimum erreicht.

Es seien die Größen für die Abbildung durch wagerechte, von denen durch senkrechte Büschel durch Zeiger h und v unterschieden; so sind beide Abbildungen durch die Brennpunkte und Brennweiten

$$\mathfrak{F}_h,\ F'_h;\ f_h,\ f'_h;\ \mathfrak{F}_v,\ F'_v;\ f_v,\ f'_v$$

gekennzeichnet. Sind aber die Brechungsverhältnisse in Ding -und Bildraum n und n', so wird

$$f'_h/f_h = f'_v/f_v = -n'/n. \tag{14}$$

1. Wenn $\mathfrak{F}_h$ und $\mathfrak{F}_v$, F'_h und F'_v zusammenfallen, außerdem $f_h = f_v$, also auch $f'_h = f'_v$ ist, so ist für jeden Punkt O der Brennpunktabstand im Dingraume

$$\mathfrak{F}_h O = \mathfrak{F}_v O = \mathfrak{x}_h = \mathfrak{x}_v,$$

also für den Bildpunkt

$$\mathfrak{x}'_h = f_h f'_h/\mathfrak{x}_h = f_v f'_v/\mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}'_v.$$

$$F'_h O'_h = F'_v O'_v = \mathfrak{x}'_h = \mathfrak{x}'_v,$$

und auch O'_h und O'_v fallen zusammen. Man hat für die ganze Achse eine Abbildung; da aber auch für jeden Punkt die Vergrößerungen

$$\beta_h = -f_h/\mathfrak{x}_h, \qquad \beta_v = -f_v/\mathfrak{x}_v \tag{15}$$

sind, so wird auch die Vergrößerung in beiden Symmetrieebenen dieselbe sein, das Bild wird nicht verzerrt erscheinen.

2. Im allgemeinen Falle setze man $\mathfrak{F}_h \mathfrak{F}_v = a$, $F'_h F'_v = a'$, so werden die Abbildungsgleichungen:

$$\mathfrak{x}_h \mathfrak{x}'_h = f_h f'_h, \tag{16}$$

$$\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}'_v = f_v f'_v \text{ oder } (\mathfrak{x}_h - a)(\mathfrak{x}'_h - a') = f_v f'_v, \tag{16a}$$

aus beiden Gleichungen folgt für ein Punktpaar OO', das einander für die Abbildung durch beide Büschel entspricht:

$$a'\mathfrak{x}_h + a\mathfrak{x}'_h = f_h f'_h - f_v f'_v + aa'. \tag{16b}$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{x}'_h$ den Wert aus (16) ein, so erhält man für $\mathfrak{x}_h$ eine quadratische Gleichung, deren Lösung sich so schreiben läßt:

$$\mathfrak{x}_h = \{f_h f'_h - f_v f'_v + aa' \pm \sqrt{(f_h f'_h - f_v f'_v + aa')^2 - 4aa' f_h f'_h}\}/2a' \tag{17}$$

und

$$\mathfrak{x}_v = \{f_h f'_h - f_v f'_v - aa' \pm \sqrt{(f_h f'_h - f_v f'_v + aa')^2 - 4aa' f_h f'_h}\}/2a', \tag{17a}$$

wofür zur Abkürzung

$$2a'\mathfrak{x}_h = C_h \pm \sqrt{D}, \quad 2a'\mathfrak{x}_v = C_v \pm \sqrt{D}$$

geschrieben sein mag.

Für den Wurzelausdruck kann man auch schreiben

$$D = (f_h f_v' + f_v f_h' - a a')^2 - 4 f_h f_h' f_v f_v'$$

oder

$$D = (f_h f_h' - f_v f_v' - a a')^2 - 4 a a' f_v f_v'. \qquad (17\text{b})$$

Im allgemeinen liegen also auf der Achse zwei Punkte O_I und O_{II}, die auf die entsprechenden Punkte O_I' und O_{II}' anastigmatisch abgebildet werden. Diese Abbildung kann man sich auf kleine achsensenkrechte Ebenenstücke ausgedehnt denken. Die Güte der Abbildung hängt von Gliedern höherer Ordnung ab. O_I, O_{II} können indessen imaginär sein oder in einen Punkt zusammenfallen. Dies tritt ein für $D = 0$, das gibt aber nach (17), (17a) und (17b)

$$\mathfrak{x}_h = \sqrt{a a' f_h f_h'}/a'. \qquad (18)$$

$$\mathfrak{x}_v = \sqrt{a a' f_v f_v'}/a'. \qquad (18\text{a})$$

Aus (15) folgt aber in diesem Falle

$$\beta_h = -\sqrt{a' f_h / a f_h'} = -\sqrt{-n a' / n' a}, \qquad (18\text{b})$$

$$\beta_v = -\sqrt{a' f_v / a f_v'} = -\sqrt{-n a' / n' a}. \qquad (18\text{c})$$

Die Vergrößerung ist auch hier in beiden Symmetrieebenen dieselbe, es findet keine Verzerrung statt.

Dagegen tritt eine solche ein, wenn die beiden Punkte O_I und O_{II} nicht zusammenfallen. Unterscheidet man die beiden Werte für $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{x}_h$ durch Zeiger, so wird

$$\beta_{hI} = -f_h/\mathfrak{x}_{hI}, \quad \beta_{hII} = -f_h/\mathfrak{x}_{hII}, \qquad (19)$$

$$\beta_{vI} = -f_v/\mathfrak{x}_{vI}, \quad \beta_{vII} = -f_v/\mathfrak{x}_{vII}. \qquad (19\text{a})$$

Bildet man jetzt mit Hilfe von (17) und (17a) die Größe $\beta_{hI} \cdot \beta_{hII} / \beta_{vI} \beta_{vII}$ und berücksichtigt (17b) und (14), so erhält man

$$\beta_{hI} \cdot \beta_{hII} / \beta_{vI} \cdot \beta_{vII} = 1 \qquad (20)$$

oder

$$\beta_{hII} / \beta_{vII} = \beta_{vI} / \beta_{hI}. \qquad (20\text{a})$$

Wird also in O_I ein Quadrat als Rechteck mit längerer senkrechter Seite abgebildet, so in O_{II} als Rechteck mit längerer wagerechter Seite.

Ist außer den Kugelflächen nur eine einzige doppeltsymmetrische Fläche vorhanden, so wird durch sie der Scheitel S in sich selbst, in beiden Symmetrieebenen aber mit der Vergrößerung 1 abgebildet. Durch die nach der Dingseite zu liegenden Kugelflächen möge ein Punkt O in S, durch die nach der Bildseite zu liegenden S in O' abgebildet werden. Dann ist O' anastigmatischer Bildpunkt von O, aber es ist $\beta_h = \beta_v$, und daraus folgt, daß eine verzerrte Abbildung so nicht entsteht. Das gleiche gilt, wenn bei S beliebig viele unendlich nahe benachbarte Flächenscheitel liegen. Das Ergebnis kommt entweder auf Fall (1) oder auf (18) bis (18c) heraus.

Zur Geschichte und Verwendung der verzerrten (nicht glücklich als anamorphotisch bezeichneten) Abbildung vergleiche man die unten angegebenen Stellen[1]), hier sei nur ein Beispiel von P. RUDOLPH nach der ABBEschen Patent-

[1]) E. ABBE (C. ZEISS), Anamorphotisches Linsensystem. D.R.P. 99722 v. 30. XI. 97, ausgeg. 25. X. 98, abgedr. Ges. Abh. Bd. II, S. 283–295; CZAPSKI-EPPENSTEIN S. 138–140, wo einige weitere Stellen erwähnt sind. Über den Namen Anamorphose ebenda S. 141.

schrift gegeben (Abb. 101). Es besteht aus zwei dünnen Planzylinderlinsen, bei denen die eine Zylinderachse senkrecht, die andere wagerecht steht. Nennt man die Brennweiten der Einzellinsen f'_1 und f'_2, so sind im berechneten Beispiel

$$f'_{1v} = f'_{2h} = \infty\,. \qquad f'_{1h} = 8{,}5\ \text{mm}\,,$$
$$f'_{2v} = 16{,}5\ \text{mm}\,.$$

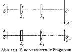


Abb. 101. Eine verzerrende Folge von zwei Zylinderlinsen (schematisch, die Maße stimmen nicht genau mit den im Texte gegebenen). Oben ein wagerechter, unten ein senkrechter Durchschnitt. OA ist oben ein wagerechtes, unten ein senkrechtes Linienstückchen, $O'A'$ und $O'A''$ sind die Bilder

Ist der Linsenabstand $d = 11{,}3$ mm, weiter (Bild) $s = -9{,}4$ mm, $s' = 82{,}6$ mm, so wird O in O' abgebildet, dabei ist aber $\beta_h = -10$, $\beta_v = -4$. Dies läßt sich durch eine Durchrechnung bestätigen. Setzt man vor ein astigmatisches Auge eine passende Brille (Kap. 2, Ziff. 7), so wird auf der Netzhaut eine Abbildung entstehen. Im allgemeinen wird sie ebenfalls verzerrt sein, freilich eine unerwünschte Wirkung[1]).

Es sei endlich noch darauf hingewiesen, daß bei gleichem Vorzeichen von a und a', $\mathfrak{r}_h$ und $\mathfrak{r}_v$ stets dasselbe Zeichen haben, dagegen können f_h und f_v sehr wohl entgegengesetztes Vorzeichen bekommen; dann wird dasselbe von β_h und β_v gelten, man bekommt eine Abbildung, die außer der Verzerrung noch eine Änderung nach Art der Spiegelverkehrung hat, ohne daß eine Spiegelung eingetreten wäre.

87. Die Abweichungen. Die Linienabbildung wie auch die eben behandelte verzerrte Punktabbildung wird im allgemeinen nicht scharf sein, und ihre Ausdehnung vom Achsenpunkte auf ein kleines Flächenstück wird mit weiteren Fehlern behaftet sein. Für den Achsenpunkt könnte man die sphärischen Abweichungen in beiden Symmetrieebenen besonders untersuchen, indem man durchrechnet oder Reihenentwicklungen vornimmt. Man erfährt aus ihnen aber noch nichts über die Abweichungen von Strahlen außerhalb der Symmetrieebenen, für die freilich eine Durchrechnung auch möglich ist. — Einen Überblick über die Abweichungen niederster Ordnung kann man sich so verschaffen: Die Strahlen im Dingraume seien gekennzeichnet durch die Koordinaten der Schnittpunkte mit zwei Ebenen (Dingebene und Eintrittspupille) l, L; m, M; so seien die Koordinaten der Schnittpunkte l', L' mit einer beliebigen Ebene im Bildraum durch Reihenentwicklungen ausgedrückt. Aus der Symmetrie folgt, daß die Entwicklung von l' in l, m ungerader, in L, M gerader Ordnung sein muß, während für L' das Umgekehrte gilt. Beschränkt man sich also auf die Glieder bis zur dritten Ordnung, so lauten die Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} l' = \varepsilon_1 m + \beta_1 l + A_1 m^3 + B_1 m M^2 + C_1 l m^2 + D_1 l M^2 + E_1 L m M \\ + F_1 l^2 m + G_1 l L M + H_1 L^2 m + J_1 l^3 + K_1 l L^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} L' = \varepsilon_2 M + \beta_2 L + A_2 M^3 + B_2 m^2 M + C_2 L M^2 + D_2 L m^2 + E_2 l m M \\ + F_2 L^2 M + G_2 l L m + H_2 l^2 M + J_2 L^3 + K_2 l^2 L\,. \end{aligned}\right\} \quad (21\,a)$$

Man kann nun für die Bestimmung von l' und L' auch zwei verschiedene Ebenen nehmen, nämlich im allgemeinen Falle die Tangentialebenen der beiden astig-

[1]) Vgl. H. Boegehold, Bildgröße und Sehschärfe beim brillenbewaffneten Auge. Ein Abschnitt aus der Geschichte der Lehre von der Brille. ZS. f. ophthalm. Opt. Bd. 10, S. 129 bis 144, 161—174. 1922. Der Schluß der Abhandlung kommt in Frage.

matischen Bildflächen wählen (für die verzerrte Punktabbildung fallen sie zusammen), und dann wird $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_5$, $\beta_2 = \beta_6$. In den Entwicklungen sind A_1 und A_2 die niedrigsten Glieder der sphärischen Abweichung in beiden Symmetrieebenen. Die mit B bezeichneten Glieder drücken die Abweichung in schief verlaufenden Schnitten aus, infolge des Satzes von MALUS sind sie aber nicht unabhängig voneinander. In dem besonders wichtigen Falle einer Punktabbildung ist für $B_1 = 0$ auch $B_2 = 0$ und umgekehrt; die einzige hier in Frage kommende Größe ist von GULLSTRAND als Diagonalastigmatismus der Aberration bezeichnet worden. Auch für die Koma in der Nähe des Scheitels sind nicht sechs (C bis E), sondern nur vier unabhängige Glieder vorhanden. Die mit F und H bezeichneten Größen drücken die Krümmungen der Bildflächen im Scheitel aus, die G genannten den Verlauf der Bildlinien in dessen Nähe, G_1 und G_2 sind aber wieder auf eine Größe zurückzuführen. Die Größen J und K endlich kennzeichnen die Verzeichnung, auch hier sind die K abhängig voneinander.

Genauere Angaben über die einzelnen, die Abweichungen kennzeichnenden Größen und die Summenformeln für ihre Ableitung aus den Radien und ihren Differentialquotienten am Scheitel findet man bei GULLSTRAND[1]).

Wird ein Achsenpunkt und zwei durch ihn achsensenkrecht in beiden Symmetrieebenen verlaufende Linienstückchen Punkt für Punkt durch ein Bündel endlicher Öffnung scharf abgebildet, so gilt dasselbe von einem achsensenkrechten Ebenenstückchen, es folgt dies aus dem Kosinussatz (s. Ziff. 91).

Die Güte der Abbildung weit außerhalb der Achse ist bei Brillen für astigmatische Augen von Wichtigkeit, freilich kommt nur das in der Öffnung niedrigste Glied (der Astigmatismus) in Frage. Man hat sich auf eine Untersuchung der in beiden Symmetrieebenen liegenden Punkte beschränkt (s. Kap. 2, Abb. 129), außerhalb könnte man die Rechnung durch Anwendung der STURMschen Formeln (Ziff. 90, 22—24) durchführen.

88. Die optische Projektion. Bisher ist angenommen worden, daß ein Bild irgendwelcher Art beobachtet wird. Die optischen Erscheinungen sind damit noch nicht vollständig behandelt. Eine Lochkammer gibt ohne optische Abbildung eine Darstellung des Gegenstandes, diese bleibt auch bestehen, wenn man eine Flächenfolge mit der engen Öffnung verbindet; die Strahlen verlaufen aber jetzt nicht mehr geradlinig, und daher wird die Wiedergabe auf dem Auffangschirm verzerrt sein. Da unser Auge mit Pupille und Netzhaut die Lochkammer vertreten kann, so ist auch eine subjektive, wenn auch unscharfe Beobachtung durch eine Flächenfolge möglich, ohne daß auf der Netzhaut ein Bild zustande käme. Diese Erscheinungen werden von A. GULLSTRAND[2]) optische Projektion genannt, ihre Gesetze sind durch Durchrechnung der Strahlen, Näherungswerte auch durch die Summenformeln abzuleiten, sie sind vom Orte der Blende und von der Auffangfläche (Einstellfläche) abhängig; bei Beobachtung mit bewegtem Auge tritt an die Stelle der Austrittspupille der Augendrehpunkt.

Zweifach symmetrische Folgen geben die Gegenstände so wieder, daß die Vergrößerung symmetrisch zu den Symmetrieebenen dieselbe ist. Es kommen hier die häufig beobachteten „Bilder" (richtiger Scheinbilder) in zylindrischen Spiegeln[3]) und durch zylindrische Linsen[4]) in Frage. Man erhält im allgemeinen

---

[1]) A. GULLSTRAND, Die reelle optische Abbildung. Kungl. Svenska Vetenskapsakad. Handl. Upsala u. Stockholm Bd. 41, Nr 3, S. 84—108. 1906; Tatsachen und Fiktionen in der Lehre von der optischen Abbildung. Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 2—41 u. 81—97. 1907.

[2]) Z. B.: A. GULLSTRAND, Tatsachen und Fiktionen in der Lehre von der optischen Abbildung. Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 6. 1907.

[3]) CZAPSKI-EPPENSTEIN S. 142—144 und die dort angeführten Abhandlungen.

[4]) J. D. VAN DER PLAATS, Über die subjektiven Bilder von Zylinderlinsen und astigmatischen Linsen. Ann. d. Phys. (4) Bd. 5, S. 772—792. 1901.

einen verzerrten Eindruck, kann auch durch Brechung ein spiegelverkehrtes, durch Spiegelung ein nicht spiegelverkehrtes Scheinbild bekommen.

89. Allgemeine Gesetze über Flächenfolgen. Über die noch nicht behandelten Möglichkeiten soll nur zusammenfassend ein Überblick gegeben werden. Es gehören hierher alle Fälle, wo Flächen vorkommen, die keine zwei Symmetrieebenen haben. Aber auch Zusammensetzungen von lauter doppeltsymmetrischen Flächen, bei denen nur die Symmetrieebenen nicht zusammenfallen, sind hierher zu rechnen. Ja, die folgenden Betrachtungen müssen auch bei solchen Folgen von achsensymmetrischen Flächen oder von Kugelflächen verwandt werden, die keine gemeinsame Achse haben, es ist selbstverständlich, daß sich die Formeln hier und da vereinfachen. Außer diesen Sonderfällen sind besonders noch folgende behandelt worden:

1. Die Flächenfolge hat eine Symmetrieebene.

2. Eine Gerade steht auf allen Flächen der Folge senkrecht (s. im folgenden das Beispiel, Ziff. 90).

90. Die Abbildung. Man denke sich zunächst, daß eine Blende die Strahlen so einengt, daß man Größen von der zweiten Potenz der Öffnung vernachlässigen kann. Zu jedem Punkte des Dingraumes gehört ein Hauptstrahl. Nach dem Satze von Malus entspricht dem Bündel durch den Dingpunkt auf der Bildseite ein Bündel, das zu einer Schar von Flächen, den Wellenflächen, senkrecht steht. In jedem Punkte B einer Wellenfläche gibt es zwei Hauptnormalschnitte, in ihnen wird die Normale von den benachbarten Normalen geschnitten, die Schnittpunkte O' und O'' sind die Krümmungsmittelpunkte der Schnittkurven, BO' und BO'' die beiden Hauptkrümmungsradien. Ist nun B der Schnittpunkt des Hauptstrahles mit der letzten brechenden Fläche, $BO'O''$ die Normale zur bildseitigen Wellenfläche oder der bildseitige Verlauf des Hauptstrahles, so sind O', O'' die sog. astigmatischen Bildpunkte, BO' und BO'' die beiden bildseitigen Schnittweiten.

Man muß den Hauptstrahl von Fläche zu Fläche verfolgen. Dabei wird im allgemeinen schon von der zweiten Fläche ab das einfallende dünne Strahlenbündel astigmatisch sein, und seine Hauptschnitte (die seiner Wellenfläche) können zu denen der brechenden Fläche vollkommen beliebig liegen. Das einfallende Strahlenbündel ist gekennzeichnet durch die beiden Hauptkrümmungsradien τ_1, τ_{11} der dingseitigen Wellenfläche (die Schnittweiten, Abstände der astigmatischen Bildpunkte vor der Brechung an der betrachteten Fläche) und durch den Winkel ϑ, den der erste (zu τ_1 gehörende) Hauptschnitt mit der Einfallsebene bildet; ganz ebenso gebildete Größen kennzeichnen die brechende Fläche ($\varrho_1, \varrho_{11}, \Theta$) und das gebrochene Strahlenbündel ($\tau_1', \tau_{11}', \vartheta'$): die Aufgabe ist, aus $\tau_1, \tau_{11}, \vartheta$; $\varrho_1, \varrho_{11}, \Theta$, die gegeben sind, $\tau_1', \tau_{11}', \vartheta'$ zu bestimmen. Die Formeln sind von Sturm abgeleitet worden[1]), sie sollen hier nur angeführt werden. Man bilde

$$\left.\begin{aligned} R &= \cos^2\vartheta/\tau_1 + \sin^2\vartheta/\tau_{11}, \qquad T = \sin^2\vartheta/\tau_1 + \cos^2\vartheta/\tau_{11},\\ S &= \sin\vartheta\cos\vartheta(1/\tau_1 - 1/\tau_{11}); \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \cos^2\Theta/\varrho_1 + \sin^2\Theta/\varrho_{11}, \qquad t = \sin^2\Theta/\varrho_1 + \cos^2\Theta/\varrho_{11},\\ s &= \sin\Theta\cos\Theta/(1/\varrho_1 - 1/\varrho_{11}); \end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

[1]) J. C. Sturm, Mémoire sur l'optique. Liouv. Journ. Bd. 3, S. 357–384. 1838.

so bestehen, wenn i, i' Einfalls- und Brechungswinkel sind, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} n'\cos i'(R'\cos i' - r) &= n\cos i(R\cos i - r)\,,\\ n'\cos i'(S' - s) &= n\cos i(S - s)\,,\\ n'(T' - t\cos i') &= n(T - t\cos i)\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Hier sind R', S', T' mit den Größen nach der Brechung in derselben Beziehung wie R, S, T vor der Brechung, man kann aus ihnen bestimmen

$$\operatorname{tg} 2\vartheta' = 2S'/(R' - T');\quad 1/\mathfrak{r}'_{\mathrm{I}} = R' + S'\operatorname{tg}\vartheta'_{1};\quad 1/\mathfrak{r}'_{\mathrm{II}} = T' - S'\operatorname{tg}\vartheta'. \tag{24}$$

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung von $\mathfrak{r}'_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{r}'_{\mathrm{II}}$, ϑ' gibt das im folgenden behandelte Beispiel.

Die Größen R, S, T usf. sind für die Wellenflächen und für die brechende Fläche die EULERschen Abkürzungen, sie sind von den sonst in diesem Buche ähnlich bezeichneten Größen wohl zu unterscheiden[1]). Man kann leicht erkennen, daß die Gleichungen (10) und (11) Sonderfälle der STURMschen Gleichungen sind.

Man hat also den Hauptstrahl durch den Dingpunkt zu bestimmen — nötigenfalls durch ein Näherungsverfahren — und durchzurechnen, an jeder Fläche aber dann die STURMschen Formeln anzuwenden. Die dingseitigen Schnittweiten für die μ-te Fläche erhält man aus den bildseitigen Schnittweiten für die $\mu - 1$-te Fläche, indem man den auf dem Hauptstrahle gemessenen Abstand beider Flächen abzieht.

Als besonders einfache Anwendung soll der Fall zweier dünner Zylinderlinsen behandelt werden, deren Flächen von einer Geraden — dem Hauptstrahl — senkrecht getroffen werden, deren Achsen aber schief zueinander stehen[2]). Die Vorderflächen seien zylindrisch, die Hinterflächen eben. Die Zylinderhalbmesser seien $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$, das Brechungsverhältnis beider Linsen n, der Winkel der Zylinderachsen γ, der Abstand der Linsen d. Der Dingpunkt liege auf dem Hauptstrahl im Unendlichen. Ist beispielsweise die Achse des ersten Zylinders senkrecht, so liegen die Hauptschnitte des durch die erste Linse hindurchgegangenen Bündels senkrecht und wagerecht, die zugehörigen Schnittweiten sind nach (8) Ziff. 43 ∞ und $\mathfrak{r}_1/(n-1)$. Für das auf die zweite Zylinderfläche auffallende Bündel hat man

$$\mathfrak{r}_1 = \infty\,,\ \mathfrak{r}_{11} = \mathfrak{r}_1/(n-1) - d\,.$$

Es ist nun $i = i' = 0$, ferner kann man, wo der einfallende Strahl mit der Normalen zusammenfällt, jeden Normalschnitt als Einfallsebene annehmen, beispielsweise auch den senkrechten; dies gibt für (22)

$$\vartheta = 0,\qquad \Theta = \gamma;\qquad R = 1/\mathfrak{r}_1 = 0\,,\qquad T = 1/\mathfrak{r}_{11}\,,\qquad S = 0\,.$$

Weiter ist $\varrho_1 = \infty$, $\varrho_{11} = \mathfrak{r}_2$, also in (22a):

$$r = \sin^2\gamma/\mathfrak{r}_2\,,\qquad t = \cos^2\gamma/\mathfrak{r}_2\,,\qquad s = -\sin\gamma\cos\gamma/\mathfrak{r}_2\,.$$

Statt n' ist n, statt n ist 1 zu setzen. Dann wird (23) zu:

$$n(R' - \sin^2\gamma/\mathfrak{r}_2) = -\sin^2\gamma/\mathfrak{r}_2;\qquad R' = (n-1)\sin^2\gamma/n\,\mathfrak{r}_2\,.$$

$$n(S' + \sin\gamma\cos\gamma/\mathfrak{r}_2) = \sin\gamma\cos\gamma/\mathfrak{r}_2;\qquad S' = -(n-1)\sin\gamma\cos\gamma/n\,\mathfrak{r}_2\,.$$

$$n(T' - \cos^2\gamma/\mathfrak{r}_2) = 1/\mathfrak{r}_{11} - \cos^2\gamma/\mathfrak{r}_2\,.\qquad T' = 1/n\,\mathfrak{r}_{11} + (n-1)\cos^2\gamma/n\,\mathfrak{r}_2\,.$$

---

[1]) Die Form der STURMschen Gleichungen ist hier gegeben nach A. GULLSTRAND, Die reelle optische Abbildung, S. 11–13. Upsala u. Stockholm 1905. Der Sonderfall, daß einer der Werte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_{11}$ verschwindet, ist S. 17 erledigt. Siehe auch Tatsachen und Fiktionen, S. 83. Archiv für Optik, Bd. 1. 1907.

[2]) Siehe CZAPSKI-EPPENSTEIN S. 137–138 und die dort angeführten Abhandlungen, ferner M. v. ROHR, Die Brille als optisches Instrument, S. 162. Berlin: Julius Springer 1921; O. HENKER, Einführung in die Brillenlehre, S. 252. Jena: Optikerschule 1921.

Aus den (22) entsprechenden Gleichungen für R', S', T' kann man ableiten:

$$R' - T' = (1/\mathfrak{r}_1' - 1/\mathfrak{r}_{11}')\cos 2\vartheta', \quad 2S' = (1/\mathfrak{r}_1' - 1/\mathfrak{r}_{11}')\sin 2\vartheta';$$
$$(1/\mathfrak{r}_1' - 1/\mathfrak{r}_{11}')^2 = (R'-T')^2 + 4S'^2 = 1/n^2\mathfrak{r}_{11}^2 + (n-1)^2/n^2\mathfrak{r}_2^2 + 2(n-1)\cos 2\gamma/n^2\mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_2.$$

Der Durchgang durch die letzte Planfläche wird die Abstände nur im Verhältnis $1:n$ verkleinern, für die beiden Schnittweiten σ_1' und σ_{11}' hat man also:

$$\mathfrak{A}^2 = (1/\sigma_1' - 1/\sigma_{11}')^2 = 1/\mathfrak{r}_{11}^2 + (n-1)^2/\mathfrak{r}_2^2 + 2(n-1)\cos 2\gamma/\mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_2.$$

Weiter ist

$$\sin 2\vartheta' = 2S'n/\mathfrak{A} = -(n-1)\sin 2\gamma/\mathfrak{r}_2\mathfrak{A}.$$
$$1/\sigma_1' + 1/\sigma_{11}' = n(1/\mathfrak{r}_1' + 1/\mathfrak{r}_{11}') = n(R'+T') = 1/\mathfrak{r}_{11} + (n-1)/\mathfrak{r}_2.$$

Die besprochene Zusammenstellung wird benutzt, um eine unbekannte Folge auf Astigmatismus und Brechkräfte zu prüfen, indem man durch Wahl der Zylinderflächen und Verdrehung gegeneinander dafür sorgt, daß die Wirkung der zu untersuchenden Folge durch die schiefwinklig gekreuzten Zylinder aufgehoben wird. Besonders häufig ist die Verwendung bei Untersuchung astigmatischer Augen. Man setzt die Zylinder unmittelbar hintereinander ($d = 0$). Setzt man noch für die Stärken $(n-1)/\mathfrak{r}_1 = 1/\mathfrak{r}_{11} = D_1$, $(n-1)/\mathfrak{r}_2 = D_2$, so werden die Formeln

$$\mathfrak{A}^2 = D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2\cos 2\gamma; \quad 1/\sigma_1' = (D_1 + D_2 + \mathfrak{A})/2; \quad 1/\sigma_{11}' = (D_1 + D_2 - \mathfrak{A})/2;$$
$$\sin 2\vartheta' = -D_2\sin 2\gamma/\mathfrak{A}.$$

Nach dem bisher Besprochenen ist für einen Dingpunkt im allgemeinen kein Bild, sondern zwei sog. astigmatische Bildpunkte vorhanden. Geht man im Dingraume von einem Punkte zum anderen über, so entsprechen einer Fläche im Dingraume zwei Bildflächen.

Dagegen findet nach GULLSTRAND[1]) ganz allgemein eine Abbildung gewisser Linien statt. Durch den Dingpunkt und den Hauptstrahl gehen zwei bestimmte Ebenen, die GULLSTRAND als die Ebenen fokaler Projektion bezeichnet. Ein unendlich kleines Stückchen, das durch den Schnitt einer dieser Ebenen mit der Dingfläche entsteht, wird bis auf Größen höherer Ordnung in ein Linienstückchen auf einer der beiden Bildflächen abgebildet. Geht man auf der Dingfläche von einem Punkte zum anderen, so ändern die Ebenen fokaler Projektion ihre Stellung und damit die abbildbaren Linien ihre Richtung. Auf der Dingfläche hat man zwei Systeme von abbildbaren Linien, das eine hat die entsprechenden Bildlinien auf der einen, das andere auf der anderen Bildfläche.

Beschränkt man sich auf die Umgebung eines Dingpunktes, so sind die Neigungen der Bildflächen, die einer gegebenen Dingfläche entsprechen, damit also auch die Richtungen der Bildlinien, Größen zweiter Ordnung; dagegen die der Projektionen auf eine zum Hauptstrahle senkrechte Ebene Größen erster Ordnung. GULLSTRAND behandelt daher vor allem diese Projektionen im Ding- und Bildraum, er bezeichnet sie als Fokallinien.

Im allgemeinen stehen die beiden durch einen Dingpunkt gehenden Fokallinien nicht aufeinander senkrecht, wohl aber die entsprechenden Linien im Bildraume, die aber nicht durch einen Punkt gehen. Die Beziehung ist umkehrbar, im allgemeinen aber nicht zusammensetzbar.

Geht man auf einem Hauptstrahle im Dingraume von Punkt zu Punkt fort, so ändern die Fokallinien in Ding- und Bildraum ihre Richtung[2]). Im

[1]) A. GULLSTRAND, Die reelle optische Abbildung, S. 25—42. Upsala u. Stockholm 1906; Tatsachen und Fiktionen usw., S. 11—19. 1907.

[2]) Allgemein untersucht von A. GULLSTRAND, Das allgemeine optische Abbildungssystem. Svenska Vetensk. Handl. Bd. 55, Nr. 1, S. 1—139. 1915.

allgemeinen gibt es auf einem Hauptstrahle keinen Punkt, der anastigmatisch abgebildet wird, doch kommt dies auch vor.

91. Die Abweichungen. Glieder zweiter Ordnung in der Öffnung entsprechen den Komagliedern, dritter Ordnung den sphärischen Abweichungen; berücksichtigt man auch das Gesichtsfeld, so sind die Neigungen und Krümmungen der Bildlinien, endlich die Gesetze der optischen Projektion (s. unten) abzuleiten[1]).

Es kann ein Punkt O unter Umständen durch ein Bündel endlicher Öffnung scharf auf einen Punkt O' abgebildet werden. Im allgemeinen wird dieser Punkt aber vereinzelt liegen, ein von ihm ausgehendes Linienstückchen wird nicht Punkt für Punkt abgebildet. Nur wenn für alle Strahlen des Bündels die Bedingung besteht

$$n\,dl\cos\varepsilon - n'\,dl'\cos\varepsilon' = \text{konst.}, \tag{25}$$

wird ein Linienstück $OO_1 = dl$ auf ein anderes $O'O'_1 = dl'$ scharf abgebildet. Hier sind ε, ε' die Winkel, die ein Strahl des Bündels mit dem Linienstück bildet. Die Gleichung (25) ist ein Sonderfall eines allgemeineren von T. SMITH aufgestellten Satzes[2]). Es bedarf vielleicht keines Hinweises, daß diese scharfe Abbildung eines Linienstückchens (Punkt für Punkt) nichts mit der GULLSTRANDschen Linienabbildung zu tun hat.

Ist die Gleichung (25) für zwei von O ausgehende Linienstückchen OO_1 und OO_2 erfüllt, so für das ganze Ebenenstückchen OO_1O_2. Daß sie für drei nicht in einer Ebene liegende und damit für den ganzen Raum erfüllt ist, tritt nur in Punkten mit Knotenpunktseigenschaft ein[3]), wo die Vergrößerung gleich dem Kehrwert des Verhältnisses der Brechzahlen ist. Ja, diese Knotenpunktseigenschaft gilt schon dann, wenn ein Flächenstückchen scharf abgebildet wird, das von einem Lichtstrahle berührt wird[4]). Es ist dies eine Verallgemeinerung der Unvereinbarkeit der HERSCHELschen Bedingung mit der Sinusbedingung, wie diese beiden Gesetze sich als Sonderfälle der Gleichung (25) auffassen lassen.

92. Die optische Projektion. Wie in Ziff. 88 kann auch für den allgemeinsten Fall die Projektion, d. h. der Schnitt der Hauptstrahlen mit einer Auffangfläche im Bildraume untersucht werden. Für die Umgebung eines Dingpunktes (ein kleines Flächenstück) gelten in verschiedenen Richtungen verschiedene Vergrößerungen. Die Änderungen dieser Werte (Verzeichnungen) gehören zu den Abweichungen. Die hierhergehörenden Fragen sind von GULLSTRAND in den schon angeführten Abhandlungen mehr oder minder allgemein untersucht worden. Die Wiedergabe endlicher Flächenstücke kann nur durch Durchrechnung einer Anzahl von Hauptstrahlen geprüft werden.

---

[1]) A. GULLSTRAND, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberration und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. Nova Acta Reg. Soc. Upsal. Bd. 3. 1900. (Die von der Öffnung abhängenden Glieder.) — Die reelle optische Abbildung. S. 43—83. 1906. (Die Gesetze zweiter Ordnung im Sonderfall der Folgen mit einer Symmetrieebene.) — Optische Systemgesetze zweiter und dritter Ordnung. Svenska Vetensk. Handl. Bd. 63, Nr. 13. 1924. (Weiterführung der vorhergehenden Arbeit.)

[2]) T. SMITH, The optical cosine law. Trans. Opt. Soc. London Bd. 24, S. 31—40. 1922/23; CZAPSKI-EPPENSTEIN S. 230—232 u. 233; H. BOEGEHOLD, Zum Kosinussatze von A. E. Conrady und T. T. Smith. Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 45, S. 107—108. 1925; T. SMITH, Note on the cosine law. Trans. Opt. Soc. London Bd. 26, S. 281—286. 1924/25; H. BOEGEHOLD, Note on the Staeble and Likotzky (Druckfehler!) condition. Ebenda S. 287—288.

[3]) H. BOEGEHOLD, Weitere Bemerkungen zum Kosinussatze. Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 45, S. 295—296. 1924.

[4]) C. CARATHÉODORY, Über den Zusammenhang der Theorie der absoluten optischen Instrumente mit einem Satze der Variationsrechnung. Münchner Ber. 1926, S.-A. 18 S., S. 11—15.

e) Die Wirkung des Auffangschirmes und der Strahlenbegrenzung in optischen Folgen.

Von

O. EPPENSTEIN, Jena.

93. Der Gegenstand der Untersuchung. Alle Strahlen, die optische Geräte durchsetzen, werden zuletzt auf einer Fläche aufgefangen, der sie ihre Energie abgeben. Wir unterscheiden Projektionssysteme (Bildwerfer), bei denen diese eine künstliche „Schirmfläche" ist, und vor dem Auge gebrauchte Geräte, bei denen die Strahlen auf der Netzhaut des Auges endigen. Den Punkten dieser Fläche entspricht im Dingraum das „Gesichtsfeld" des optischen Gerätes, das wie das Gesichtsfeld des Einzelauges eine zweifache Mannigfaltigkeit von Punkten ist und eine zusammenhängende Fläche sein kann (z. B. die eines Gemäldes, eines metallographischen Schliffs), in den meisten Fällen aber nicht ist (z. B. eine Landschaft vor dem photographischen Objektiv, ein Blutstropfen vor dem Mikroskop). Der letztere Fall zeigt schon, daß die „Darstellung", die schließlich auf der Auffangfläche entsteht, im allgemeinen etwas anderes ist als die in den früheren Kapiteln betrachtete optische Abbildung eines Flächenstücks in ein anderes. Einzelne Teile des Gegenstandes werden freilich durch Wiedervereinigung der von ihren Punkten ausgehenden Strahlen in Punkte der Auffangfläche optisch abgebildet. Im allgemeinen aber werden die Strahlen, die von irgend einem Dingpunkte ausgehen, auf der Auffangfläche nicht vereinigt, entweder weil die Auffangfläche sich nicht an dem Orte befindet, wo die optische Vorrichtung ein Bild des Gegenstandes erzeugt (sie bildet bestenfalls eine Fläche des Gegenstandes auf die Auffangfläche ab) oder weil diese Strahlenbüschel überhaupt an keinem Punkte des Bildraumes punktweise vereinigt werden.

Trotzdem entsteht bei richtiger Anordnung auf der Auffangfläche eine „Zeichnung" (wie wir sie zum Unterschiede von einem optischen Bilde nennen können) der Gegenstände. Diese Zeichnung ist geometrisch vollkommen bestimmt außer durch die Lage und Krümmung der brechenden oder spiegelnden Flächen durch die Begrenzung der auf sie auffallenden Büschel. Sie ist das Ergebnis einer Projektion, die am klarsten hervortritt, wenn gar keine Brechung oder Spiegelung stattfindet, im Falle der „Lochkamera".

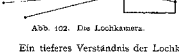


Abb. 102. Die Lochkamera.

Ist in der Vorderwand eines geschlossenen Kastens ein kleines Loch gebohrt, so erscheint auf einer Mattscheibe oder einer photographischen Platte an der Rückwand eine ziemlich deutliche Zeichnung der vor der Vorderwand befindlichen Gegenstände (Abb. 102).

Ein tieferes Verständnis der Lochkamera ist nur mit den Hilfsmitteln der Beugungstheorie möglich. Dies weist sogleich darauf hin, daß auch bei Anwesenheit brechender oder spiegelnder Flächen eine genauere Untersuchung der Wirkung ihrer Begrenzung nur mit Hilfe der Beugungslehre durchgeführt werden kann. Trotzdem ist eine für viele praktische Fragen erschöpfende Behandlung der Wirkung der Strahlenbegrenzung auf dem Boden der geometrischen Optik möglich.

Die von den Dingpunkten ausgehenden Büschel werden mindestens durch die Ränder der Linsen oder ihrer Fassungen begrenzt. Bei den vor dem Auge

benutzten Geraten wirkt außerdem die Augenpupille als Begrenzung. Andere Begrenzungen werden in vielen Fällen durch Lochscheiben, „Blenden“, hinzugefugt.

In folgendem sei meist eine achsensymmetrische optische Vorrichtung vorausgesetzt und alle vorkommenden Begrenzungen (allgemein Blenden genannt) seien kreisförmig, konzentrisch zur Achse; die Auffangfläche sei eine zur Achse senkrechte Ebene.

α) Die Aufsuchung der wirksamen Blenden.

94. Die Begrenzung der Öffnung; die „Pupillen“. Die Hauptstrahlen. Es sei zunächst ein Dingpunkt O auf der Achse gegeben (Abb. 103). Diejenige Blende, die den Öffnungswinkel der abbildenden Bündel wirklich bestimmt, weil sie ihn mehr beschränkt als die andern, kann man auf folgende Weise finden. Man denkt sich alle Blenden, mögen sie nun vor oder hinter den Linsen oder Spiegeln der abbildenden Folge liegen, oder — im allgemeinen Falle — zwischen ihnen, durch den vor ihnen liegenden Teil L_1 der Folge in den Dingraum abgebildet (daß dies ohne allzu große Aberrationen möglich ist, so daß einigermaßen von einer bestimmten Lage und Größe dieses Bildes gesprochen werden kann, ist eine Voraussetzung des folgenden Kapitels)[1]. Diese Bilder können reell sein, so daß man sie, wenn man auf der Bildseite eine leuchtende Fläche anbringt, auf einem Schirm beobachten kann; oder virtuell, so daß ein in den Dingpunkt O gebrachtes Auge sie bei entsprechender Akkommodation oder Brille sehen könnte. So sei z. B. die Blende $B_1 B_2$ mit dem Achsenpunkte B abgebildet in $P_1 P_2$ mit dem Achsenpunkte P. Wenn alle Blenden so in den Dingraum abgebildet sind, so wird die Öffnung der den Punkt O abbildenden Bündel durch diejenige von ihnen bestimmt, deren Bild von O aus nach vorwärts oder rückwärts unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint. Sei $B_1 B B_2$ die die Öffnung am meisten beschränkende Blende und $P_1 P P_2$ dieses am kleinsten erscheinende Blendenbild (das nach dem Gesagten im Sonderfalle auch eine körperliche Blende selbst sein kann). Daß $O P_1$ der Strahl des größten Öffnungswinkels ist, ergibt sich daraus, daß dieser Strahl durch den Rand B_1 der wirksamen Blende B hindurchgeht, und daß jeder Strahl größeren Öffnungswinkels in der Blende B einen größeren Achsenabstand haben müßte. Dieselbe Blende B können wir durch den hier nachfolgenden Teil L_2 der Linsenfolge in den Bildraum abbilden, ihr Bild $P_1' P' P_2'$ erscheint dann aus demselben Grunde von dem axialen Bildpunkte O'

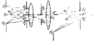


Abb. 103. Zur Aufsuchung der Öffnungsblende. $B_1 B_2$ ist die Öffnungsblende in einer (schaubildlich gezeichneten) Linsenfolge L_1, L_2 für den Gegenstand $O_1 O_2$ oder sein Bild $O_1' O_2'$. $P_1 P_2$, das von L_1 entworfene Bild der Blende, ist die Eintrittspupille, $P_1' P_2'$, das von L_2 entworfene Bild der Blende, ist die Austrittspupille.

[1] Da das von O ausgehende Büschel, selbst wenn es in den Bildpunkt O' punktweise vereinigt wird, zwischen den Linsen im allgemeinen sphärische Aberrationen aufweisen wird, so kann eine zwischen den Linsen liegende Blende Strahlen einer gewissen Neigung ausschließen, ohne stärker geneigte abzublenden. Dies lehrt der Anblick z. B. von Abb. 67. Aus dem Bündel werden dann einige Zonen ausgeschieden. In diesem Falle wollen wir die Öffnung des Bündels bis zu der weitesten Zone rechnen, außerhalb derer alle Strahlen abgeblendet sind.

aus unter kleinerem Sehwinkel als die Bilder aller anderen Blenden, die im Bildraume liegen oder in den Bildraum abgebildet werden.

Der Winkel $P_1OP_2 = 2U$ heißt der **dingseitige Öffnungswinkel** der abbildenden Folge. Wenn der Gegenstand im Unendlichen liegt, so wird die Öffnung des abbildenden Bündels statt durch den Winkel durch die lineare Größe P_1P_2 des Blendenbildes angegeben. Der Winkel $P_1'O'P_2' = 2U'$ heißt entsprechend der **bildseitige Öffnungswinkel**. Ist O' unendlich weit, so tritt an seine Stelle die lineare Größe $P_1'P_2'$. Ist $PO = \xi$ (positiv, wenn das Licht von P zu O fortschreitet), $P'O' = \xi'$ (positiv, wenn das Licht von P' zu O' fortschreitet) und

$$PP_1 = p, \qquad PP_2 = -p; \qquad P'P_1' = p', \qquad P'P_2' = -p',$$

so ist (indem $POP_2 = U$ gesetzt wird)

$$\operatorname{tg} U = -\frac{p}{\xi}; \qquad \operatorname{tg} U' = -\frac{p'}{\xi'}\ ^{1)}.$$

Die wirksame körperliche Blende B_1B_2 (von ABBE, der alle diese Begriffe eingeführt hat, als Iris bezeichnet) wollen wir die **Öffnungsblende** (Aperturblende) nennen, ihr dingseitiges Bild P_1P_2 heißt nach ABBE die **Eintrittspupille**, das bildseitige $P_1'P_2'$ die **Austrittspupille** (im folgenden meist abgekürzt mit E.P. und A.P.). Diese beiden Pupillen stehen in bezug auf das ganze Gerät im Verhältnis des Gegenstandes zum Bilde. Wenn die Öffnungsblende einigermaßen aberrationsfrei in sie abgebildet wird, kann jede von ihnen, wenn man sie körperlich ausgeführt denkt, die Öffnungsblende ersetzen, da jeder Strahl, der B_1B_2 trifft, auch durch P_1P_2 und $P_1'P_2'$ gegangen sein muß.

Die E.P. und A.P. sind bis jetzt nur für den Gegenstandspunkt O und sein Bild O' aufgesucht worden. Für andere Achsenpunkte könnte eine andere Blende Öffnungsblende sein und deshalb E.P. und A.P. anders liegen. Dieser Fall würde, wie wir unten sehen werden, unter anderem für verschiedene Raumteile verschiedene Perspektive ergeben. Er wäre auf Grund des folgenden leicht zu behandeln. Wir schließen ihn jedoch aus, indem wir entsprechend der tatsächlichen Verwendung der meisten Geräte uns auf solche Raumstücke beschränken, die eine gemeinsame Öffnungsblende, E.P. und A.P., besitzen. Auch für seitliche Punkte in der Ebene von O, z. B. O_1 und O_2, möge zunächst dieselbe Öffnungsblende und dieselbe Pupille wirksam sein. Daß dies im allgemeinen nur für einen bestimmten Achsenabstand gilt, werden wir im folgenden sehen.

Nicht selbstleuchtende, z. B. durchleuchtete Gegenstände müssen von einer leuchtenden Fläche (Lichtquelle) aus Strahlen erhalten. Ist diese nicht so groß, daß sie z. B. einem Punkte O alle Strahlen liefert, die den Öffnungswinkel P_1OP_2 erfüllen, so ist statt der im Gerät vorhandenen Blende die Lichtquelle für den Öffnungswinkel maßgebend. Allgemein muß die Lichtquelle oder — wenn sie sich nicht selbst im Bildraum befindet, sondern erst durch Linsen oder Spiegel dahin abgebildet wird — die ihr im Dingraum konjugierte Fläche, von O aus betrachtet, mit den Bildern der im Gerät vorhandenen Blenden auf ihre scheinbare Größe hin verglichen werden. Erscheint ihr Bild kleiner, so bildet es die E.P.

Die Strahlen, die durch die Mitte der Öffnungsblende gehen, heißen **Hauptstrahlen**. Bei genügend engen Büscheln, also genügend enger Öffnungsblende,

[1]) Der mit u bezeichnete Winkel von Abb. 103 ist positiv, da PP_2 und PO beide negativ. Entsprechend dem in der rechnenden Optik üblichen Verfahren läßt sich das Vorzeichen so bestimmen: Strecken in der Lichtrichtung (von links nach rechts gezeichnet) und nach oben positiv; bei der Definition des Tangens werden die beiden Katheten vom Scheitel des rechten Winkels aus durchlaufen. Deshalb bilden Strecken, die in der Lichtrichtung aufsteigen, negative, die in der Lichtrichtung absinken, positive Winkel mit der Achse. Die Größen p und l sind wesentlich positiv; der Grenzwinkel U ist so gewählt, daß für negative ξ, die fast stets auftreten, die Apertur positiv wird.

kann man sie zum Zwecke der Übersicht allein betrachten. Wird die Mitte der Öffnungsblende B aberrationsfrei in den Dingraum und Bildraum abgebildet, so zielen die Hauptstrahlen im Dingraum ebenfalls auf einen Achsenpunkt, den Mittelpunkt der E.P., und im Bildraum auf einen Achsenpunkt, den Mittelpunkt der A.P. Die fast stets vorhandenen Aberrationen bewirken zwar kleine Verschiebungen des Achsenschnittpunktes der Hauptstrahlen im Dingraum und im Bildraum, je nach ihrer Neigung, diese können aber für die folgenden Betrachtungen (mit einer unten folgenden Ausnahme) vernachlässigt werden, so daß kurz zusammengefaßt das Hauptstrahlenbündel im Dingraum im Mittelpunkt der E.P., im Bildraum im Mittelpunkt der A.P. zusammentrifft.

Die Winkel der Hauptstrahlen mit der Achse sind in Übereinstimmung mit der obigen Bestimmung der Vorzeichen definiert durch $OO_1 = y$; $O'O'_1 = y'$ und

$$\operatorname{tg} w = -\frac{y}{\xi}, \qquad \operatorname{tg} w' = -\frac{y'}{\xi'}.$$

95. Die Begrenzung des Gesichtsfeldes, die „Luken". Denken wir uns die Öffnungsblende so eng, daß nur noch die Hauptstrahlen betrachtet zu werden brauchen, so ist leicht zu erkennen, welche Blende die abzubildenden Gegenstände begrenzt. Denken wir uns alle Blenden wie früher in den Dingraum und in den Bildraum abgebildet, so bestimmt diejenige, deren dingseitiges Bild vom Mittelpunkte der E.P., P, aus unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint, den größten Winkel, in dem noch Gegenstände liegen, die Hauptstrahlen entsenden können, die also bei sehr enger Öffnungsblende allein noch abgebildet werden. Dieser Winkel $= 2W$ heißt der Gesichtsfeldwinkel, die ihn bestimmende körperliche Blende heißt die Gesichtsfeldblende, ihr dingseitiges Bild ist von M. v. ROHR die Eintrittsluke (E.L.) genannt worden. Bildseitig entspricht ihr die Austrittsluke (A.L.), in die die Gesichtsfeldblende und die E.L. abgebildet werden, und die von dem Mittelpunkt P' der A.P. kleiner als alle anderen Blendenbilder erscheint.

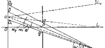


Abb. 104. Die allmähliche Abblendung der Öffnung durch eine Eintrittsluke, die hinter der Eintrittspupille liegt. $PO = \xi$, $PL = \eta$, $PP_1 = p$, $PP_2 = -p$, $LL_1 = l$, $LL_2 = -l$.

Die „Luken" wirken in dem optischen Gerät so wie eine Luke oder ein Fenster für ein in P oder P' befindliches Auge; mit dem Unterschiede, daß sie nicht immer zwischen Pupille und Gegenstand (Pupille und Bild) zu liegen brauchen; sie können auch außerhalb der Strecke PO (im Bildraum $P'O'$) liegen und behalten ihre die Abbildung einschränkende Wirkung auch, wenn sie von den Strahlen erst nach Verlängerung über P oder O (im Bildraum P' oder O') hinaus getroffen werden.

Wir rechnen mit dem halben dingseitigen (bildseitigen) Gesichtsfeldwinkel nach der Definition

$$\operatorname{tg} W = \frac{LL_2}{LP} = \frac{l}{\eta}.$$

Sei nun (Abb. 104) die Öffnungsblende von endlicher Größe, so wird man doch die Bezeichnung „Gesichtsfeldwinkel" beibehalten, obwohl im allgemeinen

noch Gegenstände außerhalb dieses Winkels abgebildet werden. Er bildet bei endlicher Blende nur dann die Grenze, wenn nur eine Gegenstandsebene vorhanden ist und die E.L. in diese hineinfällt.

In jeder Gegenstandsebene, die nicht in die E.L. fällt, beginnt bei einer gewissen Entfernung OO_1 (Abb. 104) von der Achse die Gesichtsfeldblende die Öffnung zu beschränken. Die Verbindung gleichliegender Begrenzungspunkte der E.P. und E.L., z. B. P_2L_2, begrenzt den Raumwinkel, in dem nur die E.P. wirksam ist; jenseits dieses Winkels wird die Fläche der E.P. teilweise durch die E.L. verdeckt. Der Querschnitt des von einem solchen Punkte o ausgehenden Büschels in der Ebene der E.P. wird durch das weiße Kreiszweieck von Abb. 105 angegeben; es entsteht, indem (Abb. 104) die E.L. von o aus auf die Ebene P projiziert wird. Entfernt sich o von der Achse, so rückt die Projektion der E.L. gegenüber der E.P. weiter nach oben. Das Kreiszweieck wird kleiner, die Büschel werden mehr und mehr abgeschattet („vignettiert"). Jenseits des Raumwinkels, der durch die Verbindungslinie entgegengesetzt liegender Randpunkte der E.P. und E.L., z. B. P_1L_2, gegeben wird, können überhaupt keine Strahlen mehr an der Abbildung teilnehmen. Diese beiden Raumwinkel, ω, der Vignettierungswinkel und Ω, der Ausschlußwinkel, zerfällen den ganzen Raum in ein Gebiet, das mit voller Öffnung, ein Gebiet, das mit abnehmender Öffnung, und ein Gebiet, das gar nicht mehr Strahlen in die Linsenfolge entsendet. Werden die Abstände der Dingebene O und der E.L., L, von der E.P., mit ξ und η bezeichnet, und ist p die halbe Öffnung der E.P., l die halbe Öffnung der E.L., die beide nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet werden, so ist



Abb. 105. Der Querschnitt eines Bündels in der Ebene der E.P.

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{l - p}{\eta};$$

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{l + p}{\eta}.$$

In der Ebene O bestimmen diese Winkel den Ring O_1O_2 der allmählichen Abblendung, die von innen nach außen zunimmt. Aus Abb. 104 folgt

$$OO_1 = -\operatorname{tg}\omega\cdot\xi - p = \frac{p - l}{\eta}\xi - p$$

(der Kreis gleichmäßiger Öffnung);

$$OO_2 = -\operatorname{tg}\Omega\,\xi + p = -\frac{p + l}{\eta}\xi + p$$

(der Kreis, der noch an der Abbildung teilnimmt);

also

$$O_1O_2 = 2p\,\frac{\eta - \xi}{\eta}.$$

Das letztere ist die Breite des Ringes allmählicher Abblendung. Sie ist also der Öffnung der E.P. proportional und verschwindet mit ihr; ebenso, wenn der Abstand $\eta - \xi$ zwischen Gegenstand und E.L. zu Null wird.

Von P aus bestimmen die Kreise mit den Radien OO_1 und OO_2 die Winkel w_1 und w_2, indem

$$\frac{OO_1}{\xi} = -\operatorname{tg} w_1,$$

$$\frac{OO_2}{\xi} = -\operatorname{tg} w_2,$$

w_1 heiße der innere, w_2 der äußere Gesichtsfeldwinkel. Die früheren Gleichungen ergeben durch Division mit $-\xi$:

$$\operatorname{tg} w_1 = \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} U,$$

$$\operatorname{tg} w_2 = \operatorname{tg} \Omega + \operatorname{tg} U,$$

$$\frac{\operatorname{tg} w_1 + \operatorname{tg} w_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \Omega}{2} = \frac{l}{\eta} = \operatorname{tg} W.$$

Werden die Winkel ω und Ω stets so gewonnen, daß die beiden Ränder der E.P. mit dem unteren Rande der E.L. verbunden werden, so gelten die gewonnenen Gleichungen ohne Vorzeichenänderung auch für den Fall, daß die E.P. hinter der E.L. liegt, gleichgültig, ob $p < l$ oder $p > l$ (Abb. 106 u. 107).

Verwirklicht ist der Fall von Abb. 104 bei einer photographischen Linse mit Vorderblende. Diese bildet dann die E.P. Einer der Fassungsränder der Linse (wenn es nicht der vorderste Rand ist, so das dingseitige Bild eines Randes) bildet die E.L. Auch bei einer starken Lupe tritt der gleiche Fall auf, wenn ihre Öffnung so klein ist, daß sie die Strahlen mehr als die Augenpupille einschränkt. Sie ist dann die E.P., während das von der Lupe erzeugte Bild der Augenpupille die E.L. liefert. Der Fall von Abb. 106 ist bei einer schwächeren Lupe verwirklicht, deren Linsenöffnung, wie gewöhnlich, größer ist. Die Augenpupille wirkt hier als Öffnungsblende, ihr von der Linse in den Dingraum entworfenes Bild bildet also die E.P.; ebenso bei einem holländischen Fernrohr. Der Fall der Abb. 107 entsteht beim Übergang aus Bild 106 in Bild 104, wird also bei der Lupe auftreten.

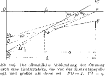


Abb. 106. Die allmähliche Abblendung der Öffnung durch eine Eintrittsluke, die vor der Eintrittspupille liegt und größer als diese ist. $PO = \xi$, $PL = \eta$, $PP_1 = p$, $PP_2 = -p$, $LL_2 = -l$.

96. Mehrere Eintrittsluken. Bei photographischen Objektiven mit mittlerer Blende wird der Fall von Abb. 106 auftreten können. Die E.P. liegt hier nahe der Öffnungsblende zwischen den Linsen; deren Fassungen begrenzen das Gesichtsfeld. Nun sind aber häufig mehrere Linsenfassungen so groß gemacht, daß ihre dingseitigen Bilder vom Mittelpunkt der E.P. gleich groß erscheinen. Man hat also den Fall mehrerer E.L. Abb. 108 zeigt zwei E.L., $l_1 l l_2$ und $L_1 L L_2$. Die Dingpunkte innerhalb des Kegels mit $L_2 P_2$ werden in ihrer Strahlung nur durch die E.P. begrenzt. Die Punkte außerhalb des Kegels mit $l_2 L_2$ sind ganz von der Abbildung

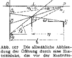


Abb. 107. Die allmähliche Abblendung der Öffnung durch eine Eintrittsluke, die vor der Eintrittspupille liegt und kleiner als diese ist. $PO = \xi$, $PL = \eta$, $PP_1 = p$, $PP_2 = -p$, $LL_2 = -l$.

ausgeschlossen. Die zwischen beiden Kegeln liegenden Gebiete werden im allgemeinen von der E.P. und einer der beiden Luken in ihrer Strahlung begrenzt, ihre Bündel zeigen also in der Ebene der E.P. ein Kreiszweieck nach Abb. 105. Die Punkte des in Abb. 108 schraffierten Gebietes werden aber außer von der E.P. auch von beiden Luken begrenzt und zeigen einen Querschnitt wie Abb. 109. Der Gesichtsfeldwinkel W nach unserer früheren Definition fällt mit der Grenze des überhaupt abgebildeten Gesichtsfeldes zusammen; vorher findet eine weit schnellere Abnahme der Bündelbreite (und wie wir später sehen werden, der Helligkeit) statt. Ausführlicher ist dieser Fall von M. v. ROHR[1]) behandelt worden.

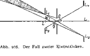


Abb. 108. Der Fall zweier Eintrittluken.

97. Mitwirkung anderer Blenden. Auch Blenden, die von P aus größer als die E.L. erscheinen, können die Abbildung gewisser Raumteile beschränken. Ebenso können für gewisse Dingpunkte mehrere E.P. auftreten. Alle diese Fälle sind analog den obigen einfach zu behandeln; sie spielen gelegentlich beim Bau verwickelter Geräte eine wichtige Rolle (z. B. bei Sehrohren, Entfernungsmessern).

β) Die Bedeutung der Hauptstrahlen.

98. Die Hauptstrahlen als Schwerlinien. Die Zeichnung auf der Auffangebene wird, sofern sie erkennbar ist, durch die Schwerlinie der Bündel bestimmt, die von den Dingpunkten ausgehen[2]). Ob und wie vollkommen diese im Bildraum in Bildpunkte vereinigt werden, braucht nicht untersucht zu werden, sobald es feststeht, daß auf der Auffangebene überhaupt eine Zeichnung erkennbar hervortritt. Daß die Bildorte gerade durch die Durchstoßungspunkte der Schwerlinien bestimmt sind, ist eine annehmbare, der Erfahrung entsprechende Näherung, die auf dem Boden der geometrischen Optik nicht weiter geprüft zu werden braucht.



Abb. 109. Der Querschnitt eines Bündels aus dem schraffierten Teile der Abb. 108 in der Ebene der E.P.

Die Schwerlinien der Bündel sind diejenigen Strahlen, die durch die Mitte der Öffnungsblende gehen, also nach der Definition von Ziff. 92 die Hauptstrahlen. Sie bestimmen also die Zeichnung auf der Auffangebene durch ihre Durchstoßungspunkte.

Dadurch, daß für seitliche Dingpunkte außer der Öffnungsblende auch andere Blenden einschränkend wirken können, wird für solche Punkte offenbar den Hauptstrahlen die Eigenschaft der Schwerlinien genommen. Die Schwerlinie solcher Bündel geht dann durch den Schwerpunkt der Kreiszweiecke von Abb. 105 oder der Kreisvierecke von Abb. 109. Doch kann dieser Unterschied nur bei feineren Untersuchungen von Bedeutung sein; denn wenn die Zer-

[1]) M. v. ROHR, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten, S. 488.

[2]) Daß die Schwerlinien der Bild-Strahlen-Bündel durch dieselben Strahlen gebildet sind wie die Schwerlinien der Bündel im Dingraum oder in dem Raum irgendeiner Zwischenabbildung, trifft immer zu, mit Ausnahme der seltenen Fälle, in denen das Büschel „zerklüftet" wird (s. oben S. 169).

streuungsflecke klein genug sind, um als Bildpunkt aufgefaßt zu werden, so ist offenbar eine kleine Verlegung ihres Schwerpunktes von geringem Einfluß. Dieser Einfluß würde sich dadurch zeigen, daß die Verkleinerung der Öffnungsblende eine Bewegung des scheinbaren Bildpunktes zur Folge hat. Dies kann in der Tat beobachtet werden. Man muß deshalb bei Messungen mittels optischer Bilder (s. unten) die mehrfache Öffnungsbeschränkung vermeiden.

99. Die Perspektive aufgefangener Bilder. Die Einstellungs- und die Mattscheibenebene. Da nach Ziff. 94 unter meist genügend zutreffenden Voraussetzungen das Hauptstrahlenbündel im Dingraum in der Mitte der E.P., im Bildraum in der Mitte der A.P. zusammentrifft, so findet bei den meisten optischen Geräten eine perspektivische Projektion statt, die der der Lochkamera vollkommen entspricht, nur daß die beiden Projektionsmittelpunkte hier getrennt sind, und daß die Hauptstrahlenwinkel in beiden Räumen einander im allgemeinen nicht gleich sein werden.

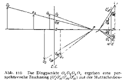


Abb. 110. Die Dingpunkte $O_1O_2O_3O_4$ ergeben eine perspektivische Zeichnung ($O'_IO'_{II}O'_{III}O'_{IV}$) auf der Mattscheibenebene (M.E.). Auf der Einstellebene (E.E.) kann das „dingseitige Abbild" ($O_IO_{II}O_{III}O_{IV}$) dieser Zeichnung konstruiert werden. P ist das Zentrum der Perspektive im Dingraum.

Seien in Abb. 110 $O_1O_2O_3O_4$ beliebige Dingpunkte, P der Mittelpunkt der E.P.; P' der Mittelpunkt der A.P., die Auffangebene sei durch O' gelegt, wir wollen sie hier nach M. v. Rohr in Anlehnung an die photographische Kamera Mattscheibenebene nennen und durch M.E. abkurzen. Die dingseitigen Hauptstrahlen setzen sich von P aus als bildseitige fort und durchstoßen die M.E. in $O'_I O'_{II} O'_{III} O'_{IV}$.

Alle Dingpunkte, die z. B. auf dem Hauptstrahle O_2P liegen, etwa o_2, werden in der Zeichnung auf der M.E. durch einen einzigen Punkt dargestellt. P ist also das Zentrum der Perspektive für die Aufnahme. Das Bild auf der M.E. kann nichts anderes sein als eine Wiedergabe der Projektionsfigur, die auf einer — zunächst beliebigen — Ebene des Dingraumes durch die dingseitigen Hauptstrahlen erzeugt wird. Das optische Gerät kann, wenn der Mittelpunkt der E.P. fest liegt, an dieser Zeichnung nichts ändern; nur der Maßstab der Wiedergabe (der im allgemeinen auch nicht im ganzen Bilde derselben sein wird) hängt von ihm ab.

Nehmen wir ferner an, daß der Dingpunkt O der zu O' konjugierte sei, so nennt man die durch ihn gelegte Ebene nach M. v. Rohr die Einstellungsebene (E.E.). Die Zeichnung $OO_IO_{II}O_{III}O_{IV}$ auf der E.E. heißt das „dingseitige Abbild". Wird, wie es beim photographischen Objektiv annähernd der Fall ist, die E.E. in die M.E. nach den Gesetzen der Kollineation abgebildet, so sind $O'O'_IO'_{II}O'_{III}O'_{IV}$ die konjugierten Punkte der obigen; die Aufgabe der Abbildung eines räumlichen Stückes ist zurückgeführt auf die der Abbildung einer Ebene der E.E., in eine andere, die M.E.

Werden auch die Nachbarebenen der E.E. ohne allzu große Fehler abgebildet, so sind den Dingpunkten im Bildraum die Punkte $O'_1O'_2O'_3O'_4$ konjugiert, doch

können diese für unsere Untersuchung außer Betracht bleiben, eben wie die Güte der Strahlenvereinigung in ihnen.

100. Räumliche Erscheinung. Die Zeichnung $O'O_I'O_{II}'O_{III}'O_{IV}'$ kann, z. B. mit Hilfe der Photographie festgelegt, den Eindruck der körperlichen Gegenstände hervorrufen. Dazu ist notwendig, daß sie dem Auge dieselben Hauptstrahlen vermittelt, die es erhalten hätte, wenn es sich in P befunden hätte: d. h. die Winkel bei dieser Betrachtung müssen den Hauptstrahlenwinkeln w bei der Aufnahme gleich sein; z. B. muß $O'O_{II}'$ dem Auge erscheinen unter dem Winkel $w_2 = OPO_{II}$; sonst wäre die Deckung von $o_2 O_2$ unverständlich, die Perspektive gefälscht. Der richtige Betrachtungsabstand ist also

$$a = O'O_{II}' : \operatorname{tg} w_2;$$

allgemein (ohne Rücksicht auf Vorzeichen)

$$a = y' : \operatorname{tg} w = \frac{y'}{y} \cdot \xi = \beta \xi = \xi : r,$$

wenn β die lineare Vergrößerung in den beiden konjugierten Ebenen oder $r = 1:\beta$ der „Reduktionsmaßstab" ist. Bei einem unendlich entfernten Gegenstand wird $y' : \operatorname{tg} w = f'$, der Brennweite der abbildenden Linsenfolge. Landschaftsaufnahmen müssen also im Abstande der Brennweite der Aufnahmelinse betrachtet werden. Wird aber im Fernrohr ein Luftbild betrachtet, so bedeutet die Forderung, daß es unter denselben dingseitigen Winkeln w erscheinen soll, nichts anderes, als daß die Fernrohrvergrößerung 1 sein soll (s. unten), was fast stets dem eigentlichen Zwecke des Fernrohrs widerspricht. Fernrohre geben also eine Fälschung der Perspektive, die um so stärker ist, je mehr ihre Vergrößerung von 1 abweicht.

101. Der SCHEINERsche Versuch. Nehmen wir vorübergehend einmal an, daß die Öffnungsblende zwei getrennte in derselben Achsenebene liegende Öffnungen enthalte. Der Versuch läßt sich mit dem Auge machen, wenn man ein Kartenblatt mit zwei feinen Löchern davorhält, die beide noch von der Pupille eingeschlossen werden. So entstehen zwei E.P., also zwei Projektionszentren im Dingraum; auf der E.E. liefern sie zwei Zeichnungen, z. B. zwei Punkte von einem Dingpunkt, die um so weiter voneinander entfernt sind, je weiter der Dingpunkt von der E.E. entfernt ist. Es wird also die E.E. selbst, das ist die Ebene, auf die das Auge akkommodiert, einfach, alle anderen doppelt gesehen werden.

102. Änderung der Perspektive durch Änderung des Strahlenganges. Beim freien Sehen liegt die Pupille in der Lichtrichtung stets hinter den Gegenständen. Nähere Gegenstände erscheinen größer; ihre Projektion auf die E.E. ist größer als die weiter entfernter Gegenstände von derselben linearen Größe. In Abb. 111 ist $AB = CD$; die Projektion von AB ist EF, die von DC ist EG; und $EG > EF$. Dieses Lagenverhältnis zwischen Pupille und Gegenständen ist fast stets bei optischen Geräten vorhanden, so daß die Perspektive die gewohnte und natürliche ist. („Entozentrischer Strahlengang" nach M. v. ROHR.)

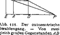


Abb. 111. Der entozentrische Strahlengang. — Von zwei gleich großen Gegenständen AB und CD gibt der vom Licht später erreichte CD die größere Projektion EG in der Einstellebene.

ABBE hat zuerst für Meßzwecke (s. unten) einen Strahlengang eingeführt, bei dem die E.P. im Unendlichen liegt, die Hauptstrahlen im Dingraum parallel verlaufen. In Abb. 112 ist eine Verwirklichung dieses Strahlenganges angegeben; die Blende P' liege in der hinteren Brennebene einer Linse. Gleich lange Strecken erscheinen stets gleich

lang, ob sie naher oder ferner sind. Diese Perspektive kann leicht bei der Lupe eintreten und ist oft im Mikroskop verwirklicht. Dieser Strahlengang heißt nach ABBE „telezentrisch“ nach der Dingseite.

Den dritten Fall hat M. v. ROHR entdeckt. Die E.P. kann in der Lichtrichtung vor die Gegenstände verlegt werden. Eine Verwirklichung zeigt Abb. 113, wo die Blende (z. B. das Auge, genauer sein Drehpunkt, s. unten) hinter einer Lupe liegt, so daß sie im Dingraum vor den Gegenständen abgebildet wird. Die vom Auge entferntere Strecke BA erscheint auf der E.E als Strecke EF; die gleich große nähere Strecke DC erscheint als EG; und $EG < EF$ („Hyperzentrischer“ Strahlengang).

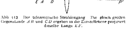


Abb. 112. Der telezentrische Strahlengang. Die gleich großen Gegenstände AB und CD ergeben in die Einstellebene projiziert dieselbe Länge EF.

103. Die Perspektive optischer Geräte in Verbindung mit dem Auge. Beim Hinzutreten des Auges zu optischen Geräten bleiben zwar die obigen Ableitungen in Geltung, die Auffangebene wird dann durch die Netzhaut gebildet. Es treten aber einige wesentliche Besonderheiten hinzu:

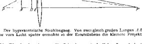


Abb. 113. Der hyperzentrische Strahlengang. Von zwei gleich großen Längen AB und CD ergibt die vom Licht später erreichte in der Einstellebene die kleinere Projektion EG.

a) Die Blende des Auges, die Iris, ist veränderlich. Im „freien“ Sehen, ohne optisches Gerät, bildet sie die Öffnungsblende und verändert ihren Durchmesser automatisch der Helligkeit entsprechend. Ihr dingseitiges Bild, die Augenpupille, schwankt zwischen etwa 2 mm bei Tageslicht und 8 mm bei Dunkelheit. Beim Sehen durch ein optisches Gerät würde die Iris, wenn sie nicht Öffnungsblende ist oder nicht wenigstens ihr Ort in dem der Öffnungsblende abgebildet wird (d. h. die A.P. am Orte der Augenpupille liegt), Gesichtsfeldblende sein, oder bei genügender Verengerung werden müssen; dann hinge das Gesichtsfeld von der Pupillengröße ab. Außer in seltenen Fällen (bei sehr starken Lupen und sehr starken holländischen Fernrohren) wird dieser Übelstand vermieden: Die Augenpupille begrenzt die Öffnung der aus dem Gerät austretenden Bündel und liefert somit dem Gerät die A.P.; oder der Ort der Augenpupille fällt wenigstens mit dem der A.P., wenn die Augenpupille größer ist, zusammen, so daß bei ihrer Verengerung der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen unverändert bleibt.

b) Das Gesichtsfeld des ruhenden Auges ist nur in einem Bereiche von einigen Winkelminuten zu benutzen, da die Empfindlichkeit außerhalb des „gelben Fleckes“ der Netzhaut sehr gering ist. Das Auge wird jedoch in seiner

Höhle gedreht und so nacheinander auf Punkte eines großen Gesichtsfeldes gerichtet. Im freien Sehen ist also bei ruhendem Auge seine E.P., also die Augenpupille, das Zentrum der Perspektive für das Netzhautbild, bei bewegtem, „blickendem" Auge der Augendrehpunkt, der etwa 10,5 mm hinter der Pupille liegt. Das Nacheinander des so entstehenden Bildes kommt bei der Kürze der „Augenblicke" nicht zum Bewußtsein. Bei ruhendem Auge decken einander Dingpunkte, die auf demselben Hauptstrahl des Auges (auf derselben Visierlinie nach der Bezeichnung von Helmholtz) liegen; bei bewegtem Auge, solche, die auf derselben Blicklinie liegen, wobei die Blicklinien durch den Augendrehpunkt gehen. Da man gewöhnt ist, alle Punkte zu „fixieren", anzublicken, die die Aufmerksamkeit auf sich ziehen, so kommt von selbst nur die Perspektive der Blicklinien, die „Haupt"perspektive zum Bewußtsein. (Im Gegensatz dazu heißt die Perspektive des ruhenden Auges „Fall"perspektive). Im übrigen ist der Unterschied in den meisten Fällen kaum erkennbar, da die beiden Projektionszentren eng benachbart sind und das wahrgenommene Gesichtsfeld des ruhenden Auges sehr klein ist.



Abb 114. Der Augendrehpunkt als Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen. Als Beispiel: Die Brille.

Beim Sehen durch optische Geräte können wir folgende Fälle unterscheiden:

1. Am Orte der Augenpupille befindet sich kein anderes Blendenbild (Brille, Lupe, holländisches Fernrohr). Das Auge dreht sich wie beim freien Sehen um seinen Kugelmittelpunkt. Zu Hauptstrahlen des Gerätes werden die Blicklinien des Auges; sie schneiden sich im Dingraum in einem Punkt P, der dem Augendrehpunkt P' konjugiert ist (Abb. 114). Die kleinste vom Gerät gelieferte Blende bestimmt das Gesichtsfeld, wenn sie, wie gewöhnlich, größer als die Augenpupille ist. Je kleiner diese Blende ist, um so mehr neigt man dazu, den Kopf gegen das Gerät zu verschieben. (Diese Verschiebung ist bei der Brille unmöglich, bei der also der Augendrehpunkt stets streng den Schnittpunkt der Hauptstrahlen liefert.) Beim Blicken nach rechts z. B. verschiebt sich der Kopf nach links, so daß durch die Zusammensetzung beider Bewegungen sich eine Drehung um einen Punkt zwischen A.P. des Geräts und Augendrehpunkt ergibt. Ist diese Blende sehr klein, wie bei starken Lupen und starken holländischen Fernrohren, wo sie schließlich Öffnungsblende wird, so verschiebt sich der Kopf so stark, daß der Drehpunkt der zusammengesetzten Bewegung ganz in das Bild dieser Blende, die A.P. des Gerätes, fällt („Schlüssellochbeobachtung" nach M. v. Rohr; Abb. 115).

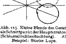


Abb. 115. Kleine Blende des Geräts als Schnittpunkt der Hauptstrahlen (Schlüssellochbeobachtung). Als Beispiel: Starke Lupe.

2. Am Orte der Augenpupille liege ein Blendenbild, die A.P. des Gerätes. (Dies ist bei allen zusammengesetzten Geräten mit positivem Okular der Fall.) Diese ist fast nie so groß, daß sich das Auge bei ruhendem Kopfe um seinen Mittelpunkt drehen kann, ohne daß die Augenpupille aus der A.P. des Gerätes heraustritt (sie müßte dazu bei $w' = 20°$ und 2 mm Augenpupille einen Durchmesser von 9,7 mm haben). Bei kleiner A.P. wird wiederum der Kopf verschoben, so daß sich auch hier ein Drehpunkt ergibt, der näher an der A.P. liegt (Abb. 116). Bei kleiner A.P. und kleiner Augenpupille wird der Drehpunkt ganz in die A.P.

verlegt. In ihr schneiden sich also die Hauptstrahlen, und das ist bei der Beobachtung durch Mikroskope und stärkere Fernrohre (außer den sog. Nachtgläsern, die sehr große A.P. haben) immer anzunehmen. Abb. 117 stellt diesen Fall dar.

104. Die Größe aufgefangener Bilder. In Ziff. 97 hatten wir die Darstellung der im Raum verteilten Gegenstände auf einer Auffangfläche auf die Darstellung einer Dingebene in eine Bildebene zurückgeführt. Wäre diese Aufgabe für endliche ebene Stücke mit Hilfe der optischen Abbildung, also der Vereinigung der von einem Dingpunkte ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt, streng lösbar, so brauchte man die wirklichen, das Bild erzeugenden Strahlen nicht zu betrachten; es wäre gleichgültig, welche von ihnen an der Abbildung teilnehmen. In Wirklichkeit ist die Aufgabe nur annähernd zu lösen. Wir finden in jeder Auffangebene bei endlicher Öffnung Zerstreuungsflecke, die wir als Bildpunkte auffassen. Freilich wird für einen Bereich der Dingebene die Auffangebene so gewählt werden können, daß sie wenigstens die Punkte bester Strahlenvereinigung enthält. Jedenfalls aber erhalten wir auf ihr, sobald überhaupt ein Bild erkennbar ist, die Lage der Bildpunkte durch die Hauptstrahlen. Wir brauchen im folgenden nicht einmal anzunehmen, daß die beiden Ebenen einander optisch für achsennahe Strahlen konjugiert seien; und werden diese Annahme jedesmal hervorheben, wenn wir sie einführen. Trotzdem gebrauchen wir für die Durchstoßungspunkte der bildseitigen Hauptstrahlen, ihre Achsenabstände und deren Verhältnisse der Einfachheit halber die sonst für optische Bilder gebrauchten Zeichen: Die beiden Ebenen seien in O und O' senkrecht zur Achse errichtet. O_1' entspricht O_1. Die Schnittpunkte der Hauptstrahlen im Ding- und Bildraum seien P und P'; zunächst brauchen diese Punkte nicht unabhängig von der Wahl der Punkte O und O_1 zu sein, da die Mitte der Öffnungsblende nicht ohne Aberrationen nach den beiden Räumen abgebildet sein wird. Setzt man dann



Abb. 116. Große A.P. Der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen liegt zwischen A.P. und Augendrehpunkt.



Abb. 117. Eine kleine A.P. bildet den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen.

$$PO = \xi, \qquad P'O' = \xi',$$

so ist (Abb. 118)

$$\operatorname{tg} w = \frac{O O_1}{O P} = -\frac{y}{\xi}; \qquad \operatorname{tg} w' = \frac{O' O_1'}{O' P'} = -\frac{y'}{\xi'}, \tag{1}$$

$$\frac{y'}{y} = \beta = \frac{\xi'}{\xi}\,\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \frac{\xi'}{\xi}\,\Gamma, \tag{2}$$

wo Γ die Winkelvergrößerung in den Pupillen ist und bei aberrationsfreier Abbildung der Öffnungsblende in die Pupillen durch Γ_0, den Wert für achsennahe Strahlen, ersetzt werden könnte. Dann ist nach den Regeln der kollinearen Abbildung auch

$$\beta = \frac{n}{n'}\,\frac{\xi'}{\xi} : B_0, \tag{3}$$

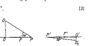


Abb. 118. Der Maßstab des Bildes. $OO_1 = y$, $O'O_1' = y'$, $PO = \xi$, $P'O' = \xi'$, $FO = x$, $F'O' = x'$, $FP = X$, $F'P' = X'$. Links oben ist O durch O_1 zu ersetzen.

wo B_0 das Vergrößerungsverhältnis in den Pupillen ist.

Liegen die Pupillen in den Hauptpunkten, so ist $B_0 = 1$ und

$$\beta = \frac{n}{n'}\,\frac{\xi'}{\xi}\,.$$

Dies ist stets annähernd der Fall, wenn die Linsen eng an der Öffnungsblende stehen.

105. Messung von Gegenstandsgrößen durch Messung des Bildes. Mehrere optische Geräte dienen dazu, die Größe eines Gegenstandes durch Ausmessen seines Bildes festzustellen (Meßmikroskop). Gewöhnlich ist eine Glasplatte mit einer Teilung (Strichplatte), seltener Meßfaden, fest angebracht, deren Ebene die Auffangebene bildet. Mit dieser Teilung wird das Bild verglichen. Den Wert des Teilstriches bestimmt man durch einen Gegenstand bekannter Größe, z. B. eine bekannte Teilung. Hierbei ist ξ' stets dasselbe, ξ dagegen wird nur dadurch einigermaßen gleichmäßig, daß stets auf Bildschärfe eingestellt wird. Diese störende Abhängigkeit von ξ ist durch die obige Gleichung gegeben; sie kann aber nach ABBE durch Einführung des auf der Dingseite liegenden telezentrischen Strahlenganges (Ziff. 100) beseitigt werden.

Sind die auf die Brennebenen bezogenen Abszissen des Gegenstandes und der Auffangebene x, x', der Pupillen X, X', so daß $FO = x$, $F'O' = x'$, $FP = X$, $F'P' = X'$, so ist

$$\xi = x - X\,; \qquad \xi' = x' - X'\,.$$

Bei kollinearer Abbildung der Pupillen gilt

$$\Gamma_0 = \frac{X}{f'}\,, \text{ also ergibt (2)}$$

$$\beta = \frac{1}{f'}\,\frac{\xi'}{x/X - 1}\,. \tag{4}$$

β wird für $X = \infty$ unabhängig von x, wie auch aus Abb. 119 hervorgeht: Bei parallelen dingseitigen Hauptstrahlen hat die Verschiebung des Gegenstandes auf die Vergrößerung des „Bildes", das in einer festen Ebene aufgefangen wird, keinen Einfluß. Der Reduktionsfaktor $(1:\beta)$ eines solchen Meßmikroskopes ist also von der Schärfe der Einstellung auf den Gegenstand unabhängig.



Abb. 119. Nach der Gegenstandsseite telezentrischer Strahlengang. Wird der Gegenstand von O_1O_2 nach R_1R_2 verschoben, so verschiebt sich zwar sein Bild von $O_1'O_2'$ nach $R_1'R_2'$, die Zeichnung in der Auffangebene bleibt aber gleich groß, weil die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen dieselben bleiben.

106. Messung von Gegenstandsentfernungen durch Messen des Bildes. Bei der Tachymetrie ist umgekehrt die Größe eines Gegenstandes bekannt, und es soll ein von einem Fernobjektiv erzeugtes Bild mit einer die Auffangebene bildenden Strichplatte gemessen werden, um seinen Abstand kennenzulernen. Hierfür gilt nach (2)

$$\xi = \frac{\xi'}{\beta}\,\Gamma\,; \qquad \text{oder auch} \qquad \xi = \frac{f'}{\beta}\,\Gamma_0\,, \tag{5}$$

falls die Pupillen kollinear abgebildet werden. Gewöhnlich nimmt man an, daß ξ' jedesmal so eingestellt wird, daß wirklich die Auffangebene mit der Ebene des optischen Bildes zusammenfällt. Dann braucht man die Hauptstrahlen nicht

zu betrachten und der Abstand des Gegenstandes von der vorderen Brennebene des Objektives folgt z. B. nach Gleichung (18a), Ziff. 19 aus

$$x = -f : \beta .$$

Setzen wir dagegen in die Gleichung (5) $\xi' = x' - X'$, so folgt aus $\Gamma_0 = f : X'$

$$\xi = -\frac{f}{\beta}\left(1 - \frac{x'}{X'}\right). \tag{6}$$

Die strengere Betrachtung fuhrt also zu einem Pupillenabstand, der sich von dem Brennpunktabstand der vorigen Formel um ein Korrektionsglied unterscheidet, das von x', d. h. davon abhängt, wohin man die Auffangebene (die Ebene der Faden) verlegt. Will man diesen Einfluß unschädlich machen, so kann man $X' = \infty$ wählen, d. h. die E.P. in den vorderen Brennpunkt des Objektives verlegen. Abbe nannte diesen Strahlengang telezentrisch nach der Bildseite. Die Hauptstrahlen verlaufen im Bildraum parallel zur Achse (Abb. 120).

Abbe hat auch sogleich darauf hingewiesen, daß sich dieser Strahlengang in einem Fernrohr verwirklichen läßt, ohne dem Objektiv seine gewöhnliche Benutzungsweise, bei der sich die Hauptstrahlen etwa in seiner Mitte kreuzen, zu nehmen. Es braucht nur hinter dem Objektiv eine Linse angebracht zu werden, deren Brennpunkt ins Objektiv (die E.P.) fällt; liegt sie nahe der Bildebene, so ist sie auch auf das Bild selbst ohne Einfluß, so daß sie nicht einmal achromatisch zu sein braucht.



Abb. 120. Nach der Bildseite telezentrischer Strahlengang. Die Zeichnung auf der Auffangebene ist dieselbe, ob in O' oder K' eingestellt wird.

Es könnte auch der Fall vorkommen, daß bei einem Meßmikroskop sowohl der Dingabstand als der Abstand der Meßfäden, also ξ und ξ', veränderlich ist. Will man trotzdem den Reduktionsfaktor unveränderlich machen, so kann man den Strahlengang nach Abbe sowohl nach der Ding- als nach der Bildseite telezentrisch machen. Ein solches Mikroskopobjektiv besteht aus zwei Sammellinsen mit gemeinsamem Brennpunkte, in dem sich die Öffnungsblende befindet. Dieses Linsenpaar ist also teleskopisch und seine E.P. und A.P. liegen im Unendlichen.

107. Messung scheinbarer Winkel durch Messen des Bildes. Oft, insbesondere bei entfernten Gegenständen, handelt es sich um die Bestimmung der scheinbaren Größe w, aus der Bildgröße y'. Hier ist

$$\frac{y'}{\operatorname{tg} w} = -\xi' \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = -\xi' \Gamma \tag{7}$$

bei aberrationsfreien Pupillen:

$$\frac{y'}{\operatorname{tg} w} = -\xi' \Gamma_0 = -\frac{\xi'}{X'} f = f\left(1 - \frac{x'}{X'}\right). \tag{8}$$

Der durch x' und durch X' gegebene Einfluß der Lage der Strichplatte verschwindet sowohl, wenn die Auffangebene in der Brennebene errichtet ist, für die $x' = 0$ ist (die wahren optischen Bilder können auch an anderer Stelle liegen) als auch für $X' = \infty$, d. h. für nach der Bildseite telezentrischen Strahlengang.

108. Messung mit Doppelbildmikrometern. Bei manchen Geräten, die zu den drei oben beschriebenen Meßzwecken verwendet werden, also zur Bestimmung der Gegenstandsgröße, der Gegenstandsentfernung, der scheinbaren Gegenstandsgröße, fehlen Strichplatte oder Meßfäden. Die Messung kommt dadurch zustande, daß zwei verschiedene Linsenfolgen L_1 und L_2 so ineinander

gebaut sind, daß der Dingraum oder die Dingebene und die Bildebene beiden gemeinsam ist. Dann gehören zwei Bildpunkte zu einem Dingpunkt und zwei Dingpunkte zu einem Bildpunkt. Die Messung besteht darin, daß die beiden Linsenfolgen gegeneinander so verschoben werden, daß gerade die Bildpunkte O_1' und O_2' derjenigen Dingpunkte zusammenfallen, deren gegenseitiger Abstand ermittelt werden soll (Ausmessung eines Gegenstandes), oder deren gegenseitiger Abstand bekannt ist und zur Ermittlung der Gegenstandsentfernung dienen soll (Meßlatte in der Tachymetrie), oder deren scheinbarer Winkel festzustellen ist (Messung der Sonne oder von Sternenabständen mit dem Heliometer).

Die Auffangebene ist in diesem Falle diejenige, auf die der Augenhintergrund durch die optischen Mittel des Auges und das Okular des Mikroskopes oder Fernrohrs abgebildet wird. Sie ist also veränderlich bei Änderung der Akkommodation des Auges, durch die die Netzhaut verschiedenen Entfernungen konjugiert wird. Eine solche Verschiebung der Auffangebene wird an Stelle der zusammenfallenden Bildpunkte O_1' und O_2' stets dann Zerstreuungskreise ergeben, deren Mittelpunkte nicht zusammenfallen, wenn die Hauptstrahlen, die nach den zusammenfallenden Bildpunkten gerichtet sind, verschieden sind. So werden z. B. beim Heliometer die Doppelbilder dadurch erzeugt, daß zwei Linsenhälften gegeneinander verschoben werden. Wenn jede dieser Hälften ihre getrennte Blende hat, die Blenden also an der Verschiebung teilnehmen, so werden die den gemeinsamen Bildpunkt erzeugenden Hauptstrahlen in der Meßebene gegeneinander geneigt sein. Änderungen der Akkommodation werden bewirken, daß das Zusammenfallen zweier Dingpunkte in einem Bildpunkt aufhören. ABBE schlug deshalb vor, die Blende an der Verschiebung der Halblinsen nicht teilnehmen zu lassen, dann fallen die Hauptstrahlen oder wenigstens ihre Projektionen auf die Meßebene zusammen und die Einstellung wird unempfindlich gegen die Akkommodation. Dasselbe würde erreicht werden, wenn die beiden Blenden der Linsenhälften so angebracht sind, daß in jeder der beiden Hälften telezentrischer Strahlengang nach der Bildseite entsteht.

Bei einem Meßmikroskop mit veränderlichem Dingabstand muß hierzu noch der dingseitige telezentrische Strahlengang hinzutreten. ALB. KÖNIG[1]) hat solche Anordnungen angegeben, die zum Ausmessen von Gegenständen bestimmt sind.

109. Die Vergrößerung beim Sehen durch optische Geräte. Lupenvergrößerung, Fernrohrvergrößerung, Ablesevergrößerung. Die Frage nach der Vergrößerung, die ein optisches Gerät beim Betrachten eines Gegenstandes darbietet, hat keinen eindeutigen Sinn. Zwar handelt es sich stets darum, Gegenstände deutlicher oder überhaupt sichtbar zu machen, also unter größerem Sehwinkel erscheinen zu lassen, aber der erreichte Vorteil muß in verschiedenen Fällen verschieden bewertet werden.

Beim freien Sehen wäre der größere Sehwinkel grundsätzlich stets durch Annäherung des Auges zu erreichen. Gewöhnlich findet diese Annäherung ihre Grenze in der Beschränkung der Akkommodation (der Einstellung des Auges auf die Nähe). Man hilft sich dann etwa mit einer Lupe oder einem Mikroskop, die die Akkommodation ersetzen. Das Maß dieser „Lupenvergrößerung" ist das Verhältnis des Sehwinkels, unter dem ein Gegenstand durch das Gerät erscheint, zu dem Sehwinkel, unter dem er bei erträglicher Akkommodation (nach der üblichen Bemessung bei 250 mm Abstand, der sog. deutlichen Sehweite) erscheinen würde. Die Lupenvergrößerung ist also zu bestimmen als

$$N_L = \operatorname{tg} w' : (y/250). \tag{9}$$

[1]) ALB. KÖNIG, Deutsches Patent Zeiss Nr. 399846 vom 1. April 1923.

Die Winkel w' sind hierbei vom bildseitigen Schnittpunkt der Hauptstrahlenbündel aus zu rechnen. Daß dieser verschieden liegen kann, ist oben (**101**) auseinandergesetzt. Wir werden darauf im folgenden keine Rücksicht mehr nehmen und diesen Punkt kurz als „Augenort" oder mit P' bezeichnen.

Anders muß der Vorteil des optischen Gerätes bemessen werden, wenn beim freien Sehen die Annäherung des Auges nicht durch die beschränkte Akkommodation ihre Grenze findet, sondern in äußeren Umständen. Das Gerät soll dann die Annäherung nicht ermöglichen, sondern ersetzen.

Hier sind noch zwei Fälle möglich. Kann man das Auge dem Gegenstande ebensoviel nähern, wie auch die E.P. des Gerätes[1]), so besteht die vom Gerät dargebotene Leistung nur in der Ausbreitung des Hauptstrahlenbündels auf einen größeren Winkel. Diese „Fernrohrvergrößerung" bestimmt sich also durch das Verhältnis der Tangenten des Winkels, unter dem ein Gegenstand durch das Gerät erscheint und des Winkels, unter dem er erschiene, wenn man das Auge an die Stelle der E.P. des Gerätes setzt, also als

$$N_F = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \Gamma. \tag{10}$$

Diese Definition behält ihre Bedeutung auch bei der Betrachtung unendlich entfernter Gegenstände.

Der andere Fall liegt dann vor, wenn das Auge infolge der äußeren Umstände sich dem Gegenstande nicht so weit nähern konnte, wie die E.P. des Gerätes es kann, wie bei der Betrachtung einer Körperhöhle oder eines Rohrinnern durch Innensehrohre; oder bei der Ablesung einer Wage. Die Entfernung des Augenortes P' vom Gegenstande ist dann als fest anzusehen. Um den Vorteil des Geräts abzuschätzen, muß man die scheinbare Größe des Bildes im Gerät mit derjenigen vergleichen, die der Gegenstand besitzen würde, wenn das optische Gerät zwischen ihm und dem Auge entfernt würde, ohne daß sich Gegenstand und Auge verschieben; d. h. mit dem Winkel, unter dem der Gegenstand von der A.P. des Gerätes aus im freien Sehen erscheinen würde. Die so bestimmte „Ablesevergrößerung" ist

$$N_A = \operatorname{tg} w' : (y/(A + \xi)), \tag{11}$$

wenn $A = PP'$ den Abstand zwischen der E.P. und der A.P. bezeichnet.

Erfle[2]) hat zuerst diese drei Definitionen nebeneinander gestellt und darauf aufmerksam gemacht, daß bei demselben Abbildungsvorgange die eine oder die andere zweckmäßig ist, je nach dem Verwendungszweck des Gerätes.

Aus den Definitionen folgt:

$$N_F = N_L \frac{\xi}{250} = N_A \frac{\xi}{A + \xi},$$

$$N_A = N_F \left(1 + \frac{A}{\xi}\right).$$

Denken wir uns als Beispiel ein Fernrohr mit fünffacher Vergrößerung mit positivem Okular, dessen Objektiv die E.P. ist und 200 mm von der A.P. entfernt liegt und das mit einer Sammellinse von 100 mm Brennweite verbunden ist, eine Einrichtung, wie sie z. B. zur Betrachtung eines Rohrinnern benutzt werden könnte, und die einen Gegenstand in 100 mm Abstand vom Objektiv scharf erkennen ließe. Das Gerät leistet folgendes:

[1]) Man denke sich z. B. vor einem engen Gitter stehend, in das weder das Auge noch das Gerät eintreten kann.

[2]) H. Erfle, D. Opt. Wochenschr. Bd. 7, S. 345. 1921.

1. Man erkennt 12,5mal kleinere Einzelheiten als beim Betrachten in deutlicher Sehweite (250 mm). Die Lupenvergrößerung ist also $N_L = 12{,}5$.

2. Man erkennt 5mal kleinere Einzelheiten, als wenn man das Auge in die E.P. bringt. (Dies wäre z. B. ohne Akkommodation möglich, wenn man die Vorsatzlinse als Lupe verwendet.) Es ist also die Fernrohrvergrößerung $N_F = 5$.

3. Man kann 15mal so feine Einzelheiten unterscheiden als mit bloßem Auge am Rohrende. Es ist also die Ablesevergrößerung $N_A = 15$.

110. Die Abbesche „Vergrößerung". Man kann die Bestimmung der Lupenvergrößerung von der willkürlichen Wahl der deutlichen Sehweite befreien, wenn man sie nach Abbe als den Tangens des Bildwinkels definiert, unter dem die Längeneinheit erscheint. Diese Definition führt auf die Abbesche Lupenvergrößerung, die wir auch schlechthin die Vergrößerung nennen wollen:

$$V = \frac{\operatorname{tg} w'}{y} = -\frac{y'}{y}\,\frac{1}{\xi'} = -\frac{\beta}{\xi'} = N_L : 250. \tag{12}$$

Während die obigen Bestimmungen alle auf reine Maßzahlen führten, ergibt diese das Reziproke einer Länge. Diese Länge ist offenbar der Abstand vom Augenort, aus dem der Gegenstand unmittelbar angesehen werden müßte, um ebenso groß zu erscheinen als durch das optische Gerät.

Nehmen wir nun an (Abb. 121), daß in O' nicht nur die Auffangebene, sondern auch das verzeichnungsfreie Bild der Gegenstandsebene liege, so ist $\beta = \beta_0 = -x'/f'$ und mittels $\xi' = x' - X'$

$$V = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right). \tag{13}$$

Gegen das erste Glied dieses Ausdrucks, den Kehrwert der hinteren Brennweite, die Stärke der Linsenfolge, ist das zweite meist sehr klein, da die benutzte Sehweite groß ist gegen den Brennpunktsabstand des Schnittpunktes der bildseitigen Hauptstrahlen. Beim zusammengesetzten Mikroskop ist X' gewöhnlich sehr klein. Starke Mikroskopobjektive sind sogar telezentrisch, so daß auch für das ganze Mikroskop $X' = 0$ ist. Das Zusatzglied verschwindet ferner vollständig, wenn das Auge auf ∞ akkommodiert ist, was für normalsichtige Augen stets angestrebt werden soll. So „bedeutet das Zusatzglied nur eine kleine Korrektion, und diese Korrektion hängt nur von der Sehweite und dem Augenorte ab. Der einfache reziproke Wert der Brennweite liefert daher in allen Fällen das geeignete Maß für die Vergrößerungskraft eines Linsensystems, weil es denjenigen Bestandteil der Vergrößerung ausdrückt, der dem System eigentümlich ist und der unabhängig von den mannigfachen Verhältnissen ist, unter denen es benutzt wird[1])". $1:f'$ möge deshalb als das Vergrößerungsvermögen der Linsenfolge bezeichnet werden.

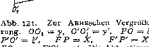


Abb. 121. Zur Abbeschen Vergrößerung. $OO_1 = y$, $O'O_1' = y'$, $PO = \xi$, $P'O' = \xi'$, $FP = X$, $F'P' = X'$, $FO = x$, $F'O' = x'$. Die Abb. stimmt mit Abb. 118 überein bis auf die umgekehrte Lage der A.P. zum Bilde (ξ' hier negativ, wie für subjektive Beobachtung gewöhnlich).

Daß die scheinbare Größe des Bildes von der Lage des Gegenstandes unabhängig ist, falls der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen in die Brennebene der Bildseite fällt, folgt aus unserer Voraussetzung, daß es sich um wirkliche Bilder handelt, nach den allgemeinen Regeln der Kollineationslehre; denn ein Strahl,

[1]) E. Abbe, Journ. Royal Microsc. Soc. (2) Bd. 4. S. 350. 1884; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 448.

der im Bildraum den Brennpunkt unter dem Winkel w' gegen die Achse schneidet, verläuft im Dingraum achsenparallel im Abstande $y = f' \operatorname{tg} w'$. Da ein Gegenstand der Größe y stets zwischen diesem Dingstrahl und der Achse liegt, so mussen alle Bilder y' vom Brennpunkte aus unter demselben Winkel w' erscheinen. Aus dieser Betrachtung ergibt sich auch, wie sich die scheinbare Größe ändert, wenn die Bilder nicht mehr vom Brennpunkt aus, sondern von einem davor oder dahinter gelegenen Achsenpunkte betrachtet werden, wie also von der telezentrischen Perspektive zur ortozentrischen, wo nahere Gegenstände größer erscheinen und zur hyperzentrischen, wo nahere Gegenstande kleiner erscheinen, ubergangen werden kann).

Aus der Definition fur V folgt auch

$$N_F = V \cdot \xi . \qquad (14)$$

111. Die Verzeichnung. Da die Vergrößerung aufgefangener und die scheinbare Vergrößerung gesehener Bilder vom Verlauf der Hauptstrahlen gegeben ist, so muß es auch die Verzeichnung sein; denn sie ist nichts anderes als die Abhangigkeit der Vergrößerung von der Größe des Gegenstandes oder vom Hauptstrahlwinkel w. Um die Vorstellung eindeutig zu machen, betrachten wir zunachst den Fall aufgefangener Bilder.



Abb 122 a) Verzeichnungsfreies Bild eines quadratischen Netzes. b) Dasselbe kissenformig verzeichnet c) Dasselbe tonnenformig verzeichnet

Verzeichnungsfreiheit oder Bildtreue bedeutet hier die Unveranderlichkeit von $\beta = y' : y$ für beliebige y. Ist sie erreicht, so wird ein quadratisches Netz als ebensolches abgebildet (Abb. 122a); nimmt die Vergrößerung mit dem Achsenabstande zu, so wird eine nicht durch die Achse gehende Gerade nach innen durchgebogen abgebildet (Abb. 122b); nimmt die Vergrößerung mit dem Achsenabstande ab, so wird sie nach außen durchgebogen (Abb. 122c). Man spricht in diesen Fällen von kissenförmiger und von tonnenförmiger Verzeichnung. Man definiert nach WANDERSLEB[1]) die Verzeichnung durch

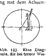


Abb. 123. Eine Dinglinie, die bei treuer Wiedergabe nach $\bar{A}\bar{B}$ abgebildet wurde, erscheint bei AB, weil die Vergrößerung sich mit dem Abstande von O andert.

$$\mathfrak{V} = \frac{y'/y}{(y'/y)_0} - 1 = \frac{\beta}{\beta_0} - 1 \text{ appr} = \frac{\beta - \beta_0}{\beta},$$

$$\beta = \beta_0 (1 + \mathfrak{V}) .$$

Hierin bedeuten y' wie oben stets die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen in der Auffangebene und β das entsprechende Verhältnis zu y; der Index O bezeichnet dieselben Werte für unendlich kleine Strahlenneigung. Dieser Ausdruck ergibt unmittelbar die Durchbiegung der Quadratseite in Abb. 123, denn es ist nach obigem

$$OA = y_1 \beta_1 = y_1 \beta_0 (1 + \mathfrak{V}_1) ,$$

$$OB = y_2 \beta_2 = y_2 \beta_0 (1 + \mathfrak{V}_2) .$$

1) E. WANDERSLEB, ZS. f. Instrkde. Bd. 27, S. 33. 1907.

Da aber

$$OC = OB\,\frac{OA}{OB} = OB\,\frac{y_1}{y_2}\,,$$

so ist die Durchbiegung

$$AC = OC - OA = y_1\beta_0(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1)\,.$$

Sind die Pupillenmitten frei von sphärischer Aberration, d. h. schneiden sich alle Hauptstrahlen in diesen Punkten, so ist die Unveränderlichkeit von $y':y$ für verschiedene y (oder verschiedene w), da zu allen Bildgrößen derselbe Achsenpunkt des Hauptstrahles, also dasselbe ξ und ξ' gehört, nach Gleichung (1) Ziff. 104 gleichbedeutend mit der Unveränderlichkeit von $\operatorname{tg} w' : \operatorname{tg} w$; es folgt also

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \frac{\operatorname{tg} w_0'}{\operatorname{tg} w_0} = \Gamma_0\,, \tag{I}$$

Dies ist die von AIRY[1]) zuerst aufgestellte Bedingung der Verzeichnungsfreiheit, die Tangentenbedingung.

Die Hauptstrahlen sind aber für die Pupillenmitten, wenn man diese als Gegenstand und Bild betrachtet, die Strahlen des abbildenden Bündels. Wenn ein unendlich kleines Flächenelement in ein anderes abgebildet werden soll, so müssen außer der Beseitigung der sphärischen Aberration die abbildenden Strahlen ein konstantes Verhältnis ihrer Sinus besitzen (Sinussatz nach Ziff. 62). Die Pupillen können also, wenn die Verzeichnung mittels der Tangentenbedingung aufgehoben worden ist, nicht ohne starke Bildfehler aufeinander abgebildet sein.

Sind umgekehrt eine Dingebene und eine Bildebene gut aufeinander abgebildet, so ist außer der Hebung der sphärischen Aberration des Achsenpunktes das Verhältnis der Sinus der abbildenden Büschel konstant. Verlegt man nun in diese Ebenen durch Anbringen entsprechender Blenden die E.P. und A.P., so muß eine andere Dingebene bei der Abbildung eine im voraus zu bestimmende Verzeichnung erleiden. Diesen Umstand benutzte ABBE[2]) zur Prüfung der Mikroskopobjektive auf die Erfüllung der Sinusbedingung. Eine Schar von Hyperbeln mit gleichen Mittelpunkten und gleichen Nebenachsen, aber verschieden großer Hauptachse wurden in der Abbildung als eine Schar von Geraden gleichen Abstandes wiedergegeben.

Im allgemeinen muß aber die Tangentenbedingung wegen der sphärischen Aberration der Pupillen durch die strenge Bedingung ersetzt werden, die auf ABBE zurückgeht und zuerst von M. v. ROHR[3]) aufgestellt wurde. Unmittelbar aus Gleichung (1) Ziff. 104 folgt

$$\frac{y'}{y} = \frac{\xi'}{\xi}\,\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{konst.}$$

Ein Strahl sehr kleiner Neigung durch den Mittelpunkt B der Öffnungsblende möge im Dingraum die Achse in P_0, im Bildraum in P_0' schneiden (Abb. 124); Strahlen endlicher Neigung w in P und P', welche Punkte von P_0 und P_0' um die kleinen Größen δ und δ', die Längsaberration der Hauptstrahlen, entfernt seien. Dann ist

$$\xi = \xi_0 + \delta\,; \qquad \xi' = \xi_0' + \delta'\,;$$

die Bedingung der Verzeichnungsfreiheit also

$$\frac{\xi_0' + \delta'}{\xi_0 + \delta}\,\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{konst.} \tag{II}$$

[1]) G. B. AIRY, Trans. Cambr. Phil. Soc. Bd. 3, S. 1—64. 1827.
[2]) E. ABBE, Carls Repert Bd. 16, S. 303. 1880; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 213.
[3]) M. v. ROHR, ZS. f. Instrkde. Bd. 17, S. 271—277. 1897.

Um diese zu erfüllen, kann man [Bow[1]) und Sutton[2])] zu der Airyschen Tangentenbedingung (I) hinzufügen

$$\delta = \delta' = 0. \tag{Ia}$$

Werden diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist die Linsenfolge für alle Gegenstandsentfernungen verzeichnungsfrei.

(II) enthält zwei Faktoren, die beide von w abhängen. Beide weichen nur wenig von dem für sehr kleine w gültigen Werte ab. M. v. Rohr zeigte durch eine Reihenentwicklung, daß für jede Linsenfolge eine Gegenstandsentfernung vorhanden ist, bei der in erster Annäherung für kleine w die Veränderung des ersten Faktors durch die des zweiten ausgeglichen wird, also keine Verzeichnung eintritt. Verzeichnungsfreiheit für alle Gegenstandsentfernungen erfordert in erster Annäherung nur eine Beziehung zwischen den ersten Koeffizienten der beiden Reihen.



Abb. 124. Die sphärische Abweichung der Pupillen und ihr Einfluß auf die Verzeichnung. B die Öffnungsblende, P_0 und P_0' ihr dingseitiges und bildseitiges Bild für geringe Hauptstrahlneigung; P und P' ihr ding- und bildseitiges Bild für große Hauptstrahlneigung. $P_0O = \xi_0$, $P_0'O' = \xi_0'$, $PO = \xi = \xi_0 + \delta$, $P'O' = \xi' = \xi_0' + \delta'$.

Besonders bei photographischen Objektiven kommen Linsenfolgen vor, die aus zwei Teilen L_1 und L_2 bestehen, zwischen denen sich eine Mittelblende befindet, und bei denen entweder L_1 und L_2 gleich und zur Mittelblende symmetrisch angeordnet sind oder doch ähnlich und ebenfalls zur Mittelblende bis auf den verschiedenen Maßstab symmetrisch angeordnet. Bei solchen Linsenfolgen trifft ein von der Blendenmitte aus nach L_1 und L_2 verfolgter Strahl offenbar auf die erste Fläche von L_1 unter demselben Winkel wie auf die erste Fläche von L_2; und dasselbe gilt für die zweite, dritte und alle folgenden Flächen beider Teile. Es ist also stets $w_1 = w_2$. Also sind solche „holo- oder hemisymmetrischen" Objektive streng verzeichnungsfrei, wenn

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi_0' + \delta'}{\xi_0 + \delta} = \text{konst.}$$

ist. Ist nun L_1 ν mal größer ausgeführt als L_2, so ist $\delta = \nu\delta'$ und die Linsenfolge ist verzeichnungsfrei für beliebige w für den Dingabstand $\xi = \nu\xi'$.

Fallen die Pupillen wie bei derartigen photographischen Objektiven in die Hauptpunkte, so ist

$$\frac{\xi}{\xi'} = \nu = \frac{1}{\beta}.$$

Hemisymmetrische Objektive zeichnen also streng richtig, wenn Gegenstand und Bild im selben Verhältnis stehen wie die ihnen zugewandten Teile des Objektives, also holosymmetrische Objektive bei Abbildung in gleicher Größe.

Für Linsenfolgen mit Vorder- oder Hinterblende ist natürlich δ oder $\delta' = 0$ zu setzen. Ist der Gegenstand unendlich fern, so ist $\xi = \infty$ und daneben δ zu vernachlässigen. Ist in diesem Falle noch eine Hinterblende vorhanden, so geht die allgemeine Bedingung (II) in die Tangentenbedingung (I) über.

[1]) R. H. Bow, Brit. Journ. of Phot. Bd. 8, Nr. 155, S. 417—419; Nr. 156, S. 440 bis 442. 1861.

[2]) Th. Sutton, Phot. Notes Bd. 7, Nr. 138, S. 3—5. 1862.

In der Näherungstheorie der Abbildungsfehler tritt die Verzeichnung als einer der Bildfehler auf. Es ergeben sich also dort Bedingungen für den Wegfall der Verzeichnung, in denen die Radien, Dicken, Abstände, Brechungsverhältnisse vorkommen [Ziff. 72; Koeffizient von R^3 in Gleichung (116) Ziff. 71]. Nach R. H. BOW[1]) und C. KOPPE[1]) kann man die Verzeichnung in einer photographischen Aufnahme unschädlich machen, wenn man bei ihrer Betrachtung oder Ausmessung das zur Herstellung benutzte Objektiv wieder vorschaltet.

E. WANDERSLEB[2]) hat die Darstellung der Verzeichnung durch Kurven eingeführt und eine Anzahl solcher für photographische Objektive veröffentlicht. Jede Kurve gilt für ein bestimmtes Vergrößerungsverhältnis β_0 oder einen Reduktionsmaßstab $N = -1:\beta_0$ und zeigt die Abhängigkeit des $\mathfrak{V}$ von w. Eine solche Kurve gilt auch für den am häufigsten vorkommenden Fehler, daß $N = \infty$ ist, die Auffangebene in die Brennebene fällt.

STAEBLE[3]) hat die Abhängigkeit der Verzeichnung vom Abbildungsmaßstab weiter verfolgt und eine einfache Bedingung dafür abgeleitet, daß die Verzeichnung vom Maßstab unabhängig ist.

112. Die Verzeichnung beim Sehen durch optische Geräte. Hier ist die Verzeichnung als die Abhängigkeit der Vergrößerung von der Dinggröße y oder dem Winkel w am besten aus den Definitionen der Vergrößerung abzuleiten, die wir oben für verschiedene Geräte gegeben haben.

Bei Lupen oder Mikroskopen bedeutet Verzeichnungsfreiheit also N_L = konst. oder mit dem ABBEschen Maße der Vergrößerung $V = V_0$. Hierbei ist

$$V = \frac{\operatorname{tg} w'}{y} = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} \cdot \frac{1}{\xi_0 + \delta}\,; \qquad V_0 = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X_0}{\xi_0}\right).$$

Die Verzeichnung berechnet sich zu

$$\mathfrak{V} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} \cdot \frac{1}{\xi_0 + \delta} \cdot \frac{1}{V_0} - 1$$

und in den sehr häufigen unter Ziff. 110 erörterten Fällen zu

$$\mathfrak{V} = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} \frac{f'}{\xi_0 + \delta} - 1 .$$

Die Verzeichnung der Brillen ergibt sich (Ziff. 109) zu $N_A : (N_A)_0 - 1$; und da in der Gleichung für N_A die Größe $A + \xi$, der Abstand zwischen Ding und Augendrehpunkt, konstant ist, läßt sich dieser Ausdruck wegen $N_A = V(A + \xi)$ durch den obigen für Lupen geltenden ersetzen. Hierin ist aber meist (für Fernbrillen stets) δ gegen ξ_0 zu vernachlässigen.

Die Verzeichnung der Fernrohre ist entsprechend

$$\mathfrak{V} = N_F : (N_F)_0 - 1 = \operatorname{tg} w' : (\operatorname{tg} w \cdot \Gamma'_0) - 1 .$$

Für Fernbrillen und Fernrohre gilt also die AIRYsche Bedingung der Verzeichnungsfreiheit.

γ) Die Wirkungen der Größe der Blenden.

Wir haben uns bereits oben mit der Frage der Blendengröße beschäftigt, als wir die zusätzlichen Beschränkungen der Öffnung durch die E.L. erörterten. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Wirkungen der Größe der Pupillen allein.

---

[1]) Vgl. M. v. ROHR, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs. S. 17. Berlin 1899.

[2]) E. WANDERSLEB, ZS. f. Instrkde. Bd. 27, S. 33–37 u. 75–85. 1907.

[3]) F. STAEBLE, ZS. f. Instrkde. Bd. 27, S. 173–178. 1907.

113. Beziehungen zwischen der Vergrößerung in den Pupillen und in den Bildern. In der kollinearen Abbildung ist die Beziehung zwischen den Größen der Pupillen und den Größen der Bilder gegeben durch die Grundgleichung [Ziff. 32, Gl. (22)]

$$\beta\gamma = \frac{n}{n'}, \quad \text{oder} \quad \frac{y'}{y}\cdot\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{n}{n'},$$

die sich auch schreiben läßt

$$(y':y)\cdot\left(\frac{p'}{\xi'}:\frac{p}{\xi}\right) = \frac{n}{n'},$$

oder, indem $p' \cdot p = B$

$$\beta \cdot B = \frac{n}{n'}\,\frac{\xi'}{\xi}. \tag{1}$$

Die obige Grundgleichung gibt in dem fadenförmigen Raume längs der Achse, in dem der Tangens mit dem Winkel vertauscht werden kann, die HUYGENS-HELMHOLTZsche Gleichung 23 (Ziff. 32) in der Form

$$n u y = n' u' y'$$

Diese Beziehung läßt sich nach Ziff 62 für endliche Winkel U und U' erweitern zu dem Sinussatz, der Bedingung für die Abbildung eines unendlich kleinen Gegenstandes mit endlichen Büscheln bei gehobener sphärischer Aberration des Achsenpunktes:

$$n \sin U y = n' \sin U' y'.$$

114. Sonderfälle. Endlicher dingseitiger, kleiner bildseitiger Öffnungswinkel (Mikroskop, Projektion): $\sin U'$ zu vertauschen mit $\operatorname{tg} U'$ und, wenn man die Aberrationen der kleinen A.P. sowie ihre Bildkrümmung gegen ihren Bildabstand vernachlässigen kann, $= p'/\xi'$ zu setzen:

$$n \sin U = n'\,\frac{p'}{\xi'}\,\frac{y'}{y} = n'\,p'\,\frac{\operatorname{tg} w'}{y}.$$

$$n \sin U = a \tag{2}$$

heißt die dingseitige Apertur.

In Ziff. 110 ist $\operatorname{tg} w'/y = V$ berechnet, so daß, da n' fast stets $= 1$ ist,

$$a = p'V = \frac{p'}{f'}\left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right), \tag{3}$$

und in den meisten (dort genannten) Fällen

$$a = \frac{p'}{f'}. \tag{3a}$$

115. Kleiner dingseitiger, endlicher bildseitiger Öffnungswinkel (lichtstärkere photographische Objektive): $\sin U$ zu vertauschen mit $\operatorname{tg} U$ und wenn die Aberrationen der E.P. sowie ihre Bildkrümmung gegen ihren Dingabstand zu vernachlässigen sind, $= p/\xi$ zu setzen. Also liefert der Sinussatz

$$n' \sin U' = n\,\frac{p}{\xi}\cdot\frac{y}{y'} = n p\,\frac{\operatorname{tg} w}{y'}.$$

$y'/\operatorname{tg} w$ ist in Ziff. 107 berechnet zu

$$f\left(1 - \frac{x'}{X'}\right) = f\left(1 - \frac{X}{x}\right),$$

$$n' \sin U' = a' \tag{4}$$

heißt die bildseitige Apertur. Da n hier stets $= 1$, ist

$$a' = \frac{p}{f} : \left(1 - \frac{X}{x}\right). \tag{5}$$

Da fast immer der Brennpunktsabstand des Gegenstandes groß ist gegen den der Pupille:

$$a' = \frac{p}{f} \cdot \tag{5a}$$

116. Teleskopische Linsenfolgen (Fernrohre). Auf die Pupillen angewendet, liefert der HUYGHENS-HELMHOLTZsche Satz $B_0 \Gamma_0 = n : n'$; dies gilt natürlich wieder nur in dem fadenförmigen Raume um die Achse. Eine andere als die obige Erweiterung über diesen Raum hinaus ergibt sich, wenn ein kleiner, unendlich ferner Gegenstand in ein kleines, unendlich fernes Bild mit endlichen Büscheln abgebildet wird. Die Bedingung hierfür ist (wenn der Achsenpunkt des Bildes aberrationsfrei ist) die besondere Form des Sinussatzes $h' : h =$ konst., wo h und h' die Achsenabstände konjugierter achsenparalleler Strahlen sind. Diese Strahlen sind bei unendlich entferntem Ding und Bild die Hauptstrahlen für die Abbildung der Pupillen. Also läßt sich, wenn dieser Satz gilt, B_0 ersetzen durch $B = p'/p$, das Verhältnis endlicher Pupillendurchmesser, während Γ_0 das Verhältnis kleiner Gesichtsfeldwinkel bleibt, das jedoch, falls die Verzeichnung des Fernrohrs gehoben ist, auf endliche w' und w erstreckt werden, also durch $\Gamma = \operatorname{tg} w' / \operatorname{tg} w$ ersetzt werden kann. So folgt

$$B \Gamma_0 = \frac{n}{n'} .$$

$$\Gamma_0 = \frac{n}{n'} \, \frac{p}{p'} . \tag{6}$$

Die Messung von p und p' muß hierbei mit parallelen Hauptstrahlen und engen Büscheln ausgeführt werden; beim Fernrohr ist also an der Stelle der gemeinsamen Brennebene oder einem ihr konjugierten Orte eine enge Blende anzubringen (wie es beim Dynameter geschieht).

δ) Die Unschärfe nicht eingestellter Gegenstände.

117. Die Zurückführung der Aufgabe auf eine Konstruktion im Dingraum. Bereits in Ziff. 91 wurde ausgesprochen, daß die Gegenstände, die durch optische Geräte dargestellt werden, im allgemeinen keine zusammenhängende Fläche bilden, die auf einer Auffangfläche abgebildet werden könnte. Wie in Ziff. 97 nachgewiesen wurde, entsteht auf der Auffangfläche eine Zeichnung, die den Dingraum in einer Perspektive mit der E.P. als Zentrum darstellt. Auf der Auffangebene, die wir bei der Betrachtung der Perspektive M.E. genannt hatten, fand sich eine Zeichnung vor, die nur eine Wiedergabe der Zeichnung auf der ihr konjugierten Einstellebene (E.E.) des „dingseitigen Abbilds" war.

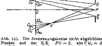


Abb. 125. Die Zerstreuungskreise nicht abgebildeter Punkte auf der E.E. $PO = \xi$, abs $V\Omega_v = \Delta_v$, abs $R\Omega_r = \Delta_r$, abs $P_1P_2 = 2p$, abs $O_{1v}O_{2v} = 2z_v$, abs $O_{1r}O_{2r} = 2z_r$.

Dingpunkte V oder R außerhalb der E.E. (Abb. 125) ergeben auf der M.E. Zerstreuungskreise, deren Mittelpunkte als Bildpunkte aufgefaßt werden. Ist die Abbildung der E.E. in die M.E. eine so vollkommene, daß ein Punkt der einen einem Punkte der anderen entspricht, und frei von Verzeichnung, so sind diese

Zerstreuungskreise der Lage und Größe nach nur die Bilder der Kreise, die man erhält, wenn man diese Dingpunkte mit allen Punkten der E.P. verbindet. Die von einem Punkt V oder R in die E.P. fallenden Strahlen sind nämlich auch abbildende Strahlen des Kreises, der um O_v oder O_r auf der E.E. mit dem Radius $O_v O_{1v}$ oder $O_r O_{1r}$ gezogen ist; ihre konjugierten Strahlen müssen die M.E. in Kreisen durchstoßen, die dem Kreis um O_v oder O_r konjugiert sind; unabhängig davon, wie V oder R selbst abgebildet wird. Auch wenn die Abbildung der E.E. zwar nicht vollkommen, aber der Güte der Korrektion und Verzeichnung nach bekannt ist, ist die Aufgabe, die Lage und Größe der Zerstreuungskreise nicht eingestellter Punkte auf der M.E. zu finden, offenbar durch die bloße Konstruktion der dingseitigen Zerstreuungskreise auf der E.E. zu ersetzen.

118. Die Unschärfe der Tiefe. In Abb. 125 projiziert sich die E.P., deren stets positiv gerechneter Halbmesser p sei, vom Punkte V aus auf die E.E. in einen Kreis des (stets positiv gerechneten) Halbmessers z_v; vom Punkt R in einem Kreis des Halbmessers z_r. Die absoluten Werte der senkrechten Abstände der nicht scharf abgebildeten Punkte seien Δ_v und Δ_r. Dann gilt für alle zwischen E.P. und E.E. gelegenen Punkte, wenn $[\xi]$ der absolute Wert des Abstandes der E.E. von der E.P. ist

$$z_v = p\,\Delta_v : ([\xi] - \Delta_v); \tag{1}$$

für alle Punkte, die auf der anderen Seite der E.E. liegen als die E.P.:

$$z_r = p\,\Delta_r : ([\xi] + \Delta_r). \tag{2}$$

In dem weitaus häufigsten Fall, daß die E.P. im Sinne der Lichtrichtung hinter der E.E. liegt, ist V gegen die E.E. im Sinne des Lichtes vorwärts, R rückwärts gelegen. Auf der M.E. sind die Zerstreuungskreise $[\beta]$mal vergrößert, wo $[\beta]$ der absolute Wert von $\beta = y' : y$ ist. Sind z'_v, z'_r ihre Radien, so ist auch wegen $[\operatorname{tg} U] = p : [\xi]$

$$z'_v = [\beta]\,\frac{[\xi]\,\Delta_v}{[\xi] - \Delta_v}\,[\operatorname{tg} U]; \qquad z'_r = [\beta]\,\frac{[\xi]\,\Delta_r}{[\xi] + \Delta_r}\,[\operatorname{tg} U]. \tag{3}$$

Entfernt man sich gleichviel von der E.E. nach beiden Seiten ($\Delta_v = \Delta_r = \Delta$), so wird unter sonst gleichen Umständen der der E.P. nähere Punkt (meist: der vorwärts gelegene Punkt) unschärfer abgebildet. Der Unterschied $(z'_v - z'_r)$ ist bei gleichem Δ desto größer, je kleiner $[\xi]$ ist; rückt also die E.P. ins Unendliche (telezentrischer Strahlengang, wie z. B. bei den meisten stärkeren Mikroskopobjektiven), so ist

$$z_v = z_r = [\beta]\,\Delta\,[\operatorname{tg} U]. \tag{4}$$

Die Unschärfe wächst mit dem Tangens des Öffnungswinkels (nicht genau mit der Apertur, die $\sin u$ ist).

Um die durch diese Unschärfe erzeugte Verundeutlichung des Bildes festzustellen, muß man das Verhältnis des von V oder R herrührenden Zerstreuungskreises auf der M.E. zu der Größe bilden, unter der ein Gegenstand von der Längeneinheit, der sich bei V oder R befindet, auf der M.E. erscheint. Diese ist aber $\beta\xi : (\xi - \Delta_v)$ und $\beta\xi : (\xi + \Delta_r)$, also ist die Verundeutlichung $\bar{z}'$ auf der M.E.

$$\bar{z}' = \Delta\,[\operatorname{tg} U], \tag{5}$$

gleichgültig ob der Punkt vor oder hinter der E.E. liegt; sie ist auch von der Vergrößerung unabhängig.

Bei Geräten, die in Verbindung mit dem Auge gebraucht werden, ist statt der linearen Größe z des Zerstreuungskreises dessen Winkelwert, von der A.P. aus gesehen, von Bedeutung; also $z'_v : [\xi'] = \zeta'_v$ und $z'_r : [\xi'] = \zeta'_r$, wo $[\xi']$ der stets positiv genommene Wert des Abstandes zwischen A.P. und Bildebene

ist. Da nach Ziff. 108 $\beta:\xi' = V$, der ABBEschen Vergrößerung ist, so folgt

$$\zeta_v = V\frac{[\xi]\,t_v}{[\xi] - t_v}[\operatorname{tg} U]; \qquad \zeta_r = V\frac{[\xi]\,t_r}{[\xi] + t_r}[\operatorname{tg} U] \tag{6}$$

und für dingseitig telezentrischen Strahlengang

$$\zeta_v = \zeta_r = V\Delta\,[\operatorname{tg} u]. \tag{7}$$

Für die Verundeutlichung von nicht eingestellten Gegenständen muß sich bei Geräten, die vor dem Auge gebraucht werden, derselbe Ausdruck ergeben, der in (5) abgeleitet worden ist. Denn dieser war das Verhältnis des Zerstreuungskreises in der M.E. zur Größe der Längeneinheit in der M.E. und ändert sich nicht, wenn beide Größen statt linear im Winkelmaß, nämlich durch $[\xi']$ dividiert, ausgedrückt werden.

119. Die Tiefe der Schärfe. Aus (3) folgt für den Raum, der mit einer gegebenen größten Unschärfe des Bildes z' oder der Unschärfe z auf der E.E. dargestellt wird, eine Tiefenerstreckung nach der E.P. zu (meist: nach vorn)

$$t_v = \frac{[\xi]\,z}{p + z} = \frac{[\xi]\,z'}{[\beta]\,p + z'} = \frac{[\xi]\,r z'}{p + r z'},$$

und von der E.P. fort (meist: nach rückwärts) (8)

$$t_r = \frac{[\xi]\,z}{p - z} = \frac{[\xi]\,z'}{[\beta]\,p - z'} = \frac{[\xi]\,r z'}{p - r z'},$$

wenn $r = 1:[\beta]$ der stets positiv gerechnete Reduktionsmaßstab ist. Die Tiefe ist also größer nach der der E.P. abgekehrten Seite. Die Gesamttiefe ist

$$t = t_v + t_r = \frac{2[\xi]\,z\,p}{p^2 - z^2} = \frac{2[\xi]\,r z' p}{p^2 - z^2}. \tag{9}$$

M. v. ROHR[1]), der diese Beziehungen zuerst ableitete, machte bereits darauf aufmerksam, daß, wenn man $t:[\xi] = \operatorname{tg}\alpha$ setzt, dann $z:p = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ ist. Für einen gegebenen Abstand der E.E. bedeutet also Konstanz der Tiefe Konstanz der Hilfsgröße α; daher sind die Kurven gleicher Tiefe, wenn z und p als rechtwinklige Koordinaten gewählt werden, gerade Linien. Weitere Beziehungen zwischen diesen Größen sind in einer späteren Arbeit M. v. ROHRS[2]) zu finden.

120. Folgerungen für photographische Aufnahmen. Die Gleichungen (8) ergeben, daß große Öffnung p und große Tiefe der Schärfe einander ausschließen. Wie später nachgewiesen wird, ist aber die Beleuchtungsstärke des Bildes dem Quadrat der bildseitigen Apertur $a' = n'\sin u'$ proportional. Bei engen dingseitigen Büscheln konnten wir diese nach Ziff. 115 $= p/f:(1 - X/x)$, für entfernte Gegenstände $= p:f$ setzen. Um bei photographischen Aufnahmen Lichtstärke und Tiefe zu vereinigen, ist es also vorteilhaft, kleine Brennweiten zu verwenden, auch wenn man schließlich die gleiche Bildgröße durch nachträgliche Vergrößerung der kleineren Aufnahmen erzielen will. Man erreicht mit zwei Objektiven desselben p bei demselben ξ nach Gleichung (1) und (2) dieselben Zerstreuungskreise auf der E.E.; also auch dieselben im endgültigen Bilde, ob dies nun unmittelbar bei der Aufnahme oder erst durch Vergrößerung einer kleineren Aufnahme entsteht; aber das Objektiv mit kleinerem f ist das lichtstärkere.

---

[1]) M. v. ROHR, Zur Geschichte und Theorie des photogr. Teleobjektivs. Weimar. 1897. S. 27.

[2]) M. v. ROHR, Über die Tiefenschärfe optischer Instrumente. Eders Jahrb. Bd. 20, S. 62–66. 1906.

Sollen die unendlich entfernten Gegenstände noch mit der Unschärfe z' abgebildet werden ($t_r = \infty$), so folgt aus (8) $p = z$, was auch sofort einleuchtet, und $t_v = \frac{1}{2}[\xi]$; die vordere Tiefe reicht bis in die Mitte zwischen E.E. und E.P.

Die Bestimmung der zulässigen Unschärfe z hängt von der Verwendung des Bildes ab. Beim unmittelbaren Anschauen einer Photographie sollten nach Ziff. 100 die Gegenstände unter demselben Winkel erscheinen, wie sie auf der E.E. von der E.P. bei der Aufnahme erschienen; dann werden auch die Zerstreuungskreise des Bildes unter demselben Winkelwert erscheinen, wie die Zerstreuungskreise der E.E. von der E.P. aus erschienen, nämlich unter dem Winkel $2z:\xi$. Dieser muß also unmerklich sein, $< \varepsilon'$, wo ε' der Grenzwinkel der Erkennbarkeit, in diesem Falle etwa 1′ ist.

Die Halbmesser der Zerstreuungskreise auf der E.E. dürfen also etwa $^1/_{7000}$ des Abstandes der E.E. von der E.P. betragen. Oft läßt man aber auch Werte bis zum Doppelten, ja Vierfachen des angegebenen zu, wenn sie, obwohl merklich, nicht stören[1]). Sehr oft werden aber photographische Aufnahmen, die mit kleiner Brennweite gemacht sind, aus zu großer Entfernung, also mit falscher Perspektive, betrachtet. Hierbei ergibt sich natürlich noch ein besonderer Vorteil hinsichtlich der Tiefe, da die Unschärfe weniger merklich wird.

Der Vorteil der Verwendung kurzbrennweitiger Objektive mit nachheriger Vergrößerung tritt besonders in der Kinotechnik in Erscheinung, wo Brennweiten von 50 bis herunter zu 35 mm verwendet werden, und wird gerade hier besonders durch die perspektivisch unzulässig große Entfernung verstärkt, in der der Beschauer das Bild im Theater betrachtet und, aus anderen Gründen, betrachten muß. Er findet seine Grenze im Korn der photographischen Platte, das die nachträgliche Vergrößerung beschränkt, praktisch auch oft in hohen Anforderungen an die Genauigkeit der Einstellung.

Der Vorteil verschwindet, wenn man nicht gleichen Dingabstand ξ, sondern gleichen Reduktionsmaßstab r vorschreibt, dabei aber an dem richtigen Betrachtungsabstand der Photographie festhält. Dies kann z. B. der Fall sein, wenn man einen Kopf in einer bestimmten Größe abbilden will. Der richtige Betrachtungsabstand bedeutet, daß die zulässige Größe von $z:\xi$ vorgeschrieben ist. Nach Gleichung (9) ist dann aber bei bestimmter Lichtstärke $(p:\xi)$ auch die Tiefe t gegeben; sie ist dieselbe, ob man die Aufnahme aus großem Abstand mit längerer Brennweite, oder aus kleinem Abstand mit kürzerer Brennweite macht. Freilich pflegt man sich bei der Betrachtung mehr nach dem Bildformat als nach der richtigen Perspektive zu richten; gewöhnlich wird das Bild größerer Brennweite aus zu geringem, das kleinerer Brennweite aus zu großem Abstand betrachtet, so daß die Tiefenschärfe der kleineren Brennweite wieder größer erscheint.

121. Die dioptrische Tiefe. Ein anderes Maß der Tiefe hat zuerst HARTING[2]), später GLEICHEN[3]) benutzt, indem er

$$T_v = \frac{1}{[\xi] - t_v} - \frac{1}{[\xi]}; \qquad T_r = \frac{1}{[\xi]} - \frac{1}{[\xi] + t_r}$$

[1]) HANS HARTING, Photographische Optik. 2. Aufl., S. 81. Berlin 1925.

[2]) H. HARTING, Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 146. 1908.

[3]) A. GLEICHEN, Die Grundgesetze der naturgetreuen Abbildung. Halle: Knapp 1910; ZS. f. wiss. Photogr. Bd. 9, S. 241. 1911. GLEICHEN stellt für die „naturgetreue Abbildung" über die Forderung richtiger Perspektive hinaus, die auf die in Ziff. 100 abgeleitete Bedingung für den Betrachtungsabstand der Photographie führt, die weitergehende Forderung auf, daß beim Betrachten der Photographien auch die Zerstreuungskreise dieselben sein sollen, wie sie das Auge erhielte, wenn es den Dingraum vom Orte der E.P. betrachtete und dauernd auf die E.E. akkommodiert wäre. Die Zerstreuungskreise auf der E.E. würden aber, wenn das Auge in der E.P. läge, durch die Augenpupille bestimmt sein. Da aber die Photographie,

setzt. Aus (8) folgt

$$T_v = \frac{z}{[\xi]\,p} = T_r = \frac{z'}{[\xi]\,[\beta]\,p}\,, \tag{10}$$

$$T = T_v + T_r = \frac{2z}{[\xi]\,p} = \frac{2z'}{[\xi]\,[\beta]\,p}\,. \tag{11}$$

$T_v = T_r$ ist die Stärke einer Linse, die den nächsten Punkt der Unschärfe z' in die E.E. und gleichzeitig die E.E. im entferntesten Punkte derselben Unschärfe abbildet. T ist die Stärke einer Linse, die den nächsten Punkt der Unschärfe z' in den fernsten Punkt derselben Unschärfe abbildet. Die T_v, T_r, T seien als „dioptrische" Tiefe bezeichnet. Nun ist $\xi\beta = \xi y' : y = y' : \mathrm{tg}\,w$ in Ziff. 115 für enge dingseitige Büschel gefunden $= p : a'$ (für $n = 1$), wo a' die bildseitige Apertur $= n' \sin u'$ war. $y' : \mathrm{tg}\,w$ ist in Ziff. 107 berechnet zu $f(1 - x'/X') = f(1 - X/x)$; also

$$T = \frac{2z'a'}{p^2} = \frac{2z'}{f\,p} : \left(1 - \frac{X}{x}\right) = \frac{2z'}{a'f^2} : \left(1 - \frac{X}{x}\right)^2 = \frac{2z'}{a'f^2}\left|\frac{x}{\xi}\right|^2. \tag{12}$$

Für größere Gegenstandsentfernungen oder telezentrischen Strahlengang der Bildseite, praktisch aber bei allen Naturaufnahmen genau genug ist

$$T = \frac{2z'}{a'f^2}\,. \tag{13}$$

Die dioptrische Tiefe wächst also umgekehrt proportional mit der numerischen Apertur, also der Wurzel aus der Lichtstärke, wenn die Brennweite konstant gehalten wird, und ist dabei dem Quadrat der Brennweite umgekehrt proportional.

122. Die Tiefe der Geräte, die mit dem Auge gebraucht werden. Der die Tiefe bestimmende Betrag der Unschärfe wird wieder als Winkel $z' : \xi' = \zeta'$ gemessen. Aus (8) folgt, indem wie früher $\beta : \xi' = V$ gesetzt wird, und $V = N_L : 250$

$$t_v = \frac{[\xi]\,\zeta'}{V p + \zeta'} = \frac{[\xi]\,\zeta' \cdot 250}{N_L p + 250\,\zeta'}\,; \qquad t_r = \frac{[\xi]\,\zeta'}{V p - \zeta'} = \frac{[\xi]\,\zeta' \cdot 250}{N_L p - 250\,\zeta'}\,, \tag{14}$$

$$t = t_v + t_r = \frac{2\,V p\,[\xi]\,\zeta'}{V^2 p^2 - \zeta'^2} = \frac{2\zeta'}{V\,\mathrm{tg}\,U - \zeta'^2 : V p\,[\xi]}\,.$$

Das zweite Glied des Nenners verschwindet für dingseitig telezentrischen Strahlengang; es kann aber überhaupt bei vergrößernden Geräten vernachlässigt werden; für Lupen und Mikroskope ist also

$$t = \frac{2\zeta'}{V\,\mathrm{tg}\,U} = \frac{2 \cdot 250 \cdot \zeta'}{N_L\,\mathrm{tg}\,U}\,. \tag{15}$$

Wegen $N_F = \xi V$ (Ziff. 110 [Gl. 14']) gilt für Fernrohre

$$t = \frac{2N_F p\,\zeta'}{(N_F^2 p^2 : \xi^2) - \zeta'^2} = \frac{2\zeta'}{(N_F p : \xi^2) - (\zeta'^2 : N_F p)}\,. \tag{16}$$

Sehr nahe ist also für das Fernrohr

$$t = \frac{2\,\zeta'\,\xi^2}{N_F p}\,. \tag{17}$$

---

wenn man sie auf das Maß der Zeichnung auf der E.E. bringt, aus dem Abstande der E.P. angesehen werden muß, so müssen die Zerstreuungskreise auf der E.E. wirklich durch Aufnahme mit einer E.P. entstanden sein, die gleich der Augenpupille ist. Praktisch ist wegen unzureichender Helligkeit gewöhnlich die GLEICHENsche Forderung nicht erfüllbar; die GLEICHENsche Überlegung zeigt eben, daß der Eindruck der Photographie auch bei richtiger Perspektive sich vom natürlichen im allgemeinen wegen der zu geringen Tiefe des photographischen Bildes unterscheiden muß; um so mehr, als beim natürlichen Betrachten des Raumes die Akkommodation die Unschärfe in Wahrheit größtenteils beseitigen wird, so daß auch bei Erfüllung der genannten Forderung die Photographie die Tiefe nicht naturgetreu zu geben vermag.

Aus (13) folgt für die „dioptrische Tiefe“ T des Fernrohrs mittels

$$\frac{z}{\zeta} = \frac{1}{N_p}\frac{z'}{\zeta'} = \frac{1}{N_p}\zeta',$$
$$T = \frac{2\zeta'}{N_p \cdot p}.$$

123. Die Akkommodationstiefe. Das Auge besitzt im freien Sehen die Fähigkeit, sich den wechselnden Entfernungen der Gegenstände anzupassen. Der Mensch verändert die Brennweite des Auges beim Wechsel eines näheren und entfernteren Gegenstandes und vermag diese *nacheinander* scharf abzubilden. Dieser Vorgang ist also ein grundsätzlich anderer als die *gleichzeitige* Darstellung der Tiefe durch noch unmerkliche Zerstreuungskreise. Doch wird dieser Unterschied nicht merklich, weil das Nacheinander der Akkommodation bei der Erfassung der Tiefe kaum zum Bewußtsein kommt. Weil nämlich das Auge nur ein sehr kleines Gesichtsfeld auf einmal scharf übersieht, wird ein größeres Gesichtsfeld (vgl. Ziff. 103) schon deshalb nur durch das Nacheinander des „Blickens“ erhalten; auch die geistige Erfassung des Gesehenen beschränkt sich dementsprechend auf kleine Winkel und erfordert ein zeitliches Nacheinander zum Durchlaufen eines größeren Gesichtsfeldes. Die Umstellung der Brennweite wird deshalb nur unter besonderen Bedingungen als eine Verzögerung empfunden, wie z. B. beim abwechselnden Betrachten eines Fensterrahmens und der Landschaft oder beim abwechselnden Betrachten eines Schleiers und der dahinter befindlichen Gegenstände. Jedenfalls aber setzt sich der Bereich der Sehtiefe aus der durch Akkommodation und der durch das Sehen mit kleinem Zerstreuungskreise gewonnenen zusammen.

Dieselben Überlegungen gelten beim Gebrauch optischer Geräte mit dem Auge für den Bildraum dieser Geräte. Hierbei ist allerdings die Einschränkung zu machen, daß bei starken Vergrößerungen (Mikroskopobjektiven) praktisch nur die unmittelbare Nachbarschaft der E.E. abgebildet wird; andere Ebenen mit so starken Abbildungsfehlern, daß die im folgenden errechnete Akkommodationstiefe nicht mehr ausgenutzt werden kann.

Ist der nächste Punkt, auf den das Auge einstellen kann, der „Nahepunkt“, um ξ'_N, der fernste Punkt, der „Fernpunkt“ um ξ'_F von der Pupille entfernt, so wird nach DONDERS als Akkommodationsvermögen $1:A$ die Stärke einer Linse bezeichnet, die, am Orte der Pupille befindlich, den Fernpunkt in den Nahpunkt abbilden würde, also

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\xi'_N} - \frac{1}{\xi'_F}. \tag{1}$$

In dem am häufigsten vorkommenden Falle liegt der Fernpunkt im Unendlichen, doch kann die Lage des Nahe- und Fernpunktes für uns außer Betracht bleiben. Die Akkommodation $1:A$ ist eine Funktion des Alters. Sie beträgt bei einem normalen Auge im 10. Jahre ($\xi'_F = \infty$, $\xi'_N = 70$ mm) in Metern $1000/70 = 14$ Dioptrien; mit 30 Jahren etwa 7, mit 50 Jahren etwa 2,5 Dioptrien

$$\xi'_F - \xi'_N = \Delta'_A = \xi'_F\,\xi'_N : A.$$

Bildet das Gerät mit endlichen Büscheln ebenso ab, wie mit achsennahen, so entspricht der „Akkommodationsbreite“ Δ'_A in seinem Bildraum eine Strecke im Dingraum Δ_A derart, daß

$$\Delta'_A : \Delta_A = \frac{n'}{n}\beta_N\,\beta_F,$$

wo β_N und β_F die Vergrößerungen im Nahe- und Fernpunkte bedeuten.

$$\Delta_A = \frac{n}{n'}\,\frac{1}{A}\left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_N\cdot\left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_F. \tag{2}$$

Zwischen Nahe- und Fernpunkt liegt ein Punkt M, für den

$$\left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_M^2 = \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_N\cdot\left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_F; \tag{3}$$

dann ist

$$\Delta_A = \frac{n}{n'}\,\frac{1}{A}\left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_M^2. \tag{4}$$

$\xi':\beta = \xi' y : y' = y\cdot \operatorname{tg} w'$ war aber früher $= 1:V$ gesetzt worden (Ziff. 110). V war die ABBEsche Vergrößerung.

$$\Delta_A = \frac{n}{n'}:(A V_0^2) = \frac{n}{n'}\,\frac{f'^2}{A}:\left(1+\frac{X'}{\xi'_0}\right)^2. \tag{5}$$

V ändert sich bei Geräten, bei denen die A.P. nahe dem hinteren Brennpunkte liegt, fast gar nicht mit ξ' und ist fast genau $= 1:f'$, da ξ'_0 jedenfalls groß gegen X' ist, so daß dann

$$\Delta_A = \frac{n}{n'}:(A V^2) = \frac{n}{n'}\,625\,000\cdot(A N_L^2). \tag{6}$$

In welchem Maße die Akkommodationstiefe Δ_A und die Tiefe der erträglichen Unschärfe zum Erkennen des Raumes beitragen, sei nach ABBE[1]) am Beispiel eines Mikroskopes erläutert. Wir denken uns dieses bei festgehaltener Apertur ($U = 30°$), also etwa stets demselben Objektiv mit verschiedener Vergrößerung N_L, also etwa verschiedenen Okularen ausgerüstet. Wir setzen ferner eine Akkommodation von 5 Dioptrien voraus, so daß A in mm $= 200$ ist; ferner $n = 1$ (Gegenstand in Luft) und $\zeta' = 2{,}5'$. Zum Vergleich mit der Größe des dingseitigen Gesichtsfeldes $2y$ setzen wir voraus, daß das bildseitige festgehalten wird; es ist dann nach Gleichung (12), Ziff. 110 $2y = 2\operatorname{tg} w' \cdot V = 2\cdot 250 \operatorname{tg} w' : N_L$; $\operatorname{tg} w'$ wird $= 0{,}5$ gesetzt. Der Durchmesser der A.P. $2p'$ ergibt sich aus Gleichung (3), Ziff. 114 $= 2\cdot 250\, a : N_L$; für $U = 30°$, $n = 1$ ist $a = 0{,}5$; also $2p' = 250 : N_L$. Die Tiefe t der erträglichen Unschärfe wird durch Gleichung (15), Ziff. 122 geliefert.

Vergrößerung N_L	$2p'$	Schärfentiefe t	Akkommod.-Tiefe Δ_A	Gesichtsfeld $2y$	$\frac{t}{2y}$	$\frac{\Delta_A}{2y}$
10	25	0,0630	3,31	25		$\frac{1}{8}$
30	8,3	0,0210	0,347	8,3		$\frac{1}{24{,}3}$
100	2,5	0,0063	0,031	2,5	$\frac{1}{397}$	$\frac{1}{80}$
300	0,83	0,0021	0,0035	0,83		$\frac{1}{243}$
3000	0,083	0,00063	0,0003	0,025		$\frac{1}{800}$
1000	0,083	0,00021	0,00003	0,083		$\frac{1}{2430}$

[1]) E. ABBE, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Okulars. ZS. f. Mikrosk. Bd. 2, S. 207. 1880; Carls Repert. f. Experim. Phys. Bd. 17, S. 197. 1881; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 244. Jena 1904.

Die Akkommodationstiefe nimmt mit hohen Vergrößerungen so stark ab, daß der mit ihrer Hilfe übersehene Raum „bei 10facher Vergrößerung ungefähr die Verhältnisse eines ziemlich dicken Buches zeigt" und „bei 3000facher Vergrößerung nur noch dem einzelnen Blatt aus diesem Buche gleicht" (ABBE). Die Schärfentiefe behält in der obigen Zusammenstellung stets dasselbe Verhältnis zum Gesichtsfelde bei; wir haben aber hierbei die für die niederen Vergrößerungen (unter 100) nicht zutreffende Voraussetzung der gleichen Apertur gemacht; die zweite Spalte zeigt, daß die Augenpupille nicht imstande ist, die hierbei entstehenden Bündel aufzunehmen und selbst als A.P. des Gerätes wirken wird, wodurch die Schärfentiefe etwa im Verhältnis der Pupillendurchmesser gesteigert werden würde: Hat die Augenpupille z. B. 2,5 mm Durchmesser, so wird die Tiefe bei 10facher Vergrößerung um das 25 2,5 = 10mal gegenüber der Tabelle gesteigert werden.

Der Kehrwert der Tiefe ist die Einstellungsgenauigkeit (Fokussierungsempfindlichkeit) $= 1:(t + \Delta_A)$; sie kann nach dem Obigen bei gegebener Apertur durch Vergrößerung so gesteigert werden, daß Δ_A gegen t vernachlässigt werden kann; sie wird dann der Vergrößerung proportional.

124. Die Akkommodationstiefe des Fernrohrs. Nach den Regeln der kollinearen Abbildung, wobei β die laterale Vergrößerung, γ das Konvergenzverhältnis in den Punkten ξ, ξ' und B und Γ dieselben Größen in den Pupillen sind, folgt

$$\xi' : \xi = \frac{n'}{n}\beta B \qquad \text{oder} \qquad \xi . \xi' = \frac{n'}{n}\gamma\Gamma .$$

$$\frac{1}{\xi_S} - \frac{1}{\xi_P} = \frac{1}{A} = \frac{n'}{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_S}{\xi_S} - \frac{\gamma_P}{\xi_P}\right).$$

Da bei der teleskopischen Abbildung γ unabhängig von ξ ist und beim Fernrohr $n = n' = 1$, wird hier

$$\frac{1}{\xi_S} - \frac{1}{\xi_P} = \frac{1}{A}\frac{1}{\Gamma^2} = \frac{1}{A}\frac{1}{N_P^2} \tag{6}$$

nach Gleichung (10) Ziff. 109. Die Akkommodationstiefe des Fernrohrs ist also gleich der des Auges durch das Quadrat der Fernrohrvergrößerung dividiert. Ist $\xi'_S = \infty$, der Fernpunkt im Unendlichen, so ist es auch ξ_P, und der Nahepunkt ist Γ^2mal weiter als für das bloße Auge. (6) ergibt, daß die Fokussierungsempfindlichkeit auf einen entfernten Gegenstand mit dem Quadrat der Vergrößerung wächst. Besitzt ein Auge eine Akkommodationstiefe von 6 Dioptrien, so wird sie bei Vorschalten eines 4fachen-Fernrohres auf 6:16 = 3/8 Dioptrien verringert. Hierauf beruht die Anwendung des „Vorsatzfernrohrs" zum Prüfen der Konvergenz oder Divergenz von Bündeln, die aus irgendeinem Geräte treten, z. B. zur Prüfung der Richtigkeit der Dioptrienteilung der Okulare.

f) Die Strahlungsvermittlung durch optische Geräte.

Von

O. EPPENSTEIN, Jena.

Eine der wichtigsten Wirkungen der Größe der Blenden, ihr Einfluß auf den Lichtstrom in den optischen Geräten, wird in folgendem in einem besonderen Abschnitt behandelt, weil sie die Einführung von Grundbegriffen verlangt, die der übrigen geometrischen Optik fremd sind. Von diesen Begriffen abgesehen, soll die Grundlage der geometrischen Optik nicht verlassen werden.

125. Zwei elementare Blenden; Einführung der Bestimmungsgrößen der Strahlung. Um zu einfachen geometrischen Gesetzen zu gelangen, denken wir

uns (Abb. 126) df_1 und df_2 als die Öffnungen sehr kleiner Blenden, vor df_1 liege im beliebigen Abstande die sehr große strahlende Fläche F_1 und hinter df_2 die Auffangfläche F_2, beide senkrecht zu der durch die Verbindung von df_1 und df_2 gegebenen Richtung. F_1 sei von gleicher Beschaffenheit in allen seinen Punkten. F_2 sei eine „schwarze" Fläche, d. h. eine solche, die alle auftreffende Energie verschluckt. Wir können die durch df_1 und df_2 bestimmte Strahlungsenergie dE durch die Wärme messen, die in F_2 in der Zeiteinheit abgegeben wird. Wenn $d\vartheta_1$ der Winkel ist, den die Normale des ersten, $d\vartheta_2$ der Winkel, den die Normale des zweiten Elements mit der Verbindungslinie macht, und r der Abstand beider Elemente, so ist

$$dE = i\, df_1\, df_2 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 : r^2\,. \tag{1}$$

Die strahlende Fläche F_1 bestimmt hierbei die Konstante i. i hängt von der Temperatur und der Beschaffenheit der Fläche F_1 ab (und im allgemeinen auch von dem Winkel, unter dem die Strahlen die Fläche verlassen); von dem Abstande von F_1 ist i unabhängig.

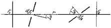


Abb. 126. Die Strahlung durch zwei Blenden.

Die Gleichung (1) läßt sich für endliche Flächen integrieren und durch den Versuch prüfen, indem man die Erwärmung von F_2 mißt. (1) besagt im Grunde nichts anderes, als daß jeder „Strahl" Träger einer unveränderlichen Wirkung, einer Energie ist, und daß die Wirkung auf F_2 der „Anzahl der Strahlen" proportional ist, die diese Fläche erreichen, oder daß deren Wirkungen sich einfach addieren[1]). Die Gleichung — das photometrische Grundgesetz LAMBERTS[2]) — definiert gewissermaßen das Wesen der strahlenden Energie, und ihre physikalische Bestätigung ist die Bestätigung von deren Vorhandensein. Daß sich die Strahlungen aus verschiedenen Richtungen einfach addieren, ist die Rechtfertigung der Zerlegung endlicher Öffnungen in Elemente. Die Gleichung läßt sich auch schreiben

$$dE = i\, df_2 \cos\vartheta_2\, d\omega_2\,, \tag{2}$$

wobei $d\omega_2 = df_1 \cos\vartheta_1 : r^2$ den räumlichen Winkel bezeichnet, unter dem df_1 von df_2 aus erscheint. $d\omega_2$ ist auch der Flächeninhalt auf der mit dem Radius 1 um df_2 geschlagenen Kugel, der durch die von df_1 kommenden Strahlen ausgeschnitten wird. Ebenso ist bei entsprechender Bedeutung von $d\omega_1$

$$dE = i\, df_1 \cos\vartheta_1\, d\omega_1\,. \tag{3}$$

Der elementare Energiestrom kann also an jeder der beiden ihn bestimmenden Blenden durch deren senkrecht zu ihm gemessenen Querschnitt und den räumlichen Winkel am Orte dieses Querschnittes gemessen werden; daß der Faktor für beide Querschnitte derselbe ist, ist der Ausdruck der Erhaltung der Energie. i ist demnach die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 im Raumwinkel 1 strömende Energie und heißt spezifische Intensität der Strahlung. Die

[1]) Die hier gestreiften grundsätzlichen Fragen behandelt E. MACH, Die Prinzipien der physikalischen Optik. S. 22—30. Leipzig 1921.

[2]) J. H. LAMBERT, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augsburg 1760. Deutsche Übersetzung von ANDING in Ostwalds Klassikern d. exp. Wiss. Bd. 31, 32 u. 33. Leipzig 1892.

Gleichungen (1), (2), (3) setzen voraus, daß zwischen den Flächen F_1 und F_2 keine Zerstreuung, Spaltung der Strahlen und keine Umwandlung der strahlenden Energie stattfindet. Sie gelten sowohl für den gesamten Wellenlängenbereich als auch für jede einzelne Wellenlänge, da eine Umwandlung der Wellenlängen nicht stattfindet; i wird durch die für eine bestimmte Wellenlänge λ geltende Größe i_λ ersetzt werden können.

Zusammenhang mit üblichen Bezeichnungen der Strahlungstheorie. Wäre df_2 nicht eine Blende, sondern eine selbstleuchtende Fläche, so bleiben alle obigen Betrachtungen und die Gleichungen (1) bis (3) unverändert; i wird dann die spezifische Intensität der leuchtenden Fläche df_1, die zum Ausstrahlungswinkel ϑ_1 gehört. Machen wir die Annahme (die nur für den schwarzen Körper streng zutrifft), daß die Intensität vom Ausstrahlungswinkel unabhängig ist, so ist die gesamte Strahlung der Fläche df_1 dadurch zu erhalten, daß man statt mit $d\omega_1$ mit der halben Fläche der Einheitskugel π multipliziert; die Gesamtstrahlung auf die Einheit der strahlenden Fläche bezogen heißt bei LUMMER und PRINGSHEIM das Emissionsvermögen und ist also $e = \pi i$, oder $e_\lambda = \pi i_\lambda$. LIEBENTHAL[1]) bezeichnet dagegen die Größe i selbst als das Emissionsvermögen in der Richtung ϑ_1.

Wir dachten uns bisher die Wirkung auf F_2 durch die Erwärmung, also energetisch, gemessen. Älter aber und gewöhnlich geübt ist die Messung durch die auf F_2 beobachtete Beleuchtung, die photometrische Messung; F_2 sei hierfür diffus reflektierend oder durchlassend angenommen. Sie ergibt nicht den Energiestrom. Das Photometer gestattet nur, eine Beleuchtung mit einer anderen zu vergleichen; so läßt sich zeigen, daß die Beleuchtung auf F_2 immer dieselbe ist, wenn $d\omega_2$ sich nicht ändert, und daß mit größeren $d\omega_2$ die Beleuchtung wächst. Vom Standpunkt der Photometrie ist es eine Definition, wenn man nun die Beleuchtungsstärke proportional dem räumlichen Winkel ansetzt. Dadurch gelangt man nun rückwärts zum „Lichtstrom", indem man die Beleuchtungsstärke als Dichte eines Energiestromes auffaßt; man erhält ihn also, indem man die Beleuchtungsstärke mit der Fläche multipliziert. Die auf F_2 erleuchtete Fläche ist, wenn F_2 unmittelbar benachbart zur Blende df_2 gelegen ist, $df_2 \cdot \cos\vartheta_2$, so daß sich für den Lichtstrom Gleichung (2) ergibt.

Als Maß des Lichtreizes ist hiermit also der Energiestrom festgelegt. Die Lichtempfindung folgt anderen Gesetzen, sie ist bei gleicher Energiezufuhr unter anderem in hohem Grade von der Wellenlänge abhängig. Die photometrischen Gesetze sind deshalb nicht oder nicht streng anwendbar, wenn Lichter verschiedener Wellenlängen verglichen werden; auch beim Gebrauch des Photometers mit gemischtem Licht muß nicht nur die Mischfarbe gleich (z. B. weiß) erscheinen, sondern es muß auch die Zusammensetzung dieselbe sein.

Bei der photometrischen Methode wird man also eine der zu messenden Beleuchtung auf F_2 gleiche Beleuchtung etwa dadurch herstellen, daß man die Entfernung einer Lichtquelle und damit den Raumwinkel der von ihr erzeugten Beleuchtung ändert. (Die Änderung des Raumwinkels einer Lichtquelle ist grundsätzlich gleichbedeutend mit dem Ersatz einer Lichtquelle durch mehrere eng benachbarte schwächere, untereinander gleiche Lichtquellen, deren Anzahl so lange geändert wird, bis die Beleuchtung der zu messenden gleich ist.) Andere Methoden der Photometrie müssen stets ihre Übereinstimmung mit dieser durch Definition festgelegten nachweisen. Man kann eine Beleuchtung auch dadurch verändern, daß man nicht die Zahl der gleichzeitig wirkenden Lichtbündel verändert, sondern daß man eine Lichtquelle in raschem Wechsel wirken und verschwinden läßt. Die so erzeugte Beleuchtungsstärke ist nach PLATEAU und TALBOT gleich der durchschnittlichen Beleuchtungsstärke.

[1]) E. LIEBENTHAL, Praktische Photometrie. S. 32. Braunschweig 1907.

Die photographische Wirkung des Lichtes hängt ebenfalls von der Beleuchtungsstärke ab. Auch sie liefert nur einen Vergleich von Beleuchtungsstärken, aber keine Skala[1]).

Da für die optischen Geräte vorzugsweise der auf das Auge wirkende Teil des Energiestromes in Betracht kommt, soll im folgenden der Energiestrom stets als Lichtstrom bezeichnet und dE durch dL ersetzt werden. Dementsprechend wird die Konstante i für den Teil der Energie, der auf das Auge wirkt, durch k bezeichnet. k ist also der Lichtstrom auf die Einheit des Querschnittes und auf die Einheit des Raumwinkels bezogen und wird die „Leuchtkraft" genannt. Diese Größe führt die offizielle Bezeichnung „Flächenhelle", die für Lichtquellen geeignet ist, aber hier, wo wir sie als Eigenschaft eines Strahlenbündels einführen, nicht anschaulich genug ist.

Für den Fall der photographischen Wirkung haben wir es zwar auch neben den sichtbaren mit unsichtbaren Energieströmen zu tun, behalten aber dieselben Bezeichnungen.

Es ergibt sich also für den Lichtstrom

$$dL = k\,df_1\,df_2 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 : r^2\,, \tag{1a}$$

$$dL = k\,df_2 \cos\vartheta_2\, d\omega_2\,, \tag{2a}$$

$$dL = k\,df_1 \cos\vartheta_1\, d\omega_1\,. \tag{3a}$$

Wäre die Blende df_2 mit einer diffus reflektierenden Fläche geschlossen, so würde diese mit einer Leuchtkraft k^* aufleuchten. Es gibt Substanzen, bei denen k^*, das z. B. in einer zu df_2 senkrechten Richtung gemessen werden möge, proportional ist zu $dL : df_2$ [orthotrope Substanzen nach BLONDEL[2])], und es ist bei vielen annähernd der Fall. Deshalb heißt diese Größe Beleuchtung oder Beleuchtungsstärke, ist aber hier nur formal als der durch die Flächeneinheit gehende Lichtstrom definiert, da die auf der Fläche erzeugte Beleuchtung eben von der Wahl der reflektierenden Substanz abhängt. Deshalb kann dasselbe Verhältnis auch am Orte der ersten Blende gebildet werden, so daß sich ergibt

$$dB_1 = k \cos\vartheta_1\, d\omega_1\,, \tag{4}$$

$$dB_2 = k \cos\vartheta_2\, d\omega_2\,. \tag{5}$$

Bei Lichtquellen bezeichnet man den Lichtstrom auf die Einheit des Raumwinkels bezogen als Lichtstärke. Demnach hätte die Blende df_1 in der Richtung nach df_2 die Lichtstärke $dL : d\omega_1 = k\,df_1 \cos\vartheta_1$. Wir werden von diesem für Lichtquellen wichtigsten Begriffe hier keinen Gebrauch zu machen haben.

126. Zwei elementare Blenden durch ein optisches Gerät getrennt. Von den obigen Gleichungen haben (2), (3) sowie (2a), (3a), (4) und (5) die Besonderheit, daß sie nur Größen enthalten, die zu einer der beiden Blenden gehören. Sie lassen sich also auch für den Fall anwenden, daß zwischen beiden Blenden nicht ein leerer Raum, sondern ein beliebiges optisches Gerät liegt, durch das die Strahlen beliebige stetige und unstetige Verbiegungen erfahren dürfen. Dann sind die Gleichungen (1) und (1a) nicht mehr anwendbar. Wir können aber auch

[1]) Der Verfasser hat an anderer Stelle (CZAPSKI-EPPENSTEIN, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente. 3. Aufl., S. 177. Leipzig 1924) eine mißverständliche Ausdrucksweise gewählt, die hier korrigiert sei. Da die photometrischen oder photographischen Methoden nur Vergleiche von Beleuchtungsstärken liefern, solange man nicht die Konstanz des Lichtstromes zugrunde legt, d. h. den auf das Auge oder die Platte wirkenden Lichtstrom als Energiestrom ansieht, so liefern sie auch keine Definition der Größe k. Eine solche ist nur mit Hilfe des Energiebegriffs möglich.

[2]) E. LIEBENTHAL (s. Fußnote S. 199), S. 79.

für diesen Fall die durch die Gleichungen (2) und (3) oder (2a) und (3a) gegebenen Definitionen des Energie- oder Lichtstromes beibehalten, wenn wir nun auch (den Energiestrom dE oder) den Lichtstrom dL und (die Intensität i oder) die Leuchtkraft k als dem Orte der Blende eigentümlich ansehen. Es ist also der Lichtstrom durch df_1

$$dL_1 = k_1 df_1 \cos\vartheta_1\, d\omega_1\,;$$

der Lichtstrom durch df_2

$$dL_2 = k_2 df_2 \cos\vartheta_2\, d\omega_2\,. \tag{6}$$

Der Raumwinkel $d\omega_1$ ist hierbei dadurch bestimmt, daß er alle Strahlenkegel eines beliebigen Punktes von df_1 enthält, die später nach den Gesetzen der Strahlenbrechung die Blende df_2 durchsetzen; ebenso enthält $d\omega_2$ die Strahlen eines Punktes von df_2, die df_1 durchsetzt haben.

Zwischen diesen Raumwinkeln und den Flächen der Blenden besteht nicht mehr der frühere einfache Zusammenhang, aber an seine Stelle tritt als Folgerung aus dem MALUSschen Satz die von STRAUBEL[1]) abgeleitete allgemeine Beziehung, in der n_1 der Brechungsindex am Orte der ersten, n_2 der am Orte der zweiten Blende ist:

$$n_1^2 \cos\vartheta_1\, d\omega_1\, df_1 = n_2^2 \cos\vartheta_2\, d\omega_2\, df_2\,.$$

Nimmt man nun an, daß kein Lichtverlust auf dem Wege von der ersten zur zweiten Blende stattgefunden hat, so ist $dL_1 = dL_2$, und es folgt

$$k_1 : k_2 = n_1^2 : n_2^2\,. \tag{7}$$

Hat ein Lichtverlust $(dL_1 - dL_2)$ stattgefunden, so gilt

$$\frac{dL_2}{dL_1} = \frac{k_2}{k_1}\frac{n_1^2}{n_2^2}\,. \tag{8}$$

Liegen die erste und zweite Blende in gleichen Mitteln, so ist, wenn kein Lichtverlust stattfand,

$$k_1 = k_2\,, \tag{9}$$

und im allgemeinen Fall

$$\frac{dL_2}{dL_1} = \frac{k_2}{k_1} = v \quad \text{(Verlustfaktor)}. \tag{10}$$

Die Leuchtkraft nimmt also im gleichen Verhältnis ab wie die Energie.

Der STRAUBELsche Satz verliert seine Anwendbarkeit in einem Sonderfalle, nämlich wenn die Blende df_1 durch das optische Gerät auf df_2 abgebildet wird. Der Öffnungswinkel $d\omega_1$ ist dann nicht mehr durch df_2 bestimmt, sondern kann beliebig gewählt werden; $d\omega_2$ ist dann der von den konjugierten Strahlen gebildete Winkel; df_2 ist nicht mehr beliebig wählbar, sondern durch df_1 bestimmt. Um $d\omega_1$ und $d\omega_2$ zu bestimmen, wählen wir in der Öffnungsblende dieser Abbildung ein Element df_3, das von den Strahlen durchsetzt wird, die von einem Punkt von df_1 ausgehend den Raumwinkel $d\omega_1$ erfüllt haben, und deren Fortsetzungen (konjugierte Strahlen), sich in einem Punkte von df_2 schneidend, den Raumwinkel $d\omega_2$ erfüllen. Wir können nun sowohl in bezug auf df_1 und df_3 als auf df_3 und df_2 die oben angestellten Betrachtungen wiederholen. Der Lichtstrom durch df_1, df_3, df_2 ist dann wie oben

$$dL_1 = k_1 df_1 \cos\vartheta_1\, d\omega_1\,,$$

$$dL_3 = k_3 df_3 \cos\vartheta_3\, d\omega_3\,,$$

$$dL_2 = k_2 df_2 \cos\vartheta_2\, d\omega_2\,.$$

[1]) R. STRAUBEL, Phys. ZS. Bd. 4, S. 114–117. 1902/03.

Wenden wir den Satz von der Gleichheit des Lichtstromes und den STRAUBELschen Satz auf das Paar 1, 3 und das Paar 3, 2 an, so folgt

$$k_1 : k_3 = n_1^2 : n_3^2,$$

$$k_3 : k_2 = n_3^2 : n_2^2,$$

also

$$k_1 : k_2 = n_1^2 : n_2^2 .$$

Der Satz für die Leuchtkraft gilt also auch an konjugierten Stellen. Der Beweis ist auch mittels des CLAUSIUSschen Satzes[1]) zu führen, der im Falle konjugierter Elemente an die Stelle des STRAUBELschen tritt. Im Falle des Lichtverlustes läßt sich ebenso Gleichung (8) ableiten.

Die in den Gleichungen (6) bis (10) gewonnenen Ergebnisse liefern Lichtstrom und Leuchtkraft vorläufig nur für den Fall, daß ein Lichtstrom durch zwei unendlich kleine Blenden bestimmt wird, am Orte dieser Blenden.

127. Optische Geräte als Lichtröhren. Einen von Lichtstrahlen begrenzten und erfüllten Raum nennen wir eine Lichtröhre. Lichtröhren werden also durch Blenden bestimmt. Abb. 127 zeigt eine Lichtröhre, die durch zwei Blenden bestimmt ist.

Wir verfolgen die Lichtröhre durch den ganzen von den Strahlen durchlaufenen Raum, also von der leuchtenden Fläche bis zur Auffangfläche. Hierbei mögen die Strahlen stetige oder unstetige Verbiegungen erfahren können. Es können also auch beliebige optische Vorrichtungen in ihrem Verlaufe auf sie einwirken. Alle Strahlen aber, die nicht von der leuchtenden Fläche zur Auffangfläche gelangen können, weil sie irgendwo von einer Blende aufgefangen werden, werden auch an keiner anderen Stelle berücksichtigt, sondern scheiden ganz aus der Betrachtung aus. Dadurch ergibt sich, daß eine Lichtröhre auch durch mehr als zwei Blenden bestimmt sein kann. Ein Beispiel zeigt Abb. 128. Solche Lichtröhren treten bei allen optischen Geräten auf, die nicht nur eine Öffnungsblende und eine Gesichtsfeldblende besitzen.



Abb. 127. Eine von zwei Blenden ($O_1 O_2$ und $P_1' P_2$) bestimmte Lichtröhre. F und G zwei beliebige andere Schnittebenen. Die Blendenränder, die in den einzelnen (durch Schraffierung unterschiedenen) Gebieten der Röhre die ebenen Büschel (in der Zeichenebene) begrenzen, sind dort eingeschrieben.

Die Abb. 127 und 128 zeigen eine von zwei und eine von drei Blenden bestimmte Lichtröhre in dem Sonderfall einer achsensymmetrischen Anordnung; ferner liegen zwischen den Blenden keine Linsen oder Spiegel; die Abbildungen würden sich ergeben, wenn alle wirksamen Blenden genügend aberrationsfrei etwa in den Bildraum abgebildet worden wären. Diese Annahmen erleichtern die Anschauung, werden aber in den folgenden Betrachtungen nicht zugrunde gelegt.

Wir messen den Lichtstrom in einem Querschnitt 1 einer Lichtröhre, indem wir diesen in Flächenelemente zerlegen, durch die Summe der Lichtströme, die durch die einzelnen Elemente gehen. Den durch ein Element df_1 gehenden Lichtstrom bestimmen wir, indem wir an einer beliebigen, durch optische Vorrichtungen von der ersten getrennten Stelle einen zweiten Querschnitt 2 durch

[1]) R. CLAUSIUS, Pogg. Ann. Bd. 121. S. 1—44. 1864. Die mech. Wärmetheorie. 3. Aufl. Bd. I. S. 315—324. 1887.

den Lichtstrom legen und eine durch ihn gehende Fläche in die Elemente df_2 zerlegen. df_1 und df_2 bestimmen eine elementare Lichtröhre; eine solche bildete also den Gegenstand der Betrachtungen in Ziff. 125 und 126, in denen wir den von ihr geführten Lichtstrom in den beiden sie bestimmenden Blenden bestimmt haben. Der Lichtstrom durch df_1 ist die Summe aller Lichtströme der elementaren Lichtröhren, die durch df_1 gehen.

Es ist aber notwendig, daß durch die Zerlegung in die durch die Elemente df_1 und df_2 bestimmten Elementarröhren alle in einer Lichtröhre vorhandenen Strahlen und nur diese erfaßt werden. Dies ist ohne weiteres einleuchtend, wenn die Flächen 1 und 2 durch die Blenden einer Lichtröhre gelegt werden, die nur durch diese beiden Blenden bestimmt ist. Dann ist für jeden Punkt der Fläche 1 die ganze Fläche 2 bestimmend für den räumlichen Öffnungswinkel seiner Strahlung; es müssen also alle df_1, mit allen df_2 paarweise zu Elementarröhren verbunden, alle vorhandenen Strahlen und nur diese liefern; dies gilt in Abb. 127 für die Blenden $O_1'O_2'$ und $P_1'P_2'$. Zwei andere beliebige Schnitte durch dieselbe Lichtröhre, z. B. F und G, besitzen diese Eigenschaft nicht; ebensowenig irgendein Paar von Schnitten durch eine Lichtröhre, die wie in Abb. 128 durch mehr als zwei Blenden bestimmt ist. Verbindet man alle Punkte des Querschnittes F der Lichtröhre mit allen Punkten eines anderen Querschnittes, z. B. von G, so erhält man zwar alle Strahlen der Lichtröhre, aber auch andere, die der Lichtröhre nicht angehören. Wenn wir nun aber in genügend kleine Teile zerlegen und diejenigen Paare weglassen, deren Verbindungen falsche Strahlen ergeben, so können wir auch hier die ganze Lichtröhre aus Elementarröhren zusammensetzen, deren jede durch zwei Elemente df_1 und df_2 bestimmt ist und bei Unterteilung in genügend kleine Elemente die Zahl der „falschen" Strahlen beliebig verringern. Wir können also einen beliebigen Lichtstrom an zwei beliebigen Schnitten, die durch ein optisches Gerät getrennt sein können, als Summe der Lichtströme aller Elementarröhren auffassen, die durch zweckmäßige Paarung der Elemente der Schnitte erhalten werden. Also können wir die oben in den Gleichungen (6), (7), (8), (9) und (10) gewonnenen Ergebnisse auf zwei beliebige Schnitte durch die ein optisches Gerät durchsetzende Lichtröhre anwenden. Es folgt also aus Gleichung (7), (8), (9), (10):



Abb 128 Eine von den drei Blenden ($O_1'O_2'$, $P_1'P_2'$, $Q_1'Q_2'$) bestimmte Lichtröhre Die Blendenränder, die in den einzelnen durch Schraffierung unterschiedenen Gebieten die ebenen Büschel (in der Zeichenebene) begrenzen, sind dort eingeschrieben.

1. Eine beliebige durch ein optisches Gerät verfolgte elementare Röhre (kürzer: ein durch ein optisches Gerät verfolgter Lichtstrahl) besitzt an beliebigen Stellen, die in demselben Mittel liegen, dieselbe Leuchtkraft, oder eine im Verhältnis des Lichtverlustes herabgesetzte; wenn die Stellen in verschiedenen Mitteln liegen, ändert sich die Leuchtkraft im Verhältnis des Quadrats des Brechungsexponenten. (Die Leuchtkraft wird an jedem Punkte aber im allgemeinen eine Funktion der Richtung sein.)

2. Der Lichtstrom durch einen beliebigen Querschnitt einer Lichtröhre, die durch ein optisches Gerät bestimmt ist, oder der Lichtstrom durch ein optisches Gerät, in einer beliebigen Ebene geschnitten, ist

$$L = \iint df \iint h \cos\vartheta \, d\omega \,, \tag{11}$$

wobei das erste Integral über die Fläche des Querschnittes, das zweite über den ganzen endlichen Raumwinkel zu erstrecken ist, den die Strahlung erfüllt, die zu jedem Punkt des Querschnittes gehört. Die Fläche $d\omega$ kann man sich auf der Einheitskugel durch zwei Ebenen, die durch die Normale des Flächenelementes df gehen, und den Winkel $d\zeta$ einschließen und durch zwei auf der Normalen senkrechten Ebene herausgeschnitten denken, die zu ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gehören, dann ist $d\omega$ von einem Kreisstück der Länge $\sin\vartheta\, d\zeta$ und von einem Meridiankreisstück $d\vartheta$ begrenzt:

$$d\omega = \sin\vartheta\, d\zeta\, d\vartheta. \tag{12}$$

Ist die Lichtröhre ein Kreiskegelstumpf mit df als Basis und der Normale von df als Achse, dessen Öffnung $2\,\Theta$ ist, und k unabhängig von ζ, so ist der Lichtstrom durch df

$$dL = 2\pi\, df \int_0^{\Theta} k \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta; \tag{13}$$

und falls k auch unabhängig von ϑ ist,

$$dL = \pi\, k\, df \sin^2\Theta. \tag{14}$$

Die Verluste am Lichtstrom und an der Leuchtkraft.

128. Der Absorptionsverlust. Alle durchsetzten Mittel verschlucken (absorbieren) einen Teil des sie durchsetzenden Lichtstromes. (Innerhalb der optischen Geräte kann die Schluckung nur im Glase merklich werden.) Vom ursprünglichen Lichtstrom E_1 ist nach Zurücklegung der Länge d (in cm) in irgendeinem Mittel nur noch der Lichtstrom E_2 vorhanden, indem (LAMBERT 1760)

$$E_2 : E_1 = e^{-\alpha d} = a^d.$$

Nach Gleichung (10) ist auch $k_2 : k_1 = a^d$. Man nennt α den Absorptionskoeffizienten und $a = e^{-\alpha}$ den Durchlässigkeitsfaktor; diese Größen hängen von der Wellenlänge ab; ist die Abhängigkeit innerhalb des sichtbaren Spektrums stark, so ist das durchgehende Licht gefärbt. Die folgende Tabelle gibt die Werte a (für 1 cm) für einige Glasarten des SCHOTTschen Kataloges an. Außer für einzelne Wellenlängen ist a auch für „weißes Licht" (Tageslicht) gegeben.

Benennung	Borkron	Flint	Schwerflint	Uviolglas
Glasart	BK7	F 3	SF 6	UBK 5
Früher Nr.	3832	118	198	UV 3199
n_D	1,516	1,613	1,805	1,504
ν	64,0	37,0	25,5	64,8
Färbung	weiß	weiß	gelblich	weiß
a für $\gamma = 644\ \mu\mu$	0,990	0,992	0,944	0,988
a „ $= 578$ „	0,995	0,995	0,957	0,988
a „ $= 546$ „	0,995	0,995		0,991
a „ $= 509$ „	0,993	0,994	0,911	
a „ $= 480$ „	0,990	0,992	0,860	0,991
a „ $= 436$ „	0,987	0,984	0,779	0,982
a „ $= 405$ „	0,99	0,987	0,766	0,977
a „ $= 366$ „	0,92	0,895	0,754	0,945
a „ $= 334$ „	0,71	0,43	0,49	0,895
a „ $= 312$ „	0,171	0,00	0,03	0,52
a „ $= 302$ „	0,018	0,00	0,00	0,09
a „ $= 296$ „	0,00	0,00	0,00	
a „ $= 281$ „	0,00	0,00	0,00	0,00
weiß	0,992	0,993		0,987

Aus diesen Werten ergibt sich, daß bei Verwendung von Linsen, wie sie in den gewöhnlichen optischen Geräten vorkommen, der Absorptionsverlust fast zu vernachlässigen ist, höchstens wenige Prozent ausmacht. Der Unterschied der Weglänge, die verschiedene Strahlen in einer Linse zurücklegen, kann also stets vernachlässigt werden, es genügt, mit der Mitteldicke zu rechnen. Etwas mehr wird dieser Verlust bei Geräten ausmachen, die größere Prismenkörper enthalten. Diese werden meist aus einem Glase ähnlich BK 7 der Tabelle hergestellt, bei dem bei 100 mm Glasweg für weißes Licht ein Verlust von 7 bis 8% vorhanden ist.

129. Der Verlust durch Spiegelung bei der Brechung. Die Wellentheorie ergibt die folgende Beziehung zwischen der Leuchtkraft k des auftreffenden Lichtes und der Leuchtkraft k' des gespiegelten Lichtes

$$k' = k_p \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + k_s \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)} = k_p m_p + k_s m_s.$$

Hierbei bedeuten i und r Einfalls- und Brechungswinkel; $k_p:k$ ist der Anteil des einfallenden Lichtes, der in der Einfallsebene polarisiert ist, $k_s:k$ derjenige Anteil, der senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist. Bei natürlichem einfallenden Lichte ist $k_p = k_s = \frac{1}{2} k$, so daß $k':k = \frac{1}{2}(m_p + m_s)$ ist. Da die Vertauschung von i und r an den obigen Gleichungen nichts ändert, so ist der reflektierte Betrag derselbe, ob die Reflexion in Luft an Glas oder in Glas an Luft stattfindet. Die Leuchtkraft des gebrochenen Lichtes wird gegeben durch $k - k' = k''$; $k'':k = 1 - k':k$. Für senkrechten Einfall wird $i = r = 0$; $i:r = n$, wenn n das Brechungsverhältnis des zweiten Mittels gegen das erste ist und

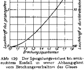


Abb. 129. Der Spiegelungsverlust bei senkrechtem Einfall in seiner Abhängigkeit vom Brechungsverhältnis des Glases.

$$k':k = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2; \qquad k'':k = \frac{4n}{(n+1)^2}. \tag{15}$$

Diese Abhängigkeit von $k':k$ oder von $k'':k$ vom Brechungsindex gegen Luft hat M. v. ROHR[1]) in Abb. 129 dargestellt. Für die gewöhnlich benutzten Gläser ist also mit jeder senkrechten Brechung ein Reflexionsverlust von 4% bei Kron- und 5% bei Flintglas verbunden. Bei Brechungen an Kittflächen kann der Verlust stets ganz vernachlässigt werden, da der relative Brechungsindex in Gleichung (15) sich dann nur um wenige Prozente von 1 unterscheidet; selbst wenn die beiden Mittel um 10% verschiedenen Brechungsexponenten gegen Luft haben, so ist doch $k'':k$ erst um 0,1% von der Einheit verschieden.

Eine graphische Darstellung der Abhängigkeit von m_p und m_s vom Einfallswinkel stellt für einen Brechungsindex von 1,5 Abb. 130 nach demselben Autor[2]) dar. Man erkennt, daß von senkrechtem Einfall an m_s bis zum Polarisationswinkel beständig abnimmt und die Zunahme von m_p nahezu ausgleicht, so daß der Mittelwert, der gesamte Reflexionsverlust für einfallendes natürliches

[1]) M. v. ROHR, Die Strahlungsvermittlung in „Die Bilderzeugung der optischen Instrumente". S. 528. Leipzig 1903.
[2]) M. v. ROHR, a. a. O. S. 530.

Licht, von $i = 0$ bis etwa $i = 50°$ nur geringe Veränderung zeigt. Da aber größere Einfallswinkel sehr selten in der praktischen Optik auftreten, so kann man den Reflexionsverlust praktisch für alle Strahlenneigungen gleich dem der achsennahen Strahlen setzen, nach (15) berechnen und aus Abb. 129 ablesen. Der Verlust ist derselbe beim Übergang von Luft in Glas wie beim Übergang von Glas in Luft.

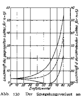


Abb. 130. Der Spiegelungsverlust an Glas vom Brechungsverhältnis 1.5 in seiner Abhängigkeit vom Einfallswinkel. Untere ausgezogene Kurve: m_s. Obere ausgezogene Kurve: m_p. Mittlere gestrichelte Kurve: $\frac{m_s + m_p}{2}$.

In reinen Linsenfolgen treten nur die Absorptions- und Spiegelungsverluste am Glase auf.

130. Verluste durch unvollkommene Spiegelung. Spiegelungen läßt man in optischen Geräten möglichst im Glase unter größeren Winkeln als dem der Totalreflexion stattfinden; doch lassen sich oft auch Spiegelungen an Silberflächen (gewöhnlich auch im Glase) nicht vermeiden. Wegen der geringen Haltbarkeit freier Silberflächen müssen da, wo die Reflexion nicht innerhalb des Glases stattfinden kann, andere Metalle herangezogen werden; neuerdings häufig der rostfreie Stahl.

Das Verhältnis der Leuchtkraft des senkrecht einfallenden Lichtes zu der des gespiegelten $k' : k$ nennt man das Reflexionsvermögen des Metalles; es sei mit R bezeichnet[1]. Die Werte des Reflexionsvermögens für einige für optische Geräte wichtige Metalle sind nach Messungen von HAGEN und RUBENS in den Kurven von Abb. 131 dargestellt[2].

Bei schiefem Einfall ergeben sich verwickelte Beziehungen zwischen der Leuchtkraft des einfallenden und des gespiegelten Lichtes, die P. DRUDE[3] entwickelt hat. M. v. ROHR[4] hat für Silber und Stahl die Abhängigkeit der in der Einfallsebene und der senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Komponente und ihres Mittelwertes vom Einfallswinkel durch Kurven dargestellt, die in Abb. 132 wiedergegeben sind. Der Mittelwert ist die gesamte Leuchtkraft des gespiegelten Lichtes in dem Falle, daß natürliches einfällt. Es zeigt sich, daß sie bis zu 80° fast dieselbe bleibt wie beim senkrechten Einfall, so daß für die Berechnung optischer Geräte nur der Wert des Reflexionsvermögens R betrachtet zu werden braucht.

131. Zusammenfassung aller Verluste. Praktisch genügt also meist folgende Rechnung. Sei bei einem optischen Gerät der Weg innerhalb des Glases d cm lang, seien ferner z_1 freie Flächen von Kronglas gegen Luft und z_2 von Flintglas

---

[1] Der Zusammenhang von R mit dem Absorptionskoeffizienten α und dem Brechungsvermögen n wird in der theoretischen Optik entwickelt; vgl. z. B. P. DRUDE, Lehrbuch der Optik. 3. Aufl., Hrsg. von GEHRCKE. S. 346.

[2] Nach einer Mitteilung, die ich Dr. H. KESSLER verdanke, findet dieser bei im Zeißwerk angestellten Messungen keinen Unterschied zwischen dem Reflexionsverlust an frischem Silber in der Luft und von demselben in Glas.

[3] P. DRUDE, Wied. Ann. Bd. 35, S. 508. 1888.

[4] M. v. ROHR (s. Fußnote 1, S. 205), S. 524.

gegen Luft vorhanden, und mögen z_3 Spiegelungen an Silberflächen stattfinden, dann ist die Leuchtkraft k' in dem letzten Mittel mit dem Brechungsindex n' gegeben durch

$$k' : k = \frac{n'^2}{n^2}\,(0{,}99)^d \cdot (0{,}96)^{z_1} \cdot (0{,}95)^{z_2} \cdot (0{,}94)^{z_3}. \tag{16}$$

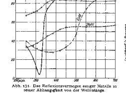


Abb. 131. Das Reflexionsvermögen einiger Metalle in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge.

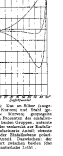


Abb. 132. Das an Silber (ausgezogene Kurven) und Stahl (gestrichelte Kurven) gespiegelte Licht in Prozenten des einfallenden. In beiden Gruppen: unterste Kurve der senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Anteil; oberste der in der Einfallsebene polarisierte Anteil. Dazwischen: der Mittelwert zwischen beiden (das natürliche Licht).

ERFLE[1]) empfiehlt die etwas genauere Methode, den mittleren Brechungsindex aller benutzten Gläser zu bilden und mit diesem und $z_1 + z_2$ in eine von ihm berechnete Tabelle einzugehen. — Allgemein sei

$$k' : k = \frac{n'^2}{n^2} \cdot v, \tag{16a}$$

wo v der auf obige Weise zu berechnende Verlustfaktor ist oder

$$k = n^2 \varkappa; \qquad k' = n'^2 \varkappa \cdot v. \tag{16b}$$

Die durch optische Geräte erzeugte Beleuchtungsstärke.

132. Untersuchung der geometrischen Bestimmungsgrößen. Aus Gleichung (11) folgt für die Beleuchtungsstärke

$$B = \iint k \cos\vartheta \, d\omega\,, \tag{17}$$

und für den Fall zentrierter Blenden im Achsenpunkte einer achsensenkrechten Fläche

$$B = 2\pi \int_0^{\Theta} k \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta\,. \tag{18}$$

[1]) H. ERFLE, D. Opt. Wochenschr. 1919, S. 351—355 u. 367—369; 1920, S. 3—5 u. 29—30.

Nachdem nun der nichtgeometrische Faktor k durch die obigen Betrachtungen, etwa durch Gleichung (16a), festgestellt ist, bleiben nach Gleichung (17) nur die Richtungen und Öffnungen der ein Flächenstück beleuchtenden Bündel zur Bestimmung der Beleuchtungsstärke übrig. Ist die Lichtquelle gegeben, so kann die Beleuchtung an einer Stelle in einem gegebenen Mittel nur gesteigert werden, indem man den Raumwinkel der Bündel dort vergrößert; also mit höchstens dem gleichen Erfolge, als ob man ohne optische Vorrichtungen die Lichtquelle dieser Stelle näherte — was aber praktisch oft nicht möglich ist. ABBE[1]) hat dies mit folgenden Worten ausgesprochen: „Alle Vorrichtungen zur Verstärkung einer Beleuchtung, zur sog. Lichtkonzentration, können daher niemals einen anderen Zweck haben — wenigstens niemals einen anderen wirklich erfüllen — als den: mit Hilfe einer gegebenen Lichtquelle von beschränkten Dimensionen oder an einem entfernten Orte dennoch eine solche Wirkung zu erzielen, wie sie direkt nur durch eine sonst gleichartige, aber von anderer Ausdehnung oder in anderer Lage erreichbar wäre."

Der Verlauf der Bündel ist aber im Bildraum jedes Gerätes an jedem Punkte durch die Blenden gegeben. Sind nur zwei bestimmende Blenden vorhanden, so zeigt der Bildraum eines achsensymmetrischen Gerätes das Aussehen von Abb. 127; für die Beleuchtung ist es gleichgültig, ob wir $P_1' P_2'$ als die A.P., $O_1' O_2'$ als die A.L. auffassen oder umgekehrt.

Das Bündel, das irgend einen Punkt des Bildraumes erreicht, ist der gemeinsame Teil der beiden Kegel, die diesen Punkt als Spitze und die beiden Blenden als Basis besitzen. Der ganze Raum wird aber durch A.P. und A.L. in folgender Weise zerteilt. Die beiden Blenden bestimmen einen Doppelkegel mit der Spitze M und einen solchen mit der Spitze N. „Innerhalb" dieser Kegel gelegen nennen wir den Raumteil, der die Achse enthält. Der innerhalb beider Kegel gelegene Raumteil zeichnet sich dadurch aus, daß in ihm nur eine Blende wirksam ist. Der außerhalb beider Kegel liegende Raumteil erhält überhaupt kein Licht. Die Punkte des außerhalb des Doppelkegels M, aber innerhalb des Doppelkegels N liegenden Raumteils (in der Abbildung wagerecht schraffiert) erhalten Bündel, die von beiden Blenden beschränkt werden, und zwar von gleichliegenden Rändern, also meniskenförmig, so daß z. B. in einem Schnitt F die Begrenzung, die in der Mitte kreisförmig ist, nach den Rändern zu in ein meniskenförmiges Kreiszweieck übergeht, das schließlich ganz verschwindet. Die Punkte des innerhalb des Doppelkegels M, aber außerhalb des Kegels N liegenden Raumteils (in der Zeichnung senkrecht schraffiert) erhalten Bündel, die von entgegengesetzt liegenden Rändern der beiden Blenden, also in Form ausgebauchter Kreiszweiecke, begrenzt werden; in einem Schnitt G ist die Begrenzung der Bündel in der Mitte kreisförmig und geht allmählich durch diese Kreiszweiecke in Null über.

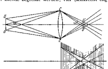
Ist die Leuchtkraft aller Strahlen dieselbe, so ist die stärkste Beleuchtung in einer achsensenkrechten Ebene bei M vorhanden. Die durchschnittliche Beleuchtungsstärke wird in der kleineren Blende größer — in der Abb. 127 also in der A.P. —, was ja unmittelbar aus der Erhaltung des Lichtstromes folgt.

Eine Verwirklichung des Falles zweier Blenden zeigt Abb. 133 in der Verwendung eines Kondensors $C\overline{C}$ mit einer Lichtquelle $O\overline{O}$. Die Linse $C\overline{C}$ ist hier die A.P. Das Bild der Lichtquelle ist gleichzeitig die A.L., die hier kleiner ist als die A.P.

Sind drei Blenden wirksam, so ergeben sich verwickeltere Verhältnisse, die für den Fall, daß die kleinste Blende in der Mitte liegt, durch Abb. 128 dargestellt

[1]) E. ABBE, Jenaer ZS. f. Med. u. Naturw. Bd. 6, S. 277. 1871; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 29. 1904.

wird Hier gibt es zwei (weiß gelassene) Raume, wo die Bundel nur von einer Blende begrenzt werden; zwei (wagerecht eng schraffierte) Räume, wo die Bündel von gleichliegenden Rändern der äußeren Blenden begrenzt sind, vier (wagerecht weit schraffierte) Räume, wo die Bündel von gleichliegenden Rändern je einer äußeren und der mittleren Blende begrenzt werden; vier (senkrecht eng schraffierte) Räume, wo die Bundel von entgegengesetzt liegenden Rändern je zweier äußeren Blenden begrenzt werden; vier (senkrecht weit schraffierte) Räume, wo die Bilder von je zwei entgegengesetzt liegenden Rändern einer äußeren und der mittleren Blende begrenzt werden.


Abb. 133. Der Kondensor

Ist die Leuchtkraft von der Richtung unabhängig, so laßt sich die Beleuchtungsstärke durch Integration von Gleichung (17) gewinnen. Fur den Achsenschnitt einer achsensenkrechten Auffangfläche ergibt (18), wenn der Öffnungswinkel der Bündel für die Punkte der Auffangebene Θ ist,

$$B = \pi k \sin^2 \Theta . \tag{19}$$

Insbesondere gilt in der Ebene des Gegenstandes, wenn wir die Bezeichnungen von (16b) benutzen und U der dingseitige Öffnungswinkel, a die dingseitige Apertur ist,

$$B = \pi \varkappa n^2 \sin^2 U = \pi \varkappa a^2 . \tag{20}$$

Für die Ebene des Bildes ebenso:

$$B' = \pi \varkappa v n'^2 \sin^2 U' = \pi \varkappa v a'^2 , \tag{21}$$

wo U' der bildseitige Öffnungswinkel, a' die bildseitige Apertur ist. Ferner

$$B' : B = v \cdot a'^2 . a^2 ; \tag{22}$$

nach dem Sinussatze $= v : \beta^2$, also auch

$$B' = \pi \varkappa v n^2 \sin^2 U : \beta^2 = \pi \varkappa v a^2 : \beta^2 . \tag{23}$$

Für andere von der Achse entfernte Stellen der achsensenkrechten Auffangfläche ist die Integration von I. H. LAMBERT[1]) zuerst ausgeführt worden. Hier sei nur das Ergebnis mitgeteilt. Bedient man sich für die in Abb. 134 definierten Größen der Abkürzungen

$$p = \frac{\xi^2 + y^2 - r^2}{2 y r} ; \qquad q = \frac{\xi^2 + y^2 + r^2}{2 y r} ,$$

so ist die Beleuchtung in O_1

$$B = \frac{\pi}{2} k \left(1 - \frac{p}{\sqrt{q^2 - 1}} \right) .$$

[1]) I. H. LAMBERT, Wir folgen nach M. v. ROHR, Die Bilderzeugung. S. 517. Berlin 1914 der Darstellung von A. BEER, Grundriß des photometrischen Kalkuls. S. 57. Braunschweig 1854. Es handelt sich dort um den formal identischen Fall der Bestrahlung einer Fläche durch ein paralleles außeraxiales Element, für den der Lichtstrom berechnet wird.

Führt man die aus der Abb. 134 verständlichen Bezeichnungen für die mittlere größte und kleinste Entfernung der Kreispunkte von O_1 ein: $O_1P = \text{med}$, $O_1P_2 = \max$, $O_1P_1 = \min$, so wird einfach

$$B = \frac{\pi}{2} k \left(1 - \frac{(\text{med} + r)(\text{med} - r)}{\max \cdot \min}\right). \tag{24}$$

Wegen $\max^2 \min^2 = (\text{med}^2 + r^2)^2 - 4 r^2 \text{med}^2 \cos^2 w$ wird der Klammerausdruck unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $r : \text{med}$ als der zweiten zu $2 r^2 \cos^2 w : \text{med}^2$, also

$$B = r^2 \pi k \cos^2 w : \text{med}^2 = r^2 \pi k \cos^4 w : \xi^2; \tag{25}$$

in der Bildebene also:

$$B' = p'^2 \pi k' \cos^4 w' : \xi'^2. \tag{26}$$

Die Beleuchtung nimmt also, wenn die Blende klein gegen den Abstand der Auffangebene ist, mit der vierten Potenz des Cosinus des Gesichtsfeldwinkels ab. So ist z. B. in der Bildebene einer photographischen Platte oder auf der Ebene eines Projektionsschirmes die Abnahme merklich, oft störend.

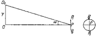


Abb. 134. Die Beleuchtung, die eine Kreisfläche auf einer parallelen Ebene außerhalb der Achse erzeugt. $PO = \xi$; $OO_1 = y$; $PP_1 = r$.

w	$\cos^4 w$
15°	0,87
30°	0,56
45°	0,25
60°	0,0625

Praktisch wird sehr oft die Beleuchtung seitlicher Bildpunkte noch wesentlich durch die Abschattung (Vignettierung) durch die Gesichtsfeldblende gegenüber den obigen Werten herabgesetzt (Ziff. 95 und 96).

133. Die Beleuchtungsstärke in den Sonderfällen von Ziff. 114 und 115. Sind die bildseitigen Büschel eng genug, so daß man sin und tang vertauschen kann, so wird, wenn p' der Halbmesser der A.P., ξ' der Abstand der A.P. von der Bildebene ist, aus Gleichung (21)

$$B' = \pi k' p'^2 : \xi'^2 = \pi \varkappa v n'^2 p'^2 : \xi'^2. \tag{27}$$

Dies gilt z. B. für photographische und mikrophotographische Vergrößerungen. Die allgemeine Gleichung (23) liefert im Falle enger bildseitiger Bündel mittels Gleichung (3), Ziff. 114,

$$B' = \frac{\pi \varkappa v}{\beta^2} \frac{p'^2}{f'^2} \left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right)^2, \tag{28}$$

oder falls, wie gewöhnlich, die A.P. der hinteren Brennebene viel näher liegt als dem Bilde, und deshalb Gleichung (3) durch (3a) ersetzt werden kann,

$$B' = \frac{\pi \varkappa v}{\beta^2} \left(\frac{p'}{f'}\right)^2. \tag{29}$$

Sind andererseits die dingseitigen Büschel eng, so liefert (21) in Verbindung mit Gleichung (4) und (5) von Ziff. 115

$$B' = \pi \varkappa v \frac{p^2}{f^2} : \left(1 - \frac{X}{x}\right), \tag{30}$$

und da fast stets der Brennpunktsabstand des Gegenstandes groß sein wird gegen den der Pupillen,

$$B' = \pi \varkappa \nu \left(\frac{p}{f}\right)^2. \qquad (31)$$

Die „Lichtstärke" photographischer Objektive wird also bei gewöhnlichen (verkleinernden) Aufnahmen durch das Quadrat des „Öffnungsverhältnisses" $p : f$ gemessen.

Die Helligkeit.

134. Definition der Flächenhelligkeit. Unsere Definition der Beleuchtungsstarke und des Lichtstromes gründete sich auf das Photometer, bei dem stets diffus reflektierende oder durchlassende Auffangflächen angewendet werden. Eine Stelle eines Querschnittes einer Lichtröhre besaß, wenn die eine Auffangfläche des Photometers, dort eingeführt, dem Auge gleich hell erschien, wie eine die andere mit einstellbarer Beleuchtung versehene Auffangfläche, die durch die Teilung des Photometers definierte Beleuchtungsstärke. Die Beleuchtungsstärke der im Auge selbst verlaufenden Lichtröhren ist nach dieser Definition diejenige, die ein zweiter Beobachter auf der Netzhaut des beleuchteten Auges sieht, also mindestens durch ein Gedankenexperiment bestimmbar.

Ebenso wie wir nun unsere Wahrnehmungen von Form und Farbe durch die Form und Farbe der Bilder erklären, die auf der Netzhaut entstehen (die ein zweiter Beobachter auf der Netzhaut sehen würde, die wir aber selbst nicht „sehen"), so erklären wir die Wahrnehmungen der Helligkeit durch die Beleuchtungsstärke der Netzhaut, wie sie ein anderer Beobachter sähe. Unter „Helligkeit" eines Flächenstückes verstehen wir hierbei den Reiz, der diese Empfindung erzeugt und setzen sie der Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut gleich. Diese Festsetzung wird der Erfahrung gerecht, wonach meistens größere Beleuchtungsstärke der Netzhaut stärkere Lichtempfindungen bewirken und definiert außerdem eine zweckmäßige Skala dieser Reize. Sie ist auf Flächenstücke zu beschränken, die größer als einige Winkelminuten erscheinen (s. weiter unten).

135. Die Flächenhelligkeit beim freien Sehen. Solange ein kleines Flächenstück die Grenze einiger Winkelminuten nicht unterschreitet, wird es hiernach einem unveränderten Auge in jeder Entfernung gleich hell erscheinen; denn die Beleuchtungsstärke seines Bildes hängt nur von der Lage und Größe der Augenpupille (genauer der A.P. des Auges) und von der Leuchtkraft in seinem Netzhautbilde, also nach (16a) nur von der Leuchtkraft des Gegenstandes selbst in der Richtung der von ihm nach dem Auge ausgehenden Strahlen ab. Der Satz gilt auch für beliebig ausgedehnte Flächen, wenn die Leuchtkraft ihrer Punkte von der Ausgangsrichtung innerhalb des Winkels unabhängig ist, um den die Verbindungslinie zwischen Flächenpunkt und Auge beim Wechsel der Entfernung sich dreht. Dabei können die einzelnen Punkte der Fläche verschiedene Leuchtkraft besitzen.

Da die obige Voraussetzung in den meisten Fällen sehr angenähert auch bei nicht selbstleuchtenden Flächen zutrifft, so gilt dieser Satz sehr allgemein. Er setzt nur die Unveränderlichkeit der Pupillenöffnung und die Freiheit von Absorption in den zwischen Auge und Gegenstand befindlichen Mitteln voraus.

Ist die Leuchtkraft vom Winkel ganz unabhängig, so wird die Fläche auch beliebig verdreht werden können, ohne daß ihre Helligkeit an jeder einzelnen Stelle sich änderte. Wenn man bei dieser Betrachtung sich auf das direkte Sehen beschränkt, so kann man genügend angenähert das Bild jedes Flächen-

punktes als in der Achse des Auges liegend ansehen; die Beleuchtungsstärke wird, da es sich stets um enge dingseitige Büschel handelt, durch Gleichung (31) gegeben; ist p_0 der Radius der Augenpupille, f_a die vordere Brennweite des Auges, so ist die Helligkeit

$$H = \pi \varkappa v \frac{p_0^2}{f_a^2}.$$

136. Die Flächenhelligkeit beim Sehen durch optische Geräte. Das Auge bildet in Verbindung mit dem optischen Gerät wiederum eine Linsenfolge, und es handelt sich nur darum, die Beleuchtungsstärke in ihrem endgültigen Bilde zu bestimmen. Hierfür bleiben also die allgemeinen oben abgeleiteten Sätze in Kraft. Als Maß der Helligkeit wird zweckmäßig die Helligkeit desselben Gegenstandes beim freien Sehen gewählt. Der Vergleich ist aber im allgemeinen nur möglich unter der Annahme, daß die Leuchtkraft des Gegenstandes vom Ausstrahlungswinkel nicht abhängt; denn die optischen Geräte benutzen andere Bündel als das freie Auge, um denselben Punkt abzubilden; beim Fernrohr wird der Unterschied des Ausstrahlungswinkels allerdings verschwindend klein

Die Leuchtkraft wird durch das optische Gerät von der ursprünglichen k durch die Lichtverluste im Gerät auf $k \cdot v$ herabgesetzt werden, die nach Ziff 131 berechnet werden müssen.

Der Vergleich setzt ferner voraus, daß die Augenpupille im freien Sehen dieselbe wie beim Gebrauch des Gerätes ist. Mit dem Gerät wird sie aber nicht ausgenutzt werden, falls die A.P. des Gerätes kleiner ist. Ist das letztere nicht der Fall, so wird die Helligkeit im optischen Gerät nur entsprechend den Lichtverlusten herabgesetzt sein:

$$H = H_0 \cdot v, \tag{32}$$

wo H_0 die Helligkeit des freien Sehens, v entsprechend Gleichung (16a) den Verlustfaktor des Lichtes bezeichnet.

Ist die A.P. kleiner als die Augenpupille, so gilt

$$H^2 : H_0^2 = v p'^2 : p_0^2. \tag{33}$$

Bei Linsenfolgen, die nach Art des Mikroskopes mit engen bildseitigen Büscheln arbeiten, fanden wir in Gleichung (3), Ziff. 114

$$p' = a : V; \qquad \text{also gilt für } p' < p_0,$$

$$H = H_0 \frac{v a^2}{V^2 p_0^2} = H_0 \frac{v a^2}{N^2 p_0^2} (250)^2, \tag{34}$$

wo V die Abbesche Vergrößerung, N die auf die Entfernung 250 bezogene Lupenvergrößerung ist (in Ziff. 109 mit N_L bezeichnet). Diejenigen Vergrößerungswerte, bei denen die A.P. gleich der Augenpupille ist, sind

$$V_0 = \frac{a}{p_0}; \qquad N = \frac{250\,a}{p_0}, \tag{35}$$

V_0 und N_0 heißen die Normalvergrößerung. Ist $V > V_0$ oder $N > N_0$, so ist $H < H_0$, und zwar $H : H_0 = v V_0^2 : V^2 = v N_0^2 : N$. — Ist $V \leqq V_0$ oder $N \leqq N_0$, so gilt (32).

Bei oder unter der Normalvergrößerung ist die Helligkeit nur im Verhältnis des Lichtverlustes herabgesetzt.

Bei höheren Vergrößerungen ist die Helligkeit außerdem proportional dem Quadrat der Vergrößerung oder proportional der Flächenvergrößerung herabgesetzt. Ferner ist bei gegebener Vergrößerung, die stärker als die Normalvergrößerung ist, die Helligkeit nach (34) dem Quadrat der numerischen Apertur

proportional. Da p_0 beim Mikroskop in weiten Grenzen willkürlich anzusetzen ist, weil es von der Beleuchtung abhängt und diese dort meist künstlich, also nach Bedürfnis abzuändern ist, so hat der Begriff der Normalvergrößerung, wie überhaupt der Vergleich der Helligkeiten mit und ohne Gerät beim Mikroskop geringe praktische Bedeutung.

Beim Fernrohr ist [Ziff. 116, Gleichung (6)] für $n = n' = 1$

$$p' = p : \Gamma;$$

also

$$H = H_0 \frac{\varkappa p^2}{p_0^2 \Gamma^2}. \tag{36}$$

$p : \Gamma$, die halbe lineare Öffnung dividiert durch die Fernrohrvergrößerung, spielt hier also dieselbe Rolle wie beim Mikroskop $a : V$, die numerische Apertur dividiert durch die Lupenvergrößerung. Die Normalvergrößerung ist $\Gamma_0 = p : p_0$. Bei mittlerer Tagesbeleuchtung ist die Augenpupille $2p_0$ etwa $= 2$ mm, bei Nacht $= 5$ mm. Um also bis auf die Lichtverluste dieselbe Helligkeit im Fernrohr zu erhalten wie beim freien Sehen, muß man $p = p_0 \cdot \Gamma_0$ machen, also am Tage ebensoviel, bei Nacht 2,5 mal soviel Millimeter für den Durchmesser der E.P. wählen, als man Einheiten der Vergrößerung erreichen will.

Die Punkthelligkeit.

137. Die Helligkeit bei kleinem Sehwinkel im freien Sehen. Die Netzhaut enthält ein Mosaik von getrennten lichtempfindlichen Elementen, deren jedes eine Nervenbahn nach dem Gehirn besitzt, die Zapfen und die Stäbchen. Bei gewöhnlicher Beleuchtung sind die Zapfen weit empfindlicher als die Stäbchen. Bei Beobachtung im direkten Sehen sind sie allein die aufnehmenden Elemente, da in der Netzhautgrube, dem gelben Fleck, fast nur Zapfen stehen. Dort kommt auf durchschnittlich 0,003 mm ein Zapfen, was einem dingseitigen Gesichtsfeldwinkel von 0,6′ (1 mm auf 5,7 m) entspricht.

Dieser mosaikartige Aufbau der Netzhaut müßte zur Folge haben, daß die Helligkeit bei Gesichtsfeldwinkeln der Gegenstände, die auf diesen Betrag herabsinken, nicht mehr durch die Beleuchtungsstärke gegeben werden kann, denn schließlich müßte nur noch ein Zapfen getroffen werden, eine Nervenleitung den Eindruck zum Gehirn vermitteln. Eine weitere Verkleinerung des Winkels müßte dann unmerklich bleiben, an ihrer Stelle müßte Verdunkelung wahrgenommen werden, da weniger Lichtenergie umgesetzt wird; bei Winkeln von etwa 1 Minute ab müßte die Helligkeit vom Lichtstrom abhängen; sie wäre gleich dem Lichtstrom dividiert durch die Fläche eines Elementes zu setzen.

Die Beobachtung zeigt bereits bei einer Ausdehnung von mehreren Minuten, daß die Helligkeit von der scheinbaren Größe des Gegenstandes abhängt, und daß die Bildgröße heller Lichter im Auge nicht verringert werden kann, auch wenn diese noch so kleinen Gesichtsfeldwinkel haben. Die Bildgröße und die Helligkeit scheinen dann fest miteinander verbunden zu sein und nur vom Lichtstrom abzuhängen; sie bleiben dieselben, wenn bei Konstanz des Lichtstromes sich der dingseitige Winkel ändert. VOLKMANN, AUBERT, HERING und ASHER[1]) zogen aus diesen von ihnen gewonnenen Versuchsergebnissen den Schluß, daß es infolge der Aberrationen unmöglich ist, ein Bild auf einen Zapfen zu beschränken.

[1]) Siehe TSCHERMAK, Über Kontrast und Irradiation (in Ergebn. d. Physiol. Bd. 2, Teil 2, S. 793. 1903], eine (abgesehen von der Bestimmung der Bildgrenze) erschöpfende Darstellung, wo auch die übrige hier erwähnte ältere Literatur zu finden ist.

Demnach bleibt die Abhängigkeit der Punkthelligkeit vom Lichtstrom bestehen; nur kann sie nicht in der obigen Weise aus dem Netzhautmosaik allein abgeleitet werden.

138. Die Bedeutung der Aberrationen für die Lichtverteilung auf der Netzhaut. Das Auge ist chromatisch überhaupt nicht korrigiert. Eine Berechnung der hieraus entstehenden Lichtverteilung hat HELMHOLTZ[1]) gegeben. Der Einfluß dieses Fehlers wird dadurch sehr vermindert, daß die Kurve der Empfindlichkeit für eine Farbe (gelbgrün) ein ausgeprägtes Maximum zeigt[2]).

Die monochromatischen Aberrationen sind durch GULLSTRANDS[3]) theoretische Arbeiten geklärt und seine Rechnungen durch Versuche bestätigt worden. Hierzu sei auf die Darstellung M. v. ROHRS (Kap. 2, Ziff. 49 u. 50) verwiesen. Das Auge ist hiernach einem optischen Gerät ähnlich, das „für die Einfallshöhe 2 mm sphärisch korrigiert" ist, aber für geringere Einfallshöhen eine sehr starke „Zone der sphärischen Aberration" aufweist; dessen Linsen ferner „durch die Fassung verspannt" sind.

Auch bei einer geometrisch vollkommenen Strahlenvereinigung wäre im übrigen die durch die Beugung an der Pupille entstehende Lichtverteilung zu erwarten. Diese besteht für den Fall eines im Unendlichen liegenden leuchtenden Punktes aus einem mittleren Scheibchen, dessen Beleuchtungsstärke nach dem Rande zu rasch abnimmt, und sehr viel schwächeren, nach außen ganz verschwindenden Ringen besteht. Die halbe Größe des Scheibchens entspricht dingseitig für gelbgrünes Licht $1{,}22/p_0$ Winkelminuten, wobei p_0, der Radius der Pupille, in Millimeter zu rechnen ist.

Endlich sind die optischen Mittel des Auges nicht vollkommen durchsichtig, so daß eine merkliche Zerstreuung auftreten dürfte.

Der auffallendste Beweis für die Aberrationen im Auge sind nach der heute geltenden Meinung der Physiologen die Erscheinungen der Irradiation. Sie bestehen zum großen Teile in der Hinausschiebung der Grenze zwischen dunkel und hell ins dunkle Gebiet bei stark wachsender Helligkeit. Der im stromlosen Zustand kaum sichtbare Faden einer Glühlampe erscheint bei normaler Spannung stark verbreitert. Die Theorie erklärt dies durch das Sichtbarwerden des Lichtes, das das bei idealer Abbildung entstehende Bild nicht erreicht. Trägt man über jeden Punkt der Netzhaut die Beleuchtung als Ordinate auf, so ergibt sich die „Lichtfläche" MACHS. Einem hellen Kreise, der in Abb. 135 ein „ideales" Bild AD ergäbe, würde eine „ideale" Lichtfläche $ABCD$ entsprechen. Infolge der Aberrationen aller Art entsteht aber die wahre Lichtfläche $a e b c / d$. Nach dem FECHNERschen psychophysischen Grundgesetz ist der Beleuchtungsunterschied zweier Stellen, der eben noch wahrnehmbar ist, der Beleuchtung selbst proportional. Die Unterschiedsempfindlichkeit nimmt also mit wachsender Beleuchtung ab. Bei stark wachsender Helligkeit kann also etwa der Unterschied zwischen Ae und AB unmerklich werden und erst die Beleuchtungsstärke hg als von AB verschieden erscheinen [HELMHOLTZ[4]), 1860].

Trotz der Unschärfe der im Auge erzeugten Bilder — so sagt die besonders von HERING ausgebaute Theorie — sieht man eine scharfe Grenze als Wirkung des **Kontrastes**. Diese Erscheinung ist schon von AUBERT und MACH aus dem

[1]) H. v. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Opt. Bd. I, 3. Aufl., S. 153—157. 1911.

[2]) Der Einfluß der chromatischen Aberration auf die Sehschärfe wird sicher dadurch sehr herabgesetzt, daß der von HELMHOLTZ errechnete Lichtabfall die Bildung einer scheinbaren Grenze durch den Kontrast (s. unten) besonders begünstigt (MACH).

[3]) Eine kurze Übersicht der Theorie gibt GULLSTRAND in der obengenannten Ausgabe der HELMHOLTZschen Physiol. Optik S. 250—258, die Anwendung S. 353—376.

[4]) H. v. HELMHOLTZ, l. c. S. 157.

Bereich der gelegentlichen Sinnestäuschungen herausgehoben und als regelmäßige physiologische Wirkung erkannt worden. Sie besteht darin, daß jede örtliche Erregung einer Stelle der Netzhaut die entgegengesetzte Erregung in den Nachbarelementen zur Folge hat Weiß erzeugt in der Umgebung Schwarz, Schwarz Weiß (auf den Farbenkontrast gehen wir hier nicht ein), wodurch die ursprüngliche Erregung wiederum verstärkt wird. Diese Wechselwirkung benachbarter Stellen „übertreibt und schematisiert" (MACH) die Reizunterschiede; sie begrenzt die „Empfindungsfläche" schärfer als die Lichtfläche und macht so die Unschärfe des physikalischen Netzhautbildes zum größten Teil unmerklich. „Die wichtigsten Folgen jener Wechselwirkungen äußern sich gar nicht in Kontrasterscheinungen, d. h. in dem vermeintlichen Falschsehen der ‚wirklichen' Helligkeiten der Außendinge. Vielmehr beruht gerade das sog. richtige Sehen dieser Helligkeiten sehr wesentlich mit auf diesen Wechselwirkungen, und es ist noch viel wichtiger, die letzteren da zu erforschen, wo wir gar nichts von ihnen zu bemerken meinen, als da, wo sie uns als Kontrasterscheinungen auffallen. Der Wechselwirkung ... verdanken wir zu einem wesentlichen Teile ... unsere Sehschärfe" [HERING[1])]. Die Lage der durch den Kontrast bestimmten „scheinbaren Grenze" hat MACH[2]) angegeben; er entdeckte sie an rotierenden Scheiben mit schwarzen und weißen Sektoren, mit denen in größerer Ausdehnung ein Gebiet herzustellen ist, in dem wie in aeb in Abb. 135 die Beleuchtung stetig nach einem zu wählenden Gesetz zu- oder abnimmt. Man empfindet eine Stelle als hell, wenn die Beleuchtung in ihr größer als die mittlere Beleuchtung ihrer Umgebung ist, im umgekehrten Falle als dunkel. Dieser Unterschied gegen die Umgebung ist aber, wenn die Beleuchtung in einem Punkte x, y $B(xy)$ ist,

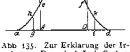


Abb. 135. Zur Erklärung der Irradiation. Die „ideale Lichtfläche" $ABCD$ und die wirkliche, durch die Aberrationen bestimmte $abcd$

$$-\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right)=-\Delta B.$$

Für positives ΔB erscheint xy dunkler, für negatives heller als die Umgebung. Linien, in denen $\Delta B=0$ ist, bilden scheinbare Grenzen, Linien, wo ΔB ein Maximum ist, sind dunkel, solche, wo ΔB ein Minimum ist, helle Linien. KÜHL[3]) hat diese Betrachtungen auf die durch Beugung verwaschenen Umrisse der Bilder optischer Geräte, insbesondere auf astronomische Messungen, angewandt, nachdem schon SEELIGER[4]) die MACHschen Entdeckungen unabhängig wiedergefunden und damit die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Sonnenfinsternissen erklärt hatte. KÜHL erklärt die scheinbaren Grenzen an rotierenden Kreisscheiben, mit denen SEELIGER die Lichtverteilung des Beugungsbildes eines Planeten im großen nachgebildet hatte, teils als Linien, in denen $\Delta B=0$, teils als solche, in denen es ein Maximum ist. Bei engen Doppelsternen erklärt

[1]) E. HERING, Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn aus Graefe-Saemischs Handb. d. ges. Augenheilkunde 2. Aufl., I. Teil, 12. Kap., S. 116. Leipzig 1905—1911 u. Berlin 1920.

[2]) E. MACH, Wiener Ber. Bd. 52, Abt. 2, S. 303—322 1865; Bd. 54, Abt. 2, S. 393 bis 408. 1866.

[3]) A. KÜHL, Sirius Bd. 52, S. 190 1919; ZS. f. ophthalm. Opt. Bd. 8, S. 129. 1920; Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 42, S. 375. 1921; Vierteljschr. d. astron. Ges. Bd. 56, S. 165. 1921; Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 5, S. 27 u. 265. 1924. Die Reduktion der Fernrohrbeobachtungen wegen Kontrastfehlers, in „Probleme der Astronomie", Festschrift für H. v. SEELIGER, Berlin 1924.

[4]) H. v. SEELIGER, Abhandlgn. d. Münch. Akad. 1896.

der Verlauf von ΔB die Tatsache des scheinbar zu groß gemessenen Abstandes sowie deren Umkehrung im photographischen Negativ; die „Tropfenbildung" beim Vorübergange eines Planeten vor der Sonne. Die Theorie ließ sich unter anderem mit Erfolg auf das Doppelbild- und das Fadenmikrometer anwenden. Schließlich gelang KÜHL der Nachweis, daß die auf der Marsoberfläche beobachteten Kanäle Kontraststreifen sind. Vgl. auch den Abschnitt über das Fernrohr.

Man kann nach dem Gesagten starke Aberrationen im Auge als erwiesen und zugleich die Seltenheit ihres Auffallens als erklärt ansehen. So ergibt sich, daß eine noch so kleine leuchtende Fläche ihr Licht „auf einen ganzen Komplex von Zapfen" (HERING, l. c. S. 155) verteilt[1]).

Will man nun das Gesetz der Punkthelligkeit unter Berücksichtigung der Aberrationen ableiten, so kann man an die Darstellung in Abb. 135 anknüpfen. Die mittlere Ordinate, die Beleuchtungsstärke im Mittelpunkt des unscharfen Bildes einer leuchtenden Fläche, ist offenbar gleich der des idealen Bildes, solange als dieses größer ist als der Zerstreuungskreis eines Punktes. Wird der Gesichtswinkel des Gegenstandes und damit sein Bild kleiner als dieser Zerstreuungskreis, so läßt sich ohne Annahme über die Art der Aberrationen beweisen, daß die Beleuchtung des Mittelpunktes dem Lichtstrom direkt und der Fläche des Zerstreuungskreises eines Punktes umgekehrt proportional ist[2]).

Nun hängt aber die Größe dieses Zerstreuungskreises von der Pupillengröße ab; das Beugungsscheibchen ist ihr umgekehrt proportional; die Zerstreuungskreise der monochromatischen und chromatischen Aberration wachsen dagegen mit der Pupillenöffnung. Dieser Zusammenhang ist also recht verwickelt. Da sich aber die Pupillengröße selbst mit dem Lichtstrom ändert, so ist die Abhängigkeit der mittleren Ordinate vom Lichtstrom eine doppelte und führt nicht ohne weitere Annahme zu einem Punktgesetz der Helligkeit. Ein einfaches Gesetz scheint auch nur für den im folgenden betrachteten Schwellenwert zu bestehen.

139. Der Schwellenwert der Punkthelligkeit. In der Astronomie sowohl als auch in der Technik (Signale) beschäftigt man sich mit dem Werte der Helligkeit von kleinen Lichtquellen, bei dem sie eben noch wahrnehmbar sind; dieser „Schwellenwert" ist auch von den Physiologen besonders häufig untersucht worden[3]).

Dieser Wert S ist gleich dem Lichtstrom, den der kleine leuchtende Gegenstand in das Auge entsendet, also

$$S = L_s = k_s \omega_s p_0^2 \pi = k_s p_0^2 \pi w_s^2 \pi . \qquad (37)$$

Hierin bedeutet der Index s, daß die betreffenden Größen im Augenblicke des Merklichwerdens einer Lichtempfindung gemessen sind; und zwar L_s den Lichtstrom, der die Netzhaut erreicht, ω_s den Raumwinkel, unter dem der Gegenstand

---

[1]) Trotzdem kann das Auflösungsvermögen des Auges dem Durchmesser eines Zapfens entsprechen. Die Lichtfläche eines Punktes ist ein Berg mit einem breiten von der Aberration herrührenden Sockel; die Lichtfläche zweier benachbarter Punkte ein Gebirge mit zwei Gipfeln, und es genügt, wenn diese um mehr als einen Zapfen auseinanderstehen, um sie bei hinreichender Vertiefung zwischen den Gipfeln unterscheiden zu können; diese Vertiefung wird durch den Kontrast noch übertrieben.

[2]) O. EPPENSTEIN, in Czapski-Eppensteins Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente. 3. Aufl., S. 313. 1924. Die dort aus dieser Rechnung gezogenen Folgerungen werden im obigen für das Auge aufgegeben; die Anwendung auf den Fall der photographischen Wirkung von Punkten bestehen gelassen.

[3]) A. TSCHERMAK, l. c. S. 799; NAGEL, in Helmholtz' Handb. d. physiol. Opt. 3. Aufl., Bd. II, S. 283. 1911.

erscheint, k_s seine Leuchtkraft und — im Falle eines Kreises — w_s den halben linearen Gesichtswinkel. Die Konstanz des Schwellenwertes bedeutet also z. B.

$$L_s = \text{konst.} \tag{38}$$

oder

$$k_s w_s^2 p_0^2 = \text{konst.} \tag{39}$$

Gewöhnlich wird die Konstanz von p_0 vorausgesetzt und die Konstanz des Produktes $k_s w_s^2$ behauptet. Dieses als „gegenseitige Ergänzung von Gesichtswinkel und Helligkeit" schon 1857 von R. FOERSTER[1]) aufgestellte Gesetz wird jetzt meist nach RICCO[2]) (1877) genannt, der es zuerst exakt formuliert zu haben scheint.

Versuche in NAGELS Laboratorium[2]) haben das Gesetz für das direkte Sehen — die Zapfen — bei dunkeladaptierten Augen bis zu 8,5 scheinbarer Gegenstandsgröße bestätigt. Für das indirekte Sehen (die Stäbchen) fand PIPER[2]) die Konstanz von $k_s \cdot w_s$, bei Dunkeladaptation. Neuere Versuche von GEHLHOFF und SCHERING[3]) führen für die Zapfen etwa zur Konstanz von $k_s w_s$, für die Stäbchen zur Konstanz von $k_s w_s^2$. Doch hat KÜHL[4]) gegen diese Auswertung der Messungen Einspruch erhoben.

Die Messungen KÜHLS am Fernrohr, die unten besprochen werden, bestätigen das Gesetz, das durch (39) ausgedrückt wird, insofern, als bei konstantem k_s die Konstanz von $w_s^2 p_0^2$ mit großer Genauigkeit, und zwar bis zu Winkeln von 22′, nachgewiesen wird. KÜHL erhält die verschiedene Winkelgröße, indem er durch Okulare wachsender Stärke die A.P. seines Fernrohres und damit den benutzten Teil der Augenpupille verkleinert und die Beugungsscheibchen im selben Verhältnis vergrößert. Diese Übervergrößerung bewirkt nur die Ausbreitung der gleichen Lichtmenge auf einen größeren Teil der Netzhaut.

Da das RICCOsche Gesetz hiernach über einen sehr großen Winkelbereich gilt (bei 22′ über die ganze Netzhautgrube), so ist nur die Erklärung möglich, daß gleichzeitige Reizungen benachbarter Netzhautpunkte einander „gegenseitig über die Schwelle heben"[5]). Es wäre dies das gleiche Verhalten, das beim Tastsinn beobachtet wird[6]).

140. Die Helligkeit von Linien. Der Schwellenwert muß durch die Gleichung

$$k_s p_0^2 w_s = \text{konst.} \tag{40}$$

gegeben sein, wenn w_s die scheinbare Breite bedeutet.

141. Die durch optische Geräte bei kleinen Sehwinkeln vermittelte Helligkeit. Bei Gegenständen mit kleinem Sehwinkel war oben der Lichtstrom als für die Helligkeit maßgebend gefunden worden, der von dem Gegenstande aus-

[1]) Vgl. H. AUBERT, Physiologie der Netzhaut. Breslau 1865.

[2]) Vgl. die oben angeführten Darstellungen bei TSCHERMAK und HELMHOLTZ.

[3]) G. GEHLHOFF u. H. SCHERING, ZS. f. Beleuchtungsw. Bd. 26, S. 103. 1920; vgl. auch H. SCHULZ, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 59. 1922.

[4]) A. KÜHL, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 44, S. 121. 1923.

[5]) F. B. HOFMANN, in Graefe-Saemischs Handb. d. ges. Augenheilkunde 2. Aufl., 1 Teil, Kap. XIII, S. 25 u. 99—100. Berlin 1920.

[6]) Diese gegenseitige Unterstützung der Netzhautstellen in bezug auf das Merklichwerden der Reize ist durchaus nicht identisch mit der Annahme, daß eine Netzhautstelle in den benachbarten gleichartige Reize hervorruft (was ich gegenüber meiner oben angeführten Darstellung [S. 191] hier berichtigen möchte). Infolgedessen steht auch diese Unterstützung nicht im Gegensatz zu der Erscheinung des Kontrastes, die man als entgegengesetzte Erregung benachbarter Netzhautstellen beschreiben kann. Vielmehr erklärt sich sogar die gegenseitige Unterstützung aus dem Kontraste, wenn man — mit HERING — die kontrastive negative Erregung der Nachbarschaft b einer vom äußeren Reize positiv erregten Stelle a als mit einer Steigerung der positiven Erregbarkeit von b verbunden annimmt; so daß nun eine äußere positive Erregung von b dort größere Empfindlichkeit antrifft. In dieser Überlegung sind a und b aber vertauschbar.

gehend die Netzhaut erreicht. Im Gegensatze zu der für größere leuchtende Flächen maßgebenden, auf der Netzhaut erzeugten Beleuchtungsstärke kann der Lichtstrom durch die Benutzung optischer Geräte gegenüber dem freien Sehen gesteigert werden. Das Fernrohr vergrößert ihn im Verhältnis der Fläche seiner E.P. zur Fläche der Augenpupille; das Mikroskop im Verhältnis des Quadrats seiner Apertur zu der Apertur im freien Sehen, die gleich dem Halbmesser der Augenpupille dividiert durch den Abstand des Gegenstandes vom Auge ist.

142. Die Grenze der Sichtbarkeit[1] **bei kleinem Sehwinkel in optischen Geräten.** Der Schwellenwert der Helligkeit ist hier für das Auge entsprechend Gleichung (37) durch den Lichtstrom selbst gegeben, der die Netzhaut erreicht.

Ist die A.P. des Gerätes, wie wir im folgenden immer annehmen wollen, gleich oder kleiner als die Augenpupille (der andere Fall erledigt sich leicht dadurch, daß die E.P. so viel verkleinert gedacht wird, daß die Annahme zutrifft), so ist der Lichtstrom durch das Gerät im Falle des Mikroskopes, von den Lichtverlusten abgesehen

$$\pi k \sin^2 U \cdot o = \pi k a^2 o : n^2 = \pi k \beta^2 p'^2 o : n^2 \xi'^2,$$

wenn k die Leuchtkraft, o die senkrecht zur Achse gemessene Fläche des kleinen Gegenstandes, U den Öffnungswinkel, a die dingseitige Apertur und n den Brechungsindex des Mittels bezeichnet, in dem der Gegenstand liegt; ferner ξ' den Abstand des Bildes von der A.P., deren Halbmesser p' ist.

Diese Gleichung ist auch für die Sichtbarkeit ultramikroskopischer Teilchen, die nur durch ihre Beugungswirkung in Erscheinung treten, maßgebend.

Im freien Sehen wäre der Lichtstrom $\pi k p_0^2 o : n^2 \xi'^2$, wenn der Gegenstand in derselben Entfernung ξ' betrachtet würde wie das durch das Gerät entworfene Bild. Die Erhöhung der Sichtbarkeitsgrenze erfolgt also im Verhältnis

$$\beta^2 p'^2 : p_0^2.$$

Die Sichtbarkeit ist also entsprechend dem Quadrat derjenigen linearen Vergrößerung erhöht, die $p' = p_0$ macht, also der zu der betreffenden Apertur gehörigen Normalvergrößerung; diese Verbesserung wird noch durch die Lichtverluste herabgesetzt.

Beim Fernrohr ist der bei Normalvergrößerung oder höherer der Netzhaut zugeführte Lichtstrom

$$L = J p^2 \pi,$$

wenn J die Beleuchtungsstärke bedeutet, die der Gegenstand am Orte der E.P. erzeugt, also gleich der Leuchtkraft multipliziert mit dem scheinbaren Winkel ist. Bei Sternen ist J die sog. „Helligkeit" oder Intensität des Sternes. Da bei Betrachtung mit bloßem Auge der Lichtstrom $L_0 = J p_0^2 \pi$ ist, so ist die Sichtbarkeitsgrenze durch das Gerät heruntergesetzt im Verhältnis $p^2 : p_0^2$; es werden also Sterne sichtbar, deren Helligkeit in diesem Verhältnis geringer ist.

Bei Normalvergrößerung ist $p' = p_0$; die A.P. ebenso groß wie die Augenpupille unter gleichen Umständen (bei der Betrachtung von Sternen muß man p_0 etwa $= 5$ mm setzen). Die Verbesserung ist dann $p^2 : p'^2 = \Gamma^2$; oder sie ist allgemein gleich dem Quadrat derjenigen Fernrohrvergrößerung, die nach Maßgabe der vorhandenen E.P. die Normalvergrößerung darstellt; höhere Vergrößerung ist hiernach ohne Einfluß.

In Wirklichkeit erhöht jedoch die höhere Vergrößerung die Erkennbarkeit, wenn der kleine helle Gegenstand oder Stern nicht auf dunklem Hintergrunde erscheint. Nach dem oben (Ziff. 136) Gesagten wird nämlich durch die Über-

[1] Hier wird nur das Erkennen kleiner Flächen behandelt; die Leistung der Geräte schließt auch die Unterscheidung getrennter Punkte und Linien, sowie das Erkennen von Formen ein. Vgl. auch den Abschnitt über das Fernrohr.

vergrößerung die Helligkeit des Hintergrundes proportional mit $p'^2 : p_0^2$ herabgesetzt, so daß der Unterschied zunimmt.

KUHL[1]), der die Sichtbarkeit der Sterne im Fernrohr theoretisch und messend untersucht, macht hierfür folgenden Ansatz: Nach dem FECHNERschen Gesetz muß der Reiz des Sternenlichtes zum Reiz des Himmelslichtes, gegen das er sich noch eben sichtbar abhebt, in einem konstanten Verhältnis $s = 1 + a$ (wo a etwa $^1/_{100}$ oder das Doppelte oder Dreifache betragen wird) stehen. Jener ist $= L = J p^2 \pi$, dieser proportional $k_h \cdot p'^2 \pi$ zu setzen, wo k_h die Leuchtkraft des Himmelsgrundes ist[2]). Zu der Erhellung durch den Himmelsgrund tritt noch die als konstant angesehene Erhellung durch das „Eigenlicht" des Auges[3]), deren Reiz formal $= k_e p_0^2 \pi$ gesetzt werden kann, wo p_0 den konstant angenommenen Radius der Augenpupille bei Nacht angibt; so folgt

$$\frac{J_s p^2 \pi}{k_h p'^2 \pi + k_e p_0^2 \pi} = \text{konst.},$$

wenn J hier durch den Index s als Schwellenwert gekennzeichnet wird; hieraus

$$J_s = \text{konst.}\left(\frac{k_h}{\Gamma_N^2} + \frac{k_e}{\Gamma_N^2}\right). \qquad (41)$$

Der Schwellenwert der Lichtstärke nimmt also für völlig dunkeln Himmel mit dem Quadrat der wachsenden Normalvergrößerung ab; bei hellerem Hintergrunde wird er durch ein Glied vergrößert, das dem Quadrat der Vergrößerung selbst umgekehrt proportional ist; da dieses für $\Gamma = \infty$ verschwindet, setzt KUHL mittels

$$J_{s\infty} = \text{konst.}\,\frac{k_e}{\Gamma_0^2}$$

$$J_s = J_{s\infty}\left(1 + \frac{k_h}{k_e}\frac{\Gamma_0^2}{\Gamma^2}\right).$$

Diese Gleichung stimmt mit den Beobachtungen. Der Vergleich beruht darauf, daß nach dem FECHNERschen Gesetz und den Messungen von BABINET[4]) die Sternhelligkeit J mit der „Größenklasse" G zusammenhängt durch

$$G = \text{konst.} - 2{,}5 \log J; \qquad (42)$$

so daß, wenn die im Fernrohr eben sichtbare Größenklasse wieder mit dem Index s und die bei unendlicher Übervergrößerung (d. h. völliger Verdunkelung des Himmelsgrundes) eben sichtbare mit s, ∞ bezeichnet wird

$$G_{s,\infty} - G_s = 2{,}5 \log\left(1 + \frac{k_h}{k_e}\frac{\Gamma_0^2}{\Gamma^2}\right). \qquad (43)$$

Diese Gleichung wird von der Messung bestätigt[5]).

---

[1]) A. KUHL, Sirius Bd. 51 oder N. F. Bd. 46, S. 101, 133 u. 163. 1918.

[2]) Das Verhältnis beider Reize muß dimensionslos sein, um von den gewählten Einheiten unabhängig zu werden. Es muß also im Nenner auch ein Lichtstrom stehen; der Reizwert des Himmelslichtes könnte etwa gleich dem Produkt aus der Beleuchtung der Netzhaut, die $k_h p'^2 \pi$ dividiert durch das Quadrat der auf Luft reduzierten Brennweite des Auges f_a ist, und der Netzhautfläche N gesetzt werden, deren Teilchen noch zu dem Helligkeitsvergleich mit dem Sternbilde beitragen (wobei die Flächenteile etwa mit einem mit wachsender Entfernung vom Sternbilde abnehmenden Faktor anzusetzen wären), dies entspräche auch der obigen Annahme der gegenseitigen Unterstützung, die ebenso für die Beleuchtung durch den Grund gelten muß. Die Konstante wäre dann $sN : f_a^2$.

[3]) H. v. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Opt. 3. Aufl., Bd. II, S. 12 u. 148. 1911.

[4]) H. v. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Opt. 3. Aufl. Bd. II, S. 148. 1911.

[5]) Aus (41) folgt für das freie Auge ($\Gamma = \Gamma_N = 1$), wenn J_s für irdische kleine Lichter vor hellem Hintergrunde $= k_s w_s^2 \pi$ gesetzt wird: $w_s = \text{konst.}\sqrt{k_h + k_e} : \sqrt{k_s}$. Dies entspricht nicht den Ergebnissen von AUBERT (Physiologie der Netzhaut, S. 201. Breslau 1865), der bei Änderung von $k_h : k_s$ von $^1/_{17}$ bis $^1/_2$ überhaupt keine Änderung von w_s bemerkte. Der Gegenstand wurde immer dann sichtbar, wenn sein Bild etwa einer Zapfengröße entsprach.

143. Die Wirkung des Lichts auf die photographische Platte[1]). Das Licht macht die Platte entwicklungsfähig. Handelt es sich nicht um sehr kleine beleuchtete Flächenstücke, so gelten die folgenden Gesetze. Die „Schwärzung" oder „Dichte" D einer Platte des entwickelten Negativs ist der dekadische Logarithmus des Verhältnisses zwischen dem von einer unbelichteten Stelle und der betrachteten Stelle durchgelassenen Lichte[2]). Die bei einer bestimmten Entwicklung und Plattensorte erhaltene Dichte ist eine Funktion der Belichtungszeit t und der Beleuchtungsstärke B, derart, daß[3])

$$D = f(Bt^p).$$

p ist im allgemeinen etwas kleiner als 1, kann aber auch 1 erreichen. Setzt man $Bt^p = E$, der Belichtung, so ergibt sich die durch Abb. 136 gekennzeichnete, von Hurter und Driffield (1890) in ihren grundlegenden Untersuchungen aufgefundene Kurve, in der $\log E$ als Abszisse und D als Ordinate gewählt sind[4]). Die Kurve zeigt ein gerades Stück, das für die praktische Verwendung benutzt wird. Es genugt der Gleichung

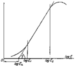


Abb. 136. Die charakteristische Kurve einer lichtempfindlichen Schicht.

$$D = \gamma \cdot \log \frac{E}{E_a}$$

$\log E_a$, die Trägheit der Platte oder $1/\log E_a$, ihre „Empfindlichkeit" ist von der Art und Länge des Entwickelns fast unabhängig, während der „Entwicklungsfaktor" γ mit längerer Entwicklung zunimmt. Bei sehr langer Entwicklung nähert sich γ einem Grenzwerte, der bei „kontrastreichen" Platten 2 bis 3 erreicht, bei sehr kontrastarmen nur etwa gleich 1 sein kann. $\gamma = 1$ stellt die „normale" Entwicklung dar. Der Wert von $(E_2 : E_1)$, womit die Länge des geradlinigen Verlaufes charakterisiert werden kann, bezeichnet die Grenzen der erlaubten „Unter"- und „Überbelichtung"; er soll etwa 16 erreichen. Alle diese Daten sind wesentlich für die Wiedergabe der natürlichen Helligkeitsunterschiede auf der Platte; und entsprechende Betrachtungen finden bei der Übertragung auf das Positiv statt.

Die Herstellung eines Positivs, in dem die Helligkeitsabstufungen der Natur in möglichst vollkommenem Grade wiedergegeben sind, ist noch mit zahlreichen

[1]) Es können nur die mit der Optik zusammenhängenden Fragen in kurzem Abriß behandelt werden.

[2]) Die Definition der Dichte kann nur auf die Absorption oder auch auf die Diffusion der Schicht Rücksicht nehmen und führt so zu zwei etwas verschiedenen Größen, deren erste von Bedeutung ist, wenn man Kontaktdrucke von einer Platte macht, die zweite, wenn man projiziert, z. B. vergrößert; vgl. hierzu A. Callier, ZS. f. wiss. Photogr. Bd. 7, S. 257. 1909. Zur Messung dienen Mikrophotometer, von Koch (Ann. d. Phys. Bd. 39, 40, 41 u. 42) objektiv registrierend gemacht.

[3]) K. Schwarzschild, Publ. der Kuffnerschen Sternwarte. Bd. V, S. 1. 1900. Nach L. A. Jones u. E. Huse Journ. Frankl. Inst. Bd. 197. S. 263. 1924; Journ. Opt. Soc. Amer. Bd. 10. S. 284. 1925; Scient. Publicat. Research Lab. Eastman Kodak Co. Bd. 8. S. 22. 1924 ist p von B abhängig; γ dagegen bleibt bei sehr starken Änderungen von B unverändert.

[4]) F. Hurter u. V. C. Driffield, vgl. Chem. Centralbl. Bd. 2, S. 365. 1890. Eine wortgetreue Zusammenstellung der Arbeiten in Photographic Researches of Hurter and Driffield edited by Ferguson, London 1920. Hurter und Driffield veränderten die Belichtungszeit bei konstanter Beleuchtung durch Sektorenräder. Vgl. auch Goldberg, Luther u. Weigert, ZS. f. wiss. Photogr. Bd. 9, S. 323. 1911; A. Odencrants, ebenda Bd. 16, S. 69 u. 111. 1916; Bd. 18, S. 209 u. 220. 1919; H. Buisson u. Ch. Fabry, Rev. d'opt. Bd. 3, S. 1. 1924.

optischen und technischen Fragen verbunden[1]), deren Erörterung hier nicht möglich ist.

144. Das photographische Punktgesetz. Nimmt die Größe des belichteten Flächenstückes mehr und mehr ab, so wird wie auf der Netzhaut die Helligkeit, so auf der Platte die Schwärzung schließlich nicht mehr von der Beleuchtungsstärke, sondern vom Lichtstrom abhängig. Eine Begründung dieses Verhaltens durch einen „mosaikartigen Aufbau" der photographischen Schicht analog der früher für das Auge üblichen (Ziff 137) ist dadurch ausgeschlossen, daß es sich hier um eine im Verhältnis zur Korngröße dicke Schicht handelt. Diese ist gewöhnlich 0,016 mm, es kommen auch ein Drittel so dicke und doppelt so dicke Schichten vor. Die Größe der Bromsilberkristalle liegt zwischen ultramikroskopischer und etwa 0,01 mm, aber meist zwischen 0,001 und 0,003 mm; die Zwischenräume haben die Größenordnung der Körner. Das Licht dringt in die Tiefe ein und wird an den Bromsilberkristallen gespiegelt, gebrochen und gebeugt, dadurch seitlich abgelenkt und ausgebreitet, so daß eine Einwirkung auf ein einzelnes Korn nicht stattfinden kann

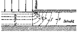


Abb 137 Die Ausbreitung des Lichts in einer lichtempfindlichen Schicht[2])

Wenn auf einer photographischen Schicht eine scharfe Grenze zwischen Licht und Schatten erzeugt wird (um Aberrationen optischer Bilder auszuschließen durch Aufdrücken eines durchlochten Bleches oder eines Rasiermessers), so dringt das Licht mit wechselnder Schichttiefe mehr und mehr unter den Rand ein [Abb. 137[2])]. Man kann nach GOLDBERGS[3]) Vorgang die Lichtverteilung dadurch bestimmen, daß man mit verschiedenen Beleuchtungsstärken (oder verschieden lange) belichtet und entwickelt. Es ergibt sich dieselbe Abnahme der Beleuchtung unter dem Rande wie in einem absorbierenden Mittel, $B = B_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$, wo x die Entfernung vom Rande darstellt. δ heißt der Trübungsfaktor und ist von der Entwicklung unabhängig (GOLDBERG: l. c. S. 84). Da hiernach

$$\frac{1}{\delta} = -\frac{d \log B}{d x},$$

anderseits oben die Neigung der charakteristischen Kurve, der Entwicklungsfaktor, definiert war durch

$$\gamma = \frac{d D}{d \log B},$$

so ist

$$\frac{\gamma}{\delta} \approx -\frac{d D}{d x} = S.$$

Diese Abnahmegeschwindigkeit der Dichte von der idealen Schattengrenze an ist die „Schärfe" der Platte, sie ist gleich dem Verhältnis des Entwicklungsfaktors zum Trübungsfaktor.

[1]) Eine umfassende Darstellung dieser Aufgabe bei E. GOLDBERG, Der Aufbau des photographischen Bildes. Teil 1. Helligkeitsdetails. 2. Aufl. Halle 1925. s. auch C. E. K. MEES, Scient. Public. Research Lab. Eastman Kodak Co Bd. VIII, S. 146. 1924. Die Veröffentlichungen dieses Laboratoriums enthalten zahlreiche Arbeiten, die für die hier nicht näher zu behandelnden Fragen des Aufbaues der photographischen Schicht, deren Zusammenhang mit der charakteristischen Kurve, dem „Auflösungsvermögen" der Platten, von wesentlicher Bedeutung sind. Einige andere Literatur bei CZAPSKI-EPPENSTEIN, Grundzüge, 3. Aufl., S. 195. 1924.

[2]) Aus C. E. K. MEES, Communication No. 109 from the Research Laboratory, Eastman Kodak Compagny.

[3]) E. G. GOLDBERG, ZS. f. wiss. Photogr Bd. 12, S. 77. 1913.

Außer durch diese Zerstreuung innerhalb der Schicht finden nun noch bei der Entstehung eines photographischen Bildes die unvermeidlichen Aberrationen durch die mangelhafte Strahlenvereinigung und die Beugung statt. Alle diese bewirken, daß den Dingpunkten auf der Platte Lichtflecke entsprechen, deren Beleuchtungsstärke von ihrer Mitte aus abnimmt. Wir können sie auch Zerstreuungskreise nennen, wenn wir außer dem Falle, daß sie alles vom Dingpunkte kommende Licht umschließen, auch den allgemeineren Fall in unsere Betrachtung einschließen, daß außerhalb des Zerstreuungskreises die Beleuchtung auf einen bestimmten Bruchteil der mittleren abgenommen hat, wie es der Zerstreuung durch trübe Mittel entspricht. Dieser Fall geht in den ersteren über, wenn man diesen Bruchteil so klein wählt, daß man ihn vernachlässigen kann.

145. Ableitung des Punktgesetzes der Beleuchtung aus der Lichtverteilung eines unscharfen Bildes. Man kann die Lichtfläche, die auf der Auffangfläche durch eine kleine Dingfläche F erzeugt wird, aus dem „idealen" Bilde von F, F' entstanden denken. Jedes der Elemente des idealen Bildes, z. B. dx', dy', das dem Gegenstandselement $dx\,dy$ entspricht, muß dazu in einen Zerstreuungskreis vom endlichen[1]) Radius b verbreitert werden, so daß seine Beleuchtungsstärke aus dem Werte $[B']$, den sie bei idealer Abbildung hatte, auf einen unendlich kleinen Wert abnimmt, der dem Lichtstrom proportional ist, der von $dx\,dy$ ausgehend, sich bei idealer Abbildung auf $dx'\,dy'$ konzentriert hatte und der $[B']\,dx'\,dy'$ beträgt. Wir können also die nun auf $dx'\,dy'$ verbliebene Beleuchtungsstärke $=[B']\,dx'dy'\varphi(x'y')$ setzen. $\varphi(x'y')\,dx'\,dy'$ ist also das Verhältnis der Beleuchtung, die das Element $dx'dy'$ nach der Ausbreitung in den Zerstreuungskreis von $dx\,dy$ empfängt, zu der, die es vorher besaß, oder der Lichtströme, die es vorher und nachher empfing. φ ist also der (endliche) Verteilungsfaktor der Lichtenergie bei der Zerstreuung, oder die die gesamte Aberration darstellende Funktion; außerhalb des Zerstreuungskreises verschwindet sie. Integriert man den jetzt durch $dx'\,dy'$ fließenden Lichtstrom, soweit er von $dx\,dy$ herrührt, über den ganzen Zerstreuungskreis, so muß sich der gesamte, bei idealer Abbildung auf dem Element $dx'\,dy'$ vorhandene Lichtstrom ergeben:

$$dx'\,dy'[B']\iint\limits_{(b)}\varphi(x'y')\,dx'\,dy' = dx'\,dy'[B'],$$

$$\iint\limits_{(b)}\varphi(x'y')\,dx'\,dy' = 1 = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x'y')\,dx'\,dy'. \tag{37}$$

Nach dem oben über φ Gesagten kann nämlich das Integral auch über die ganze Ebene erstreckt werden.

Wenn wir den Anfangspunkt der Koordinaten in das betrachtete Element verlegen, so ist dessen Beleuchtungsstärke $dx'dy'[B']\varphi(0,0)$. Die Verminderung gegenüber der „idealen" Beleuchtung wird aber ganz oder zum Teil dadurch ausgeglichen, daß das Licht von den Nachbarelementen, die ohne Aberration ebenfalls eine Beleuchtungsstärke $[B']$ besaßen, nach demselben Gesetze ausgebreitet wird und zur Beleuchtung des betrachteten Elements beiträgt. Der Beitrag, den ein Element des idealen Bildes mit den Koordinaten $x'y'$ am Anfangspunkt der Koordinaten leistet, ist offenbar gleich der Beleuchtungsstärke, die durch das am Anfangspunkt befindliche Element im Punkte $x'y'$ hervorgebracht wird; also $= dx'dy'[B']\varphi(x'y')$. Die gesamte Beleuchtungsstärke B', die durch alle Beiträge am Koordinatenanfang entsteht, wird also durch Integration dieser

[1]) S. hierzu die Erklärung oben Ziff. 144, S. 222, wonach auch der Fall des stetig abnehmenden Lichtfleckes eingeschlossen ist.

Größe über die ganze Fläche F' erhalten, die bei idealer Abbildung dem Gegenstande F entspräche:

$$B' = \iint\limits_{(F')} [B'] \varphi(x'y')\, dx'\, dy' \tag{38}$$

und im Falle gleichmäßiger Beleuchtung des idealen Bildes, was ja meist zutreffen wird,

$$B' = [B'] \iint\limits_{(F')} \varphi(x'y')\, dx'\, dy'. \tag{39}$$

Ist der betrachtete Punkt so innerhalb des idealen Bildes gelegen, daß sein Zerstreuungskreis an keiner Stelle über den Umfang des idealen Bildes hinausreicht, so ist das Doppelintegral nach (37) = 1, also

$$B' = [B'].$$

Die Beleuchtungsstärke ist dann also durch die Aberrationen nicht geändert. Dies gilt z. B., wenn der Gegenstand F ein Kreis, der betrachtete Punkt der Mittelpunkt und der ideale Bildkreis größer als der Zerstreuungskreis ist.

Erscheint also ein Gegenstand von gleichmäßiger Helligkeit unter genügend großem Gesichtswinkel, so wird die Helligkeit keines seiner Punkte durch die Aberrationen gemindert, abgesehen von einem Randsaum, der dadurch gegeben ist, daß sein Bild so breit ist wie der Radius des Zerstreuungskreises. Je kleiner der Gegenstand erscheint, desto mehr Einfluß hat die Ausdehnung des Integrals, d. i. die scheinbare Größe auf die Beleuchtungsstärke eines mittleren Punktes.

Führen wir statt rechtwinkliger die Polarkoordinaten ϱ' und ψ' ein, wobei ϱ' den Abstand vom Koordinatenanfang bezeichnet, so wird

$$B' = [B'] \int\int \varphi(\varrho')\, \varrho'\, d\varrho'\, d\psi',$$

da die Aberrationen als vom Winkel unabhängig angenommen werden dürfen. Für einen Kreis, dessen ideales Bild den Radius r' hat, ist

$$B' = [B']\, 2\pi \int_0^{r'} \varphi(\varrho')\, \varrho'\, d\varrho'.$$

Die Funktion φ wird meistens angenähert dargestellt[1]) werden durch $\varphi = Ce^{-a\varrho'^2}$; wir wählen $\varphi = Ce^{\frac{-4{,}6\varrho'^2}{b^2}}$; dann hat für $\varrho' = 0$ die Funktion φ ihren höchsten Wert C und ist für $\varrho' = b$ auf $1/100$ dieses Wertes gesunken; wir könnten b dann etwa als den Radius des Zerstreuungskreises im Sinne der obigen Ausführungen Ziff. 144, S. 222 bezeichnen. So wird

$$B' = [B']\, 2\pi C \int_0^{r'} e^{\frac{-4{,}6\varrho'^2}{b^2}}\, \varrho'\, d\varrho' = -[B']\, \frac{2\pi C b^2}{2 \cdot 4{,}6} \left[e^{\frac{-4{,}6\varrho'^2}{b^2}} \right]_0^{r'}.$$

Aus (37) folgt

$$C = \frac{4{,}6}{\pi b^2},$$

$$B' = [B'] \left(1 - e^{\frac{-4{,}6 r'^2}{b^2}}\right).$$

Falls $4{,}6\, r'^2$ klein gegen b^2 ist,

$$B' = [B']\, 4{,}6\, \frac{r'^2}{b^2} = [B']\, \frac{r'^2 \pi}{0{,}22\, \pi b^2} = [B']\, \frac{r'^2 \pi}{(0{,}47\, b)^2 \pi}. \tag{40}$$

---

1) Eine andere Darstellung (Czapski-Eppenstein, Grundzüge, S. 189) führt zu denselben Ergebnissen.

$[B']\, r'^2 \pi$ ist aber der gesamte, das ideale Bild treffende, also auch der gesamte vom Gegenstande ausgehende Lichtstrom L. Diesem ist also die Beleuchtungsstärke im Mittelpunkte des unscharfen Bildes proportional, falls das ideale Bild klein gegen die Zerstreuungskreise ist. Sie ist ferner so groß, wie sie bei gleichmäßiger Verteilung des Lichtes auf einen Kreis von etwa der halben linearen Größe des Zerstreuungskreises wäre, oder, um von der willkürlichen Festsetzung von φ frei zu werden, einen Kreis, dessen Flächengröße zum Zerstreuungskreis in einem festen, von der Art der Aberration bestimmten Verhältnis steht. Sei dieses etwa $1:\alpha\pi$, so ist

$$B' = \alpha \frac{L}{b'^2} = \alpha \frac{B \cdot F}{b'^2} = \alpha \frac{B r^2 \pi}{b'^2} = \alpha \cdot \frac{k w^2 \pi\, p^2 \pi}{b'^2}. \tag{41}$$

Hierin bedeutet B die Beleuchtungsstärke im Gegenstande, d. h. den Lichtstrom, den er dem Objektiv zusenden würde, wenn er die Fläche 1 besäße, k seine Leuchtkraft. Beim Abstande A des Gegenstands vom Objektiv ist also $B = k p^2 \pi : A^2$. $w = r : A$ ist der halbe Gesichtsfeldwinkel, unter dem der Gegenstandskreis erscheint.

146. Dunkle Punkte auf hellem Grunde. Wir benutzen einen allgemein geltenden Hilfssatz, der die Beleuchtungsstärke B' in einem mit Aberrationen behafteten Bilde eines beliebigen Gegenstands auf die Beleuchtungsstärke $\mathfrak{B}'$ in dem mit den gleichen Aberrationen behafteten Bilde eines zweiten Gegenstandes mit „ergänzender" Lichtverteilung zurückführt. „Ergänzende" Lichtverteilung nennen wir eine solche, die an jedem Orte des ersten Gegenstandes die dort herrschende Beleuchtungsstärke zu einem konstanten Werte ergänzt. Dann werden auch die Beleuchtungsstärke $[B']$ in irgendeinem Punkte des idealen Bildes des ersten Gegenstandes und die Beleuchtungsstärke $[\mathfrak{B}']$ im selben Punkte des idealen Bildes des zweiten Gegenstandes sich zu einem im ganzen Gesichtsfeld konstanten Werte K ergänzen; $[B'] + [\mathfrak{B}'] = K$. Für die wirklichen Bilder gilt wie oben

$$B' = \iint [B']\, \varphi(x' y')\, dx'\, dy',$$

$$\mathfrak{B}' = \iint [\mathfrak{B}']\, \varphi(x' y')\, dx'\, dy' = \iint (K - [B'])\, \varphi(x' y')\, dx'\, dy'.$$

Die Integrale sind über die ganze Fläche des jedesmaligen idealen Bildes zu erstrecken; wir können aber $[B']$ als eine Funktion von $x' y'$ auffassen, die außerhalb des idealen Bildes verschwindet, und die Integration über die ganze Ebene ausdehnen; letzteres gilt auch für die aus dem vorigen folgende Gleichung:

$$B' + \mathfrak{B}' = K \iint \varphi(x' y')\, dx'\, dy';$$

und nach (37)

$$B' + \mathfrak{B}' = K. \tag{42}$$

Also die Beleuchtungsstärken der wirklichen mit Aberrationen behafteten Bilder „ergänzen" einander ebenfalls.

Es folgt also für die Beleuchtungsstärke $\mathfrak{B}'$ in einem Punkte des Bildes einer dunkeln Fläche F auf hellem Grunde, wenn die Beleuchtungsstärke des idealen (oder wirklichen) Bildes des Grundes $K = [B']$ ist,

$$\mathfrak{B}' = [B'] - B', \tag{43}$$

worin für B' der Wert von (39) einzusetzen ist, d. h. die Beleuchtungsstärke im gleichen Punkte einer gleichen hellen Fläche F auf dunklem Grunde, deren ideales Bild die Beleuchtungsstärke $[B']$ besitzt. Für genügend große Flächen in hinreichendem Abstand vom Rande war oben $B' = [B']$ gefunden; es ist also $\mathfrak{B}' = 0$, der Bildpunkt ist völlig dunkel; nur im Randsaum ist $B' < [B']$, ein Übergang in den hellen Grund vorhanden. Ist aber die dunkle Fläche ein Kreis,

dessen Bild klein gegen den Zerstreuungskreis ist, so ist für den Mittelpunkt B' nach (41) einzusetzen, und es wird

$$[B'] - \mathfrak{B}' = \alpha \frac{L}{b^2} = \alpha \frac{B F}{b^2} \qquad (44)$$

$[B'] - \mathfrak{B}'$, die Verdunkelung im Mittelpunkte des Bildes einer sehr kleinen dunkeln Fläche auf hellem Grunde, ist also dem Fehlbetrag des Lichtstromes, der von dem hellen Grunde ausgeht, proportional.

147. Der Einfluß von Öffnung und Brennweite auf die photographische Wirkung von Punkten und Linien. Zur Anwendung von Gleichung (41) auf photographische Bilder ist für eine kleine leuchtende Fläche von der Leuchtkraft k, die unter dem Raumwinkel ω erscheint,

$$L = k p^2 \pi \cdot \omega$$

zu setzen.

b, der Halbmesser des Zerstreuungskreises, ist außer von p auch von der Brennweite f abhängig. Soweit die Zerstreuung von sphärischer Aberration herrührt, ist $b\,f$, wenn es sich um ein nicht korrigiertes Objektiv handelt, also keine Zonen vorliegen, proportional zu p^3/f^2, soweit von chromatischer Aberration, ist $b:f$ proportional zu $p:f$, soweit es sich um Beugung handelt, ist $b:f = 1{,}22 \cdot \lambda . p$. Die Zerstreuung in der Platte ist vom Objektiv unabhängig.

Berücksichtigt man nur die Beugung, so ist für eine kleine leuchtende Fläche (Punkt) von gegebener Leuchtkraft und Ausdehnung die Beleuchtungsstärke in der Mitte des Bildes also

$$B'_p \sim p^2 : f^2 ; p^2 \sim p^4\ f^2 .$$

Für eine leuchtende Linie ist[1])

$$B'_l \sim p^2 : b \sim p^2 : f .$$

148. Der photographische Kontrast gegen den Grund[1]) wird nach dem oben Gesagten, wenn die Beleuchtung des Bildes des Grundes B'_f ist, durch die Differenz der Logarithmen oder durch das Verhältnis der Beleuchtungen gegeben. Da B'_f nach Gleichung (31), Ziff. 133, $\sim p^2 : f^2$ ist, ist der photographische Kontrast des Punktes $\sim B'_p : B'_f = p^2$; der der Linie $p f$. Es werden also Punkte, die sich sehr wenig von ihrem Untergrunde abheben, photographisch entsprechend p^2 deutlicher wirksam, Linien entsprechend $p \cdot f$.

Dies gilt nach unseren obigen Überlegungen sowohl für helle Punkte und Linien auf dunklem Grunde als für dunkle auf hellem Grunde.

D. Ebene Flächen, Prismen.

Von

H. Hartinger, Jena.

a) Die Ermittlung des Strahlenverlaufs durch Prismen.

In der geometrischen Optik wird der Sonderfall, daß die brechenden oder spiegelnden Flächen Ebenen sind, wegen seiner theoretischen und praktischen Bedeutung eingehend für sich behandelt. Werden die brechenden Mittel von

[1]) P. G. Nutting, Astrophys. Journ. Bd. 40, S. 41. 1914. Nutting gelangt jedoch zu einem Unterschied zwischen hellen Details auf dunklem Grunde und dunklen Details auf hellem.

parallelen Ebenen begrenzt, so spricht man von planparallelen Platten. Die von sich schneidenden Ebenen begrenzten brechenden Mittel werden als Prismen bezeichnet.

149. Brechung an einer Ebene. Die Bestimmung der Richtung des an einer Ebene gebrochenen einfarbigen oder homogenen Lichtstrahls kann mit dem für brechende Kugelflächen angewandten YOUNGschen Zeichenverfahren erfolgen. Ist EE die Trennungsebene zweier optischer Mittel von den Brechzahlen n bzw. n', AA der einfallende Strahl und P der Schnittpunkt mit der brechenden Ebene (s. Abb. 138), so hat man den Kreis mit dem Radius $r = PC = 1$ zu zeichnen, der die Ebenenspur EE im Punkte P berührt. (Es ist vorausgesetzt, daß die Zeichenebene den einfallenden Strahl AA und die Ebenennormale PC enthält.) Die zum Kreise $C(r)$ konzentrischen Kreise mit den Radien $r_1 = n'/n$ und $r_2 = n/n'$ ermöglichen dann die Durchführung der YOUNGschen Konstruktion. Der nach dem zweiten Schnittpunkt L des einfallenden Strahles mit dem Kreis $C(r_1)$ zielende Radius CL schneidet den Kreis $C(r_2)$ im Punkte L'. PL' ist der gebrochene Strahl.



Abb. 138. Zeichnerische Ermittlung des an einer Ebene gebrochenen Strahles. Die brechende Ebene EE trennt optische Mittel von der Brechzahl n und n'. AP ist der einfallende, PA' der gebrochene Strahl und PC das Einfallslot. Es ist $PC = 1$ und C der Mittelpunkt des Kreises $C(r_1)$ mit Radius $r_1 = n'/n$ und des Kreises $C(r_2)$ mit Radius $r_2 = n/n'$. Die Verlängerung des einfallenden Strahles AP scheidet den Kreis $C(r_1)$ im Punkt L. Die Verbindungsgerade LC schneidet den Kreis $C(r_2)$ im Punkt L' des gebrochenen Strahles PA'. (YOUNGsches Zeichenverfahren.)

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CPL und $CL'P$ ergibt sich, daß zwischen dem Einfallswinkel i und dem Brechungswinkel i' die das Brechungsgesetz darstellende Beziehung

$$n \sin i = n' \sin i'$$

besteht.

150. Zeichnerische Ermittlung des Strahlenverlaufs durch Prismen. Die Schnittlinie der beiden brechenden Ebenen eines Prismas wird Prismenkante genannt und jede zur Prismenkante senkrechte Ebene als Hauptschnitt des Prismas bezeichnet. In Abb. 139 sei K der Schnittpunkt der Prismenkante mit der als Hauptschnitt angenommenen Zeichenebene. Die brechenden Ebenen sind durch ihre Spuren KL_1 und KL_2 gekennzeichnet. Den von den brechenden Ebenen eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle L_1KL_2 = \alpha$ nennt man den brechenden Winkel des Prismas.

Um den Verlauf eines einfarbigen Lichtstrahls durch ein Prisma zeichnerisch zu ermitteln, braucht man nur das oben angegebene YOUNGsche Verfahren auf jede brechende Ebene anzuwenden.

Verläuft der einfallende Strahl in einem Hauptschnitt des Prismas, so kann man das folgende vereinfachte Zeichenverfahren nach SNELL und REUSCH benutzen, das für den Fall durchgeführt ist, daß das Prisma beiderseitig an brechende Mittel derselben Brechzahl $n_1 = n_2'$ grenzt. Die Brechzahl des Prismas sei $n_1' = n_2$. Der einfallende Strahl AK treffe das Prisma in einem Punkt der Kante K. Um K als Mittelpunkt zeichnet man nun die Kreise mit den Radien

$r_1 = KA = 1$ und $r_2 = n_1'/n_1 = n_2/n_1'$. Das Lot durch A auf die brechende Ebene KL_1 schneidet den Kreis (r_2) in S_1, und die Verbindungsgerade S_1K gibt die Richtung des Lichtstrahls im Prisma an. Diese Richtung trifft den Kreis (r_2) zum zweitenmal im Punkt S'. Das Lot von S_1' auf die zweite brechende Ebene KL_2 schneidet den Kreis (r_1) in B. Die Verbindungsgerade KB stellt die Richtung des aus dem Prisma austretenden Strahles dar. Mit diesem Zeichenverfahren läßt sich in einfachster Weise die Strahlenrichtung nach der Brechung in einer Reihe von Prismen gleicher Brechzahlen, die alle an dasselbe optische Mittel grenzen, bestimmen.

Der Winkel $KAP_1 = i_1$ entspricht dem Einfallswinkel des Strahles AK und der Winkel $KS_1P_1 = i_1'$ dem Brechungswinkel für die erste Prismenfläche KL_1. Aus den Dreiecken AKP_1 und KS_1P_1 ergibt sich nun sofort, daß

$$n_1 \sin i_1 = n_1' \sin i_1'$$

ist. In gleicher Weise findet man, daß für die zweite brechende Fläche KL_2 das Brechungsgesetz

$$n_2 \sin i_2 = n_2' \sin i_2'$$

verwirklicht ist.

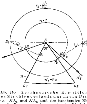


Abb. 139. Zeichnerische Ermittlung des Strahlenverlaufs durch ein Prisma. KL_1 und KL_2 sind die brechenden Ebenen des Prismas mit dem brechenden Winkel α; $n_1 = n_2'$ und $n_1' = n_2$, die Brechzahlen der optischen Mittel. Der im Hauptschnitt (Zeichenebene) verlaufende, einfallende Strahl AK treffe die brechende Kante K. KB ist der gebrochene Strahl. K ist Mittelpunkt der Kreise $K(r_1)$ mit Radius $r_1 = 1$ und $K(r_2)$ mit Radius $r_2 = n_1'/n_1 = n_2/n_1'$. Es ist $AP_1 \perp KL_1$. AP_1 schneidet $K(r_2)$ in S_1. S_1K schneidet $K(r_2)$ zum zweitenmal in S_1'. Das Lot $S_1'P_2$ auf KL_2 schneidet $K(r_1)$ im Punkt B des gebrochenen Strahls KB. S_1KS_1' ist die Richtung des Strahls im Prisma. (Zeichenverfahren nach Snell und Rausch.)

151. Rechnerische Ermittlung des Strahlenverlaufs durch Prismen. Um die Ablenkung ε rechnerisch ermitteln zu können, die ein im gemeinsamen Hauptschnitt mehrerer Prismen verlaufender Strahl AA (s. Abb. 129) erleidet, muß man das Brechungsgesetz

$$n_\nu \sin i_\nu = n_{\nu+1} \sin i_\nu' \qquad (1)$$

für jede einzelne brechende Ebene anwenden. Die Einfallswinkel i_ν und die Brechungswinkel i_ν' werden positiv gerechnet, wenn man den Strahl durch eine Rechtsdrehung auf dem kürzesten Weg mit dem zugehörigen Einfallslot zur Deckung bringen kann. Ebenso erhalten die brechenden Winkel α_ν der Prismen positive Werte, wenn die Austrittsebene durch eine Rechtsdrehung mit der Eintrittsebene zur Deckung gebracht wird. Es wird alsdann die Ablenkung ε_ν positiv, wenn der einfallende Strahl durch eine Rechtsdrehung in den gebrochenen Strahl übergeht.

Den Einfallswinkel $i_{\nu+1}$ für die $(\nu+1)$-te Fläche erhält man durch Subtraktion des brechenden Winkels α_ν des ν-ten Prismas von dem Brechungswinkel i_ν' der ν-ten Fläche, also

$$i_{\nu+1} = i_\nu' - \alpha_\nu . \qquad (2)$$

Selbstverständlich müssen die vorhandenen „Luft"-Prismen in gleicher Weise

berücksichtigt werden. Die durch die ν-te brechende Ebene verursachte Ablenkung ε_ν ergibt sich zu

$$\varepsilon_\nu = i_\nu - i'_\nu. \tag{3}$$

Die durch sämtliche Prismen erzeugte Gesamtablenkung berechnet sich demnach zu

$$\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_\nu = i_1 - i'_k - \sum_{\nu=1}^{k-1} \alpha_\nu. \tag{4}$$

Da nun $\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_\nu$ den Winkel $\alpha_{1,k}$ der letzten brechenden Ebene gegen die erste darstellt, so ist der gesamte Ablenkungswinkel

$$\varepsilon = i_1 - i'_k - \alpha_{1,k}. \tag{4a}$$

Wenn die sämtlichen Brechzahlen der optischen Mittel und die brechenden Winkel der Prismen bekannt sind, so können bei gegebenem ersten Einfallswinkel i_1 die sämtlichen folgenden Brechungs- und Einfallswinkel der Reihe nach mittels (1) und (2) errechnet und schließlich die Gesamtablenkung ε mittels (4) oder (4a) durch Summation ermittelt werden.

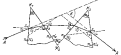


Abb. 140. Zur rechnerischen Ermittlung des Verlaufs eines Lichtstrahles im Hauptschnitt mehrerer Prismen. Die brechenden Kanten der Prismen mit gemeinsamem Hauptschnitt sind K_1, K_2 und K_3; die brechenden Winkel α_1, α_2 und α_3. Der Verlauf des Lichtstrahls durch die Prismen ist gegeben durch $A\,S_1\,S_2\,S_3\,S_4\,A$. Der Winkel ε zwischen eintretendem Strahl $A\,S_1$ und austretendem Strahl $S_4 A$ ist die Gesamtablenkung.

Für viele Fälle genügt es, die Gesamtablenkung in einem gemeinsamen Hauptschnitt sämtlicher Prismen und damit die Richtung des austretenden Strahles zu bestimmen. Will man aber auch den Strahlenort rechnerisch festlegen, so muß man den Ort des Eintrittspunktes S_1, also die Strecke S_1K_1, und die gegenseitige Lage der Prismen, also die Strecken K_1K_2, K_2K_3 usw., kennen. Es läßt sich alsdann mittels des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie leicht die Strecke K_1S_2, ferner aus $K_2S_2 = K_1K_2 - K_1S_2$ die Strecke K_2S_3 usw. bis K_kS_{k+1} berechnen. Die Ermittlung des Strahlenortes ist z. B. für die Bestimmung des wirksamen Querschnittes des einen Prismensatz durchlaufenden Strahlenbündels von Bedeutung.

Für eine gegebene Prismenfolge mit gemeinsamen Hauptschnitten ist die Gesamtablenkung eines in einem Hauptschnitt verlaufenden Strahles eine Funktion des ersten Einfallswinkels i_1, die durch die Beziehungen (4), (4a) und (1), (2) bestimmt ist. Die Gesamtablenkung ε erreicht also einen extremen Wert, wenn

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial i_1} = 0 \tag{5}$$

und gleichzeitig

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial i_1^2} \gtrless 0 \tag{6}$$

wird. Ist der zweite Differentialquotient $\delta^2\varepsilon/\delta i_1$ positiv, so erleidet der Strahl durch die Prismenfolge ein Minimum der Ablenkung. Dieser Fall wird u. a. von GLEICHEN, BURMESTER und KONEN[1]) behandelt. Hier soll nur auf die erste Bedingung $\delta\varepsilon/\delta i_1 = 0$ noch kurz eingegangen werden. Aus der Beziehung (4a) folgt, daß

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta i_1} = 1 - \frac{\delta i'_k}{\delta i_1} = 0. \tag{7}$$

Diese notwendige Bedingung für das Minimum der Ablenkung ist erfüllt, wenn

$$\delta i_1 = \delta i'_k \tag{7a}$$

wird. Durch Variation der Beziehungen (1) und (2) erhält man

$$\delta i'_\nu = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \frac{\cos i_\nu}{\cos i'_\nu} \cdot \delta i_\nu, \tag{8}$$

$$\delta i_{\nu+1} = \delta i'_\nu. \tag{9}$$

Multipliziert man die rechte Seite der Gleichung (8) mit dem Ausdruck $n_{\nu+1} \sin i'_\nu / n_\nu \sin i_\nu$, welcher nach (1) den Wert 1 besitzt, so erhält die Beziehung (8) die folgende Form

$$\delta i'_\nu = \frac{\operatorname{tang} i'_\nu}{\operatorname{tang} i_\nu} \delta i_\nu, \tag{8a}$$

und die Variation des letzten Brechungswinkels i'_k ergibt sich zu

$$\delta i'_k = \frac{\operatorname{tang} i'_1}{\operatorname{tang} i_1} \cdot \frac{\operatorname{tang} i'_2}{\operatorname{tang} i_2} \cdots \frac{\operatorname{tang} i'_k}{\operatorname{tang} i_k} \cdot \delta i_1 = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \operatorname{tang} i'_\nu}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \operatorname{tang} i_\nu} \delta i_1. \tag{10}$$

Ein Minimum der Ablenkung kann aber nur vorhanden sein, wenn nach (7a) $\delta i_1 = \delta i'_k$; also ist die notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimums der Ablenkung

$$\prod_{\nu=1}^{k} \operatorname{tang} i_\nu = \prod_{\nu=1}^{k} \operatorname{tang} i'_\nu. \tag{11}$$

Über Einrichtungen, die eine selbsttätige Einstellung auf das Minimum der Ablenkung beim Übergang von einer homogenen Farbe zur anderen ermöglichen, ist in H. KAYSERS Handbuch der Spektroskopie berichtet[2]).

152. Das einzelne Prisma. Für den Sonderfall eines einzelnen Prismas mit dem brechenden Winkel α, das beiderseits an das gleiche optische Mittel grenzt, vereinfachen sich die in Ziff. 3 für die Errechnung des Strahlenverlaufes im Hauptschnitt angegebenen Formeln wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} n \sin i'_1 &= \sin i_1, \\ i_2 &= i'_1 - \alpha, \\ \sin i'_2 &= n \sin i_2, \\ \varepsilon &= i_1 - i'_2 - \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Es ist dabei n die Brechzahl des Prismas bezogen auf das umgebende optische

[1]) A. GLEICHEN, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 34, S. 161. 1889; L. BURMESTER, ebenda Bd. 40, S. 65—90. 1895; H. KONEN u. H. KAYSER, Handb. d. Spektroskopie Bd. I, Kap. 3., S. 263 u. 379.

[2]) H. KAYSER, Handb. d. Spektroskopie Bd. I, S. 505, 510, 518. 1900.

Mittel. Bildet man unter Zuhilfenahme der Beziehungen (1) die Ausdrücke $\sin i_1 - \sin i_2'$ und $\sin i_1 + \sin i_2'$, so erhält man nach einfacher trigonometrischer Umformung die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\varepsilon+\alpha}{2} &= n\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\frac{i_1'+i_2}{2}}{\cos\frac{i_1+i_2'}{2}}\\ \cos\frac{\varepsilon+\alpha}{2} &= n\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\frac{i_1'+i_2}{2}}{\sin\frac{i_1+i_2'}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und nach Division dieser Beziehungen die BIOTsche Gleichung[1])

$$\operatorname{tang}\frac{\varepsilon+\alpha}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{i_1-i_2'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{i_1'+i_2}{2}}. \tag{3}$$

Für das einzelne Prisma nimmt die Bedingung Ziff. 3, Gleichung (3) für das Auftreten eines extremen Wertes der Ablenkung folgende Form an

$$\frac{\operatorname{tang} i_1'}{\operatorname{tang} i_1} = \frac{\operatorname{tang} i_2}{\operatorname{tang} i_2'}. \tag{4}$$

Da nach Voraussetzung das Prisma beiderseits an das gleiche Mittel grenzt, so kann die Gleichung (4) nur bestehen für die Werte

$$i_1 = \pm i_2'. \tag{5}$$

Es ist aber $i_1 = i_2'$, das $i_1' = i_2$ zur Folge hätte, unmöglich. Würde man nämlich in dem Dreieck $K_1S_1S_2$ (Abb. 140) die Winkelsumme bilden, so führte das für den Fall $i_1' = i_2$ zu dem Werte $\alpha = 0$, also zur planparallelen Platte. Folglich bleibt nur die Lösung

$$i_1 = -i_2' \text{ und damit } i_1' = -i_2. \tag{6}$$

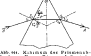


Abb. 141. Minimum der Prismenablenkung. Für ein Prisma in Luft ist das Minimum der Ablenkung erreicht, wenn der Strahl AS_1S_2A das Prisma symmetrisch durchsetzt. Es ist dann

$$\sin\frac{\varepsilon_m+\alpha}{2} = n\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Eine einfache geometrische Überlegung (Abb. 141) zeigt, daß für diesen Fall der extremen Ablenkung der Strahl das Prisma symmetrisch durchsetzen muß. Also wird $i_1' = -i_2 = \alpha/2$ und $i_1 = \varepsilon_m/2 + \alpha/2$, wenn man mit ε_m die extreme Gesamtablenkung (Minimum!) bezeichnet. Das Brechungsgesetz $n \sin i_1' = \sin i$ führt in diesem Falle zu folgender Formel:

$$\sin\frac{\varepsilon_m+\alpha}{2} = n\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{7}$$

die aus der Brechzahl n und dem brechenden Winkel α die Ablenkung ε_m bei symmetrischem Strahlendurchgang zu berechnen gestattet. Die erste der

1) S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., S. 325. 1924.

Gleichung (2) führt übrigens zu dem gleichen Ergebnis. Jede der beidenen Ebenen trägt denselben Betrag $\varepsilon_m/2$ zur Ablenkung bei. Den Einfallswinkel i_1, der zu symmetrischem Durchgang führt, berechnet man aus

$$\sin i_1 = n \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Um feststellen zu können, ob die durch Gleichung (7) bestimmte extreme Ablenkung ε_m bei symmetrischem Durchgang ein Minimum ist, muß man die Variation $\delta\varepsilon$ berechnen. Aus den Gleichungen (3) und (8a) von Ziff. 3 und aus der Beziehung $\delta i_1' = \delta i_2$ folgt der Wert

$$\delta\varepsilon = \delta i_1' \left(\frac{\operatorname{tang} i_1}{\operatorname{tang} i_1'} - \frac{\operatorname{tang} i_2'}{\operatorname{tang} i_2}\right). \tag{9}$$

Es ist $\delta\varepsilon = 0$ für den symmetrischen Durchgang auf Grund der Gleichung (4). Die Werte $\operatorname{tang} i_1/\operatorname{tang} i_1'$ und $\operatorname{tang} i_2'/\operatorname{tang} i_2$ nehmen für $n > 1$ mit wachsenden absoluten Beträgen von i_1' und i_2 ständig zu, was man sofort erkennt, wenn man diese Werte in folgende Form bringt:

$$\frac{\operatorname{tang} i_1}{\operatorname{tang} i_1'} = n \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1'}{1 - n^2 \sin^2 i_1'}} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tang} i_2'}{\operatorname{tang} i_2} = n \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_2}{1 - n^2 \sin^2 i_2}}. \tag{10}$$

Ist also vom symmetrischen Durchgang $i_1' = \alpha/2$ aus gerechnet $\delta i_1' > 0$, so wird auch der Klammerwert von (9) positiv, und ist $\delta i_1' < 0$, so wird ebenso der Klammerwert negativ. In beiden Fällen bleibt also $\delta\varepsilon$ positiv, d. h. die Ablenkung des Strahles ist beim symmetrischen Durchgang durch das Prisma ein Minimum. In ganz ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch für Werte $n < 1$, also z. B. bei beiderseits an das gleiche optische Mittel grenzenden Luftprismen, bei symmetrischem Durchgang ein Minimum der Ablenkung eintritt.

Für das Extremum der Ablenkung ist jedoch der symmetrische Durchgang nicht mehr vorhanden, wenn das Prisma nicht beiderseits an das gleiche optische Mittel grenzt, wenn also $n_1 \lesseqgtr n_3$ ist. Diesen Fall haben u. a. BURMESTER und ERFLE[1]) behandelt.

Den ersten Brechungswinkel i_{1m}', der in diesem Fall zu einem Extremum der Ablenkung führt, kann man auf Grund der folgenden Beziehungen berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} i_{1m}' &= \frac{k - \cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ k &= \sqrt{\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In der obenerwähnten Arbeit ERFLES ist auch die Frage beantwortet, wann im allgemeinen Fall für ein Prisma die Ablenkung ε den Wert Null annehmen kann.

Die Betrachtungen über das Minimum der Ablenkung bei Prismen, die beiderseits an das gleiche optische Mittel grenzen, zeigen, daß die größte Ablenkung dann eintreten muß, wenn der erste Einfallswinkel i_1 oder der zweite Brechungswinkel i_2' den Wert 90° annimmt. Es sind das die Stellungen des streifend eintretenden oder des streifend austretenden Strahles. Aus der Umkehrbarkeit des Strahlenganges folgt, daß in beiden Fällen die Ablenkungen ε_g gleich groß ausfallen müssen. Es ist

$$\varepsilon_g = 90° - i_2' - \alpha \text{ bei streifendem Eintritt}$$

und

$$\varepsilon_g = i_1 + 90° - \alpha \text{ bei streifendem Austritt.}$$

[1]) L. BURMESTER, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 40. 1895; H. ERFLE, Central-Ztg. f. Mech. u. Opt. Bd. 41, S. 440–441. 1920.

Aus demselben Grund ergeben sich auch für die Fälle, wo der Lichtstrahl die Eintrittsfläche bzw. die Austrittsfläche senkrecht, also ohne dort gebrochen zu werden, durchsetzt, die gleichen Ablenkungen. Die gesamte Ablenkung findet nur an einer Fläche statt und ist leicht zu berechnen, weil in dem einen Fall $i_2 = \alpha$ und in dem anderen Fall $i_1' = \alpha$ bekannt sind.

Für jedes Prisma, für das $n_1 = n_3$ gilt, ist also jede mögliche Ablenkung ε des Lichtstrahles durch zwei verschiedene Stellungen, die nur im Minimum der Ablenkung in eine zusammenfallen, möglich.

Für ein beiderseits an das gleiche optische Mittel grenzendes Prisma soll noch der Prismenwinkel α_g berechnet werden, für den beim streifenden Eintritt auch streifender Austritt vorhanden ist. Dieser größte brechende Winkel, für den noch ein einfacher Hindurchtritt durch das Prisma möglich ist, bestimmt sich aus der Beziehung

$$n \cdot \sin\frac{\alpha_g}{2} = 1\,. \tag{12}$$

Die nachfolgende Tabelle gibt für verschiedene Brechzahlen n die größten brechenden Winkel α_g und die zugehörigen Ablenkungen ε_g an[1]).

n	1,3	1,4	$\sqrt{2}$	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
α_g	100° 34′	91° 10′	90°	83° 37′	77° 22′	72° 04′	67° 30′	63° 31′	60° 0′
ε_g	79° 26′	88° 50′	90°	96° 23′	102° 38′	107° 56′	112° 30′	116° 29′	120° 0′

Zum Zwecke der Messung von Brechzahlen (und von Farbenzerstreuungsvermögen) sind neben dem Minimum der Ablenkung auch noch andere Prismenstellungen verwendet worden. So wird z. B. im ABBEschen Spektrometer die Autokollimationsmethode und im PULFRICHschen Totalrefraktometer die Totalreflexionsmethode angewandt.

Für ein beiderseits an das gleiche optische Mittel grenzendes Prisma von der bezogenen Brechzahl n gilt, wenn der brechende Winkel α hinreichend klein ist,

$$\varepsilon = \alpha\left(\frac{n\cos i_1'}{\cos i_1} - 1\right) \quad ^{2)}. \tag{13}$$

Ist neben dem brechenden Winkel α auch noch der Einfallswinkel i_1 hinreichend klein, so vereinfacht sich die Beziehung (13) weiter in folgender Weise:

$$\varepsilon = \alpha\,(n - 1)\,. \tag{14}$$

153. Der Strahlenverlauf außerhalb des Prismenhauptschnittes. Verläuft ein Lichtstrahl zu den Prismenhauptschnitten geneigt, so kann zur zeichnerischen Ermittlung des Verlaufes durch das Prisma das sinngemäß auf den Raum übertragene Zeichenverfahren von SNELL und REUSCH angewandt werden. Die in Ziff. 150 gegebene Beschreibung dieses Zeichenverfahrens gilt ohne weiteres auch für den Raum; nur müssen an Stelle der konzentrischen Kreise konzentrische Kugeln von entsprechenden Halbmessern genommen werden. Die Grundlage für die rechnerische Ermittlung des Strahlenverlaufes ist natürlich das Brechungsgesetz

$$n_\nu \sin i_\nu = n_\nu' \sin i_\nu'\,, \tag{1}$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der einfallende und gebrochene Strahl mit dem Einfallslot in einer Ebene liegen. Verläuft ein Lichtstrahl außerhalb des Prismenhauptschnittes, so sei er bestimmt durch die Winkel i_ν, i_ν' bzw. ϑ_ν, ϑ_ν', die er mit dem Einfallslot und dem Hauptschnitt einschließt, oder durch die

[1]) CZAPSKI-EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente Bd. III, S. 328. 1924.
[2]) Siehe z. B. R. H. HEATH, Lehrb. d. geometr. Optik, S. 32. 1894.

Winkel ϑ_ν, ϑ'_ν bzw. $i_{0\nu}$, $i'_{0\nu}$, die er mit seinen Projektionen auf eine Ebene durch das Einfallslot bzw. diese Projektionen mit dem Einfallslot einschließen. In Abb. 142 sei MM die Spur der brechenden Ebene, die senkrecht zur Zeichenebene steht. Der einfallende Strahl PO, der unterhalb der Zeichenebene (Hauptschnitt) verläuft, wird auf die Zeichenebene nach RO projiziert. Die Projektion des oberhalb der Zeichenebene verlaufenden gebrochenen Strahles OP' ist OR'. Der einfallende bzw. gebrochene Strahl bildet mit dem Einfallslot QQ' die Winkel i_ν bzw. i'_ν und mit dem Hauptschnitt oder der Projektion auf den Hauptschnitt die Winkel ϑ_ν bzw. ϑ'_ν. Die Projektionen schließen mit dem Einfallslot die Winkel $i_{0\nu}$ bzw. $i'_{0\nu}$ ein.

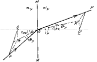


Abb 142. Zur Projektion eines Lichtstrahles auf den Hauptschnitt. MM ist die brechende Ebene, n_ν, n'_ν sind die Brechzahlen der optischen Mittel und die Zeichenebene sei der Hauptschnitt. Der einfallende Strahl PO und der gebrochene Strahl OP' verlaufen außerhalb des Hauptschnittes. RO ist die Projektion des einfallenden und OR' des gebrochenen Strahles auf den Hauptschnitt, QQ' ist das Einfallslot. i_ν und i'_ν sind Einfalls- und Brechungswinkel. ϑ_ν und ϑ'_ν sind die Winkel des Lichtstrahls mit seinen Projektionen. $i_{0\nu}$ und $i'_{0\nu}$ sind „Einfalls- und Brechungswinkel" der Projektion.

Macht man nun $PO = n_\nu$ und $P'O = n'_\nu$, so ist, da PQ und $P'Q'$ Lote zur Normalen QQ' sind,

$$PQ = PO \sin i_\nu = n_\nu \sin i_\nu$$

und

$$P'Q' = P'O \sin i'_\nu = n'_\nu \sin i'_\nu .$$

Berücksichtigt man noch das Brechungsgesetz, so folgt $PQ = P'Q'$. Ebenso ist $QR = Q'R'$, denn diese Strecken sind die Projektionen der in einer Ebene (Brechungsebene) liegenden gleichen Strecken PQ und $P'Q'$ auf den Hauptschnitt. Daraus folgt aber die Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ und also die Gleichheit der Projektionslote PR und $P'R'$. Es ist

$$PR = PO \sin\vartheta_\nu = n_\nu \sin\vartheta_\nu ,$$

$$P'R' = P'O \sin\vartheta'_\nu = n'_\nu \sin\vartheta'_\nu .$$

Also folgen die Winkel ϑ_ν und ϑ'_ν des einfallenden und gebrochenen Strahles mit seinen Projektionen auf irgendeine Ebene durch das Einfallslot dem Brechungsgesetz

$$n_\nu \sin\vartheta_\nu = n'_\nu \sin\vartheta'_\nu . \tag{2}$$

Da außerdem

$$OR = \frac{QR}{\sin i_{0\nu}} = OP \cos\vartheta_\nu = n_\nu \cos\vartheta_\nu$$

und

$$OR' = \frac{Q'R'}{\sin i'_{0\nu}} = OP' \cos\vartheta'_\nu = n'_\nu \cos\vartheta'_\nu ,$$

so ergibt sich für die Winkel $i_{0\nu}$ und $i'_{0\nu}$, die von den Projektionen mit dem Einfallslot eingeschlossen werden, die Beziehung

$$n_\nu \cos\vartheta_\nu \sin i_{0\nu} = n'_\nu \cos\vartheta'_\nu \sin i'_{0\nu} . \tag{3}$$

Beim Übergang zur nächsten brechenden Ebene ist zu berücksichtigen, daß

$$\vartheta'_\nu = \vartheta_{\nu+1} \tag{4}$$

und

$$i_{0\nu+1} = i'_\nu - \alpha_\nu \tag{5}$$

ist, wenn alle Prismen gemeinsame Hauptschnitte besitzen und α_ν die brechenden Prismenwinkel sind. Mit den Formeln (1) bis (5) kann dann der Strahlenverlauf errechnet werden.

Es soll noch der Sonderfall eines einzelnen in Luft befindlichen Prismas von der bezogenen Brechzahl n betrachtet werden. In Abb. 143 ist ein solches Prisma, der Verlauf eines Lichtstrahles $O_1S_1S_2O_2$ außerhalb des Hauptschnittes und der Verlauf der Projektion $O_{01}S_{01}S_{02}O_{02}$ auf den Hauptschnitt $A_0K_0B_0$ dargestellt.

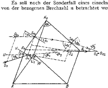


Abb. 143. Strahlenverlauf außerhalb des Hauptschnittes. $KABK_0A_0B_0$ ist die perspektivische Ansicht eines Prismas mit dem brechenden Winkel α. $K_0A_0B_0$ ist ein Hauptschnitt. Der außerhalb des Hauptschnitts verlaufende Strahl $O_1S_1S_2O_2$ wird auf den Hauptschnitt projiziert. Die Projektion ist $O_{01}S_{01}S_{02}O_{02}$. Grenzt das Prisma beiderseits an ein Mittel von der gleichen Brechzahl, so ist der Winkel ϑ_1 des einfallenden Strahls O_1S_1 mit dem Hauptschnitt ebenso groß wie der Winkel ϑ_2' des austretenden S_2O_2 mit dem Hauptschnitt

Aus $\vartheta_1' = \vartheta_2$ und den Beziehungen (2) folgt, daß

$$\vartheta_1 = \vartheta_2'. \tag{6}$$

Der in das Prisma eintretende und der aus dem Prisma austretende Strahl haben also gleiche Neigung gegen den Hauptschnitt. Aus der Beziehung (3) folgt ferner, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin i_{01}}{\sin i_{01}'} &= \frac{\sin i_{02}'}{\sin i_{02}} \\ &= n\frac{\cos\vartheta_1'}{\cos\vartheta_1} = n_{0\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Der Wert

$$\left.\begin{aligned} n_{0\vartheta} &= n\frac{\cos\vartheta_1'}{\cos\vartheta_1} \\ &= \sqrt{n^2 + (n^2-1)\,\mathrm{tg}^2\vartheta}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

der von der Brechzahl n des Prismas und von dem Winkel ϑ des Einfallswinkels gegen den Hauptschnitt abhängig ist, soll kurz als die Brechzahl des Prismas für die Projektion bezeichnet werden. Gleichung (7) in Verbindung mit

$$i_{02} = i_{01}' - \alpha \tag{9}$$

ermöglicht somit die Durchrechnung des projizierten Strahles.

Die Projektionen aller unter demselben Winkel ϑ_1 gegen den Hauptschnitt geneigten Strahlen besitzen ein Minimum ε_{0m} der Ablenkung, und zwar tritt dieses Minimum für den Fall $i_{01}' = \alpha/2$ ein. Die Minimalablenkung ε_{0m} der Projektion berechnet sich aus

$$\sin\frac{\varepsilon_{0m}+\alpha}{2} = n_{0\vartheta}\sin\frac{\alpha}{2} = n\frac{\cos\vartheta_1'}{\cos\vartheta_1}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

Da auf Grund der Gleichung (2) für $n > 1$ der Wert $\cos\vartheta_1'/\cos\vartheta_1 > 1$ sich ergeben muß, so ist die minimale Ablenkung ε_{0m} der Projektion immer größer als die minimale Ablenkung eines im Hauptschnitt verlaufenden Lichtstrahles.

Aus dem rechtwinkligen Dreikant $S_1(UVO_1)$ läßt sich der Einfallswinkel i_1 des wirklichen Strahles aus dem Einfallswinkel i_{01} der Projektion berechnen. Es ist

$$\cos i_1 = \cos\vartheta_1\cos i_{01}. \tag{11}$$

Für den Fall der minimalen Ablenkung der Projektion ist

$$\sin i_{01} = n\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

Unter allen einfallenden Strahlen mit der gleichen Neigung ϑ_1 gegen den Hauptschnitt erleidet der die geringste Ablenkung ε_m, dessen Projektion das Minimum ε_{0m} der Ablenkung besitzt Zum Beweise zieht man durch den Mittelpunkt O einer Kugel (Abb 144) die Parallele OP zum einfallenden Strahl und die Parallele OQ zum austretenden Strahl. Die Ebene OAB durch den Kugelmittelpunkt ist parallel zum Prismenhauptschnitt Da nach Gleichung (6) der eintretende und der austretende Strahl gleiche Neigung $\vartheta_1 = \vartheta_2'$ zum Hauptschnitt haben, so ist $AP = BQ = \vartheta_1$. OA und OB sind die Projektionen des eintretenden und des austretenden Strahles auf den Hauptschnitt Somit stellt der $\sphericalangle \varepsilon_0 (= \sphericalangle OAB)$ an der Spitze des gleichschenklig sphärischen Dreiecks ZPQ die Minimumsablenkung des projizierten Strahles und der Winkel ε $(= \sphericalangle OPQ)$ die Ablenkung des wirklichen Strahles dar. Aus der Abb. 144 ist zu entnehmen, daß

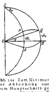


Abb. 144 Zum Minimum der Ablenkung eines zum Hauptschnitt geneigten Strahles Es sei O Mittelpunkt der Kugel $O(ZPQAB)$ OP ist parallel dem einfallenden Strahl und OQ parallel dem austretenden Strahl Die Ebene OAB sei parallel dem Prismenhauptschnitt Dann ist $\widehat{AP} = \widehat{BQ} = \vartheta_1$ Es ist $\varepsilon_0 = \sphericalangle AOB$ die Minimumsablenkung des projizierten Strahls und $\varepsilon = \sphericalangle POQ$ die Ablenkung des wirklichen Lichtstrahls

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin\frac{\varepsilon_0}{2}\cos\vartheta_1 \tag{13}$$

ist. Daraus folgt, daß die Ablenkung des wirklichen Strahles immer kleiner ist als die der Projektion, und daß zum Minimum der Ablenkung ε_{0m} der Projektion auch das Minimum der Ablenkung ε_m des wirklichen Strahles gehört Die Beziehungen (10) und (13) ermöglichen die Berechnung des Minimums der Ablenkung ε_m für den Strahl außerhalb des Hauptschnittes; dieses Minimum ist aber immer noch größer als das Minimum der Ablenkung eines im Hauptschnitt verlaufenden Strahles. Den Beweis hierfür hat ERFLE gegeben[1]).

154. Das Herschelsche Doppelprisma. Nach A. ROCHON und J. F. W. HERSCHEL erhält man ein Prisma mit veränderlichem brechenden Winkel, wenn man zwei Prismen von gleicher Brechzahl und mit gleichen brechenden Winkeln um entgegengesetzt gleiche Beträge um eine Achse AA dreht, die zu den einander zugekehrten und parallelen Seitenflächen der Prismen senkrecht steht. In Abb. 145 sind die extremen Stellungen dargestellt, Abb. 145a zeigt die Stellung, die den größten brechenden Winkel 2α erzielt, und Abb. 145b zeigt die Stellung, in der die Prismen zu einer Planparallelplatte sich ergänzen und somit keine Ablenkung ergeben. In den dazwischenliegenden Stellungen ergeben sich alle brechenden Winkel zwischen 2α und $0°$. Für kleine


Abb. 145. Das Herschelsche Doppelprisma in zwei extremen Stellungen. Die rechte Abbildung (a) zeigt die Stellung, in der sich die Ablenkungen addieren, und die linke Abbildung (b) zeigt die Stellung, in der sich die Ablenkungen aufheben.

[1]) H. ERFLE, ZS. f. Instrkde. 1918, S. 141–145.

Winkel α bleibt dabei die Lage des Hauptschnittes und der brechenden Kante nahezu konstant. In der optischen Literatur ist vielfach die falsche Behauptung aufgestellt, daß bei einem solchen Doppelprisma oder Drehkeilpaar die resultierende brechende Kante immer die gleiche Richtung besäße. H. ERFLE[1]) hat zuerst experimentell und H. HARTINGER[2]) rechnerisch nachgewiesen, daß dies durchaus nicht zutrifft. Wendet man auf die Durchrechnung z. B. eines in Richtung der Drehachse AA einfallenden Strahles die in Ziff. 151 aufgestellten Formeln an, so findet man, daß die Ablenkung ε_s dieses Strahles aus dem der Anfangslage entsprechenden Hauptschnitt nur Null ist für die Drehwinkel $\gamma = 0$ und $\gamma = 90°$, d. h. für die in Abb. 145a und b dargestellten Stellungen. Unter γ sei der Winkel verstanden, den der Hauptschnitt jedes einzelnen Prismas mit der Anfangslage einschließt. Zwischen den Werten $\gamma = 0$ und $\gamma = 90°$ liegt ein Drehwinkel, dem ein Maximalwert der Ablenkung ε_s entspricht. In Abb. 146 ist die Abhängigkeit dieses Seitenfehlers ε_s von dem Drehwinkel γ graphisch dargestellt, und zwar für die brechenden Winkel $\alpha = 10°$ und die Brechzahl $n = 1{,}5$.



Abb. 146. Die Abhängigkeit des Seitenfehlers ε_s vom Drehungswinkel γ für die Werte $\alpha = 10°$ und $n = 1{,}5$. Werden die beiden Prismen eines HERSCHELschen Doppelprismas gegeneinander um gleiche Winkel γ verdreht, so macht der resultierende Hauptschnitt eine kleine Seitenwendung ε_s. Auf der Abszissenachse sind die Drehwinkel γ und auf der Ordinatenachse die Winkel ε_s der Seitenwendung des Hauptschnitts (Seitenfehler') aufgetragen.

Man kann nach H. HARTINGER diesen Seitenfehler ε_s für alle Drehwinkel γ zum Verschwinden bringen, wenn man das zweite Prisma um den von γ verschiedenen Winkel $\gamma + \Delta\gamma$ dreht, wobei natürlich $\Delta\gamma$ abhängig ist von den brechenden Winkeln α und der Brechzahl der Prismen sowie von dem Drehungswinkel γ des ersten Prismas. Nach H. ERFLE wird in vielen Fällen der Seitenfehler praktisch genügend klein, wenn die Drehachse nicht auf den zugekehrten Prismenflächen senkrecht, sondern mit den Senkrechten zu diesen Flächen dauernd bestimmte Winkel einschließt.

Drehkeilpaare werden z. B. als Kompensator der Farbenzerstreuung im ABBEschen Totalrefraktometer, zur Verschiebung einer der beiden Ziellinien in Entfernungsmessern und zur Bestimmung von Schielablenkungen in der Ophthalmologie benutzt.

155. Die Krümmung der Spektrallinien. Eine unendlich ferne, einfarbige, gerade Linie, wie z. B. der durch den Kollimator eines Prismenspektralapparates ins Unendliche projizierte, mit homogenem Licht erfüllte Spalt, wird durch ein Prisma wieder in unendlicher Ferne abgebildet, da das von einem unendlich fernen Punkt kommende parallele Lichtbündel das Prisma wieder als paralleles Lichtbündel verläßt. Ein hinter das Prisma geschaltetes Objektiv eines Beobachtungsfernrohres erzeugt demnach von dieser geraden Linie ein Bild in seiner Brennebene. Es sei nun angenommen, daß die leuchtende Linie senkrecht zum Hauptschnitt des Prismas oder der Prismenfolge stehe, und daß die von den einzelnen Punkten der Linie ausgehenden Hauptstrahlen sich im Mittelpunkt

[1]) H. ERFLE, ZS. f. Phys. Bd. 1, S. 57–81. 1920.
[2]) H. HARTINGER, ebenda.

des Objektives schneiden. In diesem Fall sind die Einfallswinkel i_{01} der Projektionen der dingseitigen Hauptstrahlen auf den Hauptschnitt alle gleich groß, weil die dingseitigen Hauptstrahlen alle in einer zum Prismenhauptschnitt senkrechten Ebene liegen. Die das Prisma verlassenden und in das Fernrohrobjektiv eintretenden Hauptstrahlen können aber nicht mehr in einer Ebene liegen, weil das für die Durchrechnung der Projektionen maßgebende „Brechungsverhältnis" $n_{0\vartheta}$ von der Neigung ϑ des wirklichen Hauptstrahles zum Hauptschnitt abhängig ist und somit für die verschieden geneigten Hauptstrahlen verschieden große Werte erhält. Die Brechungswinkel i'_{02} für die Projektionen der Hauptstrahlen erhalten ebenso wie die Ablenkungen ε_0 ganz verschiedene Werte. Wie die Ausführungen in Ziff. 5 zeigen, nimmt die Ablenkung ε_0 für den im Hauptschnitt verlaufenden Hauptstrahl $\vartheta = 0$ einen kleinsten Wert an. Fällt dieser Hauptstrahl nach dem Durchtritt durch das Prisma mit der Achse des Objektives, das verzeichnungsfrei vorausgesetzt und dessen bildseitige Brennweite f' sei, zusammen, so erhält man in der Brennebene als Bild der Geraden eine durch die folgenden zwei Gleichungen bestimmte Kurve

$$\left.\begin{aligned} x &= f' \operatorname{tang} \vartheta\,, \\ y &= f' \cdot \operatorname{tang} \Delta \varepsilon_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Abszissenachse OX steht hierbei senkrecht zum Prismenhauptschnitt, und die Ordinatenachse OY liegt in diesem Hauptschnitt; der Ursprung O des Koordinatensystems ist der Brennpunkt des Objektivs. Stellt man $\Delta \varepsilon_0$ als Funktion von ϑ dar, und eliminiert man aus den Gleichungen (1) den Wert ϑ, so ergibt sich — sofern man sich nur auf kleine Werte von ϑ beschränkt — folgende Kurvengleichung

$$y = \frac{n^2 - 1}{2 n f'} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_0}{\Delta n_{0\vartheta}} \cdot x^2\,. \tag{2}$$

In erster Annäherung ist also das Bild einer geraden Linie, z. B. einer Spektrallinie, eine Parabel, deren Scheitel im Brennpunkt liegt und deren Achse parallel den Prismenhauptschnitten verläuft.

Die Krümmung dieser Parabel im Scheitel ist

$$\frac{1}{r} = \frac{n^2 - 1}{n f'} \, \frac{\Delta \varepsilon_0}{\Delta n_{0\vartheta}}\,. \tag{3}$$

Durchsetzt der Hauptstrahl $\vartheta = 0$ das Prisma symmetrisch, ist also $i'_{01} = \alpha/2$, so ergibt sich als Wert der Krümmung der Spektrallinie folgender Ausdruck:

$$\frac{1}{r} = \frac{2(n^2 - 1)}{n^2 f'} \operatorname{tang} i_{1m}\,.$$

Es sei noch erwähnt, daß die Krümmung der Spektrallinien und die Farbenzerstreuung oder Dispersion für einen bestimmten Einfallswinkel i_{01} gleichzeitig einen Minimalwert annehmen. Bezüglich eingehender Arbeiten über die Krümmung von Spektrallinien sei u. a. auf Bravais, Ditscheiner, Christie und Crova[1]) verwiesen.

156. Der Strahlenverlauf durch Planparallelplatten. Ein von zwei parallelen Ebenen im endlichen Abstand begrenztes optisches Mittel bezeichnet man als eine Planparallelplatte. Der Strahlenverlauf durch eine Planparallelplatte oder durch eine Folge solcher Platten kann zeichnerisch dadurch leicht ermittelt

[1]) A. Bravais, Journ. éc. polyt. Bd. 18, S. 1—230. 1845; L. Ditscheiner, Wiener Ber. Bd. 51, S. 368—383. 1865; W. H. M. Christie, Month. Not. Bd. 34, S. 263—265. 1874; A. Crova, Ann. chim. phys. Bd. 22, S. 513—543. 1881 u. Acad. Mém. Montpellier Bd. 10, S. 265—288. 1884.

werden, daß man z. B. die in Ziff. 149 angegebene Konstruktion für die Strahlenbrechung an einer Ebene für jede einzelne brechende Ebene anwendet.

Da eine Planparallelplatte als ein Prisma mit dem brechenden Winkel $\alpha = 0$ aufgefaßt werden kann, so ist die rechnerische Ermittlung des Strahlenverlaufes durch Planparallelplatten mit Hilfe der in Ziff. 151 für das Prisma gegebenen Beziehungen möglich. Unter Berücksichtigung, daß für eine Folge von Planparallelplatten $\sum_{\nu=1}^{k-1} \alpha = 0$ ist, ergibt sich für die Gesamtablenkung des Plattensatzes (der Folge von Planparallelplatten) der Wert

$$\varepsilon = i_1 - i_k'. \tag{1}$$

Da für senkrechten Einfall $i_1 = 0$ auf die erste Ebene die sämtlichen folgenden Brechungs- und Einfallswinkel Null werden, so ist die in Ziff. 151, Gleichung (11) aufgestellte Bedingung für ein Minimum der Ablenkung erfüllt. Ein senkrecht auf einen Plattensatz einfallender Strahl durchsetzt diesen ohne Ablenkung.



Abb. 147. Zur seitlichen Verschiebung des Austrittspunktes gegenüber dem einfallenden Strahl bei Planparallelplatten. Die Planparallelplatte von der Brechzahl $n_{\nu+1}$ grenzt an optische Mittel von der Brechzahl n_ν und $n_{\nu+2}$. Der Austrittspunkt $B_{\nu+1}$ ist von dem einfallenden Strahl $B_\nu F$ um die Strecke $F B_{\nu+1} = e_\nu$ entfernt (seitliche Verschiebung).

Dasselbe gilt ganz allgemein, d. h. für jeden beliebigen Einfallswinkel i_1, wenn das erste und das letzte optische Mittel die gleiche Brechzahl n besitzen, also z. B. für einen in Luft befindlichen Planparallelplattensatz. In diesen Fällen tritt allerdings bei schiefem Einfall eine seitliche Parallelverschiebung des austretenden gegen den eintretenden Strahl statt. Wie aus Abb. 147 zu entnehmen ist, besitzt für die ν Planparallelplatte der Austrittspunkt $B_{\nu+1}$ des Strahles von dem in die Platte eintretenden Strahl $B_\nu F$ den Abstand $e_\nu = B_{\nu+1} F$, der von der Dicke d_ν der Platte, dem Einfallswinkel i_ν und dem Brechungswinkel i_ν' in folgender Weise abhängt

$$e_\nu = \frac{d_\nu \sin(i_\nu - i_\nu')}{\cos i_\nu'}. \tag{2}$$

Kommt dem ersten und letzten optischen Mittel dieselbe Brechzahl zu, so ist der zum eintretenden Strahl parallele austretende Strahl gegen diesen um die Strecke

$$e_{1,k} = \sum_{\nu=1}^{k} e_k = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{d_\nu \sin(i_\nu - i_\nu')}{\cos i_\nu'} \tag{3}$$

seitlich verschoben. Diese Eigenschaft der Planparallelplatte wird in manchen optischen Geräten, z. B. in dem HELMHOLTZschen Ophthalmometer, angewandt.

157. Die Spiegelung an Ebenen und in Prismen. Für die Spiegelung eines Lichtstrahles an einer ebenen Fläche gilt das allgemeine Reflexionsgesetz. Der einfallende und reflektierte Strahl liegen mit dem Einfallslot in einer Ebene, und der Einfallswinkel J ist gleich dem negativen Reflexionswinkel J', also

$$J' = -J. \tag{1}$$

Die durch die Spiegelung erzielte Gesamtablenkung berechnet sich aus

$$\varepsilon = 2J \pm 180°, \tag{2}$$

wobei das Zeichen + für negative J und das Zeichen − für positive J gewählt wird. Über die Spiegelung an zwei zueinander geneigten oder parallelen ebenen Spiegeln und ihre praktische Anwendung ist in Kapitel 1, Ziff. 42ff. berichtet worden. Von den zahlreichen Prismen, bei denen neben Brechungen auch Spiegelungen an ebenen Flächen vorkommen, seien hier nur vier erwähnt. Andere sind bei den Fernrohren (Kapitel 2, G) behandelt.

In Abb. 148 ist das Abbesche Prisma mit einer inneren Spiegelung dargestellt. Es erscheint zusammengesetzt aus dem spiegelnden gleichschenkligen Prisma ABC (spiegelnde Grundfläche AC) und den beiden brechenden Prismen ADE und FGC, mit den dem absoluten Wert nach gleichen brechenden Winkeln α_1 und α_2. Bestehen sämtliche Prismen oder doch mindestens die beiden brechenden Prismen aus demselben optischen Mittel, so wird für den Fall, daß der im Innern der Prismen verlaufende Lichtstrahl $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$ die Ebene AB und damit auch die Ebene BC senkrecht durchsetzt, die Gesamtablenkung

$$\varepsilon = \varepsilon_e \mp 2J + 180^\circ \mp \varepsilon_a \tag{3}$$

und die Ablenkungen ε_e bzw. ε_a an den Ebenen AD bzw. FG werden entgegengesetzt gleich ausfallen:

$$\varepsilon = 2J + 180^\circ. \tag{3'}$$

Für den angeführten Fall ist die Ablenkung genau so groß wie durch das spiegelnde Prisma allein. Da also die Ablenkung von der Brechzahl des Prismas unabhängig ist, so erleiden andersfarbige Lichtstrahlen, denen andere Brechzahlen zukommen, dieselbe Ablenkung, wenn der Einfallswinkel J an der spiegelnden Fläche AC derselbe bleibt. Die Wirkung dieses Prismas — wie auch anderer Prismen mit Spiegelung — wird besonders anschaulich, wenn man die auf die spiegelnde Fläche folgenden brechenden und spiegelnden Flächen an dieser spiegelt. In Abb. 148 ist diese Spiegelung zeichnerisch durchgeführt. Die Fläche BC wird in $C\overline{B}$ und die Fläche FG in $\overline{FG}$ gespiegelt. Der gespiegelte Lichtstrahl fällt mit dem einfallenden in dieselbe Richtung. Man erkennt, daß die Wirkung des Abbeschen Prismas auf die eines gewöhnlichen Prismas mit dem brechenden Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ zurückgeführt werden kann, und daß der betrachtete Strahlenverlauf dem Durchgang im Minimum der Ablenkung entspricht. Ein einfallender weißer Lichtstrahl wird also durch das Abbesche Prisma in dasselbe Farbenspektrum zerlegt wie beim Durchgang durch ein gewöhnliches Prisma derselben Brechzahl und mit dem brechenden Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$.



Abb. 148. Das Abbesche Prisma mit einer inneren Spiegelung. Das Abbesche Prisma erscheint zusammengesetzt aus dem spiegelnden, gleichschenkligen Prisma ABC und den beiden brechenden Prismen ADE und FGC. Die Ablenkung ist von der Brechzahl des Prismas unabhängig.

Wird der Einfallswinkel an der spiegelnden Fläche $J = 0$, so wird die Ablenkung $\varepsilon = 180^\circ$; der Strahl kehrt in sich zurück. Die bei verschiedenen

optischen Meßgeräten angewandte Methode der Autokollimation führt durch senkrechte Spiegelung an einer ebenen Fläche den Lichtstrahl in sich zurück.

Wie H. ERFLE[1]) angibt, ist das ABBEsche Prisma von verschiedenen Autoren versehentlich auf PELLIN und BROCA zurückgeführt worden.

Das Amicische Spiegelprisma, das in Abb. 149 dargestellt ist, wird in der Praxis häufig angewandt. Der Schnitt durch das Prisma zeigt gewöhnlich die Trapezform $ABDE$, doch kann auch ein gewöhnliches Prisma ABC als AMICIsches Spiegelprisma verwendet werden. Die Ebenen AD bzw. EB sind die Eintritts- bzw. Austrittsflächen der Lichtstrahlen; an der Basisebene AB findet die Spiegelung statt. Sind die Basiswinkel β_1 und β_2 einander gleich, so zeigt die Spiegelung der brechenden Ebene EB an der Ebene AB, daß die Wirkung des AMICIschen Spiegelprismas auf die einer Planparallelplatte (AD parallel $B\bar{E}$) zurückgeführt werden kann. Bei gleichen Basiswinkeln ist also eine Farbenzerstreuung ausgeschlossen. In diesem Fall ist außerdem der Einfallswinkel i_1 gleich dem negativen Austrittswinkel i_2'. Die Ablenkung wird also



Abb. 149. Das Amicische Spiegelprisma. Das Amicische Spiegelprisma hat gewöhnlich die Form eines Trapezes $ABDE$; es kann als Teil eines gewöhnlichen Prismas ABC angesehen werden. Sind die Basiswinkel β_1 und β_2 gleich groß, so kann die Wirkung des Amicischen Prismas auf die einer Planparallelplatte zurückgeführt werden, eine Farbenzerstreuung findet in diesem Fall nicht statt. AD und EB sind brechende Ebenen und AB wirkt als Planspiegel.

$$\varepsilon = 2(i_1 - i_1') + 2J - 180^\circ. \tag{4}$$

Für den in der Abb. 149 dargestellten Fall, daß die Ablenkung $\varepsilon = 0$ ist, berechnet sich der Winkel J aus

$$J = 90^\circ - (i_1 - i_1') = 90^\circ - (i_2 - i_2'). \tag{5}$$

Tritt der Strahl in das Prisma senkrecht ein, ist also $i_1 - i_1' = 0$ und $i_2 - i_2' = 0$, so ist die Gesamtablenkung ε gleich der Spiegelablenkung $2J - 180^\circ$.

Viel angewandt in der praktischen Optik wird auch das in Abb. 150 dargestellte Goultersche Pentaprisma, das zwei brechende Ebenen AE und AB sowie zwei spiegelnde Ebenen EF und BF enthält. Häufig haben die Winkel zwischen diesen Ebenen folgende Größen: $\alpha = 45^\circ$, $\delta = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 112{,}5^\circ$. Für diesen Fall tritt ein senkrecht zur Ebene AE einfallender Strahl $S_1 S_2$ durch die Ebene AB wieder senkrecht aus und erleidet die Ablenkung

$$\varepsilon = 2(180^\circ - \alpha - \beta) - 180^\circ + 2(180^\circ - \alpha - \gamma) - 180^\circ = \delta - 360^\circ,$$

welche für $\delta = 90^\circ$ den Wert -270° oder $+90^\circ$ annimmt.

Führt man die zweifache Spiegelung zeichnerisch durch, so erkennt man, daß das Pentaprisma — abgesehen von der zweifachen Spiegelung — wie eine Planparallelplatte $AE\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$ wirkt; alle Strahlen, welche mit einer zweifachen

[1]) H. ERFLE in CZAPSKI-EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., S. 336. 1924.

Spiegelung das Prisma durchsetzen, erfahren dieselbe Ablenkung δ und erleiden keine Farbenzerstreuung.

Diese Eigenschaft kommt allen Pentaprismen zu, die in bezug auf ihre brechende Wirkung einer Planparallelplatte gleichzusetzen sind. Die Bedingung hierfür ist auf Grund der Abb. 150:

$$180^\circ - \beta + 180^\circ - 3\alpha + 180^\circ - \gamma = 180^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\delta}{2}. \tag{6}$$

Die Winkel β und γ brauchen also nicht einander gleich zu sein.

Für $\alpha = 90^\circ$ erhält man $\delta = 180^\circ$; in diesem Fall artet das Pentaprisma in ein rechtwinkliges Prisma aus, bei dem die Hypotenusenfläche als Ein- und Austrittsfläche und die Kathetenflächen als spiegelnde Flächen benutzt werden.

Schließlich sei noch der Tripelspiegel von R. Straubel[1]) erwähnt. Dieses Rückkehrprisma besitzt drei zueinander senkrecht stehende spiegelnde Ebenen ABC, ABD und ACD (s. Abb. 151) und eine brechende Eintrittsebene BCD, die mit den Spiegelflächen gleiche Winkel einschließt. Der Tripelspiegel kann als eine von einem Glaswürfel abgeschnittene Ecke aufgefaßt werden. Als Vorgänger des Tripelspiegels muß der aus drei zueinander senkrecht stehenden Planspiegeln zusammengesetzte Zentralspiegel von A. Beck[2]) genannt werden.

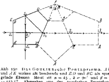


Abb. 150. Das Goulier'sche Pentaprisma. AB und AE wirken als brechende und ED und BC als spiegelnde Ebenen. Meist ist $\alpha = 45^\circ$, $\delta = 90^\circ$ und $\beta = \gamma = 112{,}5^\circ$. Abgesehen von der zweifachen Spiegelung wirkt das Goulier'sche Pentaprisma mit den angegebenen Winkeln wie eine Planparallelplatte. Alle Strahlen erleiden die Ablenkung 90°, eine Farbenzerstreuung findet nicht statt.

Jeder durch die Ebene BCD eintretende Lichtstrahl, der an den drei Planspiegeln reflektiert wird, verläßt um 180° abgelenkt — also zur Einfallsrichtung parallel — den Tripelspiegel. Führt man nämlich die dreifache Spiegelung zeichnerisch durch, so wird der Tripelspiegel $ABCD$ in jedem Fall in den Tripelspiegel $A\bar{C}\bar{B}\bar{D}$, der um 180° gedreht und bezüglich des Scheitels A punktsymmetrisch zum wirklichen Tripelspiegel liegt, abgebildet. Die Ebenen BCD und $\bar{C}\bar{B}\bar{D}$ liegen zueinander parallel, so daß also die ablenkende und farbenzerstreuende Wirkung der brechenden Ebene BCD aufgehoben wird.

Ein eintretendes paralleles Lichtbündel wird aber in 2, 4 oder 6 Teilbündel zerlegt, wenn 1, 2 oder 3 der Kantenwinkel des Tripelspiegels von 90° abweichen.

Der Tripelspiegel kann als Signalgerät verwendet werden, weil er das von einer entfernten Lichtquelle kommende Licht genau in der Richtung nach der Lichtquelle zurückwirft.

Ein aus einem Tripelspiegel herausgeschnittenes prismatisches Stück, das von jeder der drei spiegelnden Ebenen ein Stück als Begrenzung enthält, wird als Tripelstreifen bezeichnet. Infolge der Eigenschaft, daß jeder eintretende

[1]) Siehe die D. R. P. 178708 und 216854 von Carl Zeiss in Jena.
[2]) A. Beck, ZS. f. Instrkde. Bd. 7, S. 380—389. 1887.

und an den drei zueinander senkrechten Planspiegeln reflektierte Strahl parallel zur Einfallsrichtung austritt, macht den Tripelspiegel und die Tripelstreifen zur Paralleleinstellung der Achsen mehrerer optischer Systeme geeignet.

Über Spiegelprismen berichten ausführlich C. M. v. BAUERNFEIND und W. JORDAN[1]).

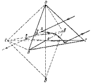


Abb. 151. **Zur Wirkung des Tripelspiegels.** Der Tripelspiegel besitzt drei zueinander senkrechte spiegelnde Ebenen ABD, ACD und ACB. Die Spiegelung an den drei Ebenen zeigt, daß die Wirkung des Tripelspiegels auf die einer Planparallelplatte zurückgeführt werden kann. Jeder Lichtstrahl wird nach drei Spiegelungen um 180° abgelenkt; eine Farbenzerstreuung findet nicht statt. BCD wirkt als brechende Ebene.

b) Die Abbildung durch Prismen mittels enger Büschel.

In dem Abschnitt C, Ziff. 28ff., wo die Gesetze für die Abbildung durch Kugelflächen mittels enger Büschel abgeleitet sind, ist die Abbildung durch ebene Flächen als Sonderfall behandelt. Unter der folgenden Ziff. 158 wird deshalb nur das Ergebnis dieser Betrachtungen nochmals kurz aufgeführt.

158. Die Abbildung eines Punktes durch eine Ebene. Die Abbildung eines Punktes durch eine brechende Ebene mittels weitgeöffneter Bündel führt zu Brennflächen. Die Bestimmung dieser Brennflächen hat vorwiegend mathematisches Interesse, weshalb hier nur auf einige einschlägige Arbeiten dieser Art hingewiesen werden soll[2]).

Die Abbildung eines Punktes durch enge Strahlenbündel führt zu zwei Bildpunkten, wenn das Bündel bzw. sein Träger oder sein Hauptstrahl einen endlichen Winkel mit dem Einfallslot einschließt. Das in der Einfallsebene liegende tangentiale Büschel führt zu dem einen und das zur Einfallsebene senkrecht stehende sagittale Büschel ergibt den anderen Bildpunkt. Die Dingpunkte auf dem einfallenden Hauptstrahl sind sowohl den tangentialen als auch den sagittalen Bildpunkten auf dem gebrochenen Strahl projektiv zugeordnet. Da die unendlich fernen Punkte auf dem einfallenden und gebrochenen Strahl sich als Ding- und Bildpunkt entsprechen, so bilden die Dingpunkte und die entsprechenden tangentialen bzw. sagittalen Bildpunkte ähnliche Punktreihen. Die Abbildung ist also eine teleskopische. Die durch die Ding- und Bildpunkte bestimmten Punktreihen bleiben auch ähnlich, wenn die Brechung an beliebig vielen Ebenen erfolgt ist, sofern alle Ebenen auf einer den einfallenden Strahl enthaltenden Ebene senkrecht stehen bzw. der Prismensatz einen gemeinsamen Hauptschnitt besitzt, in dem der Hauptstrahl verläuft. Die zeichnerische Ermittlung der den Dingpunkten zugeordneten Bildpunkte ist im Abschnitt C,

[1]) C. M. v. BAUERNFEIND, Elemente der Vermessungskunde, 5. Aufl., S. 32—46, 101 bis 175. 1876; u. 7. Aufl., S. 39—51, 201—235. 1890; W. JORDAN, Handb. d. Vermessungskunde Bd. II, S. 33—44. 1914.

[2]) DE LA RIVE, Diss. sur la partie de l'optique qui traite des courbes dites courbiques. Genf 1823; J. RITZ, Beobachtungen und Berechnungen über Brechung homozentrischen Lichtes an parallelen Ebenen. Progr. d. städt. Handelsschule München 1878/79; R. S. HEATH, Lehrb. d. geometr. Optik. 1894.

Ziff. 23, durchgeführt. In Wirklichkeit sind einem Dingpunkt O zwei Brennlinien zugeordnet. Im tangentialen „Bildpunkt“ O_t' steht die Brennlinie senkrecht zur Einfallsebene, und im sagittalen „Bildpunkt“ O_f' liegt die Brennlinie in der Einfallsebene. In Abb. 152 ist die Entstehung dieser Brennlinien angedeutet. Dem auf dem Hauptstrahl AP liegenden virtuellen Dingpunkt O entsprechen die beiden Brennlinien, die in O_f' und O_t' den gebrochenen Hauptstrahl schneiden. Von den sämtlichen Linienelementen eines im Dingpunkt O zum Hauptstrahl senkrechten Flächenelementes sind nur die Linienelemente ab und cd, die in der Einfallsebene liegen bzw. senkrecht zu ihr stehen, abbildbar. Das Linienelement ab wird durch Sagittalbuschel in die durch den sagittalen Bildpunkt O_f' hindurchgehende Brennlinie und das Linienelement cd durch Tangentialbüschel in die den tangentialen Bildpunkt O_t' enthaltende Brennlinie abgebildet.



Abb. 152. Durch Brechung an einer Ebene vermittelte astigmatische Abbildung eines virtuellen Punktes O. Dem auf den Hauptstrahl AP gelegenen virtuellen Dingpunkt O entsprechen die den gebrochenen Hauptstrahl $PO_f'O_t'$ in den Punkten O_f' und O_t' senkrecht schneidenden Brennlinien. Von den Linienelementen des im Dingpunkt O auf dem Hauptstrahl senkrecht stehenden Flächenelements sind nur ab und cd abbildbar.

In Abschnitt C, Ziff. 28ff., sind auch die Formeln für die Berechnung der sagittalen und der tangentialen Schnittweiten für die Abbildung an einer brechenden Ebene angegeben. Werden mit $\mathfrak{s}$ und t die sagittalen und tangentialen Schnittweiten des Dingpunktes bezeichnet, und zwar auf dem einfallenden Hauptstrahl vom Einfallspunkt aus gerechnet, und sind $\mathfrak{s}'$ und t' die entsprechenden Schnittweiten der Bilder in entsprechender Weise auf dem gebrochenen Hauptstrahl bestimmt, so lauten diese Formeln, wenn j bzw. j' der Einfalls- bzw. Brechungswinkel ist, folgendermaßen

$$\mathfrak{s}' = \frac{n'}{n}\,\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad t' = \frac{n'}{n}\,\frac{\cos^2 j'}{\cos^2 j}\,t\,.$$

Für eine spiegelnde Ebene gilt $n' = -n$ und $j' = -j$; in diesem Fall wird also immer $\mathfrak{s}' = -\mathfrak{s}$ und $t' = -t$. Jeder Dingpunkt $\mathfrak{s} = t$ wird also anastigmatisch abgebildet, d. h. es wird auch $\mathfrak{s}' = t'$. Diese homozentrische Abbildung der spiegelnden Ebene bleibt auch bestehen, wenn die Abbildung durch beliebig weit geöffnete Büschel geschieht.

159. Die homozentrische Abbildung durch Prismen. Für die ν-te brechende Ebene eines Prismensatzes mit gemeinsamem Hauptschnitt lauten die Gleichungen für die Berechnung der sagittalen und tangentialen Schnittweite

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s}_\nu' &= \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}\,\mathfrak{s}_\nu\,, \\ t_\nu' &= \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}\,\frac{\cos^2 j_\nu'}{\cos^2 j_\nu}\,t_\nu\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und für den Übergang von der ν-ten zur $(\nu+1)$-ten Ebene gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s}_{\nu+1} &= \mathfrak{s}'_\nu - d_\nu\,, \\ t_{\nu+1} &= t'_\nu - d_\nu\,, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

wenn d_ν das Stück des Hauptstrahles zwischen der ν-ten und $(\nu+1)$-ten Ebene darstellt. Die wiederholte Anwendung der Gleichungen (1) und (1') auf k brechende Ebenen mit gemeinsamem Hauptschnitt führt zu folgenden Beziehungen

$$\frac{\mathfrak{s}'_k}{n'_k} = \frac{\mathfrak{s}_1}{n_1} - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{d_\nu}{n_{\nu+1}}\,. \tag{2}$$

$$\frac{t'_k}{n'_k} = \frac{t_1}{n_1} \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos^2\mathfrak{j}'_\nu}{\cos^2\mathfrak{j}_\nu} - \sum_{\nu=1}^{k-1}\left[\frac{d_\nu}{n_{\nu+1}} \prod_{\mu=\nu+1}^{k} \frac{\cos^2\mathfrak{j}'_\mu}{\cos^2\mathfrak{j}_\mu}\right]. \tag{3}$$

Gehen von den Punkten einer zum Hauptschnitt senkrechten Ebene sagittale oder tangentiale Büschel aus, die alle einer beliebigen durch den Einfallswinkel $\mathfrak{j}$ gegebenen Richtung parallel sind, so sind die sagittalen bzw. tangentialen Bilder wieder zum Hauptschnitt senkrechte Ebenen. Das erkennt man sofort, wenn man beachtet, daß auf Grund der Gleichungen (2) und (3) die sagittalen bzw. tangentialen Bildweiten $\mathfrak{s}'_k$ bzw. t'_k für konstante Einfallswinkel $\mathfrak{j}_1$ lineare Funktionen der Dingweiten $\mathfrak{s}_1$ und t_1 sind.

Ist ein wirklicher Dingpunkt vorhanden, also das auf die erste brechende Ebene einfallende Büschel homozentrisch, so ist $\mathfrak{s}_1 = t_1$. Für diesen Fall erhält man durch Subtraktion der Gleichung (2) von (3) die folgende Beziehung für die astigmatische Schnittweitendifferenz nach der $k$ten Ebene

$$\frac{1}{n'_k}\,(t'_k - \mathfrak{s}'_k) = \frac{\mathfrak{s}_1}{n_1}\left[\prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos^2\mathfrak{j}'_\nu}{\cos^2\mathfrak{j}_\nu} - 1\right] - \sum_{\nu=1}^{k-1}\left\{\frac{d_\nu}{n_{\nu+1}}\left[\prod_{\mu=\nu+1}^{k} \frac{\cos^2\mathfrak{j}'_\mu}{\cos^2\mathfrak{j}_\mu} - 1\right]\right\}. \tag{4}$$

Ein Dingpunkt $\mathfrak{s}_1 = t_1$ wird homozentrisch abgebildet, wenn $t'_k - \mathfrak{s}'_k = 0$ wird. Setzt man die rechte Seite der Gleichung (4) dem Werte 0 gleich, so kann man die Schnittweite $\mathfrak{s}_1 = t_1$ des auf dem Hauptstrahl mit dem Einfallswinkel $\mathfrak{j}_1$ liegenden Dingpunktes berechnen, der durch die Prismenfolge homozentrisch abgebildet wird.

Die homozentrisch abbildbaren Dingpunkte, die auf den zum Hauptstrahl $\mathfrak{j}_1$ parallelen Hauptstrahlen liegen, bilden eine zum Hauptschnitt senkrechte Ebene. Besitzen alle Prismen eine gemeinsame brechende Kante, so geht sowohl die homozentrisch abbildbare Ebene als auch ihr Bild durch diese Kante hindurch. Die Richtigkeit dieser Sätze erkennt man, wenn man berücksichtigt, daß linearen Änderungen von d_1 auch lineare Änderungen von d_2 bis d_k entsprechen, und daß laut Gleichung (2) und der Null gesetzten rechten Seite von (4) auch $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_k = t_k$ linear von d_1 abhängig sind. Im Falle einer gemeinsamen Kante ist für $d_1 = 0$ auch $d_2 = d_3 = \cdots d_k = 0$ und laut (2) muß also $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}'_k = 0$ sein; für diese Werte wird aber die rechte Seite von (4) von selbst gleich Null.

Die den homozentrisch abbildbaren Ebenen parallelen Ebenen werden so abgebildet, daß die astigmatische Differenz der sagittalen und tangentialen Bilder für alle Punkte konstant ist.

Ist für einen Hauptstrahl

$$\prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos^2\mathfrak{j}'_\nu}{\cos^2\mathfrak{j}_\nu} = 1\,,$$

so liegt der homozentrisch abbildbare Punkt auf diesem Strahl im Unendlichen

es ist also $t_1 = \mathfrak{s}_1 = \infty$. Für den Fall, daß der Prismensatz auf beiden Seiten von dem gleichen Medium umgeben ist, bedeutet

$$\prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos^2 j'_\nu}{\cos^2 j_\nu} = 1$$

die Bedingung für den Durchgang des Strahles im Minimum der Ablenkung; wenn nämlich $n_1 = n'_k$, so wird die in Ziff. 151 abgeleitete Bedingung

$$\prod_{\nu=1}^{k} \tang i_\nu = \prod_{\nu=1}^{k} \tang i'_\nu$$

mit der eben angeführten Beziehung identisch. Ist außerdem $d_1 = d_2 \cdots = d_{k-1} = 0$, d. h. geht der Strahl im Minimum der Ablenkung durch die allen Prismen gemeinsame brechende Kante hindurch, so tritt für jeden Wert $t_1 = \mathfrak{s}_1$ homozentrische Abbildung ein.

Für den Sonderfall schließlich, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_{k-1} = 0$ ist, wird die Bedingung

$$\prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos^2 j'_\nu}{\cos^2 j_\nu} = 1$$

ebenfalls erfüllt, wenn der Planparallelplattensatz vom gleichen Medium $n_1 = n'_k$ eingeschlossen ist. Von einem solchen Plattensatz wird also der unendlich ferne Punkt jedes beliebig gerichteten Hauptstrahles homozentrisch abgebildet.

Burmester[1]), der die Fragen der homozentrischen Abbildung durch Prismenfolgen zuerst geometrisch ausführlich behandelt hat, zeigt auch, daß es sogar enge Strahlenbündel gibt, die zum Hauptschnitt geneigt verlaufen und doch ihre Homozentrizität beibehalten.

Die unendlichfernen Punkte werden auch von Prismenfolgen immer homozentrisch abgebildet, wenn die Einfallswinkel j_ν nur kleiner als 90° sind. Parallele Strahlen bleiben bei dem Durchgang durch Prismen immer wieder parallel. Deshalb benutzt man bei spektroskopischen Untersuchungen das Prisma oder den Prismensatz immer im parallelen Strahlengang, indem man den leuchtenden Spalt durch die Kollimatorlinse ins Unendliche abbildet. Befindet sich der Spalt nicht genau in der dingseitigen Brennebene dieser Linse, so entsteht durch das Prisma Astigmatismus. In diesem Fall erscheinen im Beobachtungsfernrohr nicht alle vier Spaltränder gleichzeitig scharf.

Auf das einfache Prisma in Luft können die oben angeführten Sätze über die homozentrische Abbildung sinngemäß angewandt werden.

160. Die Bilddrehung durch Prismen. Wird eine zum gemeinsamen Hauptschnitt einer Prismenfolge senkrechte Dingebene durch enge Büschel, deren Hauptstrahlen zueinander parallel sind, abgebildet, so schließt im allgemeinen die Dingebene mit der dingseitigen Hauptstrahlenrichtung einen anderen Winkel ein als die Bildebene mit der bildseitigen Hauptstrahlenrichtung: die Abbildung durch die Prismen führt eine Bilddrehung herbei. R. Straubel[2]) hat diese Bilddrehung eingehend untersucht.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Dingebene und der Senkrechten zur Hauptstrahlenrichtung für die Tangentialbüschel mit μ_t und für die Sagittalbüschel mit μ_s und die Winkel zwischen den Bildebenen und den Senkrechten zur bildseitigen Hauptstrahlenrichtung mit μ'_t bzw. μ'_s, so sei die tangentiale

[1]) L. Burmester, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 40, S. 65—90. 1895.
[2]) R. Straubel, Ann. d. Phys. Bd. 8, S. 63—80. 1902.

Bilddrehung durch die Differenz $\mu_t' - \mu_t$ und die sagittale Bilddrehung durch $\mu_s' - \mu_s$ gegeben. Nach STRAUBEL ist nun für ein in Luft befindliches Prisma mit dem brechenden Winkel α

$$\operatorname{tang}\mu_t' \frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_2'} - \operatorname{tang}\mu_t \frac{\cos\gamma_1'}{\cos\gamma_1} = \frac{(n^2-1)\sin\alpha}{n\cos\gamma_1'\cos\gamma_2} \cdot \frac{1+\sin\gamma_1\sin\gamma_2'\cos(\gamma_1'+\gamma_2)}{\cos^2\gamma_1\cos^2\gamma_2'}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tang}\mu_s' \frac{\cos\gamma_2'}{\cos\gamma_2} - \operatorname{tang}\mu_s \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_1'} = \frac{(n^2-1)\sin\alpha}{n\cos\gamma_1'\cos\gamma_2}. \quad (2)$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich, daß im allgemeinen sowohl die Abbildung durch die Tangentialbüschel als auch die Abbildung durch die Sagittalbüschel zu einer Bilddrehung führt. Man kann jedoch für beide Büschelarten und für jede dingseitige Hauptstrahlenrichtung ein Paar konjugierter Ebenen angeben, deren Neigungen ein beliebiges Verhältnis besitzen. Durchsetzen die zueinander parallelen Hauptstrahlen das Prisma im Minimum der Ablenkung, so entsprechen dem Fall gleicher Ding- und Bildneigung Ebenen, die zu den abbildenden Büscheln parallel liegen. Einer zu den dingseitigen Buscheln senkrechten Dingebene entspricht nie eine zu den bildseitigen Büscheln senkrechte Bildebene.

Je nach der Größe des Unterschiedes zwischen Einfallswinkel γ_1 und Brechungswinkel γ_2' und der Größe $\operatorname{tang}\mu_t$ bzw. $\operatorname{tang}\mu_s$ der Dingneigung kann Neigungsvergrößerung oder Neigungsverminderung eintreten. Im Minimum der Ablenkung findet jedoch immer nur Neigungsvergrößerung statt, mit Ausnahme des bereits erwähnten Falles, daß die Dingebene parallel den abbildenden Büscheln, also $\operatorname{tang}\mu_t = \operatorname{tang}\mu_s = \infty$, ist.

Bei streifendem Eintritt und bei streifendem Austritt ist für die tangentialen Büschel die Bildneigung unabhängig von der Dingneigung. Zwischen diesen beiden äußersten Fällen des Strahlenverlaufes erreicht die Bildneigung mindestens ein Minimum.

Für die Sagittalbüschel hat bei streifendem Eintritt die Bildneigung ebenfalls einen von der Dingneigung unabhängigen Wert; für bestimmte Dingneigungen, die von der Brechzahl und dem Prismenwinkel abhängig sind, gibt es jedoch für die Bildneigungen keine Grenzwerte mehr. Steht die Dingebene senkrecht zu den Sagittalbüscheln, so gibt es für irgendeinen Einfallswinkel noch ein Minimum der Bildneigung, wenn bei einer gegebenen Brechzahl n der Prismenwinkel α und bei gegebenem Prismenwinkel α die Brechzahl n einen bestimmten Wert nicht überschreitet. Die zusammengehörigen Grenzwerte von n und α sind

n	1	$\sqrt{1{,}25}$	$\sqrt{1{,}5}$	$\sqrt{1{,}75}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2{,}25}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{10}$	∞
α	180°	111° 23′	90°	76° 46′	67° 36′	60° 36′	37° 46′	20° 20′	0

ERFLE[1]) hat nachgewiesen, daß diese Zusammenstellung gleichzeitig auch die kritischen Prismenwinkel für das Eintreten des Minimums der Dispersion gibt.

Die Frage, ob es möglich ist, eine zu den abbildenden einfarbigen Büscheln geneigte Dingebene homozentrisch in eine zu den bildseitigen Büscheln senkrechte Bildebene abzubilden, also eine Aufrichtung eines ebenen, monochromatischen Objektfeldes herbeizuführen, führt mittels der Beziehungen (1) und (2) für $\mu_t' = \mu_s' = 0$ und $\mu_t = \mu_s$ zu der Grundgleichung

$$1 + (n^2-1)\cos(2\gamma_1') = \frac{n^2}{2}\left[-\sin(2\gamma_1')\sin(2\gamma_2) + 2\cos(2\gamma_1')\cos(2\gamma_2)\right]. \quad (3)$$

Den Fall der Abbildung eines zum Hauptschnitt senkrechten Flächenstückes

[1]) H. ERFLE, ZS. f. Instrkde. Bd. 39, S. 297–312. 1919.

durch enge Strahlenbüschel, deren Hauptstrahlen einen in endlicher Entfernung befindlichen Kreuzungspunkt besitzen, hat ALB. KÖNIG[1]) behandelt.

161. Die Vergrößerungswirkung von Prismen. Für teleskopische Abbildungen sind die Lateralvergrößerung β und das Konvergenzverhältnis γ vom Dingort unabhängig. Wie in Abschnitt A, Ziff. 20, gezeigt ist, sind diese Werte für die Abbildung durch Prismen im Sagittalschnitt

$$\gamma_l = \frac{n_1}{n_k'} \qquad \text{und} \qquad \beta_l = 1 . \tag{1}$$

Für den Tangentialschnitt ergibt sich aus der Gleichung (10) in Ziff. 151

$$\gamma_t = \frac{\delta z_k'}{\delta z_1} = \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\operatorname{tang} j_\nu'}{\operatorname{tang} j_\nu} = \frac{n_1}{n_k'} \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos j_\nu}{\cos j_\nu'} \tag{2}$$

und auf Grund der HUYGENS-HELMHOLTZschen Gleichung

$$\beta_t = \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos j_\nu'}{\cos j_\nu} . \tag{2a}$$

Für den Fall $n_1 = n_k'$, daß die Prismenfolge vom gleichen Medium umgeben ist, wird also die scheinbare Länge eines zum Hauptschnitt senkrechten Spaltes nicht verändert. Die scheinbare Breite des Spaltbildes wird bestimmt durch das Konvergenzverhältnis γ_t im Tangentialschnitt. Für $n_1 = n_k'$ ist $\gamma_t = 1$ im Minimum der Ablenkung; die scheinbare Größe der Spaltbreite bleibt also nur in diesem Fall durch die Prismenabbildung ungeändert. Ist ein Einfallswinkel $j_\nu = 90°$, so wird $\gamma_t = 0$, und für einen Brechungswinkel $j_\nu' = 90°$ erreicht γ_t einen unendlich großen Wert. Die scheinbare Breite des Spaltbildes ist also bei streifendem Eintritt Null, wächst dann mit abnehmendem Einfallswinkel, erreicht beim Strahlendurchgang im Minimum der Ablenkung den Wert der scheinbaren Breite des Spaltes und wächst weiter bis zu einem unendlich großen Wert, wenn ein streifender Austritt erreicht ist. Kommen streifende Eintritte und streifende Austritte in gleicher Anzahl vor, so nimmt γ_t wieder endliche Werte an.

Für ein einfaches Prisma in Luft kann aus Gleichung (2) folgende Beziehung abgeleitet werden

$$\frac{\delta z_2'}{\sqrt{\dfrac{n^2-1}{\cos^2 j_2'} + 1}} = \frac{\delta z_1}{\sqrt{\dfrac{n^2-1}{\cos^2 j_1} + 1}} , \tag{3}$$

die für einen die Kante durchsetzenden Strahl, also für $d = 0$, mittels sinngemäßer Anwendung der Beziehung (3) in Ziff. 159 übergeht in

$$\frac{\delta z_2'}{\delta z_1} = \sqrt{\frac{t_1}{t_2'}} . \tag{4}$$

Setzt man mit ERFLE[2]) bei senkrechtem Einfall $j_1 = 0$ und damit $j_2 = -\alpha$ das Konvergenzverhältnis $\gamma_t = \Gamma$, so berechnet sich für eine gegebene Vergrößerung Γ der brechende Winkel α aus

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\Gamma^2 - 1}{n^2\Gamma^2 - 1}} \tag{5}$$

[1]) ALB. KÖNIG, in CZAPSKI, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 2. Aufl., S. 197. 1904.

[2]) H. ERFLE, in CZAPSKI-EPPENSTEIN, Die Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., S. 344. 1924.

und die Ablenkung ε aus

$$\sin\varepsilon = \frac{\sqrt{n^2-1}\cdot\sqrt{\Gamma'^2-1}}{n\,\Gamma'+1} \qquad (6)$$

Setzt man zwei gleiche in dieser Weise angewandte Prismen hintereinander, so daß das zweite Prisma die entgegengesetzt gerichtete Ablenkung des ersten Prismas ergibt, und fügt in derselben Weise zwei weitere Prismen hinzu, deren Hauptschnitte gegen die des ersten Paares um 90° verdreht sind, so hat man für ein kleines Gesichtsfeld ein aus vier Prismen bestehendes farbenfreies Fernrohr von der Vergrößerung Γ'^2.

c) Die durch Prismen erzeugten Spektra.

Für die in den Abteilungen a) und b) dieses Abschnittes über ebene Flächen und Prismen durchgeführten Betrachtungen wurde vorausgesetzt, daß die Brechzahlen n der optischen Mittel von der Art der Lichtstrahlen unabhängig seien, die Berechnungen wurden also durchweg für einfarbiges oder homogenes Licht angestellt. In Wirklichkeit hat man es aber immer mit mehrfarbigem Licht zu tun. Da nun die Brechzahlen der optischen Mittel von der Farbe oder der Wellenlänge des Lichtes abhängig sind, so erleiden die einzelnen Farben bei der Brechung an einer Ebene und im allgemeinen auch beim Durchgang durch Prismen verschieden große Ablenkungen, das aus mehreren Farben zusammengesetzte Licht wird in ein Spektrum zerlegt. Neben der Ablenkung ε hängen aber auch z. B. die sagittalen und tangentialen Schnittweiten $\mathfrak{s}'$ und t' und die Vergrößerung γ_t' im Tangentialschnitt von der Brechzahl ab und erleiden deshalb bei mehrfarbigem Licht farbige oder chromatische Abweichungen.

162. Die Ausdehnung der durch Prismen erzeugten Spektra. Da für die in Spektroskopen verwendeten Prismen $\mathfrak{s} = t = \mathfrak{s}' = t' = \infty$ gesetzt werden kann, so wird den folgenden Betrachtungen über die Abhängigkeit der Ablenkung ε von der Farbe nur dieser wichtigste Fall zugrunde gelegt. Durch vollständige Differentiation der Gleichung (1) in Ziff. 151 erhält man

$$\sin i_\nu \cdot \delta n_\nu + n_\nu \cos i_\nu \,\delta i_\nu = \sin i_\nu' \,\delta n_{\nu+1} + n_{\nu+1} \cos i_\nu' \,\delta i_\nu'. \qquad (1)$$

Da die Prismenwinkel α_ν von den Brechzahlen unabhängig sind, ist ferner

$$\delta i_{\nu+1} = \delta i_\nu'. \qquad (2)$$

Diese Gleichungen (1) und (2) und die unter Ziff. 151 angegebene Gleichung (2)

$$i_{\nu+1} = i_\nu' - \alpha_\nu$$

der Reihe nach auf die verschiedenen brechenden Ebenen angewandt, ermöglichen die Berechnung der Variation $\delta i_k'$. Für den praktisch meist vorliegenden Fall, daß die Prismen sich in Luft befinden, also $n_1 = n_{k+1} = 1$ ist, erhält man als Wert der Differenz der Variationen der Einfalls- und Austrittswinkel den folgenden Wert

$$\delta i_k' - \delta i_1 = \delta i_1 \left[\prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos i_\nu}{\cos i_\nu'} - 1\right] - \sum_{\nu=2}^{k} \sin\alpha_{\nu-1}\,\delta n_\nu \frac{\prod\limits_{\zeta=\nu+1}^{k} \cos i_\zeta}{\prod\limits_{\mu=\nu-1}^{k} \cos i_\mu'}. \qquad (3)$$

Da für das Minimum der Ablenkung

$$\prod_{\nu=1}^{k} \frac{\cos i_\nu}{\cos i_\nu'} = 1$$

ist, so wird die Änderung der Farbenzerstreuung $\delta i_k' - \delta i_1$ für diesen Fall unabhängig von der Farbenzerstreuung δi_1, die vor dem Eintritt in das Prisma vorhanden ist. Ist vor dem Eintritt in das Prisma keine Farbenzerstreuung vorhanden, also $\delta i_1 = 0$, so geht Gleichung (3) über in

$$\delta i_k' = -\sum \sin\alpha_{\nu-1}\,\delta n_\nu \frac{\prod\limits_{\lambda=\nu+1}^{k} \cos i_\lambda}{\prod\limits_{\mu=\nu-1}^{k} \cos i_\mu'}. \tag{4}$$

Handelt es sich um Prismen mit kleinen brechenden Winkeln α_ν und um kleine Einfallswinkel i_ν, so geht man für die Berechnung der Variation der Ablenkung ε_k von der Verallgemeinerung der in Ziff. 152 gegebenen Näherungsformel (14) aus

$$\varepsilon_k = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu (n_\nu - 1). \tag{5}$$

Die Farbenzerstreuung $\delta\varepsilon_k$ berechnet sich hieraus durch Variation zu

$$\delta\varepsilon_k = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu\,\delta n_\nu, \tag{6}$$

wobei k sich auf die einzelnen Prismen und nicht auf die einzelnen brechenden Ebenen bezieht.

Ist für ein einzelnes Prisma in Luft vor der Brechung an der ersten Fläche keine Farbenzerstreuung vorhanden, so folgt aus der Beziehung (4)

$$\delta i_2' = -\frac{\sin\alpha\,\delta n}{\cos i_1' \cos i_2}. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Ablenkung mit zunehmenden Werten der Brechzahl n wächst. Die Farbenzerstreuung $\delta\varepsilon = -\delta i_2'$ für einen kleinen Spektralbereich kann Minimalwerte nur dann annehmen, wenn für jede Brechzahl n einer mittleren Farbe der Prismenwinkel α den Wert des sog. kritischen Prismenwinkels nicht überschreitet. Die den einzelnen Brechzahlen zugeordneten kritischen Prismenwinkel sind, wie unter Ziff. 160, S. 246, erwähnt wurde, die gleichen, die für das Auftreten eines Minimums der Bildneigung bei der Abbildung durch parallele Sagittalbüschel einer zu den Büscheln senkrechten Ebene maßgebend sind. Das Minimum der Dispersion fällt nie mit dem Minimum der Ablenkung zusammen, es liegt vielmehr zwischen diesem und dem Strahlenverlauf, der durch den streifenden Eintritt gekennzeichnet ist.



Abb. 153. Zur Abhängigkeit der Farbenzerstreuung vom Einfallswinkel und vom Prismenwinkel. (Nach H. Erfle.) Die Farbenzerstreuung ε—ε ist in ihrer Abhängigkeit vom Einfallswinkel i_1 und vom Prismenwinkel α für ein Prisma aus Jenaer Glas O 103 ($n_c = 1{,}61531$, $n_F = 1{,}63240$) dargestellt. Es sind außer den Kurven gleichen Prismenwinkels auch die Kurven gleichen Austrittswinkels $\bar{i}_2'$ für die stärker brechbare Farbe eingezeichnet. Die strichpunktierte Kurve von O bis H verbindet die Punkte des Minimums der Ablenkung, die gestrichelte Kurve O bis G verbindet die Punkte des Minimums der Farbenzerstreuung.

ERFLE[1]), der sich eingehend mit dem Minimum der Dispersion beschäftigt hat, veranschaulicht die Abhängigkeit der Farbenzerstreuung $\varepsilon_F - \varepsilon_C$ vom Einfallswinkel i_1 und vom Prismenwinkel α durch die in Abb. 153 wiedergegebene graphische Darstellung, die sich auf ein Prisma aus Jenaer Glas 0 103 und auf die Farben $n_C = 1{,}61531$ und $n_F = 1{,}63240$ bezieht. Auf der Abszissenachse sind die Werte der Eintrittswinkel i_1 und auf der Ordinatenachse die Werte der Farbenzerstreuung $\varepsilon_F - \varepsilon_C$ aufgetragen. Bei den Kurven gleichen Prismenwinkels wurden für die Prismenwinkel von $\alpha = 10°$ abwärts der Übersichtlichkeit halber die ganz nahe der Abszissenachse verlaufenden Teile der Kurven weggelassen. Die Darstellung zeigt auch die Kurven gleichen Austrittswinkels $\bar{i}_1'$ für die stärker brechbare Farbe. Die Punkte des Minimums der Ablenkung sind durch die strichpunktierte Kurve OH und die Punkte des Minimums der Dispersion durch die gestrichelte Kurve OG verbunden. Für das Minimum der Ablenkung folgt aus der Beziehung (7)

$$\delta\varepsilon = 2 \cdot \operatorname{tang} i_{1m} \frac{\delta n}{n}. \tag{8}$$

163. Die achromatischen Prismen. Man bezeichnet mehrere Prismen mit gemeinsamem Hauptschnitt für eine gegebene Ablenkung ε als farbenfrei oder achromatisch, wenn die Variation der Ablenkung $\delta\varepsilon = \delta i_k' = 0$ ist. Für einen in Luft befindlichen Prismensatz, für den $\delta i_1 = 0$ und $\delta n_1 = \delta n_{k+1} = 0$ ist, erhält man aus der Beziehung (7) in Ziff. 162 die folgende Bedingung für die Farbenfreiheit

$$\sum_{\nu=1}^{k} \sin\alpha_{\nu-1}\,\delta n_\nu \cdot \frac{\prod\limits_{\lambda=\nu-1}^{k} \cos i_\lambda}{\prod\limits_{\mu=\nu-1}^{k} \cos i_\mu'} = 0. \tag{1}$$

Nimmt eines der Glieder $\cos i_\mu'$ den Wert Null an, so muß dieser Fall besonders behandelt werden.

Der einfachste achromatische Prismensatz besteht aus zwei Prismen, also aus drei brechenden Flächen. Für einen solchen einfachen in Luft befindlichen Prismensatz erhält man die folgende Bedingung für die Farbenfreiheit

$$\delta n_2 \sin\alpha_1 \cdot \cos i_2 + \delta n_3 \sin\alpha_2 \cos i_1' = 0. \tag{2}$$

Ist der brechende Winkel α_1 des einen Prismas und der Einfallswinkel i_1 bzw. Brechungswinkel i_1' gegeben und die Dispersionen δn_2 und δn_3 bekannt, so kann man den brechenden Winkel α_2 des zweiten Prismas, das mit dem ersten zusammen farbenfreie Ablenkung ergibt, leicht berechnen. Es ist

$$\operatorname{cotg}\alpha_2 = -\frac{\delta n_3 \cos i_1'}{\delta n_2 \cos i_2' \sin\alpha_1} - \operatorname{tang} i_2'. \tag{3}$$

Für den besonderen Fall, daß der eintretende Strahl nahezu senkrecht zur ersten Fläche und der austretende Strahl nahezu senkrecht zur letzten Fläche steht, nimmt die Bedingung (2) für Farbenfreiheit die einfache Form

$$\delta n_2 \cdot \sin\alpha_1 + \delta n_3 \cdot \sin\alpha_2 = 0 \tag{4}$$

an.

Aus den Gleichungen (5) und (6) in Ziff. 162 ergibt sich, daß ein in Luft befindlicher zweiteiliger Prismensatz mit kleinen brechenden Winkeln für kleine

[1]) H. ERFLE, ZS. f. Instrkde. Bd. 39, S. 280–288, 297–312. 1919 u. Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 41, S. 439–443, 453–456, 467–472. 1920.

Einfallswinkel i_1 farbenfrei ist, wenn die brechenden Winkel α_1 und α_2 den folgenden Gleichungen genügen

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{(\nu_1 - \nu_2)\,\delta n_1} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = -\frac{\varepsilon}{(\nu_1 - \nu_2)\,\delta n_2}. \tag{5}$$

Es ist dabei

$$\nu_1 = \frac{n_1 - 1}{\delta n_1} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \frac{n_2 - 1}{\delta n_2}. \tag{5a}$$

In ähnlicher Weise erhält man aus (5) und (6) in Ziff. 163 die brechenden Winkel für ein geradsichtiges Prisma, für das die Ablenkung $\varepsilon = 0$ sein muß, wenn die Farbenzerstreuung $\delta\varepsilon$ gegeben ist. Es wird

$$\alpha_1 = -\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta n_1} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = +\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\delta n_2}. \tag{6}$$

Da die Bedingungen für die Farbenfreiheit von Prismen mit großen und kleinen brechenden Winkeln durch Variation der Gleichungen für die Ablenkung der Prismen ermittelt worden sind, so können sie natürlich nur für Farben mit kleinem Wellenlängenunterschieden gelten. Die Farbenfehler zweiter Ordnung, das sog. sekundäre Spektrum, ist in allen Fällen vernachlässigt worden.

Bildet man für Prismen mit kleinen brechenden Winkeln und kleinen Einfallswinkeln die Gleichung (5) in Ziff. 162 für drei Farben von endlichen Wellenlängenunterschieden, so ist ersichtlich, daß man bei gegebener Ablenkung ε für eine Farbe die Ablenkungsunterschiede zwischen den benachbarten Farben schon mit zwei Prismen gleich groß erhalten kann. Sind außerdem die Wellenlängenunterschiede der benachbarten Farben auch gleich groß, so erhält man auf diese Weise ein sog. **Prisma mit gleichmäßiger Farbenzerstreuung** für drei verschiedene Farben. Dagegen sind drei Prismen erforderlich, wenn die Ablenkungen der drei verschiedenen Farben gleich groß ausfallen sollen, wenn man also Farbenfreiheit für drei verschiedene Wellenlängen erzielen will.

164. Die Reinheit des Spektrums. Von einem leuchtenden, zum Hauptschnitt senkrecht stehenden Spalt werden durch ein Prisma oder durch einen Prismensatz so viele Bilder entworfen, wie verschiedene Wellenlängen die Abbildung vermitteln. Da die einzelnen Spaltbilder endliche Breiten di' besitzen, so müssen sich in jedem Punkt des Spektrums eine mehr oder minder große Anzahl solcher Spaltbilder überdecken. Ist die tangentiale Vergrößerung des Prismensystems γ_t, so berechnet sich die Spaltbildbreite di' aus der Spaltbreite di zu

$$di' = \gamma_t\, di. \tag{1}$$

Je weniger Spaltbilder sich in einem Gebiet des Spektrums überlagern, desto reiner ist das Spektrum. Setzt man wie H. ERFLE[1]) in Anlehnung an HELMHOLTZ die Reinheit des Spektrums R umgekehrt proportional dem Wellenlängenunterschied $d\lambda$ der Farben, die das Spaltbild von der Breite di' noch überdecken, und bezieht R auf λ, so erhält man

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda}. \tag{2}$$

Die Abhängigkeit des Wellenlängenunterschiedes $d\lambda$ von der Spaltbreite di' kann mit Hilfe der Differentialquotienten $d\lambda/dn$ und dn/di' in folgender Weise dargestellt werden

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{dn}\cdot\frac{dn}{di'}\,di'. \tag{3}$$

[1]) H. ERFLE, in CZAPSKI-EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., S. 357. 1924.

Für ein Prisma in Luft führen unter Berücksichtigung der Beziehungen (2) in Ziff. 161 und (7) in Ziff. 162 die Gleichungen (1), (2) und (3) zu dem Ergebnis

$$R \cdot di = -\lambda \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin\alpha}{\cos i_1 \cos i_2}. \tag{4}$$

Die so bestimmte Reinheit R des Spektrums, die auch von der Spaltbreite di abhängig ist, erhält für streifenden Eintritt ($i_1 = 90°$) den Wert ∞. Die Reinheit R wird mit abnehmendem Einfallswinkel i_1 geringer und erreicht ein Minimum, wenn der Prismenwinkel α — ähnlich wie beim Minimum der Dispersion — unterhalb eines kritischen Wertes bleibt, oder die Reinheit erhält bei streifendem Austritt einen kleinsten Wert. Für unendlich kleinen Spalt $di = 0$ und endlichem Wert von γ, würde die Reinheit R nach Gleichung (4) ebenfalls ∞ werden; dieser Fall, für den jedoch wegen der Beugung die Beziehung (1) nicht mehr gelten kann, ist auch physikalisch nicht zu verwirklichen.

165. Die auflösende Kraft eines Prismensatzes. Wird eine unendlich dünne, senkrecht zum Hauptschnitt stehende gerade Linie durch Prismen abgebildet, so entsteht nach der Beugungslehre als Bild ein Streifen endlicher Breite, dessen Helligkeit von der Mitte nach den Rändern zu so abnimmt, daß immer wieder kleinste und größte Werte auftreten. Die Breite dieses Streifens hängt ab von der Breite q der abbildenden Büschel am Ort des Prismas senkrecht zur leuchtenden Linie gemessen und von der Wellenlänge λ des die Abbildung vermittelnden Lichtes; die Bildbreite nimmt ab mit wachsendem q und wächst mit abnehmendem λ. Die von Prismen entworfenen Bilder zweier solcher benachbarter Linien sind Streifen, die sich nach Maßgabe von q und λ zum Teil überdecken können. RAYLEIGH[1]), der die auflösende Kraft eines Prismensystems bestimmt hat, nimmt an, daß die beiden Bildstreifen noch als getrennte Bilder zweier Lichtlinien gleicher Helligkeit erkannt werden können, wenn zwischen den Mitten beider Bildstreifen die Helligkeit mindestens auf 0,81 der vorhandenen maximalen Helligkeit herabsinkt. Dies ist der Fall, wenn die Mitte des einen Bildstreifens mit dem ersten Helligkeitsminimum des anderen zusammenfällt.

Diese Annahme für die Auflösungsfähigkeit zweier Linien erfordert, daß der Winkel di', unter dem die beiden Bilder von der die Büschel begrenzenden Öffnung aus erscheinen, mindestens so groß ist wie der Winkel λ/q', unter dem die Wellenlänge λ des abbildenden Lichtes aus der dem Büschelquerschnitt q' gleichen Entfernung gesehen würde. Es muß also sein

$$di' \geqq \frac{\lambda}{q'}. \tag{1}$$

Für ein paralleles Strahlenbüschel, das einen Prismensatz durchsetzt, ändert sich die Breite q_ν von Prisma zu Prisma. Es ist allgemein

$$\frac{q'_1}{q_1} = \frac{\delta i_1}{\delta i'_1}, \tag{2}$$

wenn q_1 die Breite auf der Dingseite und q'_1 die Breite des Büschels auf der Bildseite bezeichnet. Bei einem Prismensatz ist noch zu beachten, daß der Querschnitt q des einfallenden Büschels nicht gleich dem Produkt aus der Länge der ersten Prismenfläche und dem Kosinus des Einfallswinkel gesetzt werden darf, sondern daß nur der Teil der Länge der ersten Prismenfläche berücksichtigt werden kann, der trotz der etwa den Büschelquerschnitt begrenzenden nachfolgenden Prismen noch wirksam bleibt. Für einen geradsichtigen, symmetrischen, dreiteiligen Prismensatz, wie ein solcher z. B. in Abb. 154 dargestellt ist, wird

[1]) J. W. STRUTT, Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) Bd. 9, S. 266ff. 1879.

der wirksame Querschnitt q durch das zwischen den Kronprismen befindliche Flintprisma bestimmt. Das Verhältnis des wirksamen Querschnitts $q = q'$ zur Gesamthöhe h des Prismensatzes ergibt sich in diesem Falle zu

$$\frac{q'}{h} = \frac{q}{h} = \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos i_1' \cos \frac{\alpha_2}{2}}.$$

Man kann also von den Kronprismen für den gezeichneten Strahlengang die in Abb. 154 schraffierten Ecken von der Länge l wegschneiden, ohne den wirksamen Büschelquerschnitt zu verkleinern.



Abb. 154. Zur Ermittlung der wirksamen Büschelbreite bei Prismensätzen. Der wirksame Büschelquerschnitt für den abgebildeten aus zwei Kron- und einem Flintprisma bestehenden Satz ist q.



Abb. 155. Zur Bestimmung der auflösenden Kraft eines Prismas nach RAYLEIGH. Das Prismensystem P führt die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ für die Wellenlänge λ in die ebene Wellenfläche AB über. Für eine benachbarte Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird $A_0 B_0$ in der gleichen Zeit in die um di' gedrehte ebene Wellenfläche $A'B'$ übergeführt.

Um die auflösende Kraft eines Prismensystems zu bestimmen, geht RAYLEIGH etwa in folgender Weise vor:

Wird die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ durch das Prismensystem P für die Wellenlänge λ in die ebene Wellenfläche AB übergeführt, so sind die Lichtwege von A_0 bis A und von B_0 bis B einander gleich, und beide sind Minima. Es ist also

$$\int_{A_0}^{A} n\,dl = \int_{B_0}^{B} n\,dl. \tag{3}$$

Für eine benachbarte Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ in der gleichen Zeit in die um den Winkel di' gegenüber der Wellenfläche AB gedrehte Lage $A'B'$ übergeführt.

Die Wege für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ unterscheiden sich natürlich von denen der Wellenlänge λ; infolge der Minimumseigenschaft kann man aber unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung auf den gleichen Wegen integrieren. Für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ ist somit der optische Weg von A_0 bis A durch $\int_{A_0}^{A}(n + dn)\,dl$ und von B_0 bis B durch $\int_{B_0}^{B}(n + dn)\,dl$ gegeben. Man erhält unter Berücksichtigung von (3) alsdann eine Differenz L der optischen Wege für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$:

$$L = \int_{B_0}^{B} dn\,dl - \int_{A_0}^{A} dn\,dl. \tag{4}$$

In Abb. 155 ist $\overline{A}B$ parallel $A'B'$ gezogen. Die optische Wegdifferenz L wird durch die Strecke $B\overline{B}$ dargestellt. Da nun $\sphericalangle BA\overline{B} = di'$ und $AB = q'$ ist, so folgt, daß die Bilder der unendlich dünnen Linien auf Grund von (1) getrennt werden können, wenn

$$|L| \geqq \lambda.$$

Für den Fall der Auflösung muß also sein

$$|d\,i'| \geqq \frac{\lambda}{q'}.$$

Die auflösende Kraft r eines Prismas für einen unendlich dünnen Spalt ist nach RAYLEIGH

$$r = \frac{\lambda}{d\lambda}. \qquad (5)$$

Befinden sich Prismen aus gleichem optischen Mittel in Luft, so ist

$$L = d\,n\,(e_2 - e_1), \qquad (6)$$

wenn e_1 und e_2 die Weglängen der Randstrahlen im Glase bedeuten. Die beiden Bilder können also noch getrennt werden, wenn

$$d\,n\,(e_2 - e_1) \geqq \lambda. \qquad (7)$$

Wenn der eine Randstrahl durch lauter Prismenkanten geht, so ist $e_1 = 0$; für $e_2 = L$ ergibt sich somit nach Division mit $d\lambda$

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{d\,n}{d\lambda} \cdot L \qquad (8)$$

und als auflösende Kraft r der kleinste zulässige Wert von $\lambda/d\lambda$

$$r = \frac{d\,n}{d\lambda} \cdot L. \qquad (9)$$

Für einen Prismensatz hält man

$$r = \frac{\lambda}{d\lambda} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{d\,n_\nu}{d\lambda}\, L_\nu, \qquad (10)$$

wobei L_ν mit den Prismenwinkeln α_ν gleiches Vorzeichen hat. Die auflösende Kraft r ist also nur vom Glasweg und der charakteristischen Dispersion $d\,n/d\lambda$ des Glases abhängig. Werden die Prismen alle im Minimum der Ablenkung durchsetzt, so ist L gleich der Summe der Prismendicken an der Basis. Hiernach kann z. B. ein Flintprisma die Hauptdoppellinie des Natriumlichtes, für das $d\lambda = 0{,}6 \cdot 10^{-7}$ cm und $d\,n = 58 \cdot 10^{-6}$ ist, auflösen, wenn die Basisdicke des Prismas mindestens 10,2 mm beträgt und die Lichtstrahlen das Prisma im Minimum der Ablenkung durchsetzen. Das Auflösungsvermögen hat dann den Wert $r = 982$.

166. Die Helligkeit des Spektrums. Die Helligkeit in irgendeiner Stelle des Spektrums hängt ab von der Intensität der verschiedenen Farben im Spalte und von dem Wellenlängenbereich, der in der betreffenden Stelle vereinigt wird. Für die Abbildung des Spaltes mit homogenem Licht ist die Helligkeit h' des Bildes umgekehrt proportional der Breitenänderung des Spaltes durch die Brechung. Ist h die der betreffenden Farbe entsprechende Helligkeit des Spaltes und $d\,i$ bzw. $d\,i'$ die Breiten des Spaltes bzw. des Spaltbildes, so ist

$$h' : h = d\,i : d\,i'. \qquad (1)$$

Auf dem Spaltbild von der Breite $d\,i'$ wird der Wellenlängenbereich von λ bis $\lambda + d\lambda$ vereinigt, dessen Dispersion $\delta i'$ durch das Prisma gleich der Bildbreite $d\,i'$ ist. Wenn die Intensität im Bereich von λ bis $\lambda + d\lambda$ konstant ist, so wird die Helligkeit im Spektrum an der betreffenden Stelle

$$H = h'\,d\lambda = h\,\frac{\delta i}{\delta i'}\,d\lambda. \qquad (2)$$

Unter Verwendung von Gleichung (2) in Ziff. 164 erhält man

$$H = h\,\frac{\delta i}{\delta i'} \cdot \frac{\lambda}{R} \qquad (3)$$

und für das Minimum der Ablenkung, für das $\delta i = \delta i'$ ist,

$$H = \frac{h \cdot \lambda}{R}. \qquad (4)$$

Die Helligkeit ist also, wenn man von den Lichtverlusten durch Spiegelung und Absorption absieht, direkt proportional der Helligkeit des Spaltes und umgekehrt proportional der Reinheit des Spektrums.

Bezüglich der Berechnung der Lichtverluste durch Absorption und Spiegelung sei auf Kap. 2 ds. Handb. verwiesen. Ausführliche Literaturangaben sind von H. ERFLE[1]) gegeben worden.

E. Die Beziehungen der geometrischen Optik zur Wellenoptik.

Von

FELIX JENTZSCH, Berlin.

167. Die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik. Die physikalische Optik ist seit MAXWELL und HERTZ ein Zweig der Elektrodynamik. Jede vollständige Theorie müßte also die MAXWELLschen Gleichungen an die Spitze stellen. Für die meisten und gerade für die wichtigsten Gebiete der Wellenoptik spielen aber die charakteristischen Züge der elektromagnetischen Lichttheorie gar keine Rolle. Insbesondere braucht man zur Erklärung der wesentlichen Interferenz- und Beugungserscheinungen nichts weiter als nur die Annahme, daß der „Lichtvektor" der Wellengleichung genügt, daß er transversal zur Fortpflanzungsrichtung schwingt (genau genommen braucht nur die Bedingung erfüllt zu sein, daß die Divergenz des Lichtvektors verschwindet) und daß der Mittelwert seines Quadrates ein Maß für die Intensität abgibt. Irgendwelche speziellen Hypothesen über die Natur des Lichtvektors oder über Beziehungen zu anderen physikalischen Größen, auf welchen ja gerade die Überlegenheit der elektromagnetischen Lichttheorie gegenüber der alten elastischen Äthertheorie beruht, sind hier überflüssig.

Sei φ der Lichtvektor und c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so lautet die Wellengleichung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0, \tag{1}$$

wo, wie bekannt, $\ddot{\varphi}$ den zweiten Differentialquotienten nach der Zeit und das Zeichen Δ den LAPLACEschen Operator bedeuten, also in rechtwinkligen Koordinaten

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Macht man die einschränkende Voraussetzung, daß die Form der Lichtschwingungen sinusförmig ist, setzt also z. B.

$$\varphi = u \cdot \cos\nu t$$

oder allgemeiner

$$\varphi = u^{i\nu t},$$

wo ν die Frequenz und t die Zeit bedeuten, so entsteht aus der Wellengleichung (1) die Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{2}$$

wo $k = \nu/c$, also $k = 2\pi/\lambda$, wenn λ, wie üblich, die Wellenlänge ist. Im allgemeinen ist k eine große Zahl, im sichtbaren Spektrum etwa von der Ordnung 10^5, wenn die Wellenlänge in Zentimeter gemessen wird.

[1]) H. ERFLE, in CZAPSKI-EPPENSTEIN, Die Theorie der opt. Instrumente. 3. Aufl. S. 363—364. 1924.

Aus der Anschauung kann man folgern, daß gegenüber der gradlinigen Fortpflanzung der Strahlen die Wellennatur des Lichtes um so mehr eine Rolle spielen wird, je größer die Wellenlänge ist. Umgekehrt wird man sich um so weniger um die Wellennatur zu kümmern brauchen, je mehr die Dimension der Wellenlänge gegenuber allen anderen vorkommenden Größen, wie Abständen, Durchmessern der Spiegel, Linsen und Blenden zu vernachlässigen ist, mit anderen Worten, je kleiner die Wellenlänge ist. Man muß also erwarten, die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik für die Wellenlänge $\lambda = 0$, d. h. für $k = \infty$ darstellen zu können.

Die Strahlenoptik läßt sich bekanntlich, wie in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, aus wenigen Grundgesetzen, wie Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz und dem MALUSschen Satz, ableiten. Alles dies kann schließlich in dem FERMATschen Prinzip

$$\delta \sum n l = 0$$

zusammengefaßt werden, wo die nl die reduzierten Lichtwege sind, n ist der Brechungsindex eines Mediums und l die Strecke, die ein Lichtstrahl in diesem Medium zurücklegt. Insofern die Summe dieser Strecken eine Funktion der Lage von Objektpunkt (x_0, y_0, z_0) und Bildpunkt (x_1, y_1, z_1) ist, nennt man sie auch das „Eikonal"

$$E = \sum n l .$$

Ist das Eikonal E als Funktion von $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ bekannt, so kann man bei gegebenen Ausgangspunkt x_0, y_0, z_0 und gegebener Ausgangsrichtung m_0, p_0, q_0 (die m, p, q sind die Richtungskosinus der Normalen auf einer Fläche konstanten Eikonals, d. h. die Richtungskosinus des durch den Punkt P gehenden Strahles selbst) durch Auflösung der drei Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial x_0} = -n_0 m_0 , \qquad \frac{\partial E}{\partial y_0} = -n_0 p_0 , \qquad \frac{\partial E}{\partial z_0} = -n_0 q_0 ,$$

die Koordinaten des Endpunktes x_1, y_1, z_1 zu finden. Die eine Eikonalfunktion beherrscht also die ganze optische Abbildung. Aus ihr lassen sich nicht nur allgemeine Sätze ableiten, sondern auch sehr spezielle Fragen beantworten, insbesondere auch Bedingungsgleichungen für die Konstruktionselemente des optischen Systems finden. Das Eikonal hat also auch eine hohe praktische Bedeutung. Da für die Richtungskosinus eines Strahles natürlich gilt:

$$m^2 + p^2 + q^2 = 1 ,$$

so folgen, wie auch schon in dem Abschnitt A gezeigt wurde, die beiden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2 \tag{3}$$

und

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_1}\right)^2 = n_1^2 ,$$

wo n_0 und n_1 die Brechungsindizes im Objektraum und im Bildraum sind. Wenn es gelingt, diese Differentialgleichungen unmittelbar aus der Schwingungsgleichung (2) der allgemeinen Wellenoptik abzuleiten, so würde das genügen, um die Strahlenoptik als Grenzfall der Wellenoptik erscheinen zu lassen. Daß eine solche unmittelbare Zurückführung tatsächlich möglich ist, ist nach einem Gedanken von DEBYE von A. SOMMERFELD und J. RUNGE[1]) gezeigt worden.

[1]) A. SOMMERFELD u. I. RUNGE, Ann. d. Phys. (4) Bd. 35, S. 277–298. 1911. Ein kleiner Irrtum wurde verbessert. Im Original fehlt der Faktor 2.

Augenscheinlich wird man ein auf einen Punkt konvergierendes Strahlenbündel als Kugelwelle, ein paralleles Strahlenbündel als ebene Wellen darstellen können. Denn die Lichtstrahlen der geometrischen Optik sind ja physikalisch nicht etwa als unendlich dünne Röhren, sondern als Teile ebener Wellen aufzufassen, deren seitliche Ausdehnung groß gegen die Wellenlänge des Lichtes sein muß. Ebene Wellen, die längs der x-Achse fortschreiten, sind offenbar durch $u = \cos(kx + \nu t)$ oder allgemeiner unter Fortlassung des nur von der Zeit abhängigen Gliedes durch

$$u = u_0 \cdot e^{ikx}$$

dargestellt, ebenso in einer beliebigen Richtung durch

$$u = u_0\, e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)}.$$

Der Lichtweg längs der Fortpflanzungsrichtung, d. h. die charakteristische Funktion HAMILTONS bzw. das Eikonal, ist dabei

$$E = n(x\alpha + y\beta + z\gamma),$$

also hat man

$$u = u_0 \cdot e^{ik/n \cdot E}.$$

Die Größe u_0 sehen wir dabei nicht mehr als streng konstant an, sondern als langsam veränderliche Ortsfunktion, die nur auf Strecken von der Größenordnung der Wellenlänge merklich konstant ist.

Diesen Ansatz wollen wir nun in die Schwingungsgleichung (2) einführen und finden dann, wenn wir zunächst nur die x-Koordinate hinschreiben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot e^{ik/n \cdot E} + u_0 \cdot \frac{ik}{n} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot e^{ik/n \cdot E},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{ik/n \cdot E}\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{ik}{n} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \cdot \frac{ik}{n} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{k^2}{n^2} u_0 \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2\right].$$

Setzt man dies in die Schwingungsgleichung (2) ein, so kommt

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2\frac{ik}{n} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{ik}{n} \cdot u_0 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{k^2}{n^2} u_0 \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + k^2 u_0 = 0,$$

oder durch $k^2 u_0/n^2$ gekürzt

$$\frac{n^2}{k^2 u_0} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2\frac{in}{k} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{in}{k} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + n^2 = 0. \qquad (4)$$

Für $k = \infty$ fallen die ersten drei Glieder fort und der Ausdruck geht, wenn wir jetzt noch die beiden anderen Koordinaten hinzunehmen, über in:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2 = n^2,$$

also die Differentialgleichung des Eikonals (3), womit in der Tat die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik für verschwindende Wellenlänge dargestellt ist.

Interessant und wichtig ist es nun noch, die Fälle näher zu betrachten, in denen die Vernachlässigung der mit $1/k$ bzw. $1/k^2$ versehenen Glieder der Gleichung (4) **nicht** zulässig ist.

1. Fall.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \Delta u_0 \text{ wird groß gegen } k^2$$

bzw.

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2} = |\operatorname{grad} u_0| \text{ groß gegen } k.$$

Beides tritt an der geometrischen Schattengrenze ein, wo $\varkappa_0$ nicht mehr langsam veränderlich ist, sondern sich auf kurzen Strecken sehr beträchtlich ändert. Am Rande eines Lichtbündels versagt also die geometrische Optik. Das ist natürlich auch der Grund, warum ein einzelner Lichtstrahl sich nicht isoliert herstellen läßt.

2. Fall.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \Delta E \text{ wird groß,}$$

d. h. von derselben Ordnung wie k. Da $\partial E/\partial x$, $\partial E/\partial y$, $\partial E/\partial z$ die Strahlrichtung angibt, also grad $E = -n\mathfrak{S}$ ist, wird augenscheinlich $\Delta E = n \cdot \operatorname{div}\mathfrak{S}$, wenn wir die Lichtstrahlen als Stromlinien eines Vektorfeldes $\mathfrak{S}$ auffassen. An einem Brennpunkt bzw. einer Brennlinie oder Brennfläche drängen sich nun die Querschnitte benachbarter Strahlenbündel stark zusammen, wird die Energiedichte immer größer, so daß dort ihre Divergenz und damit auch der LAPLACEsche Operator des Eikonals sehr groß werden. Man kann also den Brennpunkt gewissermaßen als Quellpunkt bzw. Senke für das Vektorfeld auffassen. Dort wird also die Gültigkeit der geometrischen Optik aufhören und es werden beugungstheoretische Betrachtungen an ihre Stelle treten müssen, wie es bekanntlich auch durch die Erfahrung bestätigt wird.

Ob in einem bestimmten Beispiel in diesen beiden Grenzfällen noch geometrische Betrachtungen genügen oder schon Wellenansätze erforderlich sind, hängt von der Größe von k, also von der Wellenlänge ab.

Diese auf DEBYE zurückgehende Darstellung ist so elegant, daß es scheint, als wäre damit die so viel umständlichere Betrachtung unnötig geworden, wie sie KIRCHHOFF[1]) in seiner klassischen Abhandlung „Zur Theorie der Lichtstrahlen" gelegentlich seiner Formulierung des HUYGHENSschen Prinzips bringt. Doch sei der historischen Wichtigkeit wegen auch noch diese Ableitung in der Darstellung von v. LAUE[2]) wiedergegeben.

Nach der KIRCHHOFFschen Formulierung (vgl. Bd. XX, Kap. 2, Beugung) des HUYGHENSschen Prinzips hat man

$$4\pi u_P = \int d\sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right], \tag{5}$$

wo u_P der Lichtvektor im Punkte P ist, der von dem Element $d\sigma$ der Wellenfläche, dessen Beitrag zur Lichterregung in P gefunden werden soll, um r entfernt ist. u ist der Lichtvektor in der Wellenfläche selbst, ν die Richtung der inneren Normalen.

Nimmt man als Lichtquelle einen leuchtenden Punkt, setzt also Kugelwellen voraus, so hat man

$$u = \frac{1}{r_0} \cdot e^{-ikr_0},$$

wo r_0 der Abstand der Lichtquelle von dem Element $d\sigma$ ist. Damit wird Gleichung (5) zu

$$4\pi u_P = \int \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r + r_0} d\sigma \cdot \left[ik\left(\cos(\nu r) - \cos(\nu r_0)\right) + \frac{\cos(\nu r)}{r} - \frac{\cos(\nu r_0)}{r_0} \right]. \tag{5a}$$

Diese Gleichung hat die Gestalt:

$$u_P = \int e^{-ik(r+r_0)} [G_1 + kG_2] d\sigma. \tag{5b}$$

---

[1]) G. KIRCHHOFF, Wied. Ann. Bd. 18, S. 663. 1883; Ges. Abh., Nachtr. S. 30–42; Vorlesungen über math. Optik, S. 35. Leipzig 1891.

[2]) M. VON LAUE, Wellenoptik. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V, 24, § 40, S. 437–439. 1915.

Denkt man sich z. B. den leuchtenden Punkt von dem Aufpunkt P durch einen undurchsichtigen Schirm mit einer Öffnung getrennt, so ist die Integration auszuführen über irgendeine beliebige Fläche, die nur durch die Begrenzungskurve der Öffnung gehen muß und Lichtquelle und Aufpunkt voneinander trennen soll. Wir denken uns nun diese Fläche durch die konfokalen Ellipsenscharen $r + r_0 =$ konst. in unendlich schmale Streifen zerschnitten derart, daß kein endlicher Teil der Integrationsfläche auf einem der Rotationsellipsoide $r + r_0 =$ konst. liegt, und daß sie auch keine von diesen berührt. Unter diesen Voraussetzungen führen wir $r + r_0 = \zeta$ als neue Integrationsvariable ein und definieren zwei neue Funktionen F_1 und F_2 durch die Forderung

$$\frac{dF_1}{d\zeta}\,d\zeta = \int G_1\,d\sigma \qquad \text{und} \qquad \frac{dF_2}{d\zeta}\,d\zeta = \int G_2\,d\sigma\,,$$

so daß also das Huyghenssche Prinzip sich nunmehr darstellt als

$$u_P = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dF_1}{d\zeta}\,e^{-ik\zeta}\,d\zeta + k\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dF_2}{d\zeta}\,e^{-ik\zeta}\,d\zeta\,, \tag{5c}$$

wo ζ_1 und ζ_2 die äußersten auf der Fläche vorkommenden Werte von ζ sind. Nach einem Satze aus der Theorie der Fourierschen Doppelintegrale ist nun, wenn F eine stetige Funktion ist

$$\operatorname*{limes}_{k=\infty} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dF}{d\zeta}\,e^{-ik\zeta}\,d\zeta = 0\,. \tag{6}$$

Partielle Integration ergibt andererseits

$$k\int \frac{dF}{d\zeta}\,e^{-ik\zeta}\,d\zeta = i\,\frac{dF}{d\zeta}\,e^{-ik\zeta} - i\int \frac{d^2F}{d\zeta^2}\,e^{-ik\zeta}\cdot d\zeta\,.$$

Beim Grenzübergang $k = \infty$ verschwindet rechts das Integral, so daß, wenn auch $dF/d\zeta$ stetig ist, auch gilt

$$\operatorname*{limes}_{k=\infty} k\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dF}{d\zeta}\cdot e^{-ik\zeta}\cdot d\zeta = +i\operatorname*{limes}_{k=\infty} \left|\frac{dF}{d\zeta}\,e^{-ik\zeta}\right|_{\zeta_1}^{\zeta_2}. \tag{7}$$

In dem Ausdruck für das Huyghenssche Prinzip (5c) fällt also das erste Integral bei verschwindender Wellenlänge stets fort, das zweite dann, wenn die rechte Seite von Gleichung (7) für ζ_1 und ζ_2 verschwindet. Das ist der Fall, wenn kein Teil der Begrenzung mit einer Linie $\zeta =$ konst. zusammenfällt. Es wird also, wenn nicht etwa die gerade Linie Lichtquelle-Aufpunkt durch die Öffnung führt, im Grenzfall $\lambda = 0$ die Lichterregung in P

$$u_P = 0\,,$$

d. h. wir haben im geometrischen Schatten vollkommene Dunkelheit, wie es die reine Strahlenoptik annimmt.

Tritt der Fall ein, daß die Verbindungsgerade Lichtquelle-Aufpunkt durch die Öffnung hindurchführt, während für keinen Teil der Randkurve $r + r_0 =$ konst. ist, so können wir denselben Satz anwenden auf das Integral der Gleichung (5b) $\int (G_1 + kG_2)\cdot e^{-ik(r+r_0)}\cdot d\sigma$, ausgeführt über die der Lichtquelle zugewandte Seite des Schirmes, es ist demnach gleich Null. Die Integration über

die Öffnung und über diese Seite des Schirmes ergibt aber den der ungehinderten Fortpflanzung entsprechenden Wert

$$u_P = \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r + r_0}.$$

Denselben Wert ergibt also auch das Integral über die Öffnung allein. Außerhalb des geometrischen Schattens haben wir mithin im Fall verschwindender Wellenlänge, ungestörte Ausbreitung der Welle, wie es die reine Strahlenoptik zugrunde legt.

Daß der Fall, in welchem die Berandung des Schirmes ganz oder zum Teil der Gleichung $r + r_0 =$ konst. genügt, eine Ausnahme bilden muß, bestätigt man leicht am Beispiel eines kreisförmigen Schirmes, auf dessen Achse die Lichtquelle liegt. In diesem Falle herrscht nämlich hinter ihm auf seiner Achse stets Helligkeit, unabhängig von der Wellenlänge.

Vorstehende Ableitung des Satzes, daß für verschwindende Wellenlänge die Ausbreitung des Lichtes rein gradlinig ist, geht auf das HUYGHENSsche Prinzip selbst zurück. Selbstverständlich ergibt sich dasselbe Resultat — oft bequemer —, wenn man nicht auf diese Grundformeln zurückgreift, sondern irgendeine spezielle Beugungserscheinung betrachtet und in dem Ausdruck für die Lichtverteilung $k = \infty$ setzt.

Endlich sei noch erwähnt, wie Lord RAYLEIGH[1]) den Satz, daß die geometrische Optik nur einen Grenzfall darstellt, formuliert. Er sagt, daß der Wellenoptik zufolge jeder seitlich begrenzte Strahl in seiner Richtung notwendigerweise bis zu einem gewissen Grad unbestimmt ist.

168. Die für die geometrische Optik wichtigsten Eigenschaften der Lichtwellen. Wie im vorstehenden Artikel gezeigt wurde, ist der Begriff des Lichtstrahls überall anwendbar, außer am Rande eines Lichtbündels, d. h. an einer Schattengrenze und an den Stellen, wo sich die Strahlen bzw. Wellen zu einem Brennpunkt oder Bildpunkt zusammenziehen.

Der erste Fall spielt in der geometrischen Optik kaum eine Rolle, außer etwa in gewissen Fragen der Beleuchtungstechnik, bei Scheinwerfern usw. Die Abbildung einer Lichtkante gehört nur scheinbar hierher, sondern bereits zum zweiten Fall.

Dieser zweite Grenzfall dagegen rührt an die Fundamentalaufgabe jedes optischen Instruments. Wenn wir bedenken, daß das Auge natürlich stets mit in das optische System als ein Teil davon einzubeziehen ist, so können wir sagen, daß der Zweck jeder optischen Vorrichtung letzten Endes immer ist, ein Abbild zu geben, d. h. die von einem kleinen Element eines Gegenstandes ausgehenden Strahlen oder Wellen so zu beeinflussen, daß sie sich irgendwo wieder zu einem kleinen Element zusammenziehen.

Wir müssen also das Verhalten von Lichtwellen in einem Bildpunkt etwas näher betrachten.

Streng genommen dürfen wir dabei nicht von einer einzigen nach Schwingungszahl (Farbe) und Richtung mathematisch genau definierten Sinuswelle ausgehen. Denn das Charakteristische der Optik ist ja, und das ist der Hauptunterschied etwa gegen die Vorgänge der drahtlosen Telegraphie und überhaupt der HERTZschen Schwingungen, daß wir es hier niemals mit einer einzelnen Welle, sondern stets mit ganzen Wellenscharen zu tun haben, deren Richtungen einen gewissen räumlichen Winkel bilden. In dem Maße, wie man ihn durch Blenden einengt, verliert die Schar an Energie und wird schließlich physikalisch unwirksam. Die Lichtwirkung eines mathematischen Punktes ist nicht mehr wahrnehmbar.

[1]) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (4) Bd. 8, S. 261. 1879; Scient. Pap. Bd. 1, S. 415.

In der Sprache der geometrischen Optik ist das die bekannte Unmöglichkeit, wirklich „paralleles" Licht herzustellen.

Entsprechendes gilt von der spektralen Inhomogenität. Stets muß, wenn überhaupt meßbare Energie vorhanden sein soll, ein ganzer Bereich von Schwingungszahlen zur Wirkung kommen. Wirklich streng monochromatisches Licht ist weder praktisch noch theoretisch herstellbar. Jede noch so feine Spektrallinie hat eine gewisse Breite.

Beide Probleme tauchen natürlich auch in jeder Strahlungstheorie auf. Obwohl aber dieses Gebiet in den letzten Jahrzehnten so eingehend bearbeitet worden ist, existiert doch eine mathematische Theorie, welche die Mannigfaltigkeit der Richtungen befriedigend berücksichtigt, anscheinend noch nicht. Die Art, wie man bis jetzt in den Strahlungstheorien von einer einzelnen Welle zum Strahlungsbündel übergeht, enthält auch nach v. LAUE[1]) noch viel Willkur.

Besser begründet ist die Theorie der Übereinanderlagerung verschiedener Schwingungszahlen, d. h. verschiedener Farben. Schwingungen von wesentlich verschiedener Frequenz interferieren nicht miteinander. Man kann also mathematisch jede Farbe für sich behandeln und hat nur zum Schluß eine Integration bzw. Summation mit Hilfe der Empfindlichkeitskurve des Auges oder photographischen Platte auszuführen. Die bei der Übereinanderlagerung mehrerer Sinusschwingungen verschiedener Frequenz auftretenden „Schwebungen", die in der Musik bekanntlich oft wahrzunehmen sind, kommen für die Optik schon aus dem Grunde nicht in Betracht, weil selbst bei dem geringen Wellenlängenunterschied, den etwa die beiden Ränder einer scharfen Spektrallinie gegeneinander aufweisen (das äußerste ist etwa $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-6}$ bis 10^{-7}), die Schwankungen der Intensität immer noch eine Periode von etwa 10^8 bis 10^7 in der Sekunde hätten. Da zeitliche Intensitätsschwankungen, d. h. „Flimmern" erst bei 30 bis 20 Perioden in der Sekunde wahrzunehmen ist [sog. „Verschmelzungsfrequenz"], entziehen sich also diese aus mangelnder Monochromasie stammenden Lichtschwebungen schon aus diesem Grunde, abgesehen von anderen Bedenken, jeder Wahrnehmung. Durch gewisse Polarisationsvorrichtungen, z. B. ein rotierendes NIKOLsches Prisma, kann man übrigens auch Lichtschwebungen sichtbar machen[2]) Doch hat das für die üblichen optischen Instrumente, auch für die üblichen Polarisationsapparate, keine Bedeutung.

Eine strenge Darstellung spektral inhomogener Schwingungen ist mittels FOURIERscher Reihen bzw. FOURIERscher Integrale möglich (vgl. Kap. 2, C in Bd. XX).

In den folgenden Betrachtungen soll von der spektralen Unreinheit ganz abgesehen und das Licht als rein einfarbig angenommen werden.

Von allen Eigenschaften der Lichtwellen wohl für uns am wichtigsten ist, daß die den Lichtvektor bestimmenden Gleichungen sämtlich linear sind, und sich daher verschiedene Wellen ohne gegenseitige Störung überlagern (sog. Prinzip der Koexistenz kleiner Bewegungen). Der resultierende Lichtvektor (Amplitude) ist einfach die Vektorsumme der einzelnen Lichtvektoren (Amplituden) selbst. Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, so summieren sich also gerade deswegen die Intensitäten im allgemeinen nicht. Man nennt das Interferenz.

Bei natürlichem Licht schwingt der Lichtvektor in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene in zeitlich regelloser Weise nach allen möglichen Richtungen. Bei linear polarisiertem Licht schwingt er nur in einer Richtung. Treffen zwei in gleicher Richtung linear polarisierte Lichtwellen ohne Phasen-

[1]) M. VON LAUE, Wellenoptik. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V, 24, § 26, S. 399. 1915.
[2]) Z. B.: A. RIGHI, Journ. de phys. (2) Bd. 2, S. 437. 1883.

differenz [$\delta = 0$] zusammen, so addiert sich einfach ihre Amplitude. Ihre Intensität wird also, wenn die beiden Komponenten gleich groß waren und denselben Richtungssinn hatten, das Vierfache der Intensität einer Welle sein. Wenn die beiden Komponenten zwar gleich groß sind, aber in entgegengesetztem Richtungssinn (Phasen) schwingen (Phasendifferenz $\delta = \pi$), so resultiert die Intensität Null. Hat δ andere Werte, so liegt die Intensität zwischen diesen Grenzen. Sind die beiden Teilwellen senkrecht zueinander polarisiert, so entstehen Schwingungsformen, die man elliptisch polarisiert nennt. Ist die Phasendifferenz $\delta = \pm\pi/2$, so liegen die Achsen der Ellipse in der x- und y-Richtung. Sind außerdem beide Teilwellen gleich stark, so entartet die Ellipse zu einem Kreis. Wir haben dann zirkular polarisiertes Licht. Die Intensität ist in diesem Fall einfach gleich der Summe der beiden Teilintensitäten. Man spricht das gewöhnlich in dem Satz aus: „Senkrecht zueinander polarisierte Schwingungen interferieren nicht miteinander."

Ist die Lage der beiden Schwingungen beliebig zueinander, so kann man durch eine Vektorzerlegung diesen Fall auf die Interferenz gleichgerichteter und die Zusammensetzung senkrecht zueinander polarisierter Schwingungen zurückführen.

Wenn also hier schon eine grundlegende Abweichung von der geometrischen Optik auftritt, insofern gelegentlich Licht plus Licht Dunkelheit gibt, während doch nach der reinen Strahlenoptik eine Anhäufung von Strahlen stets vermehrte Helligkeit bedeutet, so ist nun noch eine weitere Eigentümlichkeit beim Zusammenwirken verschiedener Lichtwellen zu erwähnen, daß nämlich nicht alles Licht interferenzfähig ist. Nur Wellen, die von derselben Lichtquelle stammen, sind bis zu mäßigem Gangunterschied interferenzfähig, man nennt sie dann **kohärent**. Licht, das von verschiedenen Lichtquellen stammt, ist nicht interferenzfähig, man nennt es **inkohärent**. Die verschiedenen Teile derselben Lichtquelle, z. B. einer Flamme, strahlen inkohärent. Kohärent ist nur Licht, das von demselben Elementarbereich stammt. Man muß wohl annehmen, daß nur die Lichtwellen eines einzelnen Atoms kohärent sind. Ob unter Umständen zwischen verschiedenen Atomen hinsichtlich ihrer Strahlungsemission gewisse Verknüpfungen bestehen, ist nicht näher bekannt.

Für den Gültigkeitsbereich der Temperaturstrahlung ist übrigens die Unmöglichkeit der Interferenz zweier Strahlen verschiedenen Ursprungs, also ihre Inkohärenz eine Forderung der Thermodynamik. Würde nämlich das von zwei verschiedenen Elementen eines schwarzen Körpers ausgehende Licht interferieren können, so würde, wie an anderer Stelle ds. Handb. näher ausgeführt wird, der Fall eintreten können, daß ein bestimmtes Oberflächenelement des schwarzen Strahlers weniger Licht empfängt als es aussendet und umgekehrt. Das Temperaturgleichgewicht würde also ohne Kompensation gestört werden. Es ist daher eine Forderung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, daß keine Interferenzen zwischen Strahlen, die von verschiedenen Teilen eines schwarzen Körpers ausgehen, eintreten dürfen.

Tatsächlich besteht dieselbe Unmöglichkeit der Kohärenz von Strahlung verschiedener Zentren auch bei allen Lumineszenzerscheinungen. Wegen der Ungeordnetheit und gegenseitigen Unabhängigkeit der Elektronenbewegungen in allen Lichtquellen, wobei es nichts der Kohärenz Analoges gibt, müssen auch die Lichtschwingungen solcher Strahlen hinsichtlich der Phasenverteilung ungeordnet und gegenseitig unabhängig sein, so daß auch bei Lumineszenz Inkohärenz vorhanden sein muß, wie es im übrigen auch alle Erfahrung bestätigt.

Auch kohärente Strahlen sind nicht dauernd, sondern nur bis zu einem gewissen Wegunterschied interferenzfähig. Man spricht deshalb von „Kohärenz-

dauer". Diese Erscheinung wird oft nicht hinreichend klar unterschieden von der „Konsonanz" und „Dissonanz". Ganz abgesehen von der Kohärenzdauer muß nämlich schon wegen der unvermeidlich nur mangelhaften Monochromasie aller physikalisch meßbaren Strahlung nach einer gewissen Strecke die Interferenzerscheinung ausbleiben, d. h. die Interferenzfähigkeit scheinbar aufhören, wonach allerdings ein erneutes Auftreten von Interferenzen erfolgt. Es ist das eine einfache Folge der mit der spektralen Unreinheit zusammenhängenden Gruppenbildung in einem Wellenzuge. Doch braucht diese Erscheinung hier, wo es sich nur um Beziehungen zur geometrischen Optik handelt, nicht näher erörtert zu werden (vgl. XX, Kap. 2, C).

169. Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Bild- oder Brennpunktes. In einem reellen Bildpunkt haben wir es stets mit konvergenten Strahlen zu tun. Auf diesem Strahlenkegel denken wir uns alle Punkte, die in einem bestimmten Zeitpunkt sich im gleichen Wellenzustand befinden, d. h. in der gleichen Phase schwingen, miteinander verbunden. Es entsteht eine Schar von Flächen, die wir Wellenflächen nennen. In der Sprache der Strahlenoptik müßten sie „Flächen konstanten Eikonals" oder „Flächen gleicher Weglänge" heißen. Doch wendet man auch hier oft den Ausdruck „Wellenfläche" an, denkt sich aber nichts Physikalisches dabei. Handelt es sich um einen idealen, aberrationsfreien Bildpunkt, so sind die Wellenflächen Kugelscharen, mit einem gemeinsamen Mittelpunkt, eben dem Bildpunkt.

Nach dem HUYGHENSschen Prinzip nimmt man an, daß eine solche Wellenfläche so wirkt, als wenn von jedem ihrer Elementarbezirke sog. Elementarwellen ausgehen, die in irgendeinem Bezugspunkt jede für sich eine Erregung hervorrufen, die sich aus der Entfernung bis zu ihm leicht berechnen läßt. Im allgemeinen werden diese Elementarwellen in dem Bezugspunkte wegen der Entfernungsunterschiede mit verschiedenen Phasen ankommen, so daß dort durch Interferenz Helligkeit verschiedenen Grades oder auch Dunkelheit auftreten kann. Im Bildpunkt selbst entsteht ein heller Fleck und in seiner näheren Umgebung abwechselnd mehrmals Dunkelheit und abermals Helligkeit. Im Falle einer Kugelwelle ist diese Erscheinung symmetrisch zu ihrer Achse, da ja für einen Achsenpunkt die Wege sämtlicher Elementarwellen gleich groß sind. Wenn die Wellenfläche kreisförmig begrenzt ist, wie es für optische Instrumente die Regel ist, so bilden sich in einer zur Achse senkrechten Ebene konzentrische helle und dunkle Kreisringe, deren Intensität mit wachsendem Abstand von dem zentralen Fleck schnell abnimmt.

Auf eine nähere Betrachtung dieser Beugungserscheinungen kann an dieser Stelle verzichtet werden, da sie in Bd. XX, Kap. 1 und 2, eingehend behandelt werden. Hier sollen nur die Verhältnisse in dem den geometrischen Bildpunkt ersetzenden hellen zentralen Fleck der Beugungsfigur untersucht werden.

In der KIRCHHOFFschen Formulierung lautet das HUYGHENSsche Prinzip [vgl. Ziff. 167, Gleichung (5)]

$$4\pi u_P = \int d\sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]. \tag{1}$$

Um die Lichterregung u_P in dem Bezugspunkt P hiernach berechnen zu können, müssen wir also den Wert der Funktion u (d. h. den Lichtvektor) in jedem Punkt der Wellenfläche, deren Wirkung auf P gefunden werden soll, kennen, sowie auch den Wert ihres Gradienten in Richtung der Normalen $\partial u/\partial \nu$. Man muß also Annahmen über diese Werte machen. Während für endliche Verhältnisse das nicht ohne Willkür möglich ist, führte nun DEBYE[1]) den Kunstgriff ein, die

[1]) P. DEBYE, Ann. d. Phys. (4) Bd. 30, S. 755—776. 1909.

Wellenfläche ins Unendliche zurückzuverlegen und gelangte dadurch zu mathematisch strengen Lösungen. Wir wollen der Darstellung von DEBYE folgen und denken uns also die unendliche ferne Kugel vom Radius R von einem undurchsichtigen Schirm bedeckt bis auf den Teil, der dem körperlichen Winkel Ω entspricht. Wenn dieser Teil mit einer auf den Nullpunkt des Koordinatensystems konvergierenden Kugelwelle beleuchtet wird, so daß also außerhalb dieses Winkels die Erregung Null ist, so hat man

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{2}$$

und bis auf Größen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial R} = -\frac{ik}{R} \cdot e^{ikR}. \tag{3}$$

Bezeichnet man mit x, y, z die Koordinaten des Bezugspunktes und sind α, β, γ die Richtungskosinus des Fahrstrahles vom Nullpunkt (dem Brennpunkt des Bündels) bis zum Flächenelement $d\sigma$ der unendlich fernen Wellenfläche, so ist mit derselben Annäherung die Entfernung von der Wellenfache bis zum Bezugspunkte

$$r = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma).$$

Infolgedessen ist

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = e^{-ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \tag{4}$$

und wieder bis auf Größen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = ik \cdot e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)} \frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{5}$$

Setzt man diese vier Ausdrücke (2) bis (5) in Gleichung (1) ein und führt man noch den räumlichen Öffnungswinkel des Bündels $d\Omega$ ein, so wird, da $d\sigma = R^2 d\Omega$

$$u_P = \frac{ik}{2\pi}\int e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)} d\Omega. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist also die Darstellung eines Strahlenkegels vom Öffnungswinkel Ω, für welchen der Koordinatenanfang der Brennpunkt ist. Sie ist ein Integral der Schwingungsgleichung [Ziff. 167, Gleichung (2)]

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

und kann aufgefaßt werden als Überlagerung von ebenen Wellen, deren Richtung durch α, β, γ gegeben sind.

Zur weiteren Diskussion benutzen wir Polarkoordinaten

$$x_P = r \cdot \cos\vartheta_P, \qquad y_P = r \sin\vartheta_P \cos\varphi_P, \qquad z_P = r \sin\vartheta_P \sin\varphi_P,$$
$$\alpha = \cos\vartheta, \qquad \beta = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \gamma = \sin\vartheta\sin\varphi.$$

Es ist dann über φ von 0 bis 2π und über ϑ von 0 bis A zu integrieren, wenn wir uns vorstellen, daß der Öffnungswinkel kreisförmig begrenzt ist mit dem Achsenwinkel A.

Wir erhalten zunächst

$$u_P = \frac{ik}{2\pi}\int_0^A\int_0^{2\pi} e^{ikr[\cos\vartheta_P\cos\vartheta + \sin\vartheta_P\sin\vartheta\cos(\varphi_P - \varphi)]} \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \tag{7}$$

und nach Integration über φ

$$u_P = ik\int_0^A e^{ik\cdot r\cdot\cos\vartheta_P\cos\vartheta} \cdot J_0(kr_P\sin\vartheta_P \cdot \sin\vartheta) \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{8}$$

Dabei bedeutet J_0 die BESSELsche Funktion nullter Ordnung[1])

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i x \cos\varphi} \cdot d\varphi .$$

Diese Gleichung (8) enthält eigentlich bereits alles, was sich über Beugungserscheinungen in einem aberrationsfreien optischen System aussagen läßt. Bei beliebiger Öffnung des Strahlenbündels läßt sich das Integral nur näherungsweise behandeln, indem man entweder die BESSELsche Funktion oder das Exponentialglied in Potenzreihen entwickelt.

Für **kleine** Öffnungen dagegen und für kleine Entfernungen von der Brennebene, wenn also $A^2 \ll 1$ und $krA^2 \ll 1$, kann man $\sin\vartheta = \vartheta$ und $\cos\vartheta = 1$ setzen, so daß sich Gleichung (8) vereinfacht zu

$$u_P = ik \cdot e^{ikr\cos\vartheta_P}\int_0^A \vartheta \cdot J_0(kr\sin\vartheta_P \cdot \vartheta)\, d\vartheta . \tag{9}$$

Wie in der Theorie der BESSELschen Funktionen bewiesen wird[2]), ist aber

$$\int_0^x x J_0(x)\, dx = x \cdot J_1(x),$$

wo J_1 die BESSELsche Funktion erster Ordnung bedeutet. Wir erhalten also aus (9)

$$u_P = ikA^2 \cdot e^{ikr\cos\vartheta_P}\frac{J_1(krA\sin\vartheta_P)}{krA\sin\vartheta_P} . \tag{10}$$

Für eine durch den Brennpunkt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gelegte Ebene ist $z = 0$, also $\sin\vartheta_P = 1$ und $\cos\vartheta_P = 0$. Der vor dem Bruchstrich stehende Faktor ist dann konstant. Wir setzen ihn gleich 1, beziehen also alle Intensitäten auf die in der Achse des Strahlenbündels herrschende als Einheit und erhalten dann

$$u_P = \frac{J_1(krA)}{krA}. \tag{11}$$

Das ist aber nichts anderes als die bekannte Formel, in der sich die Beugungserscheinungen in der Brennebene eines idealen Objektives auch leicht direkt darstellen lassen und die gewöhnlich zur Diskussion des Auflösungsvermögens benutzt wird. Nähere Behandlung dieser Frage findet sich erst in dem Abschnitt „Beugungstheorie der optischen Instrumente" in Bd. XX ds. Handb.

Der andere Grenzfall der Gleichungen (7) bzw. (8), daß $kr \gg 1$, der also die Lichterscheinungen in Punkten, die weit ab von der Brennebene liegen, behandelt, kann ebenfalls erst an genannter Stelle näher besprochen werden.

Dagegen sei noch eine Einzelerscheinung schon hier erwähnt, nämlich die sog. **Phasenanomalie im Brennpunkte** (bisweilen auch, aber fälschlich **Phasensprung** im Brennpunkt genannt), da sie sich leicht aus der allgemeinen Gleichung (7) ableiten läßt.

---

[1]) Z. B.: RIEMANN-WEBER, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 7. Aufl. 1925, S. 329, Formel (12).

[2]) Z. B.: RIEMANN-WEBER, S. 331, Formel (16).

Ist nämlich $\vartheta_p = 0$, d.h. betrachten wir Punkte auf der Achse des Strahlenbündels vor dem Brennpunkte, so folgt aus Gleichung (7)

$$u_p = i k \int_0^A e^{i k r \cos\vartheta} \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{r}\left(e^{i k r} - e^{i k r \cos A}\right) \tag{12}$$

und entsprechend für $\vartheta = \pi$, d.h. Achsenpunkte hinter dem Brennpunkt

$$u_p = -\frac{1}{r}\left(e^{-i k r} - e^{-i k r \cos A}\right). \tag{13}$$

Da $e^{i\pi} = -1$ ist, so entspricht der Vorzeichenunterschied zwischen (12) und (13) einem Phasensprung von π oder von $\lambda/2$, den die Welle beim Durchgang durch einen Brennpunkt erleidet.

Die erste Entdeckung dieser Erscheinung geschah auf rein theoretischem Weg durch GOUY[1]), der für Schallwellen bewies, daß im Brennpunkt einer Kugelwelle ein Phasensprung von $\lambda/2$ und in der Brennlinie einer Zylinderwelle ein solcher von $\lambda/4$ auftritt. Er konnte auch für Licht seinen Satz experimentell beweisen und nahm dabei an, daß sich das Licht in einem sehr kleinen Raumgebiet um den Bild- oder Brennpunkt herum tatsächlich „anomal", und zwar mit vergrößerter Geschwindigkeit fortpflanze. V. A. JULIUS[2]) gab dann auch für Lichtwellen eine Erklärung aus der Elastizitätstheorie, wobei er den Brennpunkt einem Quellpunkt von Wellen gleichsetzte, was augenscheinlich falsch ist, da der Brennpunkt nicht ein Quellpunkt der Wellenenergie, sondern zugleich Senkpunkt und Quellpunkt ist, er bildet sozusagen nur eine Durchgangsstation für die Energie der Wellen. Spätere Untersuchungen von SAGNAC[3]) führten auf den richtigen Weg, daß sich nämlich die ganze Erscheinung aus den Beugungsgesetzen ableiten läßt, und daß sich die Phase nicht sprunghaft, sondern stetig ändert. STREHL[4]) zeigte, daß sich die SAGNACsche Theorie aus seiner (STREHLS) „Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichtes"[5]), die im Grunde nichts weiter als eine Anwendung der grundlegenden Beugungsarbeit von LOMMEL[6]) ist, leicht ableiten läßt. Doch leiden diese Arbeiten noch an dem prinzipiellen Mangel, daß sie das HUYGHENSsche Prinzip in der alten (FRESNELschen) Fassung benutzen, bei der sich bekanntlich (vgl. Bd. XX, Abschnitt über Beugung) eine rein rechnerische Phasendifferenz ergibt, die sich daher mit der wirklichen Phasenanomalie im Brennpunkte vermengt. Eine eingehende Behandlung auf Grund der strengeren KIRCHHOFFschen Formulierung des HUYGHENSschen Prinzips lieferte erst F. REICHE[7]) 1909. Danach beginnt die Phase

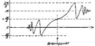


Abb. 156. Verlauf der Phase in der Nähe eines Brennpunktes.

[1]) L. G. GOUY, C. R. Bd. 110, S. 1251–1253; Bd. 111, S. 33–35, 910–912. 1890. Vor allem Ann. chim. phys. (6) Bd. 24, S. 145–213. 1891.
[2]) V. A. JULIUS, Arch. Néerland. Bd. 28, S. 226–235. 1895.
[3]) G. SAGNAC, Journ. de phys. (2) Bd. 2, S. 721–727. 1903; C. R. Bd. 138, S. 479–481, 619–621, 678–680. 1904; Boltzmann-Festschr. S. 528–536. 1904.
[4]) K. STREHL, Phys. ZS. Bd. 6, S. 513–514. 1905.
[5]) Bei J. A. Barth, 1894, 136 S.
[6]) E. LOMMEL, Abhandlgn. d. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 15, S. 1–100. 1884.
[7]) F. REICHE, Ann. d. Phys. (4) Bd. 29, S. 65–93, 401–440. 1909; Berichtigung ebenda Bd. 30, S. 182–184. 1909.

(vgl. Abb. 156) in der Nähe des Brennpunktes um den aus der Weglange sich ergebenden Wert zu schwanken um Betrage, die allmählich bis zu $\pm\pi/2$ ansteigen. Beim Durchgang durch den Brennpunkt wächst diese Phasenanomalie stetig uber $\pi/2$ hinaus und vollführt nun Schwankungen um π, ebenso wie vor dem Brennpunkt um 0, so daß in hinreichender Entfernung, wo die Amplitude dieser Schwankungen nahezu auf Null herangegangen ist, die Phase tatsächlich um π größer ist, als sich aus der Entfernung allein berechnen würde.

Eine elegantere Methode (s. oben) zur Behandlung dieser Phasenanomalien, die aber im wesentlichen dasselbe liefert, stammt von DEBYE[1]). Er gab auch an, wie man graphisch aus der CORNUschen Spirale (s. Bd. XX Beugung) für jeden beliebigen Punkt die Phasenanomalie sofort ablesen kann. Sei O der Nullpunkt, S der Windungspunkt und P ein Punkt auf der Spirale, dann ist der Winkel zwischen den beiden Geraden OS und OP direkt gleich der anomalen Phasenveränderung, für die man die Bezeichnung „anomal" wohl aufgeben sollte. Laßt man P die Spirale entlangwandern, so sieht man, wie die Phasen regelmäßige Schwankungen vollführen, bis sie in hinreichend großem Abstand vom Brennpunkt verschwinden, da dann der Punkt P mit S zusammenfällt. Zeichnet man die Spirale z. B. im ersten Quadranten (Windungspunkt S) und dritten Quadranten (Windungspunkt S'), so gilt für Punkte vor dem Brennpunkt der eine, für Punkte hinter dem Brennpunkt der andere Zweig. Die beiden von O aus nach den Windungspunkten S und S' gezogenen Geraden bilden den Winkel π miteinander, welcher die totale Phasenänderung beim Durchgang durch einen Brennpunkt in größerem Abstand von ihm darstellt, d. h. den sog. anomalen Phasensprung.

Die CORNUsche Spirale entsteht in der Weise, daß auf der einen Achse das Integral

$$C = \int_0^v \cos\frac{\pi}{2} v^2 \, dv\,,$$

auf der anderen

$$S = \int_0^v \sin\frac{\pi}{2} v^2 \, dv$$

aufgetragen wird. Die Intensität ist dann bekanntlich $J = C^2 + S^2$. Obige Konstruktion ist also nichts anderes als der elementare Satz, daß bei solcher Zerlegungsart der resultierenden Amplitude die Phase δ gegeben ist durch $\operatorname{tg}\delta = S/C$.

Eine elementare Erklärung der ganzen Erscheinung mittels der FRESNELschen Zonenkonstruktion gab noch A. D. FOKKER[2]).

Während alle bisher erwähnten Arbeiten nur von Kugelwellen bzw. Zylinderwellen sprechen, lieferte MÖBIUS[3]) eine zahlenmäßige Berechnung der Phasenanomalie auch für verschiedene andere Wellenflächen, wie sie in aberrationsbehafteten optischen Systemen und beim Regenbogen auftreten.

Den ersten experimentellen Nachweis dafür, daß eine Kugelwelle beim Durchgang durch den Brennpunkt um eine halbe Periode beschleunigt wird, erbrachte GOUY[4]), der Entdecker der ganzen Erscheinung selbst. Er wiederholte den bekannten FRESNELschen Spiegelversuch, indem er von den beiden schwach

---

[1]) P. DEBYE, Ann. d. Phys. (4) Bd. 30, S. 755—776. 1909.
[2]) A. D. FOKKER, Physica Bd. 3, S. 334—337. 1923; Bd. 4, S. 166—172. 1924.
[3]) W. MÖBIUS, Ann. d. Phys. Bd. 33, S. 79—133. 1910.
[4]) L. G. GOUY (s. Fußnote 1, S. 266).

gegeneinander geneigten Spiegeln den einen durch einen Hohlspiegel ersetzte. Der bei ebenen Spiegeln weiße mittlere Interferenzstreifen wird in der Tat schwarz, wenn die vom Hohlspiegel kommende Kugelwelle ihren Brennpunkt durchlaufen hat, bevor sie mit der anderen Welle interferiert.

JOUBIN[1] und FABRY[2] zeigten, daß man auch mit dem gewöhnlichen Apparat für NEWTONsche Ringe die Erscheinung beobachten kann, wenn man ihn mit einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, so daß zwei reelle Bildpunkte entstehen. Betrachtet man die Interferenzringe im Raum vor dem Apparat, so zeigt sich die Mitte des Ringsystems schwarz auf den Strecken außerhalb der beiden Bildpunkte, dagegen zwischen den beiden Bildpunkten weiß. JENTZSCH beobachtete dasselbe zwischen den verschiedenen Bildpunkten einer SORETschen Zonenplatte.

Eine andere Anordnung zur Demonstration der Phasenanomalie stammt von ZEEMAN[3]. Wenn man eine Sammellinse aus Kalkspat, dessen kristallographische Achse senkrecht zur Achse der Linse liegt, zwischen parallele oder gekreuzte Nikols aufstellt, so entsteht bekanntlich (vgl. Bd. XX, Kap. 3) ein System konzentrischer Interferenzringe. Am schönsten bzw. deutlichsten werden sie, wenn die kristalloptische Achse der Linse einen Winkel von 45° mit den Hauptschnitten der Nikols bildet. Ferner entwirft die Kalkspatlinse von einer punktförmigen Lichtquelle zwei reelle voneinander getrennte Bilder. Zwischen diesen beiden Bildpunkten ist die Mitte der Interferenzringe weiß, wenn sie außerhalb der Bildpunkte schwarz ist und umgekehrt, je nach der Stellung der Nikols.

Diese Versuche sind natürlich mehrfach wiederholt worden. REICHE[4]) konnte noch durch geeignete Ablendung auch experimentell zeigen, daß beim Durchgang durch die Bildpunkte keine plötzliche Helligkeitsänderung des Zentralbildes auftritt, sondern der Theorie entsprechend nur eine allmähliche.

170. Optische Abbildung von Selbstleuchtern und Nichtselbstleuchtern. Wie wir in voriger Ziffer sahen, entsteht in einem Brennpunkt oder Bildpunkt stets eine mehr oder minder ausgedehnte Beugungsfigur. Ihr zentraler Lichtfleck entspricht dem geometrischen Bild.

Je enger wir die Begrenzung der Welle machen, je kleiner die Apertur des Systems ist, um so größer wird dieser zentrale Lichtfleck, um so flacher also der Abfall der Intensität. Andererseits, je größer die Apertur des Systems ist, um so steiler der Abfall der Lichtintensität innerhalb des zentralen Lichtscheibchens von seiner Mitte nach dem Rande. Bei großer Öffnung stimmen daher das geometrische Bild und die Beugungsfiguren besser überein als bei kleiner Öffnung. Da aber bekanntlich die Aberrationen um so schwerer zu beseitigen sind, je größer die Öffnung des Systems ist, so wird gerade dann auch die Abweichung der wirklichen Wellenfläche von der idealen Kugelform am größten sein.

Wenn es sich auch in optischen Instrumenten überwiegend um kreisförmig begrenzte Wellen handelt, so sei doch angemerkt, daß auch in Instrumenten mit kreisförmigen Blenden oft ein Wettstreit der verschiedenen Blenden vorliegt. Schief einfallende Strahlenbündel werden dann „vignettiert", und die Wellen-

[1]) P. JOUBIN, C. R. Bd. 115, S. 932—933. 1892.
[2]) CH. FABRY, Journ. de phys. (3) Bd. 2, S. 22—27. 1899; C. R. Bd. 115, S. 1063—1064. 1892.
[3]) P. ZEEMAN, Verh. K. Akad. van Wet., Amsterdam, Afd. Natuurk., Bd. 6, S. 11—13. 1897; Arch. Néerland. (2) Bd. 4. 1901; Phys. ZS. Bd. 1, S. 542—543. 1900. — W. A. LUB und P. ZEEMAN, Physica Bd. 4, S. 273—275. 1924.
[4]) F. REICHE (s. Fußnote 7, S. 266).

fläche ist von zwei oder mehreren verschiedenen Kreisbögen begrenzt, die auch nicht mehr in einer Ebene liegen. Welche Folgen das für die Beugungsfigur hat, scheint noch nicht untersucht zu sein. Die anscheinend einzige Untersuchung eines Falles, in dem die beugende Öffnung nicht von einer ebenen Kurve begrenzt ist, rührt von NAGAOKA[1]) her, der einen senkrecht zur Achse liegenden Spalt auf einem Kreiszylinder behandelte.

Die Beugungsfigur eines punktförmigen Objektes ist nur von Interesse in der Astronomie für Fixsterne und sehr kleine Planetoiden sowie in der Ultramikroskopie für allseitig submikroskopische Partikel. In allen anderen, an Zahl und Bedeutung weit überwiegenden Fällen handelt es sich um die Abbildung eines **ausgedehnten Objektes**. Dann sind die Beugungsfiguren der einzelnen Punkte gesondert zu untersuchen und zur Ermittlung der totalen Wirkung zu summieren. Liegen die einzelnen Punkte des Objektes hinreichend weit auseinander, so ist es gleichgültig, ob sie kohärent oder inkohärent strahlen. Liegen sie aber so nahe beieinander, daß die Beugungsfiguren ihrer Bildpunkte sich ganz oder teilweise überdecken, so treten wesentliche Unterschiede auf, je nachdem, ob die einzelnen Punkte des Objektes kohärent oder inkohärent strahlen.

Ist das abzubildende ausgedehnte Objekt ein **Selbstleuchter**, so sind die von demselben Punkte ausgehenden Strahlen kohärent, während das von verschiedenen Punkten des selbstleuchtenden Objektes herrührende Licht inkohärent ist. In diesem Falle genügt es also stets, die Intensität der sich für die einzelnen Objektpunkte ergebenden Beugungsfiguren einfach zu addieren [vergl. Anmerkung[2])].

Ist der abzubildende ausgedehnte Gegenstand aber **nichtselbstleuchtend**, sondern wird von einer oder mehreren anderen Lichtquellen beleuchtet oder durchleuchtet, so werden die Verhältnisse viel komplizierter und von Fall zu Fall durchaus verschieden. Immer ist aber zu bedenken, daß auch hier das Licht letzten Endes doch wieder von einem Selbstleuchter herrührt, daß also im gesamten Strahlenkörper irgendwo kohärente Strahlen enthalten sein müssen.

Im allgemeinen wird der Strahlenverlauf so geregelt sein, daß die von einem Punkt eines solchen Objektes ausgehenden Strahlen von verschiedenen Punkten der Lichtquelle stammen, also inkohärent sind. Dagegen sind die Strahlen, die zwar von verschiedenen Punkten des Objektes, aber von einem Punkte der primären Lichtquelle herrühren, kohärent, interferieren also miteinander (etwa alle Strahlen einer bestimmten Richtung). Diese möglichen Interferenzstellen liegen jedoch im allgemeinen nicht in der Bildebene.

Es gibt zahlreiche Abweichungen von diesem vorausgesetzten Strahlenverlauf. Am einfachsten wäre etwa der Fall, daß das Objekt, das man sich als eine Anzahl von Öffnungen in einem undurchsichtigen Schirm vorstellen kann, von einer einzigen Welle bestrahlt wird. Dann strahlen die verschiedenen Objektpunkte nicht, wie oben, inkohärent, sondern es besteht eine feste Phasenbeziehung zwischen ihnen, die man aus der Weglänge einfach berechnen kann, so daß

[1]) H. NAGAOKA, Journ. of College of scienc. Imp. Univ., Japan Bd. 4, S. 301—322. 1891.

[2]) Hierher gehört auch der Sonderfall, daß das Objekt zwar von fremdem Licht beleuchtet wird, aber fluoresziert. Das tritt z. B. bei manchen Färbemitteln mikroskopischer Präparate auf. Wenn keine strenge Trennung zwischen der die Fluoreszenz erregenden und der erregten Strahlung möglich ist, was geometrisch bei der sog. Dunkelfeldbeleuchtung (vgl. Abschnitt Ultramikroskopie) ohne weiteres der Fall ist, und sonst physikalisch durch Filter meist erreicht werden kann, so hat man für gewisse Farben das Objekt als selbstleuchtend zu behandeln, also in der Beugungsfigur die Intensitäten zu addieren, für andere, in denen es nicht selbstleuchtend ist, die Amplituden unter Berücksichtigung etwaiger Phasenverknüpfung zu addieren.

man, um die Gesamtwirkung zu erhalten, die Amplituden und nicht die Intensitäten der einzelnen Beugungsfiguren zu addieren hat.

Ein bemerkenswertes Beispiel sind ferner gewisse Kondensoren der Mikroskope, die die Lichtquelle im Objekt selbst abbilden, wodurch dieses, trotzdem es nicht selbstleuchtend ist, punktweise koharent strahlt, also bis zu einem gewissen Grad wie ein Selbstleuchter wirkt. Ist dieser Strahlenverlauf nur angenähert erreicht, so wird häufig, auch bei anderen Beleuchtungssystemen, an Stelle der einfachen Intensitätsüberlagerung eine neue Interferenzerscheinung auftreten.

Weiter ist zu unterscheiden zwischen den Fällen, in denen die Lichtquelle durch das Beleuchtungssystem und das Objekt hindurch von dem eigentlichen optischen System abgebildet wird und denen, wo das nicht möglich ist.

In allen Fällen, in denen das nichtselbstleuchtende Objekt durch diffuse Reflexion sichtbar ist — und das sind fast alle Fälle des täglichen Lebens — wird die Lichtquelle weder direkt wahrgenommen noch abgebildet. Oft befindet sich zwischen der selbstleuchtenden Lichtquelle und dem abzubildenden Objekt eine Mattscheibe, die Milchglasglocke einer Lampe oder ähnliches. Dann sind Sonderuntersuchungen erforderlich.

Aber in der Mikroskopie, ferner bei der diaskopischen Projektion (Kino), den meisten Vergrößerungsapparaten und noch in vereinzelten anderen Fällen, wird das nichtselbstleuchtende Objekt durchstrahlt. Es wird dann sichtbar wegen der verschiedenen Absorption und des verschiedenen Brechungsvermögens seiner Teile (sog. Absorptions- und Refraktionsbilder). Dann wird durch das optische Instrument außer von dem Objekt auch von der primären Lichtquelle ein Beugungsbild entworfen, unter Umständen nur virtuell oder doch nicht an einer zugänglichen Stelle. In allen diesen Fällen wirkt der beobachtete Körper seinerseits beugend auf das Licht der Lichtquelle, verändert also ihr Beugungsbild. Dies erkannt zu haben, ist der fundamentale Fortschritt der ABBEschen Theorie der mikroskopischen Abbildung.

E. ABBE[1]) berechnete die Lichtverteilung in der dem Gegenstand konjugierten Ebene des Bildraumes, dem sog. Bild des Gegenstandes, als Interferenzwirkung der Elementarwellen, die nach dem HUYGHENSschen Prinzip von dem durch den beugenden Gegenstand veränderten Bild der Lichtquelle ausgehen. Je nachdem welche Teile dieses Beugungsbildes der Lichtquelle durch das Instrument hindurchgehen, richtet sich der Grad der „Objektähnlichkeit", den das schließliche „Abbild" mit dem abzubildenden beugenden Gegenstand hat.

Im Gegensatz dazu behandelt Lord RAYLEIGH[2]) auch in diesem Falle die Lichtverteilung in der Bildebene durch ein direktes Verfahren. Beide Methoden liefern natürlich dasselbe.

Jahrzehntelang mußte man nach der Form, in der ABBE selbst seine Theorie bekanntgegeben hatte, annehmen, daß er nur die erstere Art der Berechnung, die speziell ABBEsche Betrachtungsweise des Zwischenbildes, angewandt hatte und daß RAYLEIGH ihm gegenüber etwas Neues gebracht habe[3]). Erst als 5 Jahre nach ABBES Tode von O. LUMMER und F. REICHE[4]) seine Vorlesungen veröffentlicht wurden (im wesentlichen in der Form, wie er sie 1887 gehalten hat), erfuhr

[1]) E. ABBE, Schulzes Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. 9, S. 413—468. 1873; Ges. Abh. Bd. I, S. 45—100.

[2]) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) Bd. 42, S. 167—195. 1886. Scient. Pap. Bd. 4, S. 235—260.

[3]) Z. B.: L. MANDELSTAM, Ann. d. Phys. (4) Bd. 35, S. 885. 1911.

[4]) O. LUMMER u. F. REICHE, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop von Ernst Abbe. 108 S. Braunschweig 1910.

man, daß auch er schon die gleiche Rechenmethode wie RAYLEIGH benutzte. LUMMER und REICHE[1]) haben später auf diesem historischen Sachverhalt noch besonders hingewiesen.

Doch hängen diese ganzen Verhältnisse mit der jeweiligen speziellen Konstruktion des Instrumentes (Regelung des Strahlenverlaufes) so eng zusammen, daß sie in diesen allgemeinen Abschnitt nicht näher behandelt werden können. Man vergleiche daher in Bd. XX den Abschnitt „Beugungstheorie der einzelnen Instrumente".

Es ist jahrzehntelang der Unterschied zwischen der Abbildung selbstleuchtender und nichtselbstleuchtender (beleuchteter bzw. durchleuchteter) Gegenstände als etwas sehr Wichtiges behandelt worden und man hat dies scheinbare Erfordernis der Wellenoptik immer als einen fundamentalen Gegensatz zur Strahlenoptik, die einen solchen Unterschied nicht kennt, angesehen.

Indessen ist dieser Unterschied tatsächlich gar nicht so groß. Schon 1896 wies Lord RAYLEIGH[2]) darauf hin, daß, wenn der beleuchtete Gegenstand nicht einseitig, sondern von allen Richtungen beleuchtet wird, die einzelnen Punkte des abgebildeten Gegenstandes inkohärent strahlen, also wie ein Selbstleuchter, wenn sie nicht allzu benachbart sind. Vollständig geklärt wurden die Verhältnisse durch MANDELSTAM[3]) (1911) und v. LAUE[4]) (1914). Ihr Äquivalentsatz sagt aus, daß bei allseitiger Beleuchtung das Bild eines nichtleuchtenden Gegenstandes komplementär ist zum Bilde desselben Körpers, wenn er allein als Selbstleuchter strahlt.

Den Beweis, der freilich nur für Temperaturstrahlung gilt, führt man nach v. LAUE etwa so:

Der selbstleuchtende Gegenstand G möge reine Temperaturstrahlung aussenden und so strahlen, wie wenn er die Temperatur T hätte. Die fremde Strahlung, die ihn im anderen Fall trifft, soll so sein, als ob sie von schwarzen Körpern derselben Temperatur T herrührte. Der Gegenstand G selbst und die Gesamtheit K dieser anderen Körper bilden dann die Begrenzung eines vollständig geschlossenen Hohlraumes. Strahlen G und K gleichzeitig, so entsteht nach dem KIRCHHOFFschen Gesetze die allseitig gleiche Hohlraumstrahlung. Sieht man mit einem beliebigen optischen Instrument in ihn hinein, so erblickt man bekanntlich, wie man auch „einstellen" mag, gleichförmige Helligkeit. Freilich würde ja der Strahlungszustand zunächst gestört, wenn man die Wandung des Hohlraumes zum Teil durch das Objektiv des Instrumentes ersetzt, aber man kann leicht — z. B. durch eine dem GAUSSschen Okular nachgebildete Einrichtung — auch durch das Objektiv Strahlung von der Temperatur T in den Hohlraum eintreten lassen, so daß diese Störung vollständig beseitigt wird. Diese gleichförmige Helligkeit setzt sich nun additiv zusammen aus den Bildern, die G vermöge seines eigenen und vermöge des fremden Lichtes liefert. Somit sind beide Bilder zueinander komplementär.

Aus diesem streng gültigen Satze lassen sich in besonderen Fällen Annäherungssätze, wie sie MANDELSTAM zuerst nur gefunden hatte, gewinnen, indem man von dem fremden Licht alle Strahlen fortläßt, welche zur Abbildung nichts Merkbares beitragen. Bei einem weder regulär noch diffus spiegelnden Körper K kann man z. B. die Beleuchtung von der Seite des Beobachtungsinstrumentes her ohne weiteres fortlassen. Ferner läßt sich leicht

[1]) O. LUMMER u. F. REICHE, Ann. d. Phys. Bd. 37, S. 839—844. 1911.
[2]) Lord RAYLEIGH, Nature Bd. 54, S. 332—333. 1896; Scient. Pap. Bd. 4, S. 235 und besonders S. 241.
[3]) L. MANDELSTAM, Ann. d. Phys. Bd. 35, S. 881—897. 1911.
[4]) M. v. LAUE, Ann. d. Phys. Bd. 43, S. 165—168. 1914.

zeigen, daß bei relativ grober Struktur (größer als die Wellenlänge) schon die Beleuchtung aus einem ziemlich kleinen Winkel genügt, um ein zum Fall des Selbstleuchtens komplementäres Bild zu erzeugen. Eine gründliche Behandlung zahlreicher Sonderfälle lieferte neuerdings M. BEREK[1]).

171. Wellenaberration und Strahlenaberration. In der geometrischen Optik (Strahlenoptik) — wenigstens in ihrer klassischen Form — betrachtet man als Bildpunkt den Schnittpunkt der Bildstrahlen.

Wenn alle von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlen — soweit sie überhaupt das System (d. h. die Folge von Linsen und Spiegeln) durchsetzen — nach den verschiedenen Brechungen und Spiegelungen wieder in einem Punkt vereinigt werden, ist das System im geometrischen Sinne ideal. Der Umstand, daß — besonders bei ausgedehnten Objekten — stets Strahlen existieren, die nicht durch denselben Punkt gehen, wie die Mehrzahl der übrigen, erscheint als Fehler, Abweichung des wirklichen Bildes vom Idealzustande, als „Aberration", dies Wort im weitesten Sinn gebraucht.

Dieser Unterschied zwischen der idealen und wirklichen Abbildung, den die geometrische Optik machen muß, verschwindet, wenn man die Vorstellung der Strahlen verläßt und die Wellennatur des Lichtes berücksichtigt.

Dann hat man statt der Strahlen die von einem Objektpunkt ausgehende Wellenfläche zu betrachten und durch das System hindurch zu verfolgen, bis sie sich wieder auf der Bildseite zusammenzieht. Ist sie dort eine Kugelfläche, so wird sie dabei tatsächlich in einem bestimmten Moment durch einen mathematischen Punkt hindurchgehen. Ist aber die Wellenfläche auf der Bildseite keine Kugelfläche, so werden ihre verschiedenen Zonen zu verschiedenen Zeiten oder auch gar nicht durch den Bezugspunkt hindurchwandern, und dies entspricht den „Aberrationen" der geometrischen Optik.

Es muß also eine Beziehung zwischen den geometrischen Aberrationen und den Abweichungen der Wellenfläche von der Kugelform bestehen. Wir wollen diese Abweichungen daher „Wellenaberrationen" nennen.

Indessen haben diese Wellenaberrationen doch eine ganz andere Bedeutung als die geometrischen Strahlenaberrationen. Denn auch eine kugelförmige Wellenfläche ergibt ja einen einfachen Punkt als Bild nur dann, wenn sie eine Vollkugel ist. Ist sie irgendwie begrenzt, wie das in Wirklichkeit stets der Fall und wie insbesondere bei optischen Instrumenten wegen der Linsenfassungen und Blenden unvermeidlich ist, so entsteht keineswegs nur einfache Helligkeit im Bildpunkt, sondern eine zusammengesetzte Beugungsfigur. Also auch bei idealer Vereinigung der Strahlen findet man nach der Wellentheorie noch Licht außerhalb des Schnittpunktes. Wenn die Wellenfläche von der Kugelform abweicht, d. h. irgendwelche Aberrationen vorhanden sind, so ändert sich die Lage des zentralen Fleckes gar nicht und seine Größe und damit die Lage der Beugungsringe und -streifen nur wenig, dagegen ändert sich wesentlich die Verteilung der Lichtmenge, deren Gesamtbetrag natürlich erhalten bleiben muß. Der Unterschied der Beugungsbilder in einem guten und einem schlechten System besteht also darin, daß bei letzterem der zentrale Lichtfleck im ganzen etwas dunkler, der Lichtabfall an seinem Rande etwas flacher, vor allem aber die Ringe heller sind als bei einem idealen System. Bildfehler und Aberrationen aller Art erscheinen also wellentheoretisch nicht als eine qualitative Besonderheit, sondern nur als quantitative Veränderung einer auch sonst vorhandenen Erscheinung.

[1]) M. BEREK, ZS. f. Phys. Bd. 40, S. 420—450. 1926. — Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturwiss. zu Marburg; Bd. 61, S. 251—282, 1926.

Es liegt nahe als Maß der Bildgüte eines nicht aberrationsfreien Systems den Anteil der gesamten Lichtmenge anzusehen, der auf den zentralen Fleck, das Korrelat des geometrischen Bildes, entfällt. Man wird also etwa die Helligkeit des zentralen Fleckes, wie sie bei idealer Abbildung sein müßte, gleich 100 setzen und die bei einem gegebenen System wirklich auftretende Helligkeit in Prozenten davon ausdrücken. In diesem Sinne kann man von dem „Wirkungsgrade" oder „Nutzeffekt" eines optischen Systems sprechen.

Vielfach genügt es anzunehmen, daß die Helligkeit in der Mitte des zentralen Beugungsscheibchens proportional zur gesamten auf das Lichtscheibchen entfallenden Lichtmenge ist und nur sie allein zu berechnen, was rechnerisch eine große Vereinfachung bedeutet. Das Verhältnis dieser Größe für ein gegebenes System zu ihrem Werte für ein ideales System gleicher Brennweite und Öffnung wurde von STREHL[1]) „Definitionshelligkeit" genannt. Dieser STREHLsche Ausdruck wird häufig zur Kennzeichnung der Güte eines Objektivs benutzt.

Er genügt auch zweifellos, solange das optische System einigermaßen brauchbar ist, d. h. solange die Definitionshelligkeit nicht geringer als etwa 60 bis 70% ist, obwohl an sich bei gleicher Helligkeit in der Scheibenmitte die Lichtmenge in verschiedener Weise auf die Umgebung verteilt sein könnte, die Definitionshelligkeit also kein eindeutiges Maß ist. Sinkt sie unter etwa 50%, so kann es vorkommen, daß einer der Beugungsringe die Mitte an durchschnittlicher Helligkeit übertrifft. Dann ist auch noch mindestens die Form des seitlichen Abfalls der Lichtintensität im zentralen Fleck zu untersuchen, wenn nicht gar die ganze Beugungsfigur mit mehreren Ringen betrachtet werden muß. In diesem Fall genügt die STREHLsche Definitionshelligkeit auch nicht mehr als Annäherung. Weiteres siehe in Bd. XX, Artikel „Die Beugungstheorie der optischen Instrumente".

Im allgemeinen ist noch zu bemerken, daß die geometrisch-optischen Wellenflächen als Flächen gleicher Phase sog. „äquidistante Flächen" oder „Parallelflächen" sind, d. h. gemeinsame Normalen und konstanten Normalenabstand haben. Das Strahlenbündel ist also schon durch eine von ihnen eindeutig bestimmt, während umgekehrt zu jedem Strahlenbündel verschiedene Wellenflächen gehören, die einander nicht ähnlich sind. Als Grundlage für beugungstheoretische Untersuchungen wird man sich aus der ganzen Schar diejenige Wellenfläche auswählen, die rechnerisch am bequemsten ist, also jedenfalls eine, die vollständig außerhalb der Kaustik verläuft. Man nennt sie auch die „Kennfläche".

Sehr oft braucht man gar nicht die Wellenfläche selbst in expliziter Form zu kennen, sondern es wird genügen, wenn man ihre Abweichungen von einer Schmiegungskugel kennt, wobei es naheliegt, die um den geometrisch-optischen Bildpunkt (den sog. GAUSSschen Bildpunkt) als Mittelpunkt geschlagene Kugel zu wählen. Falls er auf der Achse liegt, wird diese Kugel die Wellenfläche in ihrer Mitte tangieren, handelt es sich aber um einen außeraxialen Bildpunkt, so wird diese Schmiegungskugel die Wellenfläche an der Stelle oskulieren, die der durch die Mitte der „natürlichen Blende" GLEICHENS gehende Strahl durchsetzt.

Indessen ist es besonders bei komplizierter Form der Wellenfläche besser, statt einer Schmiegungskugel eine Referenzkugel so zu bestimmen, daß in ihrem Mittelpunkt die gesamte Lichtintensität am größten ist. Man kann diese Referenzkugel auf verschiedenen Wegen, z. B. graphisch, wie STREHL[2]), oder nach der Methode der kleinsten Quadrate, wie VÄISÄLÄ[3]), bestimmen. Auf diese Weise erhält man gleichzeitig den sog. „Ort bester Einstellung" innerhalb der Kaustik.

[1]) K. STREHL, ZS. f. Instrkde. Bd. 15, S. 364. 1895; Bd. 22, S. 214. 1902.
[2]) K. STREHL, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 322—326. 1904.
[3]) V. VÄISÄLÄ, Neue Methoden zur Untersuchung der Objektive. 129 S. Helsinki 1922.

Es gelingt übrigens leicht, die Beugungsintegrale so umzuformen, daß in ihnen nur die Abweichung von der Schmiegungskugel bzw. Referenzkugel auftritt. Besonders wenn man zur Bestimmung der STREHLschen Definitionshelligkeit nur die Helligkeit in der Mitte der ganzen Beugungserscheinung braucht, werden die Ausdrücke verhältnismäßig einfach.

Es sei hier angemerkt, daß sich zwischen Objektiv und Auge bzw. Platte ein ununterbrochenes Lichtgewebe hinzieht. Überall dazwischen kann man auf einer Fläche Licht auffangen, dessen Verteilung vom Objekt abhängt, also eigentlich bereits ein „Bild" darstellt. Die sog. optischen Bildebenen sind nichts weiter als irgendwie ausgezeichnete Lagen dieser Auffangefläche, die keineswegs immer eindeutig bestimmbar sind.

Die geometrischen Beziehungen zwischen der Abweichung der wirklichen Wellenfläche von einer Kugel einerseits und den geometrischen Abweichungen der Strahlenschnittpunkte mit der Achse voneinander andererseits sind an sich einfach, aber nur für die gewöhnliche sphärische Aberration naher behandelt worden. Ähnliche Formeln wie die nachstehend entwickelten (zum Teil nur angedeutet oder nicht ganz einwandfrei) stammen von Lord RAYLEIGH, STREHL, WILSING, CHALMERS, HARTMANN, MARTIN, T. SMITH, BUTKOW und RICHTER[1]).

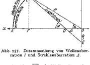


Abb. 157. Zusammenhang von Wellenaberration l und Strahlenaberration Δ.

Sei in Abb. 157 $\widehat{AB}$ die ideale Kugelwelle, $\widehat{AC}$ die wirkliche nicht sphärische Wellenfläche, ferner O der Mittelpunkt der Kugel, d. h. der GAUSSsche Bildpunkt und zugleich Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, also $\overline{OA} = \overline{OB} = R$. Ferner sei die Abweichung der beiden Wellenflächen voneinander $\overline{CB}$ als Wellenaberration (Wegdifferenz) mit l bezeichnet, positiv gerechnet, wenn die wirkliche Wellenfläche innerhalb der Kugelwelle verläuft, was dem Normalfall der sphärischen Aberration (sog. „Unterkorrektion") entspricht, dann ist $\overline{OC} = R - l$. Die Normale der wirklichen Wellenfläche im Punkt C ist ein infolge der sphärischen Aberration nicht durch den Bildpunkt O gehender Lichtstrahl. Von seinen Abschnitten auf den Koordinatenachsen ist $\overline{OD} = \Delta$ die sphärische Aberration im gewöhnlichen geometrisch-optischen Sinne (Längenabweichung) und $\overline{OE} = \varrho$ der Radius des Zerstreuungskreises (seitliche Aberration), beide positiv für die gezeichnete Art von Aberration. Da $\overline{DF}$ und $\overline{EG}$ die Subnormalen der Kurve $\widehat{AC}$ im Punkte C mit den Koordinaten x und y sind, so ist nach bekannten Formeln

$$\Delta = x + y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2)$$

[1]) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. Bd. 8, S. 411. 1879; vergl. auch Scient. Pap. Bd. 1, S. 435.; K. STREHL, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 323. 1904; J. WILSING, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 15, Nr. 48, S. 6. 1903; S. D. CHALMERS, Proc. Opt. Convention London Bd. 1, S. 24–28. 1905; J. HARTMANN, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 15, Nr. 46, S. 47 bis 51. 1908; L. C. MARTIN, Trans. Opt. Soc. Bd. 23, S. 63–90. 1921; T. SMITH, Proc. Phys. Soc. London Bd. 34, S. 145–150. 1922; K. BUTKOW, Verh. Opt. Inst. Leningrad Bd. 3, Nr. 26. 1924; ZS. f. Phys. Bd. 22, S. 334–396. 1924; R. RICHTER, ZS. f. Instrkde. Bd. 45, S. 1–15. 1925.

und

$$\varrho = y + x\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}(x^2 + y^2).$$

Da aber

$$x^2 + y^2 = (R - l)^2,$$

haben wir sofort

$$\Delta = -(R - l)\frac{dl}{dx}, \tag{1}$$

$$\varrho = -(R - l)\frac{dl}{dy} \tag{2}$$

und

$$\varrho = \Delta \cdot \frac{dx}{dy}. \tag{3}$$

Diese noch streng gültigen Formeln kann man in verschiedener Weise umformen. Für kleine Winkel und wenn $\Delta \ll R$ ist, kann man z. B. näherungsweise setzen:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{R - l}.$$

Dann hat man aus Gleichung (1).

$$\frac{dl}{dy} = \frac{\Delta \cdot y}{(R - l)^2}.$$

Sicher wird bei obiger Annäherung auch $l \ll R$ sein. Wenn man noch aus der ganzen Wellenflächenschar die Kugel mit einem Radius gleich der Brennweite auswählt, also $R = f$ setzt, so kommt für die Wellenabweichung selbst:

$$l = \int \frac{\Delta}{f^2} \cdot y\,dy. \tag{4}$$

Bezeichnen wir, um die verschiedene Größe der einzelnen Zonen, d. h. die von ihnen gelieferte Lichtmenge, berücksichtigen zu können, das Verhältnis einer bestimmten Zone y zur ganzen Öffnung mit $q = y^2/R_0^2$, wo R_0 der halbe Durchmesser des ganzen Objektivs ist, so wird

$$l = \frac{1}{2}\int \frac{R_0^2}{f^2} \cdot \Delta \cdot dq.$$

Da man endlich in der Praxis statt f stets eine mittlere Brennweite F_0 setzen kann, so läßt sich für die Wellenaberration (Wegdifferenz) an einer beliebigen Zone q auch schreiben:

$$l = \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{F_0}\right)^2 \int_0^q \Delta \cdot dq. \tag{5}$$

Die untere Grenze folgt dann daraus, daß wir die Wegdifferenz für die Mitte des Objektivs gleich Null setzen. Man sieht aus Gleichung (5), daß bei Vergrößerung des Durchmessers des Objektivs die Wellenaberration auch dann wächst, wenn die Strahlenaberration ziffernmäßig unverändert bleibt, und daß sie kleiner wird, wenn bei konstant gehaltenem Δ die Brennweite vergrößert wird. Die geometrisch-optische Größe Δ, die Längenabweichung, ist also für sich allein nicht geeignet, ein physikalisches Maß der sphärischen Aberration abzugeben, auch dann nicht, wenn man sie etwa in Prozenten der Brennweite ausdrückt. Denn aus Gleichung (5) sieht man ferner, daß bei Verkleinerung aller Dimensionen die Wellenaberration stets geringer, das Bild also besser wird. Hierin liegt mit ein Grund dafür, warum bei Mikroskopobjektiven so kleine Brennweiten üblich sind.

Während die Formel (5) besonders zur Untersuchung von Fernrohrobjektiven geeignet ist, wo man die Aberration als Funktion von q, d. h. von y^2 darzustellen pflegt, ist es in anderen Fällen bequemer, Winkelwerte einzuführen. Da es gleichgültig ist, welche Wellenfläche man aus der ganzen Schar auswählt, kann man augenscheinlich den Radius R der idealen Kugelwelle so groß werden lassen, daß $\varphi = u$ wird, oder doch wenigstens $d\varphi = du$. Läßt man dann diesen Winkel um ein kleines Stück wachsen, so wird das Bogenelement CC' gleich $(R - l) \cdot du$. Aus dem kleinen Dreieck mit CC' als Hypotenuse folgt dann:

$$\sin u = -\frac{dx}{(R-l)\,du}.$$

Setzt man diese Näherungsformel in Gleichung (1) ein, so hat man

$$\varDelta = \frac{dl}{\sin u\, du},$$

also [vgl. Anmerkung[1])]

$$l = \int_0^u \varDelta \sin u\, du. \tag{6}$$

Will man untersuchen, wie sich die Wellenaberrationen ändern, wenn man die senkrecht zur Achse gedachte Auffangeebene parallel mit sich selbst um ξ aus der Gaussschen Bildebene verschiebt, so sieht man aus der Abbildung, daß sich für den Paraxialstrahl der Lichtweg vom Scheitelpunkt der Kugelwelle bis zum Bezugspunkt um ξ verringert und für einen unter dem Winkel u die Achse schneidenden Zonenstrahl um $\xi \cos u$. Die Lichtwegaberration verringert sich also um $\xi(1 - \cos u)$, so daß man allgemein erhält

$$l = -\xi(1 - \cos u) + \int_0^u \varDelta \cdot \sin u\, du, \tag{7}$$

oder wenn wir noch als neue Variable die sog. „relative Fläche" (s. unten) $p = 1 - \cos u$ einführen:

$$l = -\xi p + \int_0^p \varDelta\, dp. \tag{7a}$$

Diese Form der Beziehung zwischen Wellenaberration, Strahlenaberration und Einstelldifferenz erweist sich als besonders wertvoll.

Hervorzuheben ist, daß die Wellenaberration nur linear von der Einstelldifferenz abhängt.

Die sphärische Aberration pflegt man in der rechnenden Optik als Potenzreihe darzustellen, wobei als Argument die Einfallshöhe der Strahlen auf der Objektseite, oder der Schnittwinkel mit der Achse auf der Bildseite oder Funktionen davon dienen. Wenn man eine solche Reihe in Gleichung (7a) für $\varDelta$ einführt und gliedweise integriert, so erhält man für die Wellenaberration ebenfalls eine Potenzreihe, wobei sich bei geeigneter Wahl des Parameters einfache Beziehungen zwischen den Koeffizienten der einzelnen Glieder beider Reihen ergeben. Nach dem Vorgang von RICHTER[2]) wollen wir die Schnittweitenaberration als Funktion der Größe $p = 1 - \cos u$ ausdrücken, also setzen

$$\varDelta = ap + bp^2 + cp^3 + \cdots$$

---

[1]) Um zu derselben Formel zu kommen genügt übrigens die Annahme, daß $l \ll R$ ist. Dann wird aus Gleichung (1) $\varDelta = -R\, dl/dx$ und $x = R \cdot \cos u$, also $dx = -R \cdot \sin u\, du$, woraus sofort $\varDelta = +dl/\sin u\, du$ entsteht.

[2]) R. RICHTER, ZS. f. Instrkde. Bd. 45, S. 1–15. 1925.

Dann entsteht

$$l = \text{konst.} - \xi p + \frac{a}{2} p^2 + \frac{b}{3} p^3 + \frac{c}{4} p^4 + \cdots \tag{8}$$

so daß sich also die Wellenaberration durch eine Reihe darstellt, deren Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ denselben Zahlenwert haben, wie er aus der trigonometrischen Durchrechnung oder der experimentellen Ausmessung der Strahlenaberration bekannt ist. Die Integrationskonstante kann von Fall zu Fall so bestimmt werden, daß entweder für den Scheitel oder den Rand oder einen Symmetriepunkt die Wellenaberration selbst verschwindet.

Dieser bisher ungebräuchliche Parameter p ist u. a. auch deshalb einer Entwicklung nach $\operatorname{arc} u$, $\sin u$ oder $\operatorname{tg} u$ vorzuziehen, weil $p = 1 - \cos u$ der Pfeilhöhe des Meridianbogens der Wellenfläche proportional, also noch für beliebig große Öffnungen brauchbar ist, auch wenn der Öffnungswinkel sich 90° nähert. Ferner ist die Fläche einer Kugelkalotte ihrer Höhe proportional, so daß p also auch ein Maß für den Inhalt der Wellenfläche abgibt. Wir wollen im folgenden daher diese neue Variable p als „relative Fläche" bezeichnen. Sie wird gleich Eins für ein Strahlenbündel vom halben Öffnungswinkel 90°, d. h. für die Halbkugel.

Wir betrachten als Beispiel ein System, dessen sphärische Aberration durch nur einen Koeffizienten gegeben ist $\Delta = a p$. Dann ist also die Wellenaberration bis auf eine Konstante nach Gleichung (8):

$$l = -\xi p + \frac{a}{2} p^2.$$

Wir nehmen weiter an, daß für $p = 0{,}02$, also für $u = 11° 29'$ (entsprechend dem recht großen Öffnungsverhältnis von etwa 1:2,5) die größte Schnittweitenaberration noch $\Delta_{\max} = +0{,}2$ mm beträgt. Dann wird die Aberrationskonstante $a = +10$ mm, und für den weiteren Verlauf der beiden Aberrationen ergibt sich folgende Tabelle:

Tabelle 1.

Öffnungswinkel	relative Fläche	Strahlenaberration	Wellenaberration für die Brennebene
$u =$ 2°	$p =$ 0,0006	$\Delta =$ 6 μ	$l =$ 1,9 $\mu\mu$
4°	0,0024	24 ,,	30 ,,
6°	0,0055	55 ,,	150 ,,
8°	0,0097	97 ,,	474 ,,
10°	0,0152	152 ,,	1154 ,,
11° 29′	0,02	200 ,,	2000 ,,

Geht die Einstellebene durch den Gaussschen Bildpunkt ($\xi = 0$), so weicht also die wirkliche Wellenfläche von der sie am Scheitel berührenden Kugel am Rande um $2\,\mu$, d. h. um etwa vier Wellenlängen ab. Das wäre praktisch gänzlich unmöglich.

Legt man jedoch die Einstellebene nicht durch den Gaussschen Bildpunkt, sondern in die Mitte der Kaustik, d. h. setzt man in unserm Beispiel $\xi = +0{,}1$ mm, so wird die Wellenaberration gegenüber der Schmiegungskugel außer für die Achse auch für den Randstrahl gleich Null. Dazwischen erreicht sie für $p = 0{,}01$ ein Maximum

$$l_{\max} = -0{,}1 \cdot 0{,}01 + \tfrac{10}{2} \cdot 10^{-4} = -500\,\mu\mu,$$

also nur etwa eine Wellenlänge. Bezieht man die Wellenaberration auf eine geeignete Referenzkugel, so erhält man in der Achse für die maximal abweichende

Zone $p = \frac{1}{2} p_{R\varepsilon}$ und am Rande je $\pm 0{,}25\ \mu$ Abweichung, etwa eine halbe Wellenlänge (Abb. 158b).

Legt man die Einstellebene nicht in die Mitte der Kaustik, sondern 0,02 mm davon entfernt [$\xi = 0{,}12$ mm bzw. 0,08 mm], so erhält man für die Kurve der Lichtwegaberrationen die Abb. 158a und 158c. Da die Intensität als Quadrat der Amplitude unabhängig vom Vorzeichen der Lichtwegaberration ist, müssen sich die Definitionshelligkeiten für diese beiden Einstellebenen gleich groß errechnen[1]). Der zuerst berechnete Fall 158b dagegen wird einen anderen Wert für die Definitionshelligkeit liefern. Verschiebt man also die Einstellebene über die Mitte der Kaustik hinweg, so wandert man durch einen Extremwert der Definitionshelligkeit hindurch. Da ein Minimum augenscheinlich nicht in Frage kommt, liegt hier ein Maximum vor. Die günstigste Einstellebene liegt also im Fall einer einkonstantigen Aberration in der Mitte der Kaustik. Dies Resultat steht in Widerspruch zu den Überlegungen der Strahlenoptik, nach der man zunächst versucht sein wird, die Spitze der Kaustik, als Ort einer Strahlenvereinigung von höherem Grade, als günstigste Einstellung zu betrachten. Andere Autoren fordern dafür den Ort des kleinsten Zerstreuungskreises, der aber bei $^3/_4\,\Delta$ liegt. Experimentelle Messungen haben das vorstehende Resultat der Wellentheorie bisher nicht bestätigen können. FLÜGGE[2]), der neuerdings eine wertvolle Untersuchung über diese Frage angestellt hat, findet für das Optimum weder $0{,}5\,\Delta$, noch $0{,}75\,\Delta$, sondern $0{,}62\,\Delta$. Die Abweichung von der theoretischen Erwartung liegt vermutlich daran, daß die Aberration der untersuchten Systeme doch in Wirklichkeit anders war als er voraussetzte.

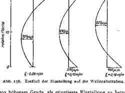


Abb. 158. Einfluß der Einstellung auf die Wellenaberration.

Jedenfalls sieht man, wie eine ganz geringe Veränderung der Einstellung die Wellenaberration und damit die Bildgüte ganz außerordentlich beeinflußt.

Als Einstelldifferenzen kann man auch die Farbfehler eines Objektives auffassen. Denn die Kaustiken für die verschiedenen Farben fallen nicht zusammen, so daß eine bestimmte Einstellebene, die für eine Farbe die günstigste

---

[1]) Diese Symmetrie gegenüber der durch die Mitte der Kaustik gelegten Ebene besteht auch außerhalb der Achse, aber nur für geringe Beträge von sphärischer Abweichung und falscher Einstellung. Bei größeren Beträgen tritt eine Unsymmetrie auf, die rein empirisch oft benutzt wird, um den Sinn der Aberration zu prüfen, z. B. SIEDENTOPF, ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 25, S. 277ff. 1908.

[2]) JOH. FLÜGGE, Über die Verundeutlichung des Bildes photographischer Systeme durch sphärische Aberration. Berl. Dissert. 1926; vgl. auch ZS. f. Instrkde. Bd. 46, S. 333—354 u. 389—415. 1926.

Lage innerhalb der Kaustik hat, für die anderen Farben eine ungünstige Lage haben wird. Für letztere werden also die Wellenaberrationen größer als für die erste Farbe, ihre Definitionshelligkeiten daher geringer sein. In dem vom Auge aufgefaßten Gesamteindruck sind dann diese Farben schwächer als im Objekt vertreten. Das Bild erscheint gefärbt.

Wenn die Kurve der Schnittweitenaberrationen umbiegt, also durch zwei Koeffizienten mit verschiedenen Vorzeichen dargestellt wird, so daß etwa der Randstrahl dieselbe Schnittweite wie der Achsenstrahl haben möge, so erhält die Kurve der Wellenaberrationen einen Wendepunkt. Dabei wird, wenn wieder, wie im obigen Beispiel, die größte Schnittweitenaberration 0,2 mm (in der „Zone") beträgt, die größte Wellenaberration wie vorhin eine halbe Wellenlänge groß, so daß man erwarten mußte, daß diese Art der Korrektion keinen prinzipiellen Vorteil bietet, falls es nämlich allein auf das Maximum der Wellenabweichung ankäme. In einer berühmten, oft zitierten Arbeit von RAYLEIGH[1]) findet sich zwar berechnet, daß für einen größten Gangunterschied von $\frac{1}{8}\lambda$ die Intensität auf 94,64%, bei $\frac{1}{4}\lambda$ auf 80,03% und bei $\frac{1}{2}\lambda$ auf 39,47% sinkt. Er selbst schloß daraus und es findet sich in mehreren einschlägigen Lehrbüchern wiederholt, daß die größte Lichtwegdifferenz nicht mehr als etwa $\frac{1}{4}\lambda$ betragen dürfe. Doch ist dies Resultat keineswegs allgemein gültig, da sich die Zahlen von Lord RAYLEIGH nicht auf die günstigste Einstellungsebene, sondern auf die GAUSSsche Bildebene beziehen und nur auf Aberrationen, die der vierten Potenz der linearen Öffnung proportional sind.

Für das oben behandelte zweite Beispiel hat RICHTER durch Auswertung der Integrale mittels der SIMPSONschen Regel gefunden, daß in diesem Falle die Definitionshelligkeit mehr als dreimal so groß ist wie im ersten Beispiel, trotzdem die maximalen Lichtwegaberrationen beidemal gleich groß sind.

Wenn bereits die Kurve der Schnittweitenaberrationen einen Wendepunkt aufweist (drei Koeffizienten, von denen zwei verschiedenes Vorzeichen haben), so findet man für dieselben Zahlenwerte von „relativer Fläche" (Öffnung) und maximaler Längenabweichung wie bisher, daß die größte Wellenaberration nur etwa $^1/_4$ Wellenlänge beträgt. Da aber die Kurve der Lichtwegabweichungen dann im allgemeinen zwei Wendepunkte aufweist, wird der mittlere Wert der Lichtwegaberrationen noch weit geringer, weniger als $^1/_8$ Wellenlänge.

Jedenfalls sieht man, daß der Wert der größten zulässigen Schnittweitenaberration, d. h. die Zahl, die der rechnende Optiker gerne wissen möchte, sehr wesentlich von der Form der Aberrationskurve abhängt.

Allgemein erhält man für eine einkonstantige Aberration aus Gleichung (8) als größte Wellenaberration

$$l_{\max} = -\xi^2/2a$$

oder auch

$$l_{\max} = -\frac{a}{8}\cdot p_{Rd}^2 \equiv -\frac{1}{8}\,\Delta_{\max}\cdot p_{Rd},$$

wenn man die günstigste Einstellebene, die für diesen Fall $\xi = \frac{1}{2}\,p_{Rd}$ ist, zugrunde legt und berücksichtigt, daß $\Delta_{\max} = a\,p_{Rd}$ ist. Setzt man nun $l_{\max} = \varkappa\lambda$, wo $\varkappa$ ein echter Bruch ist, so wird

$$\Delta_{\max} = \frac{8\varkappa\lambda}{p_{Rd}}. \tag{9}$$

[1]) Lord RAYLEIGH, Wave Theory of Light. Encyclopaedia Britannica Bd. 24, § 13, vgl. auch Scient. Pap. Bd. 1, S. 100. Für zylindrische Wellen (rechteckige Öffnungen) hat RAYLEIGH dieselbe Rechnung schon früher ausgeführt, und zwar für Aberrationen, die mit der dritten Potenz der Öffnungsbreite gehen. Die entsprechenden Zahlen sind 95,76%, 84,11% und 32,55%. Phil. Mag. Bd. 8, S. 403. 1879; vgl. auch Scient. Pap. Bd. 1, S. 433.

da es nur auf Absolutwerte ankommt. Ob man die Zahl $\varkappa$ als Konstante annehmen kann, steht noch nicht ganz fest. Aus Untersuchungen von JENTZSCH[1]) scheint hervorzugehen, daß sie für das menschliche Auge von der Wellenlänge in der Weise abhängt, daß wir in Blau eine etwas größere Abweichung zulassen, als im Gelb. Doch stimmt im ganzen der RAYLEIGHsche Wert $\varkappa = \frac{1}{4}$ nicht schlecht mit der Erfahrung. Für den Fall, daß die wirkliche Wellenlänge ganz auf einer Seite der idealen Kugelfläche liegt, kann man wohl unbedenklich $\varkappa = \frac{1}{2}$ setzen. Wir erhalten dann

$$\Delta_{max} = \frac{2\lambda}{p_{Re}} = \frac{2\lambda}{1 - \cos u_{max}}. \tag{9a}$$

Daraus ergibt sich für die Grenzwerte der zulässigen Strahlenaberrationen bei subjektivem Gebrauche folgende Tabelle:

Tabelle 2.

Rel. Fläche	Öffnungswinkel	Apertur	Öffnungsverhältnis	Maximal zulässige Aberration für $\lambda = 600\ \mu\mu$	für $\lambda = 400\ \mu\mu$
$p =$ 0,0001	$u =$ 0° 49′	0,014	1:35	12 mm	8 mm
0,0002	1° 9′	0,020	1:25	6 „	4 „
0,0005	1° 49′	0,032	1:16	2,4 „	1,6 „
0,001	2° 34′	0,045	1:11,4	1,2 „	0,8 „
0,002	3° 37′	0,063	1: 7,9	0,6 „	0,4 „
0,005	5° 44′	0,100	1: 5	0,24 „	0,16 „
0,01	8° 7′	0,141	1: 3,5	0,12 „	0,08 „
0,02	11° 29′	0,199	1: 2,5	0,06 „	0,04 „
0,03	14° 4′	0,243	1: 2,0	0,04 „	0,027 „
0,04	16° 16′	0,28	1: 1,7	0,03 „	0,02 „

Diese Zahlenwerte sind unabhängig vom Ausführungsmaßstab des optischen Systems. Wenn also durch Verdopplung aller Dimensionen die Brennweite verdoppelt wird, wobei natürlich das Öffnungsverhältnis und alle Winkelwerte unverändert bleiben, so wird das Bild dadurch wesentlich verschlechtert werden, weil dann die Absolutwerte der Aberrationen die zulässigen Grenzen überschreiten können. Besonders hervorgehoben sei noch, was allerdings schon aus der Anschauung unmittelbar folgt, daß die zulässigen Aberrationen direkt proportional zur Wellenlänge sind. Bei der rechnerischen Konstruktion eines Objektivs hat man also die Strahlenvereinigung im Blau und Violett viel sorgsamer zu behandeln als die im Rot. Im ultraroten Strahlengebiet werden augenscheinlich nach Gleichung (9) und (9a) die zulässigen Strahlenaberrationen wesentlich größer als im Sichtbaren. Wie JENTZSCH[2]) näher ausgeführt hat, kann man z. B. bei Spiegelspektrometern deshalb für ultrarote Messungen sehr viel größere Spiegel benutzen, als bei visueller Prüfung richtig erscheint, und auf diese Weise die Intensität beträchtlich steigern.

Auch für die Schärfe der Einstellung erhält man nach JENTZSCH[3]) aus den entwickelten Ausdrücken für die Wellenaberration eine einfache Beziehung. Für ein ideales Objektiv ohne Aberration wird nämlich Gleichung (8) $l = -\xi p$. Wenn wir nun $l_{max} = \pm\frac{1}{4}\lambda$ annehmen, wird daher die zulässige Verschiebung der Einstellebene[4]) aus ihrer günstigsten Lage

$$\xi = \pm\frac{\lambda}{4p} \tag{10}$$

[1]) F. JENTZSCH, ZS. f. techn. Phys. Bd. 7, S. 310–312. 1926.

[2]) F. JENTZSCH, ZS. f. Phys. Bd. 44. 1927.

[3]) F. JENTZSCH, ZS. f. wiss. Photogr. Bd. 26. 1927.

[4]) Eine andere Ableitung, die aber im wesentlichen zu denselben Resultaten führt, gab Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. Bd. 20, S. 354–358. 1885, vgl. Scient. Pap. Bd. 2, S. 430 bis 432.

oder für kleine Öffnungswinkel

$$\xi = \pm \frac{\lambda}{2 u^2}.$$

Daraus ergibt sich folgende

Tabelle 3.

Relative Fläche	Öffnungsverhältnis bzw. Apertur	Einstellungsschärfe für $\lambda = 600\ \mu\mu$	Einstellungsschärfe für $\lambda = 400\ \mu\mu$
$p = 0{,}0001$	1 : 35	$\xi = \pm 1{,}5$ mm	$\xi = \pm 1{,}0$ mm
0,001	1 : 11,4	0,15	0,1
0,01	1 : 3,5 bzw. 0,14	0,015	0,01
0,05	1 : 1,5 0,31	0,003	0,002
0,1	0,44	0,0015	0,001
0,5	0,87	0,0003	0,0002

Für rechteckige Öffnungen kann man nach Anmerkung 1 auf Seite 279 und, wenn es sich nicht um größte Schärfe sondern nur um Erkennbarkeit der Objekte handelt, auch allgemein für $\varkappa$ statt $\frac{1}{4}$ wohl $\frac{1}{2}$ setzen. Dann sind die Zahlen der Tabelle zu verdoppeln.

Nach Gleichung (10) ist die Einstellschärfe unabhängig von der Brennweite, so daß ihr absoluter Wert in Millimeter derselbe ist für ein langes astronomisches Fernrohr und für ein kurzbrennweitiges Photoobjektiv, wenn das Öffnungsverhältnis beidemal dasselbe ist. Je größer der Öffnungswinkel, um so genauer kann bzw. muß man die Einstellung vornehmen. Bei großen Aperturen wird der Raum, innerhalb dessen die Unschärfe des Bildes noch zu ertragen ist, so schmal, daß schon die Dicke einer gewöhnlichen photographischen Schicht, die etwa 10 bis 20 μ beträgt, zu groß ist. Wenn die Mitte der photographischen Schicht die günstigste Lage hat, kann dann etwa die Oberfläche in eine Lage kommen, wo die Wellenaberrationen schon von der Größenordnung einer Wellenlänge sind. Bereits bei den sehr lichtstarken Kinoobjektiven spielt das eine Rolle. Noch mehr ist das der Fall, wenn z. B. mit einem umgekehrt benutzten Mikroskopobjektiv Verkleinerungen hergestellt werden sollen[1]). In solchen Fällen muß man besonders dünne Emulsionen, sog. LIPPMANNsche oder TAUPENOTsche Schichten, die nur wenige Wellenlängen dick sind, verwenden, um eine Verschleierung zu vermeiden, die von den Praktikern oft auf andere als die obigen rein wellenoptischen Gründe geschoben wird. Auch kann man die Absorption innerhalb der Schicht durch künstliche Färbung so verstärken, daß in der Tiefe keine photochemische Wirkung mehr stattfinden kann.

Hervorzuheben ist noch, daß sich aus unseren Formeln die Einstellungsschärfe als unabhängig vom Aberrationszustande ergibt, wenigstens für Achsenpunkte. Es ist das eine direkte Folge davon, daß, wie schon auf Seite 276 bemerkt, die Wellenaberration nur linear von der Einstelldifferenz abhängt.

Wenn die wirkliche Wellenfläche die ideale Kugelwelle einmal oder mehrmals schneidet (vgl. Abb. 161), so darf nach den Ausführungen auf Seite 279 die Größe $\varkappa$ nicht mehr als Konstante angesehen werden, sondern man muß dann auf die Definitionshelligkeit zurückgehen. Wenigstens im Prinzip eröffnet sich also hier ein möglicher Weg, um die Einstellschärfe und damit auch die „Raumtiefe" eines optischen Systems konstruktiv zu beeinflussen. Die praktischen Ergebnisse in dieser Richtung sind aber bisher noch ziemlich problematisch.

[1]) Lt. mündlicher Mitteilung von Prof. W. SCHEFFER-Berlin im Kriege zu Spionagezwecken benutzt.

Indem man die aus Gleichung (10) berechnete Einstellungsschärfe nach den elementaren Formeln der geometrischen Optik in den Objektraum projiziert, erhält man ohne weiteres auch für die „Tiefe der deutlichen Abbildung", die sog. „Fokustiefe", absolut geltende Werte. Auch diese bei den Photographen eine so große Rolle spielende Größe läßt sich also rein wellenoptisch ableiten. Ein Vergleich der so berechneten Zahlen mit den Tabellen der Praktiker ergibt, daß die Schärfe von Photogrammen fast nie durch die Beugung, sondern meist schon durch die Eigenschaften der empfindlichen Schicht, wie Korngröße usw., begrenzt ist.

Bei der Untersuchung der Wellenaberration haben wir bisher angenommen, daß entweder ein geschlossener Ausdruck für die Strahlenaberration vorliege, oder doch die Resulatte der trigonometrischen Durchrechnung in einer Potenzreihe zusammengefaßt sind. Das ist aber durchaus nicht nötig. Sondern abgesehen von graphischen Methoden und mechanischer Quadratur kann man auch die Wegdifferenz, die irgendein beliebiger Strahl gegenüber einem anderen, etwa gegenüber dem Paraxialstrahl hat, sehr leicht unmittelbar berechnen. Schon FRESNEL[1]) legte sich die Frage vor, inwieweit etwa die auf einer Fläche aufgefangenen Beugungsstreifen verändert werden, wenn man sie subjektiv durch eine Lupe beobachtet. Er erhielt bei dieser Untersuchung als Wegunterschied eines mit dem Einfallswinkel α auf eine begrenzende Kugelfläche vom Radius r auffallenden achsenparallelen Strahles gegenüber dem Achsenstrahl

$$W = n r\left[1 - \frac{n-1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \sqrt{1-\sin^2\alpha}} - \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{n}\right] \qquad (11)$$

wo n der Brechungsindex des zweiten Mediums ist. Unter Vernachlässigung höherer Ordnungen geht das über in

$$W = r \cdot \frac{n-1}{8n^2} \cdot \sin^4\alpha\,. \qquad (11a)$$

FRESNEL zeigte, daß auch diese angenäherte Formel überraschend weit gilt. Ähnliche Ausdrücke haben noch KERBER[2]) und besonders CONRADY[3]) abgeleitet, wohl ohne die FRESNELsche Arbeit zu kennen.

Es ist übrigens leicht, über FRESNEL wesentlich hinauszugehen und weit allgemeinere Beziehungen aufzustellen. Am einfachsten dürfte die nachstehende Ableitung sein, die noch etwas weiter als bei CONRADY durchgeführt ist.

Sei in Abb. 159 SA die brechende Kugelfläche mit dem Radius r um den Mittelpunkt M. Ein aberrationsfreies Strahlenbündel konvergiere nach dem Punkt P_1. Ein Strahl davon sei BAP_1, der die Achse unter dem Winkel φ_1 schneidet. Nach der Brechung (Einfallswinkel α, Brechungswinkel β) möge er die Achse im Punkte P_2 unter dem Winkel φ_2 schneiden. $SP_1 = s_1$ und $SP_2 = s_2$ sind die beiden Schnittweiten auf der Achse vor und nach der Brechung. Ferner sei noch n_1 der Brechungsindex des vor der Kugelfläche, n_2 derjenige des dahinterliegenden Mediums und ψ der Winkel, den der nach dem Einfallspunkte A des Strahles gezogene Kugelradius mit der Achse bildet. Dann ist der um P_1 geschlagene Kreisbogen SB ein Hauptschnitt der kugelförmigen Wellenfläche vor der Brechung und der um P_2 geschlagene Kreis AC die zunächst ebenfalls als Kugel angenommene Wellenfläche nach der Brechung. Wenn wir nun von dem Bogen SB als Ort gleicher Phase aus rechnen, so hat der Randstrahl noch

[1]) A. FRESNEL, Ann. chim. phys. Bd. 1, S. 271–273. 1816; vgl. auch Ostwalds Klassiker Bd. 215, S. 27–29. 1926.

[2]) A. KERBER, Beiträge zur Dioptrik, Leipzig, im Selbstverlag 1895. H. 1, S. 11–14.

[3]) A. E. CONRADY, Month. Not. Bd. 65, S. 594–608. 1905.

die Strecke $BA = p$ im ersten Medium zurückzulegen, wenn der Achsenstrahl bereits in das zweite Medium eingetreten ist. Erst wenn er dann die Strecke $SC = q$ durchlaufen hat, tritt auch der Randstrahl in das zweite Medium ein. Da nun nach der Zeichnung $AP_2 = CP_2$ ist, so ist demnach die Lichtwegdifferenz zwischen beiden Strahlen:

$$W = n_1 p - n_2 q. \tag{12}$$

Positives W bedeutet also, daß der Randstrahl einen längeren Lichtweg bis zur Achse hat als der paraxiale Strahl.

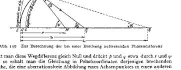


Abb. 159. Zur Berechnung der bei einer Brechung auftretenden Phasendifferenz.

Setzt man diese Wegdifferenz gleich Null und drückt p und q etwa durch r und ψ aus, so erhält man die Gleichung in Polarkoordinaten derjenigen brechenden Fläche, die eine aberrationsfreie Abbildung eines Achsenpunktes in einen anderen bewirkt, d. h. bekanntlich die Gleichung eines CARTESschen Ovals. Ist die brechende Fläche eine Kugel, so erhält man für W immer endliche, positive oder negative Werte, außer falls s_1 der Bedingung $s_1 = r\frac{n_1 + n_2}{n_1}$ genügt. Dann wird nämlich $s_2 = r\frac{n_1 + n_2}{n_2}$ und s_1 und s_2 bestimmen die beiden aplanatischen Punkte der Kugel (vgl. Artikel über geometrische Optik).

Für den allgemeinen Fall kann man folgende Umformungen vornehmen. Sei D der Fußpunkt des von A auf die Achse gefallten Lotes und A' der Schnittpunkt des um P_1 geschlagenen, durch A gehenden Kreises mit der Achse, so ist

$$p = SA' = SD - A'D$$

oder, da SAM und $A'AP_1$ gleichschenklige Dreiecke sind:

$$p = r\sin\psi\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right) = 2r\sin\frac{\psi}{2}\,\frac{\sin\frac{\psi - \varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2}}$$

und da $\psi = \alpha + \varphi_1$:

$$p = r\cdot\sin\frac{\alpha + \varphi_1}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Entsprechend

$$q = r\cdot\sin\frac{\alpha + \varphi_1}{2}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}},$$

so daß sich für die Lichtwegdifferenz ergibt

$$W = r\sin\frac{\alpha + \varphi_1}{2}\left[\frac{n_1\sin\alpha}{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{n_2\sin\beta}{\cos\frac{\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}\right].$$

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes wird daraus:

$$W = \frac{2 n_1 r_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}} \cdot \left[\cos\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right].$$

Unter Berücksichtigung von $\alpha - \beta = \varphi_2 - \varphi_1$ ergeben nun einige einfache Umformungen

$$\cos\frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\beta - \varphi_1}{2},$$

so daß für die Lichtwegdifferenz endlich kommt

$$W = 2 n_1 r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha + \varphi_1}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}. \tag{13}$$

Nennt man h die Einfallshöhe eines Strahles, so kann man Gleichung (13) auch schreiben

$$W = n_1 h \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \varphi_1}{2}}{\cos\frac{\alpha + \varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}, \tag{13a}$$

oder, wenn man die Schnittpunkte s als gegeben ansieht, d. h. den Abstand des Konvergenzpunktes des einfallenden Strahlenbündels vom Scheitel der brechenden Fläche

$$W = 2 n_1 s_1 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \varphi_1}{2}}{\cos\frac{\alpha - \varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}. \tag{13b}$$

Fallen parallele Strahlen, d. h. fällt eine ebene Welle auf eine Kugelfläche auf, so wird die Lichtwegdifferenz

$$W = 2 n_1 r \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} \tag{14}$$

bzw.

$$W = n_1 h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} \tag{14a}$$

wie sich aus Gleichung (13) bzw. (13a) sofort ergibt, wenn man $\varphi_1 = 0$ setzt. Die FRESNELsche Form [Gleichung (11)] kann man in die hier gegebene, für Rechnungen wohl bequemere leicht überführen, wenn man die Identität

$$\frac{n - 1}{n\cos\beta - \cos\alpha} \equiv \frac{n\cos\beta + \cos\alpha}{n + 1}$$

benutzt.

Für die Brechung an einer Ebene ergibt sich in ganz ähnlicher Weise als Lichtwegdifferenz für eine nach s zielende Kugelwelle

$$W = n_1 s_1 \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}. \tag{15}$$

Für kleine Winkel findet man für parallele Strahlen an einer Kugelfläche

$$W = \frac{r}{8} \cdot \frac{n_1^2}{n_2^2}(n_2 - n_1) \cdot \alpha^4 \equiv \frac{1}{8}\frac{n_1^2}{n_2^2}(n_2 - n_1) \cdot \frac{h^4}{r^3}, \tag{14}$$

was mit der von FRESNEL gegebenen Gleichung (11a) übereinstimmt, und für eine ebene Fläche bei konvergenten Strahlen:

$$W = \frac{h}{8}\frac{n_1}{n_2^2}(n_2^2 - n_1^2) \cdot \alpha^3 \equiv \frac{s_1}{8} \cdot \frac{n_1(n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2} \cdot \alpha^4. \tag{15a}$$

Diese Formeln (13) bis (15) dürften der einfachste Ausdruck sein, der sich für die bei einer Brechung auftretende Wegdifferenz aufstellen läßt. Für ein System aus n brechenden Flächen ergibt sich natürlich

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n.$$

Da alle vorkommenden Größen bei der Durchrechnung ohnehin berechnet werden müssen und sich W als Produkt (nicht als Summe) darstellt, also für die numerische Berechnung besonders geeignet ist, ist es ein leichtes, im Laufe der strahlenmäßigen Durchrechnung nunmehr auch die Gangdifferenz der Wellenoptik sofort als Nebenresultat mitzufinden. Die Diskussion dieser Ausdrücke, die tiefe Einblicke in den Vorgang der „Korrektion", d. h. der gegenseitigen teilweisen Kompensation von „Fehlern" der einen Fläche durch solche der anderen vermittelt, gehört in die Artikel über geometrische Optik.

172. Berechnung und Konstruktion von Wellenflächen. Die Wichtigkeit der Wellenflächen für die Untersuchung der Beugungsfigur ist schon 1838 von G. B. AIRY[1]) erkannt worden. Er berechnete als erster ein Beispiel, in dem die Wellenfläche von der Kugelform abweicht, und zwar den Fall, daß Lichtstrahlen in eine Kugel eindringen und sie nach einer Reflexion an der Innenseite und einer weiteren Brechung wieder verlassen. Er konnte so die vollständige Erscheinung des Regenbogens, insbesondere die sog. sekundären Bögen, erklären. Doch fanden seine Erkenntnisse nicht die genügende Verbreitung, so daß erst am Ende des 19. Jahrhunderts neue Untersuchungen einsetzten.

Diese kann man in 4 Gruppen einteilen:

1. Es ist versucht worden, die wirkliche Wellenfläche durch solche Schmiegungsformen approximativ zu ersetzen, die sich rechnerisch abhandeln lassen.

2. In gewissen einfachen Fällen kann man die Wellenfläche direkt analytisch finden.

3. Man kann die Wellenfläche oder doch ebene Schnitte derselben durch ein graphisches Verfahren konstruieren.

4. Man kann die meist aus der trigonometrischen Durchrechnung bekannten geometrischen Strahlenaberrationen zur Aufstellung einer Gleichung für die Wellenfläche benutzen, also einen verwandten Weg, wie den in voriger Ziffer behandelten, einschlagen.

Allgemein ist noch zu erwähnen, daß sich alle diese Untersuchungen nur auf isotrope Medien beziehen. Für anisotrope Materialien ist bekanntlich (vgl. Bd. XX, Kristalloptik) auch schon für die einfache Ausbreitung homozentrischer Strahlen von einer kugelförmigen Wellenfläche keine Rede, sondern es bestehen zwei verschiedene Wellenflächen nebeneinander. Da die optisch wichtigen Materialien (Kalkspat, Quarz, Turmalin) einachsig sind, genügt es, den Fall zu betrachten, daß die Wellenfläche aus einer Kugel für die ordentlichen und einem Rotationsellipsoid für die außerordentlichen Strahlen besteht. Kann man auch von Rotationspolarisation absehen, so berühren sich beide Wellenflächen in zwei gegenüberliegenden Punkten, die durch die Lage der optischen Achse bestimmt sind.

Wir haben also im Sinne der anfänglichen Ausführungen der Ziffer 171 eine deformierte Wellenfläche, ohne daß der homozentrische Strahlenverlauf dadurch geändert wird. Übrigens ist die Gültigkeit des FERMATschen Satzes auch für die Lichtbewegung in doppeltbrechenden Medien bewiesen[2]). Wenn also in der zu betrachtenden optischen Anordnung doppeltbrechende Medien vorkommen, so wird, auch wenn die Beobachtung selbst in einem isotropen Medium vorgenommen wird, — wie es letzten Endes wohl ausnahmslos der Fall sein wird, — doch die Wellenfläche zwar oft nur einschalig sein, aber im allgemeinen in zwei zueinander senkrechten Richtungen verschiedene Krümmungen aufweisen. Es zeigt sich dann also eine Art von Astigmatismus, der zwar mit

[1]) G. B. AIRY, Cambr. Phil. Trans. Bd. 6, S. 379—402; Bd. 8, S. 595—600. 1838. Deutsche Übersetzung in Pogg. Ann. Erg.-Bd. (51a), S. 232—249. 1842.

[2]) H. PITSCH, Wiener Ber. Bd. 89, S. 459—469. 1889.

dem dioptrisch erzeugten große Ähnlichkeit hat, aber doch nicht ganz dasselbe ist. Denn denkt man sich ein doppeltbrechendes Medium durch eine Oberfläche begrenzt, die genau die Form der außerordentlichen Wellenfläche besitzt, die von einem im Innern des doppeltbrechenden Mediums liegenden Erregungszentrum ausgeht, also dem Teil eines Rotationsellipsoids, so würde zwar die betreffende Wellenfläche beim Übergang in das isotrope Medium an keiner einzigen Stelle eine Änderung erfahren, wohl aber würde sie nach dem Übergang nicht mehr einem homozentrischen Strahlenbündel entsprechen. Es tritt also Astigmatismus auf, ohne daß eine Deformation der Wellenfläche durch Brechung stattgefunden hätte. Das liegt daran, daß im Innern des Kristalls die Strahlen nicht senkrecht auf der Wellenfläche stehen, wogegen sie nach dem Übergang in ein isotropes Medium sofort mit den Wellennormalen identisch werden.

Es ist wenig bekannt, daß man z. B. mit Polarisationsprismen aus diesem Grunde fast stets unscharfe Bilder erhält. Hingewiesen darauf haben zuerst TISSOT und PELLIN[1]), die aber noch keinen klaren Einblick in die Natur des Fehlers hatten. Ausführlich behandelt ist er von BECHER[2]). Würde man Polarisationsprismen verwenden, die nicht, wie jetzt meist üblich, den ordentlichen, sondern den außerordentlichen Strahl durch Totalreflexion oder auf andere Weise beseitigen, so würde ein solcher astigmatischer Fehler natürlich nicht auftreten können. Eine andere Abhilfe ist gegeben, wenn man die Polarisationsprismen und ebenso natürlich auch alle anderen Kristallplatten, z. B. Kompensatoren usw., an einer Stelle in den Strahlengang einschaltet, wo er parallel ist und, falls nötig, eben zu diesem Zwecke eine solche Stelle erst schafft. Denn ebene Wellenflächen werden beim Eintritt in ein doppeltbrechendes Medium zwar ebenfalls in zwei Scharen zerfallen, dasselbe aber wieder als ebene Wellen verlassen. JENTZSCH[3]) ordnet deshalb alle Polarisationsprismen zwischen zwei Deckgläschen an, von denen das eine als positive, das andere als negative Linse so ausgebildet ist, daß zwischen ihnen der Strahlenverlauf parallel, die Lage der Konvergenz- bzw. Divergenzpunkte aber durch Ein- und Ausschalten des Polarisationsapparates nicht verändert wird. Das ist immer möglich, wenn auch die Vergrößerung dadurch etwas verändert wird. Seitdem werden von fast allen optischen Firmen wenigstens die Nicols derart konstruiert. Bisweilen werden auch bereits die Endflächen des Kalkspates selbst entsprechend kugelförmig geschliffen[4]).

1. Von Arbeiten der ersten Gruppe ist vor allem eine Untersuchung Lord RAYLEIGHS[5]) zu erwähnen.

Er setzte für die ideale Kugelwelle

$$(x-f)^2 + y^2 + z^2 = f^2,$$

indem er sich auf die xy-Ebene beschränkt und beim zweiten Glied abbricht:

$$x = f - \sqrt{f^2 - y^2} = \frac{y^2}{2f} + \frac{1}{8}\frac{y^4}{f^3}.$$

Die wirkliche Wellenfläche ist dann dargestellt durch

$$x' = \frac{y^2}{2f} + \varkappa \frac{y^4}{f^3}. \tag{1}$$

[1]) C. TISSOT u. F. PELLIN, C. R. Bd. 145, S. 866—867. 1907; Journ. d. Phys. Bd. 7, S. 296. 1908.

[2]) S. BECHER, Zoolog. Jahrb. Bd. 38, S. 211—252. 1914; Ann. d. Phys. Bd. 47, S. 285 bis 364. 1915.

[3]) F. JENTZSCH, Anastigmatische Polarisationsvorrichtung. D. R. P. Nr. 296000 vom 9. April 1915. Eigentümer ist die Firma E. Leitz in Wetzlar.

[4]) A. EHRINGHAUS, Centralbl. f. Min. 1920, S. 175—182.

[5]) Lord RAYLEIGH, Investigations in optics (§ 4); Phil. Mag. Bd. 8, S. 403—411. 1879; Scientific Papers Bd. 1, S. 428—436.

wo $\varkappa$ die Größe für Aberration ausdrückt und von Lord RAYLEIGH als eine Konstante behandelt wurde.

Ihm folgte STREHL[1]), dem wir überhaupt die eingehendsten Untersuchungen über die Beugungsfigur in optischen Systemen verdanken. Er ersetzt die wirkliche Wellenfläche zunächst durch eine allgemeine Fläche zweiten Grades, entwickelt diese nach Potenzen von y und z und bricht dann bei höheren Gliedern ab, meist nach dem vierten Grade. Dann braucht man sich auch nicht auf die rotationssymmetrische Erscheinung der Aberration auf der Achse zu beschränken, sondern kann auch Astigmatismus und Koma behandeln. Für eine astigmatische Welle ergibt sich so ein elliptisches bzw. hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x, \tag{2}$$

wo p und q die beiden Bildweiten sind.

Für die Koma wählt STREHL als Gleichung der Wellenfläche

$$\frac{y^2 + z^2}{p} - \frac{2xy}{t} = 2x, \tag{3}$$

wo also der wagerechte ($y = 0$) Schnitt

$$\frac{z^2}{p} = 2x$$

eine Parabel vom Krümmungshalbmesser $\varrho = p$ und der senkrechte ($z = 0$) Schnitt

$$\frac{y^2}{p} - 2\frac{xy}{t} = 2x$$

eine Hyberbel ist.

Für die gewöhnliche Aberration auf der Achse wird die Wellenfläche ein Rotationsellipsoid, das gegeben ist durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}.$$

Der Krümmungsradius im Scheitelpunkt ist $f = c^2/a$. Führt man das ein und setzt noch $g = c/a$ und $\varrho^2 = y^2 + z^2$, so hat man

$$\varrho^2 + g^2 x^2 = 2fx.$$

Die von STREHL benutzte Ersetzungsfläche, die bei Entwicklung der Wurzel und Abbrechen nach dem zweiten Glied daraus entsteht, nämlich

$$x = \frac{\varrho^2}{2f} + \frac{g^2 \varrho^4}{8f^3}, \tag{4}$$

ist mit der RAYLEIGHschen Gleichung (1) identisch. Sie hat mit dem Ellipsoid eine sechspunktige Berührung.

2. Von Arbeiten der zweiten Gruppe, also der direkten analytischen Berechnung der Wellenfläche in einfachen Fällen, sind zunächst zahlreiche Untersuchungen des ebenen Problems zu erwähnen. Meist hat man sich

[1]) Von STREHLS zahlreichen, weit verstreuten Arbeiten seien hier nur die genannt, die sich an allgemein zugänglicher Stelle befinden: K. STREHL, Theorie des Fernrohrs, I. Teil. 135 Seiten. Leipzig: J. A. Barth 1894. Der zweite Teil ist nicht erschienen; ZS. f. Instrkde. Bd. 14, S. 206—209. 1894; Bd. 15, S. 362—370. 1895; Bd. 16, S. 257—263. 1896; Bd. 17, S. 50—54, 77—81, 165—171, 301—314. 1897; Bd. 18, S. 43—49, 301—317. 1898; Bd. 19, S. 325—335, 364—371. 1899; Bd. 20, S. 266—299. 1900; Bd. 21, S. 10—11. 1901; Bd. 22, S. 213—217. 1902; Bd. 23, S. 6—8, 210—214, 305. 1903; Bd. 24, S. 322—326. 1904; Bd. 25, S. 3—10, 199—205. 1905; Bd. 47, S. 154—155, 297—300. 1927; Astron. Nachr. Bd. 151, S. 41—42. 1899; Bd. 158, S. 89—90, 91—94. 1902; Bd. 165, S. 51—54. 1904; Bd. 193, S. 389—394. 1912; ZS. f. wiss. Mikr. Bd. 17, S. 425—432. 1901; Bd. 22, S. 1—10, 192—193. 1905.

aber als Aufgabe nicht eigentlich die Darstellung der Wellenfläche oder vielmehr der Wellenlinie, sondern die der Brennlinie gesetzt. In der Tat läßt das auch auf dasselbe hinaus. Denn die Kaustik ist einerseits die Enveloppe der einzelnen Strahlen, also der geometrische Ort der Schnittpunkte benachbarter Strahlen. Andererseits ist sie, da die Lichtstrahlen selbst die Normalen der Wellenfläche sind, augenscheinlich der Ort der Krümmungsmittelpunkte, d. h. die Evolute der ganzen Wellenflächenschar. Sämtliche Wellenflächen sind die Evolventen der Kaustik (vgl. Abb. 160 und 162).

Daraus folgt sofort ein einfaches Konstruktionsverfahren. Wird ein um die Evolute (hier also die Kaustik) gelegter biegsamer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt jeder Punkt auf ihm eine Evolvente (hier also eine Wellenlinie).

Bezeichnen wir mit d den Abstand von der Spitze der Kaustik (d. h. dem GAUSSschen Bildpunkt) bis zu dem Schnittpunkt einer Wellenlinie mit der Achse, und sei $s \equiv \widehat{CB}$ die Bogenlänge der Kaustik von der Spitze bis zu einem ihrer Punkte B, so ist (vgl. Abb. 160) die Weglänge $\overline{AB}$ eines in B die Kaustik tangierenden und die Achse unter dem Winkel u schneidenden Strahles von der Wellenlinie bis zur Kaustik gleich $d - s$. Wir haben also sofort für die Koordinaten ξ, η der Wellenlinie und x, y der Kaustik die einfache Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= (d - s) \cdot \cos u\,, \\ \eta - y &= (d - s) \cdot \sin u\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

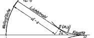


Abb. 160. Zusammenhang von Kaustik und Wellenfläche.

Ist also die Gleichung der Kaustik bekannt und dieselbe rektifizierbar, so kann man nach (5) sofort auch eine Gleichung der Wellenlinienschar aufstellen. d ist dann der bewegliche Parameter.

Diese physikalische Beziehung hat man erst verhältnismäßig spät erkannt. Nach BÖSSER[1]), der eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der kaustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwicklung gegeben hat, ist das ein Verdienst von STURM[2]) und QUETELET[3]). Für die reinen Mathematiker dagegen sind Untersuchungen der Brennkurven anscheinend früher ein sehr beliebtes Übungsfeld gewesen. Es existiert eine große Literatur über die „Katakaustiken", die Brennlinien nach einer Spiegelung, und eine fast ebenso umfangreiche über die „Diakaustiken", die Brennlinien nach einer Brechung[4]). Den Höhepunkt in dieser rein mathematischen Theorie der Brennlinien bildet

[1]) F. BÖSSER, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 15, S. 170—206. 1870.

[2]) J. C. STURM, Ann. de math. Bd. 15, S. 205. 1824; Journ. de Liouville Bd. 3, S. 357—384. 1838.

[3]) A. QUETELET, Nouv. Mem. de Bruxelles Bd. 3, S. 15. 1822; Bd. 4, S. 19. 1827; und Anhang zur französischen Übersetzung von J. HERSCHEL, Traité de la lumière Bd. 2, S. 380. 1833.

[4]) Eine ältere Darstellung mit vielen Beispielen findet sich in G. S. KLÜGEL, Mathem. Wörterbuch Bd. 1. 1803, Art. „Brennlinie" S. 344, „Catacaustica" S. 400, „Diacaustica" S. 752, sowie bei J. A. GRUNERT, Suppl. zu Klügels Mathem. Wörterbuch Bd. 1, Leipzig 1833, Art. „Caustische Flächen und Linien" S. 349—408. — Eine gute moderne Zusammenstellung bei G. LORIA, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (deutsch von FR. SCHÜTTE) Bd. II, 7. Abschn., Kap. 7, S. 300—311. Leipzig: B. G. Teubner. 2. Aufl. 1911.

ein Satz von GERGONNE[1]): „Die Kaustik B einer beliebigen (spiegelnden oder brechenden) Kurve Γ für solche Strahlen, die eine Kurve A berühren, ist die Evolute einer Kurve B', welche die Enveloppe der unendlich vielen Kreise ist, deren Mittelpunkte auf der Kurve Γ liegen und deren Radien zu den Abständen der Mittelpunkte von den entsprechenden Punkten der Kurve A in einem konstanten Verhältnis stehen, nämlich des Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels."

Vom Standpunkte des HUYGHENSschen Prinzips aus ist dieser berühmte Satz von GERGONNE evident, da er nichts anderes aussagt, als daß die bei einer Brechung oder Spiegelung resultierende Wellenfläche die Einhullende der Elementarwellen ist. — Die Kurven B', die Evolventen der Brennlinien, tragen bei den Mathematikern den ihnen von QUETELET gegebenen Namen „sekundäre Kaustiken" oder „Nebenbrennlinien". Sie sind physikalisch identisch mit unseren Wellenflächen bzw. ihren Meridiankurven. Der weiterhin eingeführte, eine mathematische Verallgemeinerung darstellende Begriff der Kaustikoiden hat dagegen keinerlei physikalische Bedeutung.

Das ganze Problem ist gewissermaßen eine Umkehrung der ebenfalls oft behandelten Aufgabe, die Gleichung derjenigen brechenden oder spiegelnden Fläche zu finden, die eine ebene Welle in eine kugelförmige oder eine kugelförmige in eine andere Kugelwelle verwandelt. Wenn man von einem leuchtenden Achsenpunkt ausgeht, ergeben sich dann bekanntlich als Meridianschnitte der brechenden oder spiegelnden Fläche die sog. CARTESIschen Ovale, d. h. Kurven 4. Grades, die im Spezialfall in Kegelschnitte entarten. Eine gewisse Rolle spielen solche aberrationsfreien Flächen als Rotationsparaboloide bzw. Rotationsellipsoide in den Scheinwerfern. Da aber die Abbildung eines einzigen Achsenpunktes nicht genügt, so können diese einfachen Flächen praktisch keine große Bedeutung erlangen, auch wenn man von den technischen Schwierigkeiten der Herstellung ganz absieht (vgl. den Abschnitt über asphärische Flächen in dem Artikel über geometrische Optik Bd. XVIII).

Rechnerisch laßt sich leicht zeigen, daß beispielsweise die Brechung der von einem Punkt ausgehenden Strahlen an einer Ebene als sekundäre Kaustik (Wellenlinie) eine Ellipse ergibt, wenn das zweite Medium einen kleineren Brechungsindex als das erste hat, und eine Hyperbel im umgekehrten Falle[2]).

Für die Brechung an Kreisen[3]) ist, falls die Strahlen von einem Punkte ausgehen, die sekundäre Diakaustik (Wellenlinie) ein CARTESIsches Oval[4]), das in eine Kardioide übergeht, wenn der leuchtende Punkt auf der Peripherie des brechenden Kreises liegt[5]). Interessant ist noch, daß für diese Lage des leuchtenden Punktes Diakaustik und Katakaustik für zwei Kreise, deren Radien im Verhältnis des Brechungsindex zueinander stehen, identisch werden. Fallen parallele Strahlen auf, so ist das Problem nur mit elliptischen Funktionen zu lösen, wie SAINT-LAURENT[6]) zuerst gezeigt und GLAISHER näher ausgeführt hat. Eine

[1]) J. D. GERGONNE, Ann. de math. Bd. 15, S. 345—358. 1824.

[2]) Dieser Satz stammt von GERGONNE. Ein direkter analytischer Beweis steht bei O. SCHLÖMILCH, Kompendium der höheren Analysis, 5. Aufl., Bd. I, S. 132. Braunschweig 1881.

[3]) Eine eingehende Behandlung dieses Falles gab A. CAYLEY, Memoir on Caustics. Phil. Trans. Roy. Soc. London Bd. 147, S. 273—312. 1857 u. Bd. 157, S. 7—16. 1867; vgl. auch Coll. math. papers Bd. 1, S. 273; Bd. 2, S. 336 u. Bd. 5, S. 454.

[4]) Findet sich zuerst bei J. C. STURM, l. c.

[5]) War schon JOH. BERNOULLI, etwa 1690, bekannt.

[6]) V. DE SAINT-LAURENT, Ann. de math. Bd. 16, S. 1. 1826.

Zusammenstellung solcher Aufgaben findet man bei HEATH-KANTHACK[1]). Sorgfältige Zeichnungen haben ENGEL und SCHELLBACH[2]) veröffentlicht.

Für einige Einzelfälle liegen auch neuere Arbeiten vor. So hat POTZGER[3]) für eine bestimmte plankonvexe Immersionslinse, d. h. für die einfachste Form eines Mikroskopobjektivs, zunächst die Gleichung der Brennlinie aufgestellt und dann die Länge ihres Bogens von der Spitze ab berechnet. Unter Benutzung der Gleichungen (5) erhält er dann die Wellenlinie in Parameterform

$$\xi = A \sin u - B \cos u + a,$$
$$\eta = -A \sin u + B \sin u,$$

worin zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$A = a n \sin u_0,$$
$$B = a n \cos u_0 + r n \cos\alpha + r \cos\beta + a n b + d,$$
$$b = \frac{a(n-1)}{r - a(n-1)} - \frac{r(n-1)}{a n}.$$

Dabei ist a der Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt des brechenden Kreises, r der Radius, n der Brechungsindex, α und β Einfalls- und Brechungswinkel sowie u_0 und u die Winkel, unter denen ein Strahl die Achse vor und nach der Brechung schneidet.

Für die Wellenfläche, die bei Reflexion einer zur Achse geneigten ebenen Welle an einem Paraboloid entsteht, hat THIERSCH[4]) eine sehr eingehende Untersuchung geliefert, die aber wohl vorwiegend nur mathematisches Interesse bietet.

Ferner ist die Theorie des Regenbogens unter Benutzung der Wellenfläche außer von AIRY[5]) noch mehrmals behandelt worden. Die anscheinend eleganteste Ableitung der Wellenlinie selbst rührt von WIRTINGER[6]) her. Die weitere Literatur vergleiche man bei PERNTER[7]).

Überhaupt finden wir in der Literatur der meteorologischen Optik zahlreiche Untersuchungen über die Deformation der Wellenfläche, wie sie teils durch die kontinuierlich veränderliche Brechung[8]) der Atmosphäre, teils durch unregelmäßige Schlierenbildung in der Luft verursacht wird (vgl. Bd. XX, Artikel über atmosphärische Optik). Auf der Deformation durch Luftschlieren beruht das Funkeln der Sterne, sog. „Szintillation". EXNER[9]) hat die dadurch verursachte Verschiebung der Beugungsfigur im Fernrohr ausgemessen und fand so, daß die aus dem Weltenraum kommenden, als eben anzusehenden Wellenflächen Krümmungen erhalten, deren Radien bis herab zu etwa 4000 m betragen können. Die beiderseitigen Durchbiegungen der Wellenfläche wirken sammelnd und zerstreuend und erzeugen so die zuerst von KEPLER an der Venus und später an der Sonne unmittelbar vor totaler Verfinsterung beobachteten wellenförmigen Bewegungen wechselnder Helligkeit („fliegende Schatten"), wie man sie auch

---

1) R. S. HEATH, Lehrbuch der geometrischen Optik. Deutsche Ausgabe von R. KANTHACK. Berlin: Julius Springer 1894. § 108, S. 137.

2) F. ENGEL u. K. SCHELLBACH, Darstellende Optik nebst 21 Kupfertafeln. Halle 1856.

3) K. POTZGER, Ann. d. Phys. Bd. 30, S. 185–224. 1909.

4) F. THIERSCH, Die Reflexion eines Parallelstrahlenbündels am Paraboloid. Dissert. München 1914, S. 63.

5) G. B. AIRY, l. c. S. 239.

6) W. WIRTINGER, Ber. d. naturw.-med. Ver. zu Innsbruck Bd. 23, S. 7. 1896/1897.

7) I. M. PERNTER u. F. M. EXNER, Meteorologische Optik, 2. Aufl., S. 539–602. Wien: Braumüller 1922.

8) L. MATHIESSEN, Ann. d. Phys. Bd. 5, S. 659–669. 1901; z. B. A. GARBASSO, Rend. Linc. Bd. 16, S. 518–528. 1907; Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 201–205 u. 251–260. 1908.

9) K. EXNER, Wiener Ber. IIa Bd. 84, S. 1038. 1881.

im Lichtkreis eines unscharf eingestellten Fernrohrs von kleiner Öffnung bemerkt. Bei großer Öffnung wird wegen der großen Polzahl (s. weiter unten) der Wellenfläche durch Interferenz eine annähernd gleichmäßige Helligkeit erzeugt.

Das andere Beispiel für die Dioptrik in Medien mit kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex wären die Linsen im Auge der meisten tierischen Organismen[1]). Betrachtungen über die dabei auftretende Wellenfläche oder Wellenlinie sind anscheinend nur von GULLSTRAND[2]) aufgestellt worden.

Daß sich diese ganzen Arbeiten über Wellenlinien meist nur auf das ebene Problem beziehen, ist nicht weiter bedenklich, wenn es sich um die gewöhnliche sphärische Aberration handelt. Dann kann man sich nämlich die Wellenfläche einfach aus der Rotation der Wellenlinie um die Bildachse entstanden denken. Anders liegt es natürlich bei Astigmatismus und Koma. Aber auch hier kann man nach der sog. MASCARTschen Methode[3]) zum Ziele gelangen. Dies Verfahren, das ursprünglich nur eine glückliche Intuition darstellte, besteht darin, daß man sich auf diejenigen Stellen der Wellenfläche beschränkt, die von um den Bezugspunkt geschlagenen Kugeln tangiert werden (die sog. „Pole" der Wellenfläche), und nur für die durch diese Pole gehenden Strahlen die Gangdifferenz rein geometrisch berechnet. Es genügt dann, diese wenigen Strahlen zur Interferenz zu bringen und aus ihnen allein die Beugungsfigur zu berechnen. Um die übrigen Teile der Wellenfläche braucht man sich nicht weiter zu kümmern.

MACÉ DE LÉPINAY[4]) hat diese Methode als Spezialfall einer viel allgemeineren Theorie der in der Nähe von Brennlinien auftretenden Interferenzfransen nachgewiesen.

MÖBIUS[5]) hat gezeigt, daß man in zahlreichen Fällen mit dieser MASCARTschen Methode sehr gute Näherungswerte erhält, und hat auch eine Begründung des Verfahrens[6]) aus der FRESNELschen Zonenkonstruktion gegeben.

Eine direkte Behandlung auch des räumlichen Falles kann man dem Ansatz von DEBYE entnehmen. Gleichung (6) in Ziff. 3 lautete

$$u_P = \frac{i\varkappa}{2\pi}\int e^{i\varkappa(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,d\Omega$$

und stellt die Wirkung eines homozentrischen Strahlenbündels (also mit kugelförmiger Wellenfläche) von der Öffnung $d\Omega$ dar, das als Überlagerung von ebenen Wellen der Richtungen α, β, γ aufgefaßt werden kann. Wie PICHT[7]) zeigte, läßt sich auch ein beliebiges, mit irgendwelchen Aberrationen behaftetes Strahlenbündel auffassen als Überlagerung ebener Wellen verschiedener Richtung. Läßt man nun jede einzelne dieser ebenen Wellen nach den elementaren Formeln gespiegelt oder gebrochen werden, so bleiben sie als ebene Wellen erhalten und ändern nur ihre Richtungen und Amplituden. Transformiert man diese neuen Wellen alle auf dasselbe Koordinatensystem, so kann man diese neue Ebenenschar wieder in derselben Weise wie DEBYE zusammenfassen und erhält dann augenscheinlich eine Integraldarstellung für die durch die Brechung oder Spiegelung

[1]) Das gilt streng nur für die Augen von Jugendlichen. Bei Erwachsenen findet man für den Verlauf des Brechungsindex Diskontinuitäten innerhalb der Linse.

[2]) A. GULLSTRAND, Schwed. Akad. d. Wiss. Bd. 43, Nr. 2, 58 S. 1908; vgl. auch H. v. HELMHOLTZ, Handb. der physiologischen Optik. 3. Aufl., Bd. I, S. 291. 1909–1911. Zusatz von GULLSTRAND.

[3]) M. E. MASCART, Ann chim. phys. (6) Bd. 26, S. 501. 1892; vgl. auch Traité d'optique Bd. I, S. 398–401. 1889.

[4]) MACÉ DE LÉPINAY, Ann. de science de Marseille. 1898.

[5]) W. MÖBIUS, Leipziger Abhandlgn. Bd. 30, S. 107–256. 1907; Ann. d. Phys. Bd. 33, S. 1493–1558. 1910.

[6]) W. MÖBIUS, Ann. d. Phys. Bd. 33, S. 79–133. 1910.

[7]) J. PICHT, Ann. d. Phys. Bd. 77, S. 685–782 (§ 3). 1925.

deformierte Wellenfläche. Für den Fall einer ebenen Grenzfläche hat PICHT[1]) das näher ausgeführt. Ist die einfallende Welle gegeben durch

$$\xi = \xi(\cos\beta,\ \cos\gamma)\,,$$
$$\eta = \eta(\cos\beta,\ \cos\gamma)\,,$$
$$\zeta = \zeta(\cos\beta,\ \cos\gamma)\,,$$

so hat man zunächst zu bilden

$$f(\cos\beta,\ \cos\gamma) = \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma\,,$$

wo die α, β, γ die Richtungswinkel der Strahlen, also $\cos\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$ ist. Die für die Wellenfläche nach der Brechung bestimmende Funktion ist dann

$$f_1(\cos\beta_1,\ \cos\gamma_1) = \frac{n_1}{n_2} f\left(\frac{n_2}{n_1}\cos\beta_1,\ \frac{n_2}{n_1}\cos\gamma_1\right),$$

wo n_1 und n_2 die Brechungsindizes vor und hinter der brechenden Fläche sind. Die Wellenflächen des gebrochenen Strahlenbündels ergeben sich zu

$$\xi_1 = \cos\alpha_1\left[f_1 - \cos\beta_1\frac{\partial f_1}{\partial(\cos\beta_1)} - \cos\gamma_1\frac{\partial f_1}{\partial(\cos\gamma_1)}\right] + C\cos\alpha_1\,,$$
$$\eta_1 = \cos\beta_1\left[f_1 - \left(\cos\beta_1 - \frac{1}{\cos\beta_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial(\cos\beta_1)} - \cos\gamma_1\frac{\partial f_1}{\partial(\cos\gamma_1)}\right] + C\cos\beta_1\,,$$
$$\zeta_1 = \cos\gamma_1\left[f_1 - \cos\beta_1\frac{\partial f_1}{\partial(\cos\beta_1)} - \left(\cos\gamma_1 - \frac{1}{\cos\gamma_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial(\cos\gamma_1)}\right] + C\cos\gamma_1\,.$$

Näheres über die Methode von DEBYE und PICHT findet man in Bd. XX ds. Handb. im Artikel „Beugungstheorie der optischen Instrumente".

3. Was den dritten Weg anbelangt, so läßt sich die Aufgabe, die Wellenfläche oder Wellenlinie graphisch zu konstruieren, sehr leicht lösen. Im Fall der Spiegelung braucht man nur eine hinreichende Zahl von Strahlen zu zeichnen und auf ihnen, von der Lichtquelle ausgehend oder bei parallelem Strahlenverlauf von einem achsensenkrechten Schnitt des Bündels ausgehend, gleiche Strecken abzutragen. Die Verbindungskurven der Endpunkte sind ohne weiteres die gesuchten Wellenlinien. Im Falle der Brechung hat man gemäß dem FERMATschen Satze die Kurven

$$n_1 l_1 + n_2 l_2 = \text{const}$$

zu konstruieren, wo l_1 die Weglänge vor und l_2 die Weglänge nach der Brechung ist.

Ist etwa der Strahlenverlauf im Bildraum bereits gefunden, so kann man zunächst die Kaustik als Enveloppe der Bildstrahlen zeichnen. Für die unendlich ferne Wellenfläche genügt es, wenn man nur einen Überblick über den Verlauf der Wellenfläche im Bildraum haben will, um die Spitze der Kaustik einen sehr großen Kreisbogen zu schlagen und von diesem ausgehend auf den gezeichneten Strahlen gleiche Strecken abzutragen, deren zusammengehörigen Endpunkte dann Punkte einer Wellenfläche sind. Will man sich mit dieser Annäherung nicht begnügen, so kann man auch die Abweichungen der fernen Wellenfläche von der Kugel nach Gleichung (4) oder (6) in Ziff. 171 berechnen und dieselbe Konstruktion von der so verbesserten Wellenfläche aus durchführen. Endlich kann man die oben auf S. 288 erwähnte Fadenkonstruktion benutzen, die allgemein zur Konstruktion einer Evolventen dient.

[1]) J. PICHT, ZS. f. Phys. Bd. 39, S. 933–945. 1926.

In dieser Weise konstruierte Wellenflächen veröffentlichten R. W. Wood[1]) und A. Whitwell[2]) für einfache Kaustiken, sowie Baker[3]) für eine Kaustik mit drei Spitzen (korrigiertes System). Eine Übersicht über die bei verschiedenen Aberrationszuständen möglichen Formen gibt Abb. 161, die einer Arbeit von Straubel[4]) entnommen ist. Dabei ist allerdings die Lage der Wellenflächen nur in bezug auf die sich im Scheitel anschmiegende Kugel (nicht auf die günstigste Referenzkugel) dargestellt.

„Beschränken wir uns auf ein einziges Aberrationsglied, so liegt die Fläche ganz auf einer der Seiten der Schmiegungskugel, und zwar im Falle eines positiven Gliedes auf der konkaven (dem Bildpunkt zugewandten), im Falle eines negativen auf der konvexen Seite (vgl. Abb. 161 Ia u. Ib).

Sind zwei Aberrationsglieder beliebiger Ordnung vorhanden, so können wiederum die beiden vorigen Fälle eintreten, u. a. geschieht das immer dann, wenn die beiden Konstanten gleiches Vorzeichen haben. Ist letzteres nicht der Fall, so kann die Wellenfläche sowohl ganz auf jeder der Seiten wie auch zum Teil auf der einen, zum Teil auf der anderen liegen. Wenn man vom Symmetriepunkte aus nach dem Rande zugeht, verläuft sie zunächst auf der konkaven Seite, falls das Vorzeichen des niedrigeren Aberrationsgliedes positiv ist, und zunächst auf der konvexen, falls es negativ ist (Abb. 161, IIa u. IIb).

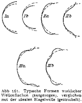


Abb. 161. Typische Formen wirklicher Wellenflächen (ausgezogen), verglichen mit der idealen Kugelwelle (gestrichelt).

Sind drei Aberrationsglieder vorhanden, so können sämtliche früheren und noch die Fälle der Abb. 161, IIIa u. IIIb eintreten usw."

4. Der im Anfang dieser Ziffer erwähnte vierte Weg geht von dem als bekannt angenommenen Aberrationsverlauf aus. Ist dieser als Potenzreihe dargestellt, so kann man z. B. einfach für $\varkappa$ in dem Rayleighschen Ausdruck Gleichung (1) eine entsprechende Reihe einsetzen. Anschaulicher ist es aber, von der Gleichung

$$x^2 + \varepsilon(y^2 + z^2) = f^2$$

auszugehen, die für $\varepsilon = 1$ eine Kugel darstellt. Schreibt man noch $y^2 + z^2 = \varrho^2$ und setzt für

$$\varepsilon = 1 + \varepsilon_1 \frac{\varrho^2}{f^2} + \varepsilon_2 \frac{\varrho^4}{f^4},$$

so hat man eine direkte Verbindung zwischen der Wellenfläche und einer nach Quadraten des Öffnungsverhältnisses fortschreitenden Darstellung der Aberration. Diesen Ansatz legte Straubel[5]) seinen Betrachtungen zugrunde.

---

[1]) R. W. Wood, Physical Optics New York: Macmillan Co. 1911, S. 54—60.

[2]) A. Whitwell, Trans. Opt. Soc. London Bd. 24, S. 209—221. 1923.

[3]) Th. Y. Baker, Trans. Opt. Soc. London Bd. 24, S. 222—224. 1923. In der Diskussion über den vorstehend zitierten Vortrag von Whitwell.

[4]) R. Straubel, Münchener Ber. II. Bd. 18, 1. Abtlg., S. 113—192. 1893.

[5]) R. Straubel, l. c. S. 127—130.

Natürlich kann man auch von einem der in Ziff. 171 gegebenen Ausdrücke für die Abweichungen der wirklichen Wellenfläche von der Kugel ausgehend eine Gleichung für die Wellenfläche selbst erhalten. Für jeden ihrer Punkte (x, y) gilt augenscheinlich $x^2 + y^2 = (R - l)^2$ und, da man R stets so groß wählen kann, daß sein Quadrat groß gegen das Quadrat der Wellenabweichung l ist, also auch $x^2 + y^2 = R^2 - 2Rl$. Wir wählen $R = f$, der Brennweite, und haben zunächst

$$x = f\sqrt{1 - \frac{y^2}{f^2} - \frac{2l}{f}}.$$

Da y^2/f^2 als Quadrat der Öffnung klein gegen f und sicher auch l klein gegen $y^2/2f$ sein wird, so können wir die Wurzel entwickeln und in folgender Weise abbrechen:

$$x = f\left(1 - \frac{y^2}{2f^2} - \frac{y^4}{8f^4} - \frac{l}{f}\right)$$

oder

$$x = f - \frac{y^2}{2f}\left[1 + \frac{y^2}{4f^2} + \frac{2fl}{y^2}\right].$$

Setzen wir für die Wellenabweichung l einen der Ausdrücke aus Ziff. 171 ein, z. B. Gleichung (4), so kommt

$$x = f - \frac{y^2}{2f}\left[1 + \frac{y^2}{4f^2} + \frac{2}{y^2 f}\int \varDelta \cdot y\,dy\right].$$

In dieser Form hat WILSING[1]) die Wellenfläche für das 80 cm-Objektiv der Potsdamer Sternwarte dargestellt und seine Eigenschaften beugungstheoretisch berechnet. Die Längenabweichung $\varDelta$ wurde experimentell nach der HARTMANNschen Methode bestimmt. Doch verzichtete WILSING darauf, sie durch einen einzigen Ausdruck über die ganze Öffnung hinweg darzustellen, sondern zerlegte sie in drei Zonen, die er einzeln behandelte. Diese Arbeit von WILSING bildet zusammen mit denen von VOGEL[2]) und HARTMANN[3]) das berühmteste Beispiel für die vollständige Untersuchung eines ausgeführten Objektives.

Statt von solchen speziellen Ansätzen auszugehen, kann man auch ganz allgemein sowohl für die Wellenfläche bzw. Wellenlinie wie auch für die Kaustik eine Differentialgleichung aufstellen. Man muß nur annehmen, daß sich die Längsaberration der Bildstrahlen, $\varDelta$, als eine Funktion des Winkels u, den die Strahlen mit der Achse bilden, darstellen läßt, die stetig und differenzierbar ist und für $u = 0$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Für den Fall der gewöhnlichen sphärischen Aberration wird man wegen der Rotationssymmetrie noch hinzufügen, daß die Funktion gerade ist. Abgesehen von einigen einfachen Spezialfällen ist es aber nicht möglich, für $\varDelta$ einen exakten geschlossenen Ausdruck zu finden. Wenn man sich dann näherungsweise mit abgebrochenen Potenzreihen behilft, wird $\varDelta$ als ganze rationale Funktion dargestellt. Die formale Integration der Differentialgleichung ist dann immer möglich.

Sei die optische Achse die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Nullpunkt im GAUSSschen Bildpunkt, positiv der Lichtbewegung entgegen gerechnet, dann ist die Gleichung eines in der x, y-Ebene verlaufenden Strahles

$$y = (x - \varDelta)\,\mathrm{tg}\,u. \tag{6}$$

Betrachten wir hierin $\varDelta$ als Funktion von $\mathrm{tg}\,u$, so stellt Gleichung (6) eine

[1]) J. WILSING, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 15, Nr. 48, 31 S. 1902.
[2]) H. C. VOGEL, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 15, Nr. 45, 59 S. 1907.
[3]) J. HARTMANN, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 15, Nr. 46, 106 S. 1908.

Strahlenschar mit $\mathrm{tg}\,u$ als beweglichem Parameter dar, deren Enveloppe die gesuchte Kaustik ist. Die Umhüllungskurve einer Kurvenschar findet man nun bekanntlich, wenn man aus ihrer Gleichung und der durch Differentiation nach dem beweglichen Parameter entstehenden Gleichung eben diesen Parameter eliminiert.

Als Beispiel behandeln wir den einfachen Fall, daß die Aberration dargestellt ist durch

$$\Delta = a\,\mathrm{tg}^2 u\,,$$

dann haben wir entsprechend

$$y = (x - a\,\mathrm{tg}^2 u)\,\mathrm{tg}\,u$$

und

$$0 = x - 3a\,\mathrm{tg}^2 u\,.$$

Elimination von $\mathrm{tg}\,u$ liefert als Gleichung der Kaustik

$$y = \left(x - \frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{x}{3a}}$$

oder

$$27a\,y^2 = 4x^3\,,$$

d. h. eine semikubische Parabel. Die Meridiankurve der Wellenflächen können dann als Evolventen dieser Kaustik oder als orthogonale Trajektorien der Strahlenschar berechnet werden.

Am einfachsten ist es jedoch, die semikubische Parabel in Parameterform darzustellen $x = 3a\,\mathrm{tg}^2 u$ und $y = 2a\,\mathrm{tg}^3 u$ und zu rektifizieren, wobei sich der Bogen von der Spitze bis zum Punkte x, y zu

$$s = \frac{2a}{\cos^3 u} - 2a$$

ergibt, und dann diese Werte in die Gleichungen (5) einzusetzen. Bezeichnen ξ und η die laufenden Koordinaten der Wellenfläche, so erhält man für ihren Meridianschnitt

$$\xi = a\,\mathrm{tg}^2 u + (d + 2a)\cos u - 2a\,, \qquad (7)$$

$$\eta = [(d + 2a)\cos u - 2a]\,\mathrm{tg}\,u\,. \qquad (8)$$

Wird der Parameter dieser Kurvenschar $d = -2a$ gesetzt, so entsteht durch Elimination von $\mathrm{tg}\,u$

$$\eta^2 = 4a(\xi + 2a)\,.$$

Eine der Wellenflächen ist also eine Parabel. Sie liegt hinter dem Bildpunkt, d. h. auf der Seite der wieder divergierenden Strahlen. Wir erhalten also das bekannte Resultat, daß die Evolute einer Parabel eine semikubische Parabel ist. Nach den Gleichungen 7 und 8 sind für mehrere Werte von d einige Wellenflächen numerisch berechnet und in Abb. 162 eingezeichnet worden[1]). Die Spitzen der Wellenflächen liegen auf der Kaustik, wie auch analytisch aus den Gleichungen (7) und (8) leicht zu verifizieren ist. Eine besonders bequeme Darstellung ergibt sich für die durch den GAUSSschen Bildpunkt gehende Wellenfläche. Bezeichnen wir die Längen, die sie auf einem Strahl von seinem Achsenschnittpunkt aus abschneidet, mit l, so ist

$$l = -2a\,\frac{1 - \cos u}{\cos u}\,.$$

[1]) Rechnung und Zeichnung verdanke ich Herrn GÜNTHER SCHULZ.

Man hat nur halb so viel Werte zu berechnen wie nach der obigen Darstellung und findet alle übrigen Wellenflächen durch einfaches Abgreifen gleicher Strecken auf jedem Strahl.

Für andere Ausdrücke der Aberration ist die Integration nicht so einfach. Je mehr Koeffizienten zur Darstellung von Δ erforderlich sind, um so verwickelter

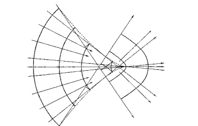


Abb. 162. Wellenflächen in der Nähe der Kaustik bei unterkorrigierter Aberration $\Delta = a\,\mathrm{tg}^2 u$.

werden die Verhältnisse. So hat z. B. für ein einfach „korrigiertes" System die Kaustik bereits drei Spitzen und vier Doppelpunkte. Braucht man drei Glieder zur Darstellung der Aberration, so können bis zu fünf Spitzen und zehn Doppelpunkte auftreten. Für den Fall von zwei Koeffizienten mit verschiedenem Vorzeichen haben Berek und Driesen[1]) noch die Gleichung der Kaustik aufgestellt. Sie finden

$$y^4 + a y^2 (x^2 + b x + c) - d(e x^2 + x + f) x^3 = 0$$

und werten auch die sechs Konstanten aus. Doch empfiehlt es sich natürlich nicht, hieraus die Wellenflächen als Evolventen berechnen zu wollen.

Dagegen kann man den schon in Ziff. 5 behandelten Ansatz

$$\xi + \eta \frac{d\eta}{d\xi} = \Delta$$

zur Aufstellung der Gleichung der Wellenflächen benutzen, ohne irgendwelche weiteren als die obenerwähnten Voraussetzungen über die Abhängigkeit des Δ vom Winkel u zu machen.

[1]) M. Berek u. A. Driessen, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 41, S. 325–328. 1920.

Ist $\varDelta$ als Funktion $\varphi(\operatorname{tg} u) \equiv \varphi(dy/dx)$ gegeben, wo x und y die Koordinaten auf einem Strahle sind, so wird hier, wo ξ und η die Koordinaten eines Punktes der Wellenfläche, d. h. der orthogonalen Trajektorien der Strahlen sind, $\varDelta = \varphi\left(-\frac{1}{d\eta/d\xi}\right)$ anzusetzen sein oder auch, da wegen der Rotationssymmetrie φ eine gerade Funktion ist,

$$\varDelta = \varphi\left(\frac{+1}{d\eta/d\xi}\right).$$

Wir haben also

$$\xi + \eta\eta' - \varphi\left(\frac{1}{\eta'}\right) = 0. \tag{9}$$

Zu derselben Gleichung gelangt man natürlich auch, wenn man in Gleichung (6) der Strahlenschar $\operatorname{tg} u$ durch $-d\xi/d\eta$ ersetzt. Die weitere allgemeine Behandlung rührt von MERTÉ[1] her und wird etwa folgendermaßen geführt. Schreibt man (9) als

$$\eta = -\frac{\xi}{\eta'} + \frac{\varphi(1/\eta')}{\eta'} \tag{10}$$

und differenziert, so ergibt sich

$$d\eta = \eta' d\xi = -\frac{d\xi}{\eta'} + \frac{\xi\, d\eta'}{\eta'^2} + \Phi(\eta') \cdot d\eta',$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi(\eta') = \frac{d\,\frac{\varphi(1/\eta')}{\eta'}}{d\eta'}$$

gesetzt ist. Das kann man auch umformen in

$$\frac{d\xi}{d\eta'} - \frac{\xi}{\eta'(1+\eta'^2)} - \frac{\eta'\Phi(\eta')}{1+\eta'^2} = 0,$$

so daß also, wenn man hier η' als unabhängige Variable auffaßt, Gleichung (10) in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung übergeführt ist. Die allgemeine Lösung lautet

$$\xi = e^{\int d\eta'/\eta'(1+\eta'^2)}\left[\int \frac{\eta'\Phi(\eta')}{1+\eta'^2} \cdot e^{-\int d\eta'/\eta'(1+\eta'^2)}\, d\eta' + c\right],$$

da aber

$$\int \frac{d\eta'}{\eta'(1+\eta'^2)} = \log \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}},$$

so läßt sich das noch vereinfachen zu

$$\xi = \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}\left[\int \frac{\Phi(\eta')}{\sqrt{1+\eta'^2}} \cdot d\eta' + c\right]. \tag{11}$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung (10)

$$\eta = \frac{-1}{\sqrt{1+\eta'^2}}\left[\int \frac{\Phi(\eta')}{\sqrt{1+\eta'^2}}\, d\eta' + c\right] + \frac{\varphi(1/\eta')}{\eta'}. \tag{12}$$

Die Ausdrücke (11) und (12) stellen also ganz allgemein die Meridiankurven der Wellenflächen dar, wobei die Integrationskonstante c der Parameter der Wellenflächenschar und η' jeweils der Parameter auf einer Wellenfläche ist.

Setzt man hierein für φ, wie in obigem Beispiel angenommen wurde, $-a\operatorname{tg}^2 u$, so ergeben sich natürlich aus den allgemeinen Gleichungen (11) und (12) wieder die Gleichungen (7) und (8), wie leicht zu verifizieren ist.

[1] W. MERTÉ, ZS. f. Phys. Bd. 33, S. 533–546. 1925.

Schlußbemerkung.

Es ist zu hoffen und wohl auch anzunehmen, daß die Gesichtspunkte der Wellenoptik für die Behandlung der geometrischen Optik immer mehr herangezogen werden. Wenn man als erstrebenswertes Ziel ansieht, daß die etwas isolierte Stellung, die die geometrische Optik jetzt im Gesamtgebäude der Physik innehat, sich verändert und sie mit den übrigen Teilen der Optik etwas enger verschmilzt, so wird man fordern, daß schon möglichst frühzeitig, gleich bei der Bildung der ersten Grundbegriffe über Brechung und Linsenwirkung die wellenoptische Behandlung einsetzt. Das ist möglich und durchaus nicht umständlicher als die rein strahlenmäßige Behandlung. Ein besonderer Vorzug scheint es, daß bei wellentheoretischer Behandlung zugleich mit den geometrischen Beziehungen auch die energetischen Verhältnisse erledigt werden.

(Eingegangen bei der Redaktion 21. 11. 26.)

Kapitel 2.

Besondere optische Instrumente.

Mit 360 Abbildungen.

A. Spiegel und daraus entstehende Instrumente.

Von

F. Lowe, Jena.

a) Einleitung.

Wenn Licht auf eine blanke Oberfläche eines durchsichtigen Körpers fällt, so wird ein Teil des Lichts zurückgeworfen, ein anderer dringt in den Körper ein; es tritt also dabei eine Teilung des Lichts in mindestens zwei Teile ein. Bei ebenen und sonstwie gesetzmäßig geformten, z. B. sphärischen spiegelnden Flächen, kann man durch den Versuch und an Hand der Fresnelschen Formeln den Anteil des gespiegelten und des gebrochenen Lichts ermitteln; er hängt vom Verhältnis der Brechungsindizes der beiden in der spiegelnden Trennungsfläche sich berührenden Mittel und vom Einfallswinkel ab. Der Zusammenhang zwischen dem zurückgeworfenen Anteil und dem Einfallswinkel ist für den besonders häufigen Fall des Übergangs des Lichts aus Luft in einen Glaskörper in Abb. 1 dargestellt, die hier keiner besonderen Erläuterung bedarf. Die Veränderung der Neigung eines Spiegels gegen die Richtung eines einfallenden Strahlenbüschels kann also als Mittel benutzt werden, um verschieden starke Anteile des Lichts zurückzuwerfen. Spiegelflächen an massiven Metallstücken dagegen zeigen diese Abhängigkeit des Reflexionsvermögens vom Einfallswinkel nicht; dafür hat aber jedes spiegelnde Metall seinen eigenen Reflexionskoeffizienten, wie aus Tabelle 1 hervorgeht, und dieser ist in höherem Grade von der Wellenlänge des Lichts abhängig, als bei den durchsichtigen Spiegeln. Am verwickeltaten sind diese Verhältnisse bei den sog. halbdurchlässigen Spiegeln, die aus dünnen, nicht völlig zusammenhängenden Metallbeschlägen auf Glas oder Kristallflächen bestehen, wie sie als chemische oder elektrolytische Niederschläge oder neuerdings durch Kathodenzerstäubung in mannigfacher Abstufung

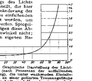


Abb. 1. Graphische Darstellung der Lichtmenge (nach Prozenten der auffallenden Strahlung), die unter wachsenden Einfallswinkeln an einer polierten Trennungsfläche zwischen Luft- und Kronglas in die Luft zurückgeworfen wird; der reflektierte Anteil erreicht erst bei 45° den Betrag von 5%, steigt aber bei einem Einfallswinkel von 80° auf 40%.

Tabelle 1. Die Reflexionskoeffizienten spiegelnder Metallflächen in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge des Lichts.

Metall	Wellenlänge in $\mu\mu$					
	420	450	500	550	600	650
Silber, frisch	86,6%	90,5%	91,3%	92,7%	92,6%	93,5%
Silber, alt	73,0	81,1	83,9	85,0	86,3	88,6
Gold	29,3	33,1	47,0	74,0	84,4	88,9
Platin	51,8	54,7	58,4	61,1	64,2	66,5
Nickel	56,6	59,4	60,8	62,6	64,9	65,9
Kupfer (reinst. Handelsk.)	32,7	37,0	43,7	47,7	71,8	80,0
Stahl, ungehärtet	51,9	54,4	54,8	54,9	55,4	55,9
MACHsches Magnalium	83,3	83,4	83,3	82,7	83,0	82,7
SCHRÖDERsche Legierung	62,2	62,6	62,5	63,4	64,2	65,1
BRANDES-SCHÜNEMANNsche Legierung	47,2	49,2	49,3	48,3	47,5	51,5
ROSSEsche Legierung	56,4	60,0	63,2	64,0	64,3	65,6

der Dichtigkeit erhalten werden; hier kommt noch die partielle Durchsichtigkeit der dünnen Metallschichten hinzu, nach deren Farbe die Schichtdicke oft beurteilt wird. Für das Reflexionsvermögen halbdurchlässiger Metallspiegel und daher in jedem Falle nur die Ergebnisse der Messung für eine Reihe definierter Farben maßgebend.

b) Abbildende ebene Spiegel.

α) Unbelegte Spiegel.

1. Flüssigkeitsspiegel. Den Begriff des Spiegelbildes hat der Mensch sich durch die Beobachtung der Spiegelung an ruhigen Wasserflächen gebildet. Im physikalischen Anfangsunterricht wird die Reflexion und die Brechung des Lichts an einer ebenen Wasserfläche im Rauchkasten gezeigt, dessen eine Hälfte mit staubhaltiger Luft und dessen andere mit fluoreszierendem Wasser gefüllt ist. Die Eigenschaft einer genügend großen Flüssigkeitsoberfläche, sich, abgesehen von den Rändern ihres Gefäßes, eben und genau wagerecht einzustellen, dient bei dem Interferenzniveau dazu, durch die Beobachtung der HAIDINGERschen Ringe eine justierbare Ebene genau wagerecht einzustellen. Über die Verwendung einer ruhenden Quecksilberoberfläche s. Nr. 8.

2. Natürliche Kristallflächen. Begrenzungsflächen und Spaltflächen von Kristallen dienen, wenn sie genügend eben sind, dazu, um auf Goniometern (vgl. Kap. 2, 4) die Winkel zwischen den kristallographisch wichtigen Flächen zu ermitteln; man läßt das aus einem Kollimator kommende parallele Strahlenbüschel unter bekanntem Einfallswinkel an den Kristallflächen reflektieren und mißt die Positionswinkel des Reflexes an zwei Teilkreisen. Bei kleinen und schlecht ebenen Flächen kommt es auf äußerst exakte dioptrische Regelung des Strahlenganges an[1]).

3. Angeschliffene Planflächen an Kristallen. Die oben kurz erwähnte Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Wellenlänge ist bei manchen Kristallen, z. B. Flußspat, so ausgeprägt, daß man diejenigen Wellenlängenbereiche, die in einem besonders hohen Grade reflektiert werden, durch vielfach wiederholte Reflexion aus der Fülle der anderen Strahlenarten isolieren kann, da sie noch nach vielen Reflexionen nahezu ungeschwächt vorhanden sind, während die nicht bevorzugten Strahlenarten längst durch Absorption unterdrückt worden sind — Methode der Reststrahlen von H. RUBENS[2]).

[1]) Vgl. C. PULFRICH, ZS. f. Instrkde. Bd. 40, S. 212. 1920.
[2]) H. RUBENS, Ann. d. Phys. Bd. 65, S. 16. 1898.

4. Planparallelplatten. Ungleich mannigfaltiger als bei den bisher betrachteten unbelegten Spiegeln mit einer einzigen wirksamen Spiegelfläche sind die Anwendungen eines unbelegten Spiegels mit zwei parallelen ebenen Flächen, d. h. einer Planparallelplatte aus Glas oder Kristall. Hat man es mit einem aus parallelen Strahlen bestehenden Büschel zu tun, so wirken die zwei Flächen wie eine einzige. Eine auf dem Tische des Spektrometers parallel der Drehungsachse justierte Planparallelplatte wirkt daher wie eine unendlich dünne, beiderseits spiegelnde Ebene; sie dient dazu, den Kollimator und das Fernrohr senkrecht zur Spektrometerachse einzustellen. In gleicher Weise ist die Wirkung der Reflexion an den zwei Flächen einer schräggestellten Planparallelplatte derjenigen an einer einzigen Ebene gleichwertig beim Spiegelvisier, wo die Platte ebenfalls im parallelen Strahlengang steht (Abb. 2). Der schräg in den Strahlengang gestellte Planparallelspiegel läßt das auf ihn fallende Licht zum größten Teile durch, stört also den Strahlengang im Fernrohre des Spiegelvisiers nur wenig; die geringe Lichtstärke des gespiegelten Lichtes wird durch reichliche Beleuchtung des Signals ausgeglichen. Im Gegensatze hierzu ist die geringe Helligkeit der an unbelegten Spiegelflächen zurückgeworfenen Bilder geradezu der Zweck, den das Sonnenprisma[1]) von J. Browning erfüllt (Abb 3); so wird das Bild der Sonne dem Beobachter in einer für die Messungen geeigneten Helligkeit dargeboten. Zwei dicke Planparallelspiegel, einander parallel aufgestellt, dienen im Jaminschen Interferenzrefraktometer als Hilfsmittel, um ein Strahlenbüschel am ersten Spiegel zuerst in zwei Teile zu zerlegen, zweitens diese in einem für das Experimentieren genügend großen

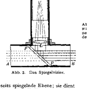


Abb. 2. Das Spiegelvisier.

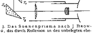


Abb 3. Das Sonnenprisma nach J. Browning, das durch Reflexion an den unbelegten ebenen Spiegelflächen S_1T_1 und S_2T_2 nur $(\frac{1}{20})^2 = \frac{1}{400}$ des einfallenden Lichtes in das Okular weitergibt.

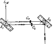


Abb. 4. Grundriß des Interferenz-Refraktometers nach Jamin, in dem das von L kommende Licht von der Planparallelplatte S_1 in zwei parallel zueinander verlaufende Büschel gespalten, und von der gleichdicken Platte S_2 wieder vereinigt wird. Mit den Platten C_1 und C_2 sind die Platten des Jaminschen Kompensators angedeutet, deren eine geneigt werden kann, um dem sie durchsetzenden Strahlenbüschel einen nach Maß veränderlichen Gangunterschied gegen das andere Büschel aufzuzwingen.

[1]) Vgl. L. Ambronn, Handb. d. astron. Instrumentenkunde, S. 360. Berlin: Julius Springer 1899.

Abstande nebeneinander herzuführen (Abb. 4) und drittens sie durch die Wirkung der zweiten Platte wieder zu vereinigen und zur Interferenz zu bringen. Die Spaltung eines Strahlenbüschels bei der Spiegelung an einer Planparallelplatte in gespiegelte, gebrochene und wiederum gespiegelte kohärente Teile wird von Lummer und Gehrcke[1]) (Abb. 5) planmäßig ausgenutzt, um ein Büschel paralleler Strahlen in viele Gruppen von parallelen Einzelbüscheln zu zerlegen, von denen je zwei benachbarte untereinander den gleichen Gangunterschied haben und zur Erzeugung von Interferenz hohen Gangunterschieds, also hoher Auflösung geeignet sind, wenn nur die ebenen Flächen wirklich eben sind, und das Glas sich durch hohe Homogenität auszeichnet.

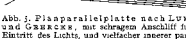


Abb. 5. Planparallelplatte nach Lummer und Gehrcke, mit schragem Anschliff für den Eintritt des Lichts, und vielfacher innerer partieller Reflexion. Die aus einer Fläche austretenden mit hohen Gangunterschieden behafteten Strahlen liefern eine für die Erkennung der Homogenität von Spektrallinien benutzte Interferenz-Erscheinung.

β) Halbdurchlässige, undurchsichtig belegte und reinmetallische Spiegel.

5. Halbdurchlässige Spiegelflächen. Während ein schräg in den Strahlengang gestellter unbelegter Spiegel einen erheblich (z. B. neunmal) größeren Teil des Lichts durchläßt, als er spiegelt, kann ein halbdurchlässiger Spiegel so hergestellt werden, daß er, abgesehen von dem in der Metallschicht absorbierten Licht, annähernd ebensoviel Licht durchläßt, wie er reflektiert; allerdings ist das Verhaltnis beider Anteile nicht streng für alle Farben gleich. Stellt man zwei sehr gut plane, nach Möglichkeit gleichstark spiegelnde spannungsfreie Platten einander gegenüber und justiert sie so, daß sie eine planparallele Luftschicht einschließen, so wird das nahezu senkrecht einfallende Strahlenbüschel zwischen beiden Spiegeln mit immer abnehmender Intensität vielfach hin- und hergeworfen (bis zu dreißigmal). Dieses Plattenpaar (Abb. 6) dient nach Fabry[2]) und Perot zur Erzeugung von Interferenzerscheinungen höchsten Gangunterschiedes; das Interferometer, bei dem eine der Platten mit höchster Genauigkeit parallel verschoben werden kann, ist von Benoit und Michelson zur Auswertung des Meters nach Wellenlängen des Kadmiumspektrums benutzt worden (vgl. Bd. 19). Soll durch einen halbdurchlässigen Spiegel die Intensität des reflektierenden und des durchgelassenen Lichts zahlenmäßig abgestuft werden, so verwendet man eine andere Spiegelart. Wie in Abb. 7 und 8 gezeigt ist, radiert man aus einem undurchlässig versilberten Spiegel Streifen aus, deren Breite zu den stehenbleibenden Streifen

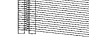


Abb. 6. Fabry-Perotsches Plattenpaar zur Erzeugung von höchsten Gangunterschieden.

[1]) O. Lummer u. E. Gehrcke, Verh. d. d. Phys. Ges. Bd. 3, S. 85. 1901 und Arch. d. Math. u. Phys. (3), Bd. 5, S. 216. 1903.

[2]) Ch. Fabry u. A. Perot, Phys. Z. Bd. 3, S. 5. 1901.

in dem gewünschten Verhältnis steht. Spiegel dieser Art sind für Entfernungsmesser und für Photometer geeignet.

6. Metallspiegel auf Glas, auf der Vorderfläche spiegelnd. Um das hohe Reflexionsvermögen des Silberbelags (90—95%) auszunutzen, ohne durch den allerdings 20mal schwächeren Reflex einer Glasfläche gestört zu werden, verwendet man in Projektionsapparaten große Spiegel aus Glas, die auf der Vorderfläche belegt sind; vor dem Anlaufen kann man, wenn der Verwendungszweck es nicht verbietet, die Silberfläche durch einen dünnen Lackuberzug schützen. Würde ein solcher, wie bei der Projektion mikroskopischer Präparate, die Bildgüte empfindlich schädigen, so unterbleibt er, und der Spiegel wird nur während des Gebrauchs am Apparate gelassen, ruht aber sonst in einem Behälter, in dem sich Fließpapier befindet, das mit Bleiazetat getränkt ist. Für die Fernrohrablesung am Galvanometer haben diese Spiegel keine Bedeutung gewonnen.



Abb. 7. Versilberter Planspiegel mit ausradierten Silberstreifen.



Abb. 8. Verwendung einer Planplatte mit Spiegelstreifen zur Vereinigung zweier Strahlenbüschel

7. Reinmetallische Spiegel. Eine große Anzahl von Metallen und Legierungen nimmt nach gutem Vorschleifen einen hohen Grad von Politur an; ungeeignet sind manche besonders weiche Metalle sowie solche Legierungen, deren Gefüge Bestandteile sehr verschiedener Härte enthalt. Die Haltbarkeit der Metallspiegel an der Luft wird durch deren Verhalten gegen den Sauerstoff, den Wasserdampf, den Staub und gegen etwa vorhandene außergewöhnliche Verunreinigungen der Luft, wie Ammoniak, Chlor, saure Gase, Schwefelwasserstoff usf. beeinträchtigt. Daher hängt der praktische Wert eines für Metallspiegel bestimmten Metalls nicht nur von dem bei bester Politur erreichbaren Reflexionsvermögen, sondern in ebenso hohem Grade von der Luftbeständigkeit des „Spiegelmetalls" ab; Spiegeln aus nichtrostendem Stahl steht eine große Verbreitung bevor. Metallspiegel dienen, auch in großen Abmessungen, zur Erzeugung spiegelverkehrter Abbildung in Reproduktionsanstalten; sie werden genau unter 45° gegen die Achse des Objektivs an dessen Fassung fest montiert. Ferner werden auf Planspiegel (und Hohlspiegel) die ROWLANDschen Gitter geteilt, die zur Bestimmung der Wellenlängen der Spektrallinien so unschätzbare Dienste geleistet haben und leisten.

8. Quecksilberoberflächen als Spiegel. Das hohe Reflexionsvermögen des Quecksilbers verleiht der Oberfläche des ein in sich nicht zu kleines, gut amalgamiertes Kupfergefäß gefüllten flüssigen Metalls den hohen Wert eines praktisch ebenen und dabei streng horizontal liegenden Spiegels. In der Astronomie wird dieser als künstlicher Horizont zur Bestimmung der Höhe eines Gestirns benutzt. Überschichtet man andererseits nach H. P. WARAN[1] einen solchen Quecksilberspiegel mit einer homogenen, wasserhellen, hochbrechenden Lösung und bewahrt das Gefäß vor Erschütterungen und Temperaturwechsel, so stellt es eine LUMMER-GEHRCKEsche Interferenzplatte dar, die aus Flüssigkeiten gebildet ist. Man kann deren Dicke leicht verändern und insbesondere so gering bemessen, wie

[1] H. P. WARAN, Proc. Roy. Soc. London (A) Bd. 100, S. 419. 1922; ref. in Phys. Ber. Bd. 4, S. 488. 1923.

es bei der Anfertigung solcher Platten aus Quarz oder Glas nicht möglich ist. Waran betont allerdings, daß die Einrichtung gegen Erschütterungen durch den täglichen Straßenverkehr äußerst empfindlich ist; er konnte nur in den stillsten Nachtstunden beobachten.

Hohlspiegel aus Quecksilber sind in Ziff. 17 behandelt.

9. Auf der Rückfläche belegte Spiegel. Zur Erhöhung der Haltbarkeit, und zwar als Schutz gegen chemische Einflüsse und mechanische Beschädigungen, haben die meisten belegten Glasspiegel einen Lacküberzug; sie sind dadurch nur einseitig zu benutzen. Das durch die unbelegte Seite einfallende Licht wird ein erstes Mal an dieser, erst dann an der Silber- oder Amalgamschicht zurückgeworfen. Das Spiegelbild, das die unbelegte (Vorder-) Fläche des Spiegels entwirft, hat nur etwa $^1/_{24}$ der Helligkeit des von der belegten Fläche entworfenen, ist aber trotzdem oft unwillkommen. Nur im parallelen Strahlengang und bei guter Parallelität beider Flächen fallen beide Spiegelbilder zusammen, in allen anderen Fällen muß man sich, wenn das sog. Reflexbild stört, überlegen, wie es unschädlich gemacht werden kann. Handelt es sich z. B. um einen Spiegel, der zur Fernrohrablesung etwa an einem Galvanometer dient, so kann man sich von der Störung durch das Reflexbild frei machen, wenn die Keilkante des nicht genau parallelen Spiegels senkrecht zu der Richtung der Teilstriche gelegt wird; das blasse Bild rückt dann nach oben oder unten aus dem hellen Hauptbilde ab und verschwindet, wenn der Keilwinkel groß genug ist, ganz aus dem Gesichtsfelde des Fernrohrs. In gleicher Weise sollte die Beseitigung von Reflexen auch bei dem Aufbau von Interferenzapparaten aus Planparallelplatten und Planspiegeln erwogen werden, ehe man mit dem Zusammensetzen der Teile beginnt. Für empfindliche Galvanometer handelt es sich darum, mit dem Gewicht des Spiegels soweit als möglich, z. B. unter 0,1 g herunter zu gehen. Wegen der sonst störend starken Beugung am Spiegelrande aber sollte der Durchmesser eines Galvanometerspiegels mindestens gleich einem Hundertstel seines Abstandes vom Fernrohr sein; er wirkt auf das von der gut beleuchteten Skala ausgehende Strahlenbüschel wie eine Blende von gleicher Größe. Man überzeuge sich außerdem von der Lage des verkleinerten Bildes des Spiegels, das in der Austrittspupille des Fernrohrs durch dieses entworfen wird, indem man vor den Spiegel ein Stück Wollfaden hängt. Ist so der Verkleinerung des Spiegeldurchmessers eine Grenze gesetzt, so kann andererseits auch die Dicke des Spiegels nicht so weit verringert werden, als an sich die verfeinerte Technik der Herstellung sehr dünn geschliffener Glasplättchen es ermöglichte. Mit abnehmender Dicke nimmt die erzielbare Ebenheit der Flächen ab; außerdem verziehen sehr dünne Spiegel sich sehr leicht beim Lackieren und bei der Befestigung in ihrer Fassung.



Abb. 9. Vier-Platten-Interferometer nach L. Mach. Das zweiteilige, mit einer halbdurchlässig versilberten Kittfläche versehene Reflexionsprisma P_1 teilt das Strahlenbüschel in zwei Hälften, die von den Spiegeln S_1 in das Prisma P_2 geworfen und von diesem wieder zu einem Strahlenbüschel vereinigt werden.

Werden an die Güte des Bildes, das der Spiegel entwerfen soll, geringere Anforderungen gestellt, wie dies z. B. bei den Oszillographen der Fall ist, so kommt man mit erheblich kleineren Spiegeln aus; die kleinsten dürften noch nicht ganz einen Quadratmillimeter groß sein. Zur Erhöhung der Lichtstärke des von so kleinen Spiegeln entworfenen Lichtflecks wird die spezifische Hellig-

keit der Lichtquelle so hoch als möglich gewählt und für eine dioptrisch einwandfreie Strahlenbegrenzung gesorgt.

Aus einer Vereinigung von halbdurchlässigen mit auf der Rückseite belegten Planspiegeln besteht das Vierplatten-Interferometer nach L. MACH[1]), dessen Strahlengang in Abb. 9 veranschaulicht ist.

c) Spiegelnde Prismen.

10. Die Totalreflexion im Innern eines Prismas an einer ebenen Prismenfläche verschafft dem unbelegten Prisma den Rang eines ungemein wertvollen Spiegels. Stehen die zwei dem Eintritt und dem Austritt des Lichts dienenden, also nichtspiegelnden Flächen, senkrecht zum Strahle, so wirkt das Prisma, abgesehen von der Spiegelwirkung, nur als Planparallelplatte. Derartige Prismen sind als „Vergleichsprismen" mit 60° oder 90° Ablenkung, z. B. an Spektroskopen, weit verbreitet. Ferner dient ein kleines Prisma dieser Art, dicht am Objektiv eines Mikroskops montiert, dazu, undurchsichtige spiegelnde Objekte, z. B. Metallschliffe, mit senkrecht auffallendem Lichte durch das Objektiv hindurch zu beleuchten. Letzteres wird dabei zur Hälfte von dem Prisma bedeckt. Ohne einen solchen Vertikalilluminator wäre es nicht möglich, genügend helles Licht senkrecht zur polierten Oberfläche des Metallschliffs in das Objektiv gelangen zu lassen. Die mikroskopische Betrachtung mit mittleren Vergrößerungen (z. B. 100- bis 300fach) und insbesondere die Mikrophotographie mit starken Vergrößerungen (1000fach und mehr) verschafft dem Metallurgen wertvolle Aufschlüsse über das Kristallgefüge seiner Legierungen; der Zusammenhang zwischen den mannigfaltigen Strukturen und den mechanischen Eigenschaften ist bei den technisch wichtigen Metallen in großem Umfange bekannt. Läßt man aber in ein gleichschenkliges Prisma dieser Art ein parallel der spiegelnden Fläche verlaufendes Strahlenbüschel eintreten, so wird die zweimalige Ablenkung des Strahles, die die Brechung an der Eintritts- und der Austrittsfläche hervorruft, durch die mit der Reflexion an der spiegelnden Fläche bedingte Ablenkung gerade aufgehoben. Ein solches spiegelndes Prisma, das „DOVEsche", ist also für die genannte Einfallsrichtung geradsichtig. In Abb. 10 ist das Prisma durch das gleichschenklige Trapez $ABCD$ dargestellt; mit DC' ist das durch die Fläche AD entworfene Spiegelbild der Fläche DC angedeutet. Da $DC' \parallel BA$ verläuft, wirkt in Hinsicht auf die Farbenzerstreuung das DOVEsche Prisma wie eine planparallele, in den Strahlengang schräg eingeschaltete Platte, d. h. es ist achromatisch, erteilt aber den Büscheln verschiedener Wellenlänge verschiedene seitliche Versetzungen. Im Instrumentenbau dient es dazu, ein Strahlenbüschel um seine Längsachse zu drehen; die Drehung des erzeugten Bildes verläuft noch einmal so schnell als die des Prismas. Das DOVEsche Prisma wird z. B. zur Messung von Winkeln im Gesichtsfelde eines Meßfernrohrs und zum Aufrichten schräger Interferenzstreifen in C. PULFRICHS Interferenzmeßapparat benutzt. Von Prismen mit einer Totalreflexion seien

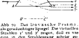


Abb. 10. Das DOVEsche Prisma, als geradsichtiger Spiegel. Die virtuellen Strahlen 1' und 2' zeigen, daß es wie eine in den Strahlengang schräg gestellte Planparallelplatte wirkt, also achromatisch ist, aber die Strahlen seitlich versetzt, außer Strahl 1.

[1]) L. MACH, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 89. 1892 und Bd. 14, S. 279. 1894.

hier noch die Prismen mit fester Ablenkung genannt, bei denen ebenfalls außer einer spiegelnden zwei brechende Flächen vorhanden sind; vermöge der Spiegelung heben die an den brechenden Flächen eintretenden Ablenkungen sich auf, so daß nur die Ablenkung durch Reflexion, d. h. eine bei geeigneter Drehung des Prismas der Reihe nach für jede Farbe gleiche Ablenkung übrig bleibt. Da die Prismen dieser Art die Grundlage für den Bau festarmiger Spektroskope bilden, sind sie im Kap. B, Ziff. 26 (Prismenspektroskope usf.) behandelt.

Versilbert man an einem solchen Reflexionsprisma die Hälfte der Hypotenusenfläche und verkittet sie mit der Hypotenusenfläche eines zweiten,

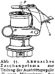


Abb. 11. Abbesches Zeichenprisma zur Teilung der Austrittspupille P eines Mikroskops; das über P schwebende Auge sieht außer dem mikroskopischen Bilde noch den Zeichenstift, dessen Lage durch den Pfeil angedeutet ist; neue Form ohne halbdurchlässige Silberschicht.

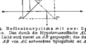


Abb. 12. Reflexionsprisma mit zwei Spiegelungen. Das durch die Hypotenusenfläche AC eingetretene Licht wird zuerst an AB gespiegelt; das durch den Spiegel AB von AC entworfene Spiegelbild ist AC', das Spiegelbild von BC ist BC'. Darauf wird der Strahl an BC gespiegelt und verläuft nun, wenn $\sphericalangle ABC = R$, seiner Anfangsrichtung parallel. Da alle Winkel bei B Rechte sind, so ist das durch BC' von AC' entworfene zweite Spiegelbild $C'A''$ der Eintrittsfläche AC dieser parallel, und es gibt bei beliebigem Einfallswinkel keine Dispersion.

gleichen Prismas, so entsteht ein Glaswürfel, dessen Diagonalfläche zur Hälfte durchsichtig ist und zur Hälfte spiegelt. Einen solchen Würfel legte E. Abbe der Konstruktion seines Zeichenapparates zugrunde, der, auf das Okular eines Mikroskops aufgesetzt, erlaubt, mit dem Zeichenstift die Konturen des im Okular gesehenen Bildes nachzuziehen, da das schemenhafte Bild des Zeichenstifts durch den Prismenwürfel in das Gesichtsfeld des Mikroskops gespiegelt wird (Abb. 11).

11. Prismen mit zwei und drei spiegelnden Flächen. Läßt man durch ein 90°-Reflexionsprisma das Licht, statt durch die Kathetenflächen, wie oben, nunmehr durch die Hypotenusenfläche senkrecht eintreten, so wird es an jeder Kathetenfläche um 90° abgelenkt, das Spiegelbild wird also, wie Abb. 12 lehrt, in der Einfallsebene des Lichts um 180° gedreht, und rechts und links werden vertauscht. Fügt man in den Strahlengang anschließend ein zweites, um den Strahl als Achse um 90° gedrehtes gleiches Prisma ein, so erfolgt in diesem eine Aufrichtung senkrecht zur Zeichnungsebene. Ein Paar in dieser Art verbundener Prismen mit oder ohne Luftabstand dreht also das Strahlenbüschel um 360°, so daß es nach dem Austritt in der alten Richtung weitergeht, vertauscht aber dabei rechts und links und oben mit unten; es wirkt also als bildaufrichtendes Prismensystem und hebt z. B. die bildumkehrende Wirkung eines Fernrohrobjektivs auf. Daher dient dieses Prismensystem, das den Namen Porros trägt, dazu, ein seinen Linsen nach astronomisches Fernrohr zu einem für terrestrischen Gebrauch geeigneten Feldstecher zu machen. So ist das Porrosche Prismensystem, nachdem die optische Industrie gelernt hatte, die

Prismen in großer Zahl genugend winkelgetreu und frei von Pyramidalfehlern (also mit lauter gut parallelen, nicht windschiefen Kanten) herzustellen, millionenfach in den Gebrauch des Laien übergegangen, mit gesteigerter Plastik in den Armee- und Touristengläsern, mit verminderter in den Theatergläsern und den modernen Präparierlupen. Eine wertvolle Eigenschaft der geradzahligen Spiegelungen ist die, daß an einer Drehung eines mit zwei, vier usf. Spiegelungen wirkenden Prismas in der Einfallsebene das Spiegelbild nicht teilnimmt. So erteilt z. B. das Pentagonalprisma (Abb. 13) dem einfallenden Strahle unabhängig vom Einfallswinkel eine Ablenkung von 90°, was seine Bedeutung als „Winkelprisma" für den freihändigen Gebrauch in der Hand des Geodäten erklärt. Auch dieses Prisma wirkt, wenn man seine Seiten um die Spuren der spiegelnden Flächen umklappt, als Planparallelplatte (vgl. Abb. 13), ist also achromatisch. Da der durch AB eingetretene Strahl nur einen Einfallswinkel von $22^1/_2$° an der Fläche CD hat, müßte der Brechungsindex des Prismas, um totale Reflexion zu gewährleisten, höher als der des Diamanten sein; die spiegelnden Flächen werden aus diesem Grunde versilbert und lackiert. Denkt man sich von dem ganzen Prisma nur die Spiegelflächen CB und BA aufgestellt, das Prisma aber entfernt, so geht von der Wirkung des Pentagonalprismas das Wesentliche, die genau 90° betragende, vom Einfallswinkel nicht abhängige Ablenkung nicht verloren. Derartige Winkelspiegel, die allerdings eine außerordentlich subtil durchgearbeitete Fassung verlangen, ermöglichen es, die Wirkung großer Pentagonalprismen zu erzielen. Sie sind von den Nachteilen so großer Prismen, wie hohes Gewicht, Temperaturempfindlichkeit, hoher Preis genügend homogener Glasstücke, frei und werden insbesondere in großen Entfernungsmessern benutzt.

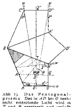


Abb. 13. Das Pentagonalprisma. Das in AD bei O senkrecht eintretende Licht wird in T und R gespiegelt und verläßt bei Q das Prisma durch die Austrittsfläche DC. Das schraffierte Stück des Grundrisses bei B wird, da unbenutzt, in der Regel abgeschnitten. $A'BCD'$ ist das erste, $A'BC''D''$ das zweite Spiegelbild des Grundrisses. In dem gleichschenkeligen Dreieck ABC'' ist $\sphericalangle ABC'' = 3\beta = 135°$, also jeder Basiswinkel $= 45°/2 = 22^1/_2° = \alpha - 90°$; so stehen $C''D''$ und AD auf AC'' beide senkrecht, sind also einander parallel. Daher ist auch dieses Prisma frei von Dispersion, weil das letzte Spiegelbild $C''D''$ der Austrittsfläche CD der Eintrittsfläche AD parallel ist.

Tripel-Spiegel: Schneidet man von einem genau rechtwinklig geschliffenen Glaswürfel eine Ecke so ab, daß die Schnittfläche mit den drei in der Ecke zusammenstoßenden Würfelflächen gleiche Winkel bildet, so entsteht ein Tripelspiegel. Dieser hat die Eigenschaft, daß jeder durch die gut polierte Schnittfläche eintretende Strahl an allen drei Würfelflächen total reflektiert wird und dann genau parallel seiner Einfallsrichtung wieder aus der Schnittfläche austritt. Der Tripelspiegel wird zu Signalgeräten für militärische und geodätische Zwecke verwendet[1]).

[1]) Vgl. S. 598 in dem Kapitel Das Fernrohr (Verf. H. Erfle) in: Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente von S. Czapski und O. Eppenstein, 3. Auflage, Leipzig 1924, bei Ambrosius Barth; wo auch die von R. Straubel eingeführten Verbesserungen besprochen sind.

12. Stereoskope mit Spiegeln oder Spiegel-Prismen. Das Linsenstereoskop von Brewster hat, so schön seine Wirkung auch ist, doch einen großen Nachteil; der Abstand der Bildmitten der beiden Halbbilder darf, wenn man den Beobachter nicht zu divergenter Einstellung der Augenachsen zwingen will, den mittleren Augenabstand eines Erwachsenen, etwa 63 bis 65 mm, nicht erheblich überschreiten. Die stereoskopische Betrachtung größerer Bilder wurde

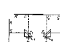


Abb. 14. Das Wheatstonesche Spiegel-Stereoskop, moderne Form, mit Okularlinsen $L_1 L_2$ und Dachprismen $S_1 S_2$, vertauscht rechts und links sowie oben und unten.

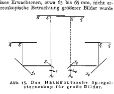


Abb. 15. Das Helmholtzsche Spiegelstereoskop für große Bilder.

erst durch das Wheatstonesche Spiegelstereoskop (Abb. 14) ermöglicht, das wenigstens in seiner ursprünglichen Form, den Nachteil der einseitigen Bildumkehrung hat. Diesem Mangel hat Helmholtz durch Hinzufügung eines zweiten Spiegelpaares abgeholfen (Abb. 15). Ein solches Telestereoskop sah C. Pulfrich für den Stereokomparator vor, um, ehe man mit dem Ausmessen des Plattenpaares begann, einen Überblick über das ganze Raumbild zu geben. Er ist jedoch von dieser Einrichtung wieder abgekommen, weil nur dann ein Raumbild mit natürlicher Plastik entsteht, wenn die Bilder mit einer Brennweite aufgenommen wurden, die dem großen Abstande zwischen Auge und Bild im Helmholtzschen Telestereoskop einigermaßen gleich ist[1]). Von den genannten Mängeln frei ist C. Pulfrichs Spiegelstereoskop[2]), das eigentlich den Namen Prismenstereoskop führen sollte, da die vier Spiegel zu einem Prismenpaar vereinigt sind (Abb. 16). Das vom Mittelpunkte F_1 des linken Bildes P_1 kommende Licht tritt durch die Fläche DC senkrecht in das Prisma ein und nach zwei Spiegelungen aus DA senkrecht aus. Die Betrachtungslinse L_1 rückt das Bild ins Unendliche, so daß man mit entspannter Akkommodation beobachten muß. Durch die doppelte Spiegelung erscheint der Punkt F_1 virtuell in F_1'. Das rechte Bild P_2 wird in gleicher Weise nach P_2' gespiegelt; P_1' und P_2' werden zu einem Raumbilde vereinigt. Die eigenartige Lage der Einzelbilder rechts und links neben den Ohren des Beobachters wurde gewählt, damit die Bilder durch Tages- oder Lampenlicht von vorn ohne irgendwelche Reflexe oder Schatten beleuchtet werden können. Die neue Form des hier verwendeten Winkelprismas hat Pulfrich a. a. O. ausführlich begründet. Das Spiegelstereoskop hat sich bei der Durchmusterung von Fliegeraufnahmen für Vermessungszwecke im größten Maßstabe bewährt.

13. Spiegel-Systeme als Photometer- und Kolorimeterköpfe. Bei den Photometern und den Kolorimetern hat das Kopfstück die Aufgabe, zwei von

[1]) Vgl. hierzu C. Pulfrich, Stereoskopisches Sehen und Messen. Jena: G. Fischer 1911.
[2]) C. Pulfrich, ZS. f. Instrkde. Bd. 32, S. 341. 1912.

verschiedenen Stellen, z. B. Lichtquellen oder Flüssigkeitsgefäßen, kommende Strahlenbüschel so eng nebeneinander zu leiten, daß sie im Gesichtsfeld eines Okulars sich in scharfen Kanten berühren; dadurch kann die Helligkeit oder

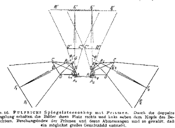


Abb. 16. PULFRICHS Spiegelstereoskop mit Prismen. Durch die doppelte Spiegelung erhalten die Bilder ihren Platz rechts und links neben dem Kopfe des Beobachters. Brechungsindex der Prismen und deren Abmessungen sind so gewählt, daß ein möglichst großes Gesichtsfeld entsteht.

die Färbung der Halbfelder am besten abgeglichen werden. Die Halbfelder liegen entweder nebeneinander, wie bei dem FRESNELschen Prismenpaar, oder sie sind ineinander geschaltet, wie bei dem LUMMER-BRODHUNschen Würfel und dem DONNANschen Spiegelsystem. Die Kopfstücke sind in den Kapiteln Photometrie und Kolorimetrie ausführlich behandelt, deswegen sei hier auf diese verwiesen.

d) Hohlspiegel und daraus entstehende Instrumente.

14. Strahlensammler zur Ausnutzung der Sonnenwärme. Die Wirkung einer Sammellinse, ein reelles Sonnenbild zu erzeugen, hat ihr den Namen „Brennglas", und der Bildebene für ein parallel auf die Linse treffendes Strahlenbüschel den Namen Brennebene eingetragen. Die Flächenhelligkeit in dem Sonnenbilde ist um so größer, je größer der Öffnungswinkel des Strahlenbüschels ist, der es erzeugt. Nun wächst mit wachsendem Öffnungsverhältnis einer Linse deren Dicke rasch mit; es tritt daher bei sehr „lichtstarken" Linsen erhebliche Absorption von Wärmestrahlen ein und die Linsen sind der Gefahr des Zerspringens ausgesetzt. Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn man zum Sammeln der Wärmestrahlen Hohlspiegel benutzt. Insbesondere seit der Einführung nichtsphärischer, z. B. parabolischer Hohlspiegel, kann man diese mit sehr großem Öffnungsverhältnis (2:1 bis 6:1) herstellen und dadurch im Sonnenbilde sehr starke Wärmewirkungen erzielen. Diese Wirkung ist aber auf eine um so kleinere Fläche beschränkt, je größer bei gegebenem Durchmesser des Hohlspiegels dessen Öffnungsverhältnis ist. Will man daher ein

größeres Objekt, etwa einen Wasserkessel, zur Dampferzeugung heizen, so muß man zu sehr großen Maßen des Hohlspiegels seine Zuflucht nehmen; die Pläne für „Sonnenkraftmaschinen" sehen daher Hohlspiegel vor, die aus vielen, sorgfältig ausgerichteten Teilspiegeln bestehen; über eine Anlage zur Ausnutzung der Sonnenwärme vergleiche man die Mitteilungen von A. SONNEFELD[1]).

15. Hohlspiegelsysteme in Spektralapparaten. Der als Linsenersatz von F. PASCHEN[2]) eingeführte Hohlspiegel hat zwei unbestrittene Vorzüge: das leicht erreichbare große Öffnungsverhältnis und die Achromasie seiner Bilder; dem steht als oft bedenklicher Nachteil die geringe Ausdehnung des scharf ausgezeichneten Gesichtsfeldes, also die schlechte Strahlenvereinigung außerhalb der Achse gegenüber. Aus dem letzteren Grunde ist der Hohlspiegel zuerst für solche Spektralapparate eingeführt worden, bei denen das äußerste Maß an Bildgüte nicht verlangt wird, bei den Ultrarot-Spektrometern. Hier dient ja zur Beobachtung der Spektrallinien nicht ein Vergrößerungssystem, sondern die Thermosäule, die auch in ihren zierlichsten Formen eine für einen Spektralapparat beträchtliche Breitenausdehnung hat. Als Hohlspiegel dienen bei nicht zu großem Öffnungsverhältnis sphärische axiale Spiegel, die mit Gold belegt sind, das sich durch ein gutes Reflexionsvermögen für Ultrarot auszeichnet. Die durch den Spalt *Sp* (Abb. 17) getretenen Strahlen werden vom Kollimatorspiegel S_1 parallel gerichtet, durchsetzen das Prisma (aus Fluorit, Sylvin, Steinsalz) und werden vom zweiten Spiegel S_2, in dessen Achse das Bolometer angeordnet ist, zu einem reellen Spektrum vereinigt. Das Prisma wird mit einer sichtbaren Spektrallinie in das Minimum der Ablenkung gebracht, das durch eine der zahlreichen Einrichtungen bei der Durchführung des Bolometers durch das Spektrum automatisch erhalten wird.

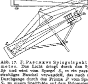


Abb. 17. F. PASCHENS Spiegelspektrometer. Das Licht dringt durch den Spalt *Sp* und wird vom Spiegel S_1 in ein parallelstrahliges Buschel verwandelt, das nach dem Durchgange durch das Prisma *P* vom Spiegel S_2 zu einem Spaltbilde auf dem Bolometer *Bo* vereinigt wird. Die Blenden *Bl* halten fremdes Licht fern.

Ein grundsätzlich ähnliches Hohlspiegelspektrometer wird von den Firmen C. Leiss, Steglitz[3]), Ad. Hilger, London und W. Gaertner, Chicago regelmäßig hergestellt; die Wellenlängentrommel des amerikanischen Modells ist aus der Dispersion des 60°-Steinsalzprismas berechnet, das bei den drei genannten Konstruktionen wie bei der von PASCHEN, von dem in der Thermosäule vereinigten Strahlenbüschel immer im Minimum der Ablenkung durchsetzt wird. Neuerdings kann man nach dem Vorgange von A. SONNEFELD[4]) erreichen, daß genau achsenparallele Strahlenbüschel den Kollimatorspiegel verlassen und in den zweiten Spiegel eintreten, ohne daß man wie bei einem der weiter unten zu besprechenden astronomischen Reflektoren einen axial angeordneten, das Strahlenbüschel um 90° ablenkenden planen Hilfsspiegel einfügt; zu dem Zwecke

[1]) A. SONNEFELD, Die Hohlspiegel, S. 82. Berlin: Union Deutsche Verlagsges. 1926.
[2]) F. PASCHEN, Wied. Ann. Bd. 48, S. 272. 1893.
[3]) C. LEISS, Fortschr. d. Min. Bd. 10, S. 5—88. 1925.
[4]) A. SONNEFELD, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 442. 1922.

geht Sonnefeld von der bisher allgemein üblichen Verwendung von Hohlspiegeln, die symmetrisch zu ihrer Achse begrenzt sind, ab, und benutzt außeraxiale Spiegelabschnitte (Abb. 18 u. 19). So gewinnt er in der Nachbarschaft der Achse, in der keine parallelen Strahlen verlaufen, Platz für den Spalt am Kollimator und für die Thermosäule oder das Okular am Beobachtungsrohr. Das nach dieser Anordnung gebaute Hohlspiegelspektrometer wird für das ultraviolette Strahlengebiet mit einem Cornuprisma, für das ultrarote mit einem Steinsalz- oder Sylvinprisma und für das sichtbare Spektrum mit einem leichten

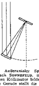


Abb. 18. Außeraxialer Spiegelabschnitt nach Sonnefeld, mit dem Spalte einen Kollimator bildend, die punktierte Gerade stellt die Spiegelachse dar, der das parallele Büschel parallel verläuft.

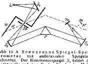


Abb. 19. A. Sonnefelds Spiegel-Spektrometer mit außeraxialen Spiegelabschnitten. Der Kondensorspiegel S_1 bildet die Lichtquelle auf dem Spalte Sp ab, der Kollimator-Spiegel S_2 wirft das parallel gerichtete Büschel durch das Prisma P, und S_3 vereinigt die Strahlen auf der Thermosäule Th, oder nach einer weiteren Spiegelung im Okulare. A' ist die Achse des Spiegels S_2 und A'' die von S_3. W ist eine Schutzwand zur Abhaltung störender Strahlung; der Schutzkasten selbst ist nicht gezeichnet.

oder einem schweren Flintprisma oder einem dreiteiligen festarmigen Prismensatze nach Försterling ausgerüstet. Bei dem letzteren stehen Kollimator und Empfänger fest; bei allen anderen Prismen benutzt man die Einrichtung des Prismentisches mit automatischer Erhaltung des Minimums der Ablenkung. Das neue Modell des Spiegelspektrometers wird mit je einem Spiegelpaar von 5 cm Durchmesser und vom Öffnungsverhältnis 1 : 3 und einem dagegen auswechselbaren von der Öffnung 1 : 5 ausgerüstet.

16. Das Féryсhe Prisma mit Kugelflächen ist entstanden aus einem 30°-Prisma aus Quarz oder Glas für Autokollimation, dessen versilberte Rückfläche als Hohlspiegel ausgebildet wurde. Zur Verminderung der sphärischen Aberrationen ist die Eintrittsfläche des Lichts, die der Hypotenusenfläche des ebenen Prismas entspricht, ebenfalls kugelig, und zwar hohl. Der Spektrograph, dessen Bau sich auf dieses Prisma gründet, ist beschrieben im Kap. B (Prismen und daraus entstandene Instrumente) in Ziff. 40.

17. Astronomische Hohlspiegelfernrohre (Reflektoren). Bei den astronomischen Spiegelfernrohren wird zum mindesten das Objektiv durch einen auf der Vorderseite versilberten Glasspiegel ersetzt; zur Vermeidung des Verziehens der polierten Kugelfläche muß die Dicke des Spiegels wenigstens ein Zehntel seines Durchmessers betragen. Die Empfindlichkeit der blanken Silberfläche gegen die Atmosphärilien hat die Verbreitung der Reflektoren wegen ihrer sonstigen Vorzüge nicht beeinträchtigen können. Diese bestehen in der absoluten Farbenfreiheit der Sternbildchen, der großen Lichtstärke, dem geringen Gewicht sowie der durch den geringen Wert der Glasscheibe und die minimale

Anzahl der optisch zu bearbeitenden Flächen bedingten Preiswürdigkeit: bei größeren Abmessungen kostet ein zweilinsiges Objektiv zehnmal soviel als ein Hohlspiegel. Abb. 20 zeigt das Spiegelfernrohr nach J. Newton (1672) mit dem unter 45° gegen die Achse geneigten Fangspiegel, der die bequeme seitliche Lagerung des Okulars ermöglicht und dadurch dem Beobachter einen passenderen Platz anweist, als dies bei dem Herschelschen Spiegelfernrohr mit seinem schräggestellten Hohlspiegel der Fall ist. Die Newtonsche Form, durch die Einführung der parabolischen Spiegelfläche verbessert, ist noch heute ein äußerst wertvolles Hilfsmittel des Astronomen; ergänzt man den Reflektor durch eine gegen den Okularstutzen auswechselbare Kassette, so ist das Instrument auch für die photographische Aufnahme lichtschwacher astronomischer Objekte (wie Sternhaufen, Nebel) geeignet. Ein moderner Reflektor dieser Art mit einem parabolischen Hauptspiegel von 3 m Brennweite und 1 m Durchmesser wurde z. B. 1911 für die Hamburger Sternwarte in Bergedorf gebaut (Verfertiger Carl Zeiss, Jena).



Abb. 20 J. Newtons Spiegelfernrohr. Das von links kommende Licht wird vom Hohlspiegel auf den kleinen schrägen Planspiegel geworfen und vereinigt sich zu einem Bilde des Sterns, das im Okulare betrachtet wird.



Abb. 21. Der Cassegrainsche Reflektor. Das von links kommende Licht wird vom Hohlspiegel auf einen zentralen Konvexspiegel und von diesem durch eine Öffnung im Hohlspiegel in das Okular geworfen

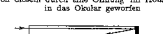


Abb. 22. Der Gregorysche Reflektor unterscheidet sich von dem Cassegrainschen (Abb. 21) nur dadurch, daß der zweite Spiegel ein Hohlspiegel ist.

Wie es in den terrestrischen Feldstechern gelang, durch die Einschaltung von Reflexionsprismen die Gesamtlänge des Fernrohrs zu verkürzen, hat man auch in zwei Formen, durch Hinzunahme eines konkaven oder eines konvexen Spiegels die Länge der Reflektoren vermindert. Cassegrain läßt das vom Hohlspiegel kommende Strahlenbüschel an einem konvexen Spiegel reflektieren und dann durch eine zentrale Öffnung des Hauptspiegels (Abb. 21) in das Okular werfen. Dieser Reflektor liefert bei sehr geringem Lichtverlust ein farbenfreies Bildfeld von mehr als 1° und ist vielfach im Gebrauch.

Im Gregoryschen Reflektor (1661) dagegen fängt ein elliptischer Hohlspiegel das vom Hauptspiegel kommende Strahlenbüschel auf und wirft es in das Okular (Abb. 22); so entsteht ein aufrechtes Bild; in kleineren Dimensionen ist dieses Fernrohr in den Kreisen englischer Liebhaber der Astronomie weit verbreitet, denen die englische optische Industrie ebensoviel verdankt wie den zahlreichen Freunden der Mikroskopie. Zahlenangaben über beide Fernrohrarten findet man bei A. König[1]) und A. Sonnefeld[2]). Aus beiden Konstruktionen sind bei der Ausrüstung neuer Sternwarten mannigfache Kombinationen abgeleitet worden. Ein Mitteilding zwischen den Reflektoren und den nur mit

[1]) A. König, Die Fernrohre und Entfernungsmesser, S. 73. Berlin: Julius Springer 1923.
[2]) A. Sonnefeld, Die Hohlspiegel. Union, Deutsche Verlagsges., Stuttgart 1926.

Linsen ausgestatteten Refraktoren bilden die Mediale, die aus einfachen Linsen und Spiegellinsen, d. h. auf der Rückseite versilberten Hohlspiegeln, sowie aus planen Fangspiegeln zusammengesetzt sind. Sie sind frei von sekundärem Spektrum und zeichnen sich durch geringe Empfindlichkeit gegen Temperaturschwankungen aus, da die Spiegellinse erheblich kleiner ist als der Spiegel eines reinen Reflektors; gerade das besonders kompendiöse Brachymedial ist in größtem Maßstabe leider noch nicht ausgeführt worden. Die Hauptvorzüge der Refraktoren gegenüber allen Spiegelfernrohren liegen nach A. KÖNIG (a. a. O. S. 79) in der besseren Eignung für Messungen, besserer Bildschärfe und höherem Auflösungsvermögen, was bei der Messung von Doppelsternen besonders zur Geltung kommt; infolge der Koma sinkt beim Spiegel das brauchbare Gesichtsfeld bei $n$mal größerem Öffnungsverhältnis auf den n^2ten Teil. Für Kometen- und Planetensucher, wo man bis auf 15° Gesichtsfeld geht, scheiden die Reflektoren völlig aus. Dagegen bilden gerade die Beobachtung der den Liebhaberastronomen interessierenden Sternhaufen und Nebel, sowie spektrographische Aufnahmen das beste Arbeitsfeld der Reflektoren.

Schließlich seien noch die Versuche erwähnt, die in einem rotierenden mit Quecksilber gefüllten Gefäße entstehende Rotations-Paraboloid-Fläche als Hohlspiegel für astronomische Reflektoren zu verwenden. R. W. WOOD[1]) berichtet darüber in mustergültiger Weise. Der runde, das Quecksilber enthaltene Teller wurde vor Erschütterungen, Luftzug und Temperaturschwankungen geschützt, auf einem elektrisch angetriebenen Drahtgestell in einem Keller auf felsigem Untergrunde montiert. Zwei Minuten nach dem Einschalten des Motors nahm die Fläche ihre endgültige Gestalt an. Die Bilder z. B. der Milchstraße wurden vom Dache aus beobachtet. Mit einem Auge ohne Okular betrachtet erschienen sie prachtvoll, mit zwei Augen, also stereoskopisch beobachtet, hob und senkte sich das Bild periodisch; das Okular lehrte, daß die Brennweite dauernd bis zu 3 cm hin und herschwankte. An diese Anfangsbeobachtungen schloß sich das sorgfältige Studium der Fehlerquellen. Der den Schluß von WOODS Arbeit bildende Vorschlag, die paraboloidische Quecksilberfläche durch Aufgießen leichterstarrender Paraffinmassen zu fixieren, und von dem Paraffinnegativ elektrolytische Abzüge herzustellen, zeugt von WOODS Wagemut. Das Studium der rotierenden Hg-Spiegel gehörte zu den Problemen, die nur durch sorgfältige Versuche gelöst werden können, selbst auf die Gefahr hin, daß, wie hier, praktisch verwertbare Ergebnisse schließlich nicht erhalten werden.

e) Ebene und hohle Beleuchtungsspiegel.

18. Beleuchtungsspiegel als Nebenbestandteile optischer Instrumente. Viele optische Standapparate können nicht unmittelbar auf eine Lichtquelle gerichtet werden, weil sie für senkrechten oder schrägen Einblick des Beobachters eingerichtet sind. Daher werden z. B. alle Mikroskope, mit Ausnahme der Handmikroskope, mit ebenen oder hohlen Beleuchtungsspiegeln ausgerüstet; die auf undurchsichtige Objekte eingestellten Mikroskope haben an Stelle des Spiegels bei der Beobachtung von Metallschliffen den Vertikalilluminator.

19. Reflektoren zur Ablesung von Teilungen und Nonien. Durchsichtige Teilungen, z. B. Kreisteilungen aus Glas, haben oft eine versilberte Rückfläche, die gegen die geteilte Fläche so geneigt ist, daß das Tageslicht, nachdem es die Teilung durchsetzt hat, von der Rückfläche wieder durch die Teilung hindurch, nun aber in das Ablesemikroskop des Theodoliten geworfen wird. Diese Ein-

[1]) R. W. WOOD, Astroph. Journ., Bd. 29, S. 164. 1909.

richtung zeichnet sich durch besondere Lichtstärke des Bildes im Mikroskop aus. Teilungen auf Metall, Zelluloid, Holz usf. werden, gleichviel ob sie eine diffus reflektierende oder eine spiegelnde Oberfläche haben, und ob sie durch ein Mikroskop oder mit einer Lupe abgelesen werden, am besten mit einem einfachen Vertikalilluminator betrachtet, der aus einem unter 45° gegen die Achse des Ablesesystems bestehenden unbelegten ebenen Glasspiegel besteht. Dieselbe Einrichtung dient dazu, im Gaussschen Okular das Gesichtsfeld zu beleuchten, damit im Spiegelbild des Gesichtsfeldes der Schatten des Fadenkreuzes neben diesem gut auf hellem Hintergrunde zu sehen ist. Man benutzt die Einrichtung, um ein Fernrohr senkrecht zu einer Bezugsfläche eines Meßinstruments, etwa eines Goniometers, auszurichten. Bequemer aber ist für diesen Zweck ein kleines, seitlich etwa ein Drittel des Gesichtsfeldes bedeckendes Reflexionsprisma (Abb. 23); dessen Endfläche wird als leuchtendes Rechteck durch die Bezugsfläche in das Gesichtsfeld gespiegelt und weist den Schatten der Teile des Fadenkreuzes auf, die es bedeckt. Die Einrichtung hat sich am Refraktometer nach Pulfrich zur Kontrolle des Nullpunkts der Teilung hundertfach bewährt.



Abb. 23. Pulfrichs Justierprisma. Im gespiegelten Rechtecke P' sind die Schatten eines Teils des Fadenkreuzes zu sehen.

Beim Arbeiten im Freien, etwa mit einem Theodoliten, kann es sehr schwierig sein, durch einen Vertikalilluminator die Teilung zu beleuchten, man benutzt dann lieber einen ringförmigen, vor das Objektiv des Mikroskops geschraubten Gipsreflektor oder eine durchscheinende Horn- oder Zelluloidplatte für die Lupe am Nonius.

20. Beleuchtungsspiegel für medizinische Zwecke. Braucht der Spiegel nicht in den Körper eingeführt zu werden, so wird er meist in der Form des Helmholtzschen Augenspiegels benutzt, eines Hohlspiegels von etwa 8 cm Durchmesser, mit einer zentralen Durchblicksöffnung von 8 mm, der die Aufgabe hat, das Licht einer neben oder über dem Kopfe des Patienten aufgehängten Glühlampe in dessen Auge, Nase, Ohr, Rachen usf. zu werfen. Der Arzt trägt den Spiegel an einem seinen Kopf umspannenden Gummibande und hat so beide Hände frei. Dagegen dienen zur künstlichen Beleuchtung von Hohlräumen im menschlichen Körper abwaschbare, sogar auskochbare Spiegel, z. B. der Kehlkopfspiegel, Spiegelsonden usf.; die einfachsten sind kleine, mit einem Stiel versehene ebene Spiegel mit abgerundeten Ecken und Kanten; als Material hat der Kruppsche nichtrostende Stahl mit 59% Reflexionsvermögen die Zukunft.

21. Scheinwerferkonstruktionen. Die Vereinigung einer hellen Lichtquelle mit einem Hohlspiegel, in oder bei dessen Brennpunkt sie angebracht ist, ergibt einen Scheinwerfer, also einen Beleuchtungsapparat für ferne Gegenstände. Die in einer gegebenen Entfernung erzielbare Beleuchtungsstärke hängt von der räumlichen Lichtstärke der Lichtquelle, dem ausgenutzten Öffnungswinkel des Spiegels, dem Reflexionsvermögen des Spiegelbelags und nicht zuletzt von der Güte der durch die Spiegelflächen vermittelten Abbildung ab.

Eine ausführliche moderne Monographie über Scheinwerfer verdanken wir A. Sonnefeld[1]); er unterscheidet fünf Arten von Hohlspiegeln für Scheinwerfer, nämlich solche mit zwei konzentrischen Kugelflächen, mit zwei nicht konzentrischen Kugelflächen (Mangin-Spiegel), mit einer deformierten (asphärischen) und einer Kugelfläche, mit zwei parabolischen Rotationsflächen, und schließlich Hohlspiegel mit einer parabolischen und einer nahezu parabolischen

[1]) A. Sonnefeld, Die Hohlspiegel, gr. 8°. 154 S. mit 95 Abb. Stuttgart: Union Deutsche Verlagsges. 1926.

Fläche. Über die Berechnung, die Anfertigung und die Prüfung der Hohlspiegel wird ausführlich auf Grund langjähriger Erfahrungen berichtet; die Verhältnisse liegen nicht so einfach, daß jedem Verwendungszweck eine einzige Spiegelart zugeordnet wäre. Die Hohlspiegel mit zwei konzentrischen Kugelflächen dienen z. B. zu der starken Beleuchtung der Objekte (Zeichnungen usf.) im Kugelepiskop nach E. Bechstein der Firma Schmidt & Haensch, Berlin, und zur Erzeugung der entzückenden reellen verkleinerten Bilder der Darsteller im Miniaturtheater (der Tanagrafiguren). Mangin beseitigte den Reflex an der Vorderfläche (Luft-Glas) des Hohlspiegels, indem er deren Krümmungsmittelpunkt in den Brennpunkt des Spiegels verlegte; so fällt das Licht überall senkrecht auf die Trennungsfläche von Luft und Glas, und der an dieser Fläche reflektierte Anteil des Lichts fällt wieder auf die Lichtquelle zurück, gibt also keinen störenden Reflex. Allerdings ergibt sich dadurch für den Glaskörper die Form eines Meniskus, der am Rande erheblich dicker ist als in der Mitte. Infolgedessen sind die Mangin-Spiegel der großen und raschen Erwärmung auf die Dauer nicht gewachsen, sie zerspringen leichter als alle anderen Spiegel, deren Glasdicke annähernd gleichmäßig ist, die Konstruktion Mangins gilt daher heute als überholt. Kleine Spiegel dieser Art, wie sie z. B. zur Dunkelfeldbeleuchtung für auffallendes Licht (Firma C. Beck, London) am Mikroskop dienen, sind von diesem Nachteil frei. Scheinwerfer mit Hohlspiegeln, deren eine Fläche deformiert ist, haben sich seit Jahren als Kondensorsysteme in äußerst lichtstarken großen Projektionsapparaten für durchfallendes und auffallendes Licht bewährt (Verfertiger Leitz, Liesegang, Zeiss u. a. m.). Die größten Öffnungsverhältnisse lassen sich bei den Scheinwerfern mit zwei parabolischen Rotationsflächen erreichen, bei diesen ist die Brennweite oft nur ein Drittel, ja ein Fünftel des Durchmessers; sie dienen als Automobilscheinwerfer und bilden den Hauptbestandteil der optischen Signalgeräte. Die vollkommenste Abbildung liefert dagegen der Hohlspiegel mit einer parabolischen und einer „parabelähnlichen" Fläche nach R. Straubel. Sie dienen zum Bau der Scheinwerfer größter Reichweite und der Signalapparate für militärische Aufgaben, die als Blinkgeräte zur Nachrichtenübermittlung im Kampf eine so große Bedeutung erhalten haben, weil sie im Gegensatz zu allen Fernsprechern von irgendwelchen Drahtleitungen unabhängig sind[1]). Gleiche Spiegel haben auch in den Spiegellampen in den letzten Jahren eine ungeahnte Verbreitung gefunden.

22. Die Anwendungsgebiete der Scheinwerfer. Für militärische Zwecke wurden Scheinwerfer mit schwenkbarer und neigbarer Montierung zuerst auf den Kriegsschiffen und in den Häfen, sowie in Festungen benutzt, daran schloß sich die ausgedehnte Verwendung fest eingebauter oder fahrbarer Scheinwerfer zur Fliegerabwehr, und schließlich entstanden tragbare Scheinwerfer für den Grabendienst und zum Signalisieren. Ihrer Größe nach sind die letzteren den Scheinwerfern für Fahrzeuge nahe verwandt, von denen diejenigen für die Lokomotiven meist nur aus angenähert parabolisch gedrücktem Blech bestehen. Dagegen ist auf die Ausbildung leistungsfähiger Scheinwerfer für Automobile und Motorboote im letzten Jahrzehnt viel Sorgfalt verwendet worden. Zur möglichsten Ausnutzung des von einer kleinen Leuchtfläche (niedervoltige Metallfadenlampe) nach allen Richtungen des Raumes ausgestrahlten Lichts wird die Leuchtfläche von einem nahezu halbkugeligen kleinen Hohlspiegel nach vorn abgeblendet, so daß der Scheinwerferspiegel auch das Licht mit erhält, das sonst unmittelbar mit einem sehr weit geöffneten Kegel, also mit schwacher

---

[1]) Vgl. A. König in M. Schwarte, Die Technik im Weltkriege, S. 132. Berlin: E. Mittler & Sohn 1920; A. Sonnefeld, l. c. S. 83.

Wirkung, die Fahrbahn beleuchten würde. Die scheinbar enorme Steigerung der Leuchtkraft einer Lampe durch den Scheinwerfer beruht auf der Zusammendrängung des Lichts in einen verhältnismäßig wenig geöffneten Strahlenkegel. Die mannigfachen Vorkehrungen, die zur Verminderung des Blendens und zur gelegentlichen Beleuchtung mit weit geöffneten Büscheln ersonnen sind, können hier nur erwähnt werden.

23. Spiegellampen für Beleuchtungszwecke. Neuerdings beginnt man in der Beleuchtungstechnik von der planmäßigen Verfügung über die Lichtverteilung, wie ein Hohlspiegel sie erlaubt, nach den längst vorliegenden Erfahrungen der Bühnentechnik auch für die Beleuchtung von Schaufenstern, Arbeitsräumen in Werkstätten und Schreibstuben, von Höfen, Straßenkreuzungen, öffentlichen Plätzen, Bahnhofsanlagen usf. Nutzen zu ziehen; man wird später nicht begreifen, wie es kommt, daß man jahrzehntelang die Hälfte der in den Lampen für Außenbeleuchtung erzeugten Lichtmenge auf den Straßen zur Beleuchtung der Häuserfronten, auf Bahnhöfen zur Beleuchtung des Nachthimmels verschwendet hat. An die Stelle der Bühnenscheinwerfer sind die tiefen, glockenförmigen Hohlspiegel in den mannigfachsten Gestalten getreten, die in Formen geblasen und auf der Außenseite versilbert und lackiert werden; nur sorgfältigste Zentrierung und Fokussierung der Leuchtkörper gewährleistet die theoretisch erreichbare Lichtwirkung, die dem hohen Öffnungsverhältnis (4 : 1 und mehr) entspricht.

B. Prismen.

Von

F. LOWE, Jena.

a) Einfache Prismen und Hohlprismen.

24. Einfache Prismen. Körper aus durchsichtigem Stoffe, die von mindestens zwei sich schneidenden Ebenen begrenzt sind, werden in der Optik Prismen genannt; die sonstige Begrenzung dieser Körper ist für die optische Wirkung der Prismen, auf die unsere Betrachtung sich zu beschränken hat, ohne Bedeutung. Ein prismatischer Körper, dessen Begrenzungsflächen zwei nicht konzentrische Kugelflächen sind (FÉRYsche Prismen), wird als Bestandteil eines Autokollimationsspektroskops in Ziff. 40 behandelt. Prismen, deren Begrenzungsebenen sich nicht im Endlichen schneiden, also planparallele Platten, sowie Prismen, die nur zur Reflexion bestimmt sind, findet man im Abschnitt „Ebene Spiegel".

Die Gerade, in der die beiden Flächen eines Prismas sich schneiden, heißt die brechende Kante; bei der Mehrzahl der Prismen ist sie nur ideell vorhanden, da die Herstellung einer scharfen Kante mit großen Kosten verknüpft ist und da deren Vorhandensein für die optische Wirkung der Prismen vielfach gänzlich unwesentlich ist, so z. B. bei allen zur Erzielung der Farbenzerstreuung bestimmten Prismen.

Der Winkel, unter dem beide Flächen sich schneiden, der sog. brechende Winkel, wird nach den Regeln der Geometrie dargestellt durch den Winkel zwischen den zwei in einem Punkte der Schnittlinie der beiden Flächen, der „brechenden Kante", auf den Flächen errichteten Normalen; gemessen jedoch wird er auf Winkelmeßinstrumenten (Goniometer, Theodolit, Spektrometer) durch Messung der Lage von Spiegelbildern unendlich ferner Objekte. Die Genauigkeit, mit der ein Prismenwinkel gemessen werden kann, hängt u. a. von der Bildgüte der Spiegelbilder, also von der Ebenheit der Flächen und der Be-

schaffenheit des Fernrohrs, sowie von der Größe der Prismenflächen ab, durch die der nutzbaren Fernrohrvergrößerung eine Grenze gesetzt ist. Die genaue Kenntnis des brechenden Winkels eines Prismas ist sowohl dann nötig, wenn das Prisma, z. B. ein Glasprisma, nur Mittel zum Zwecke ist, etwa zur Messung der Brechungsindices der Prismensubstanz für eine Reihe vereinbarter Wellenlängen, als auch bei Prismen, die als solche einen Meßzweck erfüllen sollen: Ablenkungsprismen für sehr genau arbeitende Winkelmeßinstrumente, etwa Nivellierinstrumente, Entfernungsmesser oder Refraktometer, Zerstreuungsprismen für Spektroskope mit Wellenlängenschraube oder -teilung.

Andererseits wird genaueste Angabe des Brechungsindex für mehrere Farben von denjenigen Prismen verlangt, die sozusagen als optisches Urmaß zur rechnerischen Ableitung oder zum Vergleich der Lichtbrechung anderer Substanzen, wie Flüssigkeiten, Gläser oder Kristalle, dienen sollen; dies sind die in Refraktometer eingebauten Prismen hoher Lichtbrechung (Refraktometer nach ABBE) oder auswechselbare Prismen von abgestufter Lichtbrechung (Refraktometer nach PULFRICH, Eintauchrefraktometer), ferner die zur Prüfung und Berichtigung der Justierung des Eintauchrefraktometers dienenden Justierprismen aus Fluorit oder Glas, und schließlich der Prismensatz nach VIOLA, der den Benutzer eines Halbkugel-Kristallrefraktometers nach ABBE in den Stand setzt, die Lichtbrechung jedes Kristalls unter Verzicht auf den Teilkreis durch Anschluß an die genau bekannte Lichtbrechung zweier Violaprismen mittels der Mikrometerschraube mit erhöhter Genauigkeit zu bestimmen. An einem besonders einfachen Beispiel sei gezeigt, wie die Ablenkung eines Prismas von 25° brechendem Winkel, dessen beide Flächen an Luft grenzen, von der Lichtbrechung der Prismensubstanz abhängt. In Abb. 24 tritt das Licht senkrecht in die Fläche AC ein und wird gemäß dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz an der Fläche BC gebrochen: $N \cdot \sin i = \sin i'$. Die Ablenkung $\varepsilon = i' - i$ berechnet sich für wachsende Werte von N zu den Werten der Tabelle:



Abb. 24. Das senkrecht in die Fläche AC des 25°-Prismas eingetretene Licht erleidet beim Austritt aus der Fläche AB eine Ablenkung, die vom Brechungsindex des Prismas in der gezeichneten Weise abhängt. Ein 25°-Prisma aus Diamant ist undurchsichtig.

Abhängigkeit der Ablenkung eines 25°-Prismas vom Brechungsindex N.

$N = 1{,}33$	1,51	1,72	1,91	2,42
$\varepsilon = 9°{,}0$	14°,7	20°,9	28°,2	undurchsichtig

Da für Diamant ($N_D = 2{,}42$) der Grenzwinkel der Totalreflexion 20°,4, also kleiner als der Einfallswinkel $i = 25°$ an der Fläche BC ist, kann der Strahl aus dem 25°-Diamantprisma nicht heraus und wird total reflektiert. Die Ablenkung von Prismen mit kleinem Winkel, z. B. solcher von 5° brechendem Winkel, wird durch eine Näherungsformel berechnet; über die Abweichungen zwischen den angenäherten und den genauen Werten gab H. ERFLE[1]) eine Tabelle, aus der hervorgeht, daß sie in dem von ihm gewählten Beispiel bei Einfallswinkeln von −10° bis +10° nur 0,03 bis 0,04° beträgt. Grenzt das

[1]) S. CZAPSKI und O. EPPENSTEIN, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach ABBE, 3. Aufl., S. 329, Leipzig: A. Barth. 1924.

Prisma vom Brechungswinkel α und Brechungsindex n beiderseits an Luft, und beschränkt man sich auf kleine Einfallswinkel, so berechnet sich die Ablenkung ε aus $\varepsilon = \alpha(n - 1)$.

25. Hohlprismen werden dadurch hergestellt, daß man auf einen prismatisch begrenzten Hohlkörper, z. B. ein massives, zylindrisch durchbohrtes Glasprisma mit feingeschliffenen, besser aber polierten Flächen, zwei vorzugsweise planparallele Glasplatten oder wenigstens zwei ausgewählte gute Spiegelglasplatten aufkittet oder in anderer Weise, etwa durch Überfanggewinde, kittfrei und wasserdicht befestigt. Die letztere auch bei Absorptionskuvetten bewährte Befestigungsart verdient immer dann den Vorzug, wenn das Hohlprisma mit sehr verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt werden soll. Hat man dauernd dieselbe oder wenigstens gleichartige Füllung (z. B. nur wässerige oder nur alkoholische Lösungen), so ist die Verkittung bequemer und billiger, da Voraussetzung für das dichte Aufpressen der Fenster sehr gute Schliffflächen am Prisma sind.

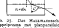


Abb. 25. Das HALLWACHSsche Doppelprisma mit planparalleler Scheidewand, durch die das Licht aus dem Medium mit geringerer Lichtbrechung n in das mit höherer $(n + dn)$ dringt.

Ein Hohlprisma gibt seiner Füllung die prismatische Form, durch die man z. B. eine Flüssigkeit der spektrometrischen Messung ihrer Brechungsindices unterwerfen oder ihrer starken Farbenzerstreuung wegen zur Erzeugung eines Spektrums verwerten kann.

Hohlprismen für Spektrometer müssen mit Bohrungen im Prismenkörper für das Einfüllen der Flüssigkeit und für das unerläßliche genaue Thermometer versehen sein; erwünscht ist außerdem ein Wassermantel. Der massive Prismenkörper wird zweckmäßig aus einem gut wärmeleitenden Stoffe, z. B. aus Abfallquarz hergestellt. Man gibt dem Hohlprisma einen kleinen Prismenwinkel und versieht das eine Fenster mit einem Silberbelag, wenn es zur Messung nach dem Prinzip der Autokollimation dienen soll. Dieses verdient besonders wegen des Zeitgewinnes beim Temperieren den Vorzug.

Große Flüssigkeitsprismen werden in Projektionsapparaten benutzt, mit denen Spektra projiziert werden sollen. Sie sind gleichgroßen Glasprismen durch die erheblich geringeren Kosten weit überlegen; die schlechtere Definition der Spektra, die auf kaum vermeidliche Konvektionsströme in der Flüssigkeit (Schwefelkohlenstoff) zurückzuführen ist, spielt bei der Projektion keine Rolle, verhindert aber leider die Anwendung großer Glyzerinprismen für spektrographische Apparate.

Aus demselben Grunde sind alle Versuche, für astronomische Zwecke Flüssigkeitsprismen zu verwenden, gescheitert, ebenso wie die sehr verlockenden zum Bau großer Flüssigkeitslinsen.

Das HALLWACHSsche Doppelprisma (Abb. 25) mit planparalleler Scheidewand dient zu sehr genauen Messungen des Unterschieds der Brechungsindizes zweier gleich temperierten Lösungen; das Ergebnis ist um so genauer, je näher die Brechungsindizes einander liegen. In der Praxis der Bieruntersuchung hat die Temperierung und die Reinigung des Troges unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet, obwohl die Methode von H. TORNOE[1]) sorgfältig durchgearbeitet und die Berechnung der Ergebnisse durch ausführliche Tabellen erleichtert ist.

[1]) H. TORNOE, ZS. ges. Brauw. Bd. 20, S. 373. 1897. Verfertiger Fa. Fr. Schmidt u. Haensch, Berlin.

26. Einfache Prismen mit brechenden und spiegelnden Flächen mit fester Ablenkung. Wie eine einfache Linse für jede Wellenlänge eine andere Brennweite hat, so erteilen die bisher betrachteten einfachen Prismen bei dem Wechsel der Lichtart jeder neuen Farbe eine neue Ablenkung; blickt man daher durch ein solches Prisma von etwa 60° brechendem Winkel, das auf einem Tischchen in Augenhöhe des Beobachters steht, auf eine passend aufgestellte schmale Lichtquelle, so muß man, um diese in wechselnden Farben zu sehen, das Auge seitlich bewegen, wenn die brechende Kante senkrecht, oder von oben nach unten, wenn sie wagerecht verläuft. Ersetzt man die Lichtquelle durch einen Kollimator mit beleuchtetem Spalt und das Auge durch ein auf das Prisma gerichtetes Fernrohr, so kann man den Spalt des Kollimators im Fernrohr der Reihe nach in jeder Farbe sehen, die in der den Kollimator beleuchtenden Lichtquelle, etwa einer Quecksilberdampflampe, enthalten ist, wenn man das Fernrohr dreht. Mit dem so gebauten Spektroskop sind durch KIRCHHOFF und BUNSEN die grundlegenden Tatsachen der Spektroskopie entdeckt und erforscht worden. Für die Drehung des Fernrohrs war natürlich eine Meßvorrichtung vorgesehen, wodurch das Spektroskop aus einem Betrachtungsinstrument zu einem Meßinstrument geworden ist, das auch im englischen Sprachgebrauch Spektrometer heißt; im Deutschen dagegen bezeichnet Spektrometer ein Winkelmeßinstrument, das, allerdings mit Hilfe von spektralzerlegtem Lichte, dazu dient, die Lichtbrechung durchsichtiger Körper in vollkommenerer Weise als ein Refraktometer es leistet, zu messen, das aber außerdem Beugungserscheinungen messend zu erforschen gestattet und schließlich zu feinen Winkelmessungen überhaupt eingerichtet ist. Die Drehbarkeit des Fernrohrs eines Spektroskops ist solange kein Nachteil, als mit der Durchmessung oder der Beobachtung des Spektrums die Aufgabe des Instruments beendet ist, und solange man mit einem Prisma auskommt. Soll dagegen das Spektroskop in einer größeren Versuchsanordnung nur als Mittel dienen, um eine feststehende Blende mit Licht beliebiger aber bestimmter Wellenlänge zu beleuchten, die dann ihrerseits eine neue Lichtquelle etwa für einen Interferenzapparat oder für ein Photometer darstellt, so müßte, wenn diese Blende im Spektrum bei dem Wechsel der Wellenlänge ihren Ort nicht verändern soll, der Kollimator mitsamt der Lichtquelle und dem meist unentbehrlichen Kondensor, sowie das Prisma gedreht werden. Diese umständliche, oft überhaupt nicht durchführbare Anordnung wird mit einem Schlage entbehrlich, wenn man ein Prisma verwendet, das, ohne achromatisch zu sein, jeder Farbe des Spektrums dieselbe Ablenkung erteilt, wenn es drehbar gelagert ist und dadurch dem aus dem festen Kollimator kommenden Strahlenbüschel wechselnde Einfallswinkel an seiner ersten, und wechselnde Austrittswinkel an seiner letzten Fläche darbietet. Da bei einer solchen Anordnung die Ablenkung des in der Achse des nichtdrehbaren Fernrohrs abgebildeten Strahlenbüschels der Reihe nach für jede Farbe unveränderlich ist, spricht man von Prismen mit fester Ablenkung. Das Bedürfnis, das von einer festen Lichtquelle kommende, durch ein Prisma in seine Farben zerlegte Licht mit nach Wunsch wechselbarer Farbe auf ein feststehendes Objekt zu werfen, trat zuerst E. ABBE entgegen, der Präparate auf dem Objekttische eines Mikroskops mit Licht verschiedener Wellenlänge beleuchten wollte, um die Abhängigkeit des Auflösungsvermögens eines Mikroskops von der Wellenlänge des zur Beobachtung dienenden Lichts zu zeigen. ABBE verwendete Prismen mit drei polierten Flächen, von denen zwei dem Eintritt und dem Austritt des Lichts und dabei der Zerlegung des Lichts dienten, die dritte Fläche aber der Spiegelung, und zwar der totalen Reflexion. ABBE gab ganz allgemeine Anweisungen für derartige Prismen mit sehr verschiedener Ablenkung und führte auch die beiden wichtigsten Sonder-

fälle an, die 60°- und die 90°-Ablenkung. Trotzdem wurden diese Prismen wiederholt nacherfunden, so von Goltzsch[1]), von Pellin und Broca und von Hilger. Das Abbesche Prisma mit 90°-Ablenkung kann man sich aus einem rechtwinkligen Reflexionsprisma *BDC* (mit 90°-Ablenkung) und zwei darangelegten Prismen *ABC* und *EDB* von gleichem brechenden Winkel zusammengesetzt denken; die beiden letzteren Prismen unterliegen hinsichtlich ihres brechenden Winkels nur der Beschränkung, daß sie ohne das Reflexionsprisma zu einem Prisma zusammensetzbar sein müssen, das für ein Spektroskop geeignet ist; also darf die Summe ihrer beiden brechenden Winkel, falls sie etwa aus Schwerflint bestehen, 50°, falls sie aus Leichtflint sind, 60° nicht erheblich überschreiten. Als festarmiges Prisma wirkt das in Abb. 26 dargestellte jeweils nur für diejenige Strahlenart, die gerade den gezeichneten Verlauf im Prisma nimmt, mit anderen Worten, die durch *BC* aus dem ersten (Halb-) Prisma senkrecht aus- und in das Reflexionsprisma senkrecht eintritt. Dieselbe Farbe tritt weiterhin durch *BD* aus dem Reflexionsprisma senkrecht aus und in das zweite (Halb-) Prisma senkrecht ein. So bildet der betrachtete Strahl im



Abb. 26. Festarmiges Prisma nach E. Abbe mit 90° Ablenkung und einer inneren Reflexion an der Fläche *BC*.

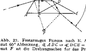


Abb. 27. Festarmiges Prisma nach E. Abbe mit 60° Ablenkung, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCE = 30°$; mit *F* ist die Drehungsachse für das Prisma bezeichnet.

Glase mit der ersten Fläche *AC* des ersten und der letzten Fläche *EB* des zweiten Prismas denselben Winkel; daher wird der Strahl auch durch Brechung an diesen beiden Flächen um denselben Betrag abgelenkt. Die beiden Ablenkungen durch Brechung haben aber, wie sich aus der Abb. 27 ergibt, entgegengesetztes Vorzeichen und heben sich auf. Übrig bleibt nur die Ablenkung durch Spiegelung an der Fläche *CD*, also die feste Ablenkung von 90°. Durch eine Drehung des ganzen Prismas kann man der Reihe nach jede Strahlenart diesen vorgeschriebenen Weg durch das Prisma nehmen lassen, d. h. aus ihrer Anfangsrichtung, die durch die Achse des festgelagerten Kollimators gegeben ist, um 90° ablenken in die Achse des ebenfalls festgelagerten Fernrohrs. Sind diese Achsen, was durch ein Reflexionsprisma mit konstanter Ablenkung, etwa ein Pentagonalprisma, leicht zu erreichen ist, nun von vornherein genau unter 90° gegeneinander geneigt und fest gelagert worden, so nimmt immer diejenige Strahlenart den beschriebenen ausgezeichneten Weg, deren Spektrallinie gerade auf dem Schnittpunkte des Fadenkreuzes einsteht. Die Drehungsachse des Prismas muß so gewählt werden, daß die Mitten der Ein- und Austrittsflächen sich möglichst wenig seitlich gegen die optische Achse vor Kollimator und Fernrohr bewegen, was durch die in Abb. 27 angedeutete Konstruktion mit praktisch ausreichender Annäherung geschieht. Die bisher für ein Reflexionsprisma von 90° durchgeführte Betrachtung gilt unverändert für andere Ablenkungswinkel; so zeigt Abb. 27 eine verbreitete Form von 60°-Ablenkung, die aus einem einzigen Stück Glas hergestellt wird.

[1]) H. Goltzsch, Rep. d. Phys. Bd. 18, S. 188a. 1882.

27. Zwei- und mehrteilige Prismen haben die Aufgabe, Wirkungen zu erzielen, die mit einem einzelnen Prisma nicht erreichbar sind, oder Fehler zu beseitigen, die mit einem Einzelprisma untrennbar verbunden sind.

α) Zweiteilige Quarzprismen. Quarz ist wegen seiner geringen Absorption im sichtbaren und ultravioletten Strahlengebiete und wegen seiner großen Verbreitung in der Natur das wichtigste Prismenmaterial für Ultraviolettspektrographen; er hat nur einen Nachteil, die Doppelbrechung, die durch die Werte für einige Wellenlängen gekennzeichnet sei.

Tabelle 1. Doppelbrechung des Quarzes nach F. F. MARTENS[1].

λ in μμ	n_o 18°	n_e 18°
214	1,63035	1,64258
257	1,59620	1,60710
340	1,56747	1,57737
394	1,55846	1,56805
434	1,55398	1,56339
486	1,54967	1,55879
533	1,54680	1,55599
589	1,54426	1,55337
656	1,54189	1,55091
768	1,53903	1,54794

Die Doppelbrechung eines beliebig geschnittenen Quarzprismas in einem Spektralapparat läßt jede Spektrallinie verdoppelt erscheinen. Da das dem ordentlichen Strahle entsprechende Spaltbild senkrecht zu dem des außerordentlichen Strahles polarisiert ist, könnte man eines von beiden durch ein Nikol auslöschen, müßte aber dann außer dem Lichtverlust von 50% die Absorption des Nikols mit in Kauf nehmen. Von diesem Notbehelfe wird gänzlich abgesehen, da das CORNUsche Doppelprisma ein in weiten Grenzen von Doppelbrechung freies Bild liefert. Wie Abb. 28 lehrt, besteht es aus zwei spiegelgleichen Hälften von rechtsdrehendem und linksdrehendem Quarz, die so aus ihren Kristallen geschnitten sind, daß die optische Achse auf der Kittfläche BD senkrecht steht. Dadurch hat jeder parallel der Basis AC, d. h. in seinem Minimum der Ablenkung das Prisma durchsetzende Strahl gleiche Strecken in einem rechtsdrehenden und einem linksdrehenden Kristall zu durchlaufen; die durch die erste Prismenhälfte dem außerordentlichen Strahle gegenüber dem ordentlichen aufgezwungene Verzögerung wird in der zweiten Prismenhälfte in das Gegenteil verwandelt, so daß im ganzen keine doppelbrechende Wirkung mehr übrig bleibt. Diese günstige Wirkung, die, streng genommen, nur für die in der Kristallachse verlaufenden Strahlen gilt, erstreckt sich erfahrungsgemäß auch auf benachbarte Richtungen, mit anderen Worten, nicht nur auf die im Minimum das Cornuprisma durchsetzende Farbe, sondern auf das Spektralgebiet von etwa 1850 bis 6000 Ångströmeinheiten. Muß man allerdings zur Erhöhung des Auflösungsvermögens zwei Cornuprismen hintereinander schalten, so schrumpft das Gebiet der einfach erscheinenden Spektrallinien sofort auf ein Drittel zusammen. Nimmt man ein Cornuprisma auseinander und ordnet die Hälften nach der YOUNGschen Montierung auf den Fassungen des Kollimators und des Fernrohrs an (Abb. 29), so erhält man ebenfalls einfache Spektrallinien. Wenn man beide Hälften als ein Ganzes betrachtet, verläuft der jeweils in der Achse des Fernrohrs abgebildete Strahl im Minimum der Ablenkung, d. h. unter den günstigsten Abbildungsbedingungen, durch das Prisma. Durch die bloße Drehung des Fernrohrs leistet die YOUNGsche Montierung, die überhaupt keinen drehbaren Prismentisch aufweist, also dasselbe



Abb. 28. Das CORNUsche Quarzdoppelprisma, aus zwei spiegelgleichen, aus rechts- und linksdrehendem Quarze bestehenden 30°-Prismen zusammengelegt, die Ablenkung für $\lambda = 275\ \mu\mu$ beträgt $52^1/_2°$.

[1] F. F. MARTENS, Ann. d. Phys. (4) Bd. 6, S. 603. 1901.

wie eine der vielen Einrichtungen zur Erhaltung des Minimums der Ablenkung. Man kann zur Erhöhung des Auflösungsvermögens ein Cornuprisma zwischen die Youngschen Prismen setzen; arbeitet man in wechselnden Spektralgebieten, die der Reihe nach in der Achse des Fernrohrs oder der Kamera abgebildet werden sollen, so muß für das Cornuprisma durch eine Vorrichtung das Minimum der Ablenkung erhalten werden. Mit einem einfachen Quarzprisma, etwa von 30°, wird nach R. Straubel[1]) die Wirkung des Cornuprismas, d. h. die Vermeidung der Verdoppelung der Spektrallinien erzielt, wenn das Licht, nachdem es die Fläche *BD* in Abb. 28 senkrecht getroffen hat, an dieser durch Reflexion umkehrt und nun denselben Quarzweg in entgegengesetzter Richtung zurücklegt, um schließlich aus der Fläche *AB* unter dem gleichen Winkel auszutreten, unter dem es eingetreten war. Zur Erhöhung der Lichtstärke wird alsdann die spiegelnde Fläche mit einem metallischen Belage versehen. Die wertvolle Wirkung der Cornuschen Anordnung ist durch R. Straubel[2]) auch dem Abbeschen Prisma mit fester Ablenkung verliehen worden (Abb. 30). In dem kleinen Prisma *ACB* verläuft die Hauptachse des Kristalls senkrecht zur brechenden Kante *B*, in dem großen dagegen parallel zu *B*. Laßt man natürliches Licht einzeln durch die Prismen treten, so daß es aus der Kittfläche des ersten Prismas senkrecht austritt und die des zweiten Prismas senkrecht eintritt, so zeigt der weniger stark abgelenkte ordentliche Strahl beim Austritt aus dem ersten Prisma den entgegengesetzten Polarisationszustand wie beim Austritt aus dem zweiten Prisma, dasselbe gilt für den außerordentlichen Strahl. Dagegen läßt das durch beide aneinandergelegte Prismen gegangene Licht, mit Fernrohr und Nikol betrachtet, keine Polarisation erkennen und es ist keine Doppelbrechung bemerkbar. Der Winkelbereich, innerhalb dessen die Doppelbrechung bei mittleren Werten der Brennweite (etwa bis zu 30 cm) des Fernrohr- oder Kameraobjektivs unmerklich ist, ist bei dem Straubelschen Prisma etwa halb so groß wie bei dem Cornuprisma.

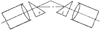


Abb. 29. Die Youngsche Montierung zweier 30°-Prismen aus rechts- und linksdrehendem Quarze, mit senkrechtem Eintritt und Austritt für die aus der Collimatorachse kommenden und in der Kamerachse verlaufenden Strahlen.



Abb. 30. Das zweiteilige Quarzprisma nach R. Straubel; die Achse des Prismas *ABC* verläuft parallel *BC*, die des Prismas *BCD* senkrecht zur Ebene der Zeichnung.

β) Die Farbenzerstreuung, die jedem Einzelprisma anhaftet, ist störend, wenn das Prisma nur den Zweck hat, das Licht in regelbarer oder sogar meßbarer Weise abzulenken. Nur sehr geringe Prismenwinkel ergeben *Ablenkungsprismen* mit praktisch, bei mäßiger Fernrohrvergrößerung unmerklicher Farbenzerstreuung; solche sind in geodätischen Instrumenten und in Entfernungsmessern von Bedeutung. Wird stärkere Ablenkung verlangt, etwa 10° und mehr, so scheiden einfache Prismen aus, man muß dann zwei Prismen mit verschiedener Farben-

[1]) R. Straubel, Ann. d. Phys. (4) Bd. 7, S. 905. 1902.
[2]) Kurz beschrieben von F. Löwe, ZS. f. Instrkde. Bd. 27, S. 274. 1907.

zerstreuung und mit entgegengesetzt gelagerten brechenden Kanten, am besten verkittet zu einem achromatischen Prisma vereinigen; die Grundlagen für die Berechnung achromatischer Prismenpaare findet man im Abschnitt H. In Gebrauch sind sie in Stereoskopen, insbesondere in solchen für große Bilder, deren Breite den mittleren Augenabstand (65 mm) erheblich überschreitet.

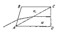


Abb. 31. Das RUTHERFURDsche Prisma mit Autokollimation; das durch AB eingetretene Licht kehrt im Flintprisma ACD an der versilberten Fläche DC um und tritt aus dem Kronprisma durch AB wieder aus.

γ) Zerstreuungsprismen. Viel wichtiger sind zwei und mehrteilige Prismen, deren Farbenzerstreuung ausgenutzt werden soll. Von zweiteiligen Prismen für spektroskopische Zwecke ist nur das halbe RUTHERFURDsche Prisma (Abb. 31) zu nennen, dem wir bei C. PULFRICHS Autokollimationsspektroskop wieder begegnen werden. Dreiteilige Prismen entstehen erstens nach RUTHERFURD und BROWNING durch Anfügen zweier Kronprismen an ein Flintprisma, dessen brechender Winkel so groß ist, daß es, für sich allein in Luft gebettet, undurchsichtig wäre, weil, wie oben in Abb. 24, der durch die erste Fläche eingedrungene Strahl aus der zweiten durch Totalreflexion nicht herausgelassen wird. Je nach Wahl des Winkels der Kronprismen wird entweder jede Farbe des Spektrums durch das dreiteilige Prisma abgelenkt, dann heißt das Prisma ein RUTHERFURDsches (Abb. 32), oder eine einzige bevorzugte Farbe geht ohne Ablenkung durch das Prisma, dann liegt ein geradsichtiges Prisma nach BROWNING vor (Abb. 33). Bei einer dritten, und zwar festarmigen Form fügt man an ein Reflexionsprisma, z. B. von 90°, zwei Halbprismen von hoher Farbenzerstreuung an (Abb. 34) und erspart so teures Flintglas und dessen Absorption in demjenigen Teile des Prismas, der nur zur Ablenkung, nicht aber zur Steigerung der Dispersion beiträgt. Nach H. ERFLE geht das „RUTHERFURDsche Prisma" eigentlich auf BROWNING zurück und sollte dessen Namen tragen, während RUTHERFURD der Erfinder eines aus zwei Flint- und drei Kronprismen zusammengekitteten fünfteiligen Dispersionsprismas ist, das sich nicht als lebensfähig erwiesen hat; andererseits trägt aber das später zu besprechende dreiteilige geradsichtige Prisma, das Kernstück des weitverbreiteten Handspektroskops BROWNINGscher Konstruktion, den Namen AMICIS, während es bereits von DOLLOND angegeben ist. Da eine Umtaufe dieser beiden bekanntesten Dispersionsprismen nur große Verwirrung in die praktische Optik tragen würde, begnügen wir uns mit der Anführung von ERFLES historischen Feststellungen, ohne aber die eingebürgerten Bezeichnungen zu ändern. Zur Berechnung der Dispersion eines RUTHERFURDschen Prismas geht man gewöhnlich von der Lage des Prismas aus, in der jeder durchzurechnende Strahl parallel der Basis des

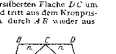


Abb. 32. Das dreiteilige, aus einem Flintprisma ACE und zwei Kronprismen ABC und ECD verkittete RUTHERFURDsche Prisma.

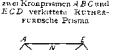


Abb. 33. Das geradsichtige Prisma nach BROWNING, aus einem Flintprisma und zwei Kronprismen verkittet.

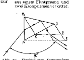


Abb. 34. Dreiteiliges, festarmiges Prisma mit 90° Ablenkung, aus dem 90°-Reflexionsprisma BCD und zwei 30°-Flintprismen bestehend; soll es aus einem Stück hergestellt werden, so muß die Austrittsfläche die Lage AJ erhalten.

Flintprismas verläuft; man setzt also voraus, daß beim Gebrauche das Prisma auf einem automatischen Prismentisch ruht, der sich halb so schnell dreht wie das Beobachtungsfernrohr. Wird dagegen bei ruhendem Prisma das ganze sichtbare Spektrum auf einmal aufgenommen, z. B. in einem Spektrographen, so versagt diese einfache Rechnungsart; um eine Wellenlängentabelle, -kurve oder -teilung aufzustellen, muß man zwanzig oder mehr Spektrallinien bekannter Wellenlänge im Spektrogramm durchmessen, um daraus die Verteilung der ganzzahligen Wellenlängen abzuleiten. Dasselbe gilt von der Ausarbeitung einer spiralig auf einem Zylinder oder auf einer Kreisscheibe aufgewickelten Wellenlängentrommel.

δ) Geradsichtige Dispersionsprismen. Die Ablenkung eines dreiteiligen Dispersionsprismas der Rutherfurdschen Form wird, wenn man das Flintprisma unverändert läßt, die brechenden Winkel der zwei gleichen Kronprismen aber immer größer wählt, kleiner und kleiner; man kann durch Verfügung über den Kronwinkel erreichen, daß für eine bestimmte Farbe, z. B. für $\lambda = 589{,}3\,\mu\mu$, das symmetrisch gebaute dreiteilige Dispersionsprisma überhaupt keine Ablenkung hat, daß es also für diese eine Farbe geradsichtig ist. Je nach dem Zwecke, dem das geradsichtige oder Amicische Prisma dienen soll, wählt man die Farbe, für die die Rechnung ausgeführt wird. Das verbreitetste Prisma dieser Art bildet den Hauptbestandteil des Handspektroskops nach Browning. Hier findet man neuerdings die Prismenwinkel so gewählt, daß beiderseits der Farbe, für die die Geradsichtigkeit besteht, das Spektrum sich in zwei etwa gleichen Winkelbereichen erstreckt. Größere Ausführungsformen des Amiciprismas sind als Projektionsprismen sehr bequem und, abgesehen von den Kosten, den obenerwähnten Flüssigkeitsprismen mit einer Füllung von Schwefelkohlenstoff oder Zimtsäureäthylester vorzuziehen. Ein für die *D*-Linie geradsichtiges Amiciprisma schwächerer Dispersion dient im Eintauchrefraktometer nach C. Pulfrich dazu, die Grenzlinie der totalen Reflexion, die von Natur bunt ist, durch Einfügung einer gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Dispersion farblos zu machen und an die Stelle zu verlegen, wo sie bei Beleuchtung mit Natriumlicht liegt. Fünfteilige Prismen stehen nur noch auf dem Papier; wo, wie im Protuberanzenspektroskop, die Dispersion eines Amiciprismas nicht ausreicht, schaltet man mehrere hintereinander.

28. Prismensätze. α) Prismenpaar mit veränderlicher Ablenkung. Läßt man in einem Meßinstrument, etwa in einem Entfernungsmesser, das Licht nacheinander durch zwei gleiche Glaskeile treten, die um entgegengesetzt gleiche Winkel gedreht werden können, so hat man die Wirkung eines Glaskeils mit veränderlichem Winkel. Man erhält daher alle Ablenkungen von Null bis zum doppelten Betrage der Ablenkung ε eines Keils. Nimmt man die Lage zum Ausgangspunkt der Messungen, in der die Ablenkung am größten ist — beide Keilkanten auf derselben Seite — und dreht jeden Keil um den Winkel φ, so ergibt sich als Ablenkung $2\varepsilon\cos\varphi$. Die Theorie der Abbildung durch derartige Drehkeilpaare ist ausführlich behandelt von H. Erfle[1]).

β) Prismenpaar mit veränderlicher Dispersion. Ersetzt man in dem soeben besprochenen Kompensator die Keile durch zwei gleiche geradsichtige Prismen nach Amici, so erhält man einen Kompensator ohne Ablenkung (wenigstens für die der Rechnung zugrunde liegende Farbe), aber mit veränderlicher Farbenzerstreuung, d. h. den Kompensator des Abbeschen Refraktometers. Dieser erfüllt neben der obenerwähnten Aufgabe, die Grenzlinie zu achromatisieren, noch die zweite, ein Maß für die Farbenzerstreuung der zu

[1]) H. Erfle, ZS. f. Phys. Bd. 1, S. 57. 1920.

messenden Substanz zu liefern. Nach den von E ABBE[1]) aufgestellten Gleichungen sind Tabellen berechnet, die die erforderliche Winkeldrehung der Kompensatorprismen in Verbindung mit dem abgelesenen Brechungsindex n_D der Substanz in den Dispersionswert $n_F - n_C$ umzurechnen gestatten.

γ) Prismenpaar mit fester Ablenkung. Zwei gleiche, auf Drehtischen gelagerte Prismen mit fester Ablenkung kann man so anordnen, daß eine einzige Meßschraube an je einem an jedem Drehtisch befestigten Hebelarm in gleicher Weise angreift. Das zweite Prisma hebt dabei die durch das erste dem Licht erteilte Ablenkung wieder auf. Die Einrichtung, in Glas oder Quarz ausgeführt, hat sich als Mittelstück eines festarmigen Spektralapparates für sichtbares und ultraviolettes Licht bewährt[2]).

δ) Das Youngsche Prismenpaar mit senkrechtem Eintritt und Austritt des Lichts wird nicht nur mit 30°-Quarzprismen, sondern auch mit halbierten Rutherfurdprismen ausgeführt. Es bietet außerdem ein Hilfsmittel, um bei größerer Prismenzahl mit Prismen geringerer Seitenlänge auszukommen (Abb. 29), während an der Höhe der Prismen, d. h. an der Länge der brechenden Kante, nichts gespart werden kann.

ε) Prismensätze aus drei und mehr Prismen sind nur brauchbar, wenn sie mit einer der mannigfaltigen Einrichtungen zur Erhaltung des Minimums der Ablenkung ausgestattet sind, die am vollständigsten von H. KONEN[3]) zusammengestellt wurden, auch eine Folge von Cornuprismen hat sich bewährt (FÜCHTBAUER); sehr leistungsfähig sind vielteilige Prismensätze mit fester Ablenkung mit Autokollimation nach DU BOIS, ELIAS und LÖWE, und ohne diese nach FORSTERLING, sie lassen sich auch mit lichtstarken Fernrohren kombinieren.

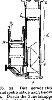


Abb. 35. Das geradsichtige Handspektroskop nach BROWNING. Durch die Schutzkappe *a* tritt das Licht in den Spalt *b*, der durch Drehen an dem Randelring *c* verstellt werden kann, und in die Lupe *i*. Das Spaltrohr *d* kann gegen das Prismenrohr *e* verschoben werden. Der Tubus *h* trägt die Wellenlängenteilung *g*, die einer Kollektorlinse benachbart ist. Mit *f* ist die Lage des beobachtenden Auges angedeutet.

b) Spektroskope.

29. Das geradsichtige Handspektroskop nach Browning. Wie Abb. 35 lehrt, setzt sich das Handspektroskop zusammen aus dem Spalt, der gegen den Spalt verschiebbaren Lupe und dem geradsichtigen dreiteiligen Amiciprisma, das dem Auge des Beobachters unmittelbar benachbart ist. Das Spektroskop wird gerade auf die Lichtquelle gerichtet, die beobachtet werden soll, und zu dem Zwecke in ein wenn auch noch so einfaches Stativ eingeklemmt. Die Klaue des Stativs hält nur das Spaltrohr, so daß das engere, die Lupe und das Prisma umfassende Rohr noch ausgezogen oder eingeschoben werden kann. In der Blickrichtung erscheint diejenige Farbe, für die das Prisma geradsichtig gerechnet worden ist. Der Spalt wird durch

[1]) E. ABBE, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und des Zerstreuungsvermögens usw., S. 48. Jena: Maukes Verlag 1874.

[2]) F. LÖWE, ZS. f. Instrkde. Bd. 27, S. 271. 1907; vgl. auch H. v. HALBAN u. H. GEIGEL, ZS. f. physik. Chem. Bd. 96, S. 214. 1920.

[3]) H. KONEN in H. KAYSERS Handb. d. Spektroskopie.

zwei Spaltbacken mit gut geradegeschliffenen Kanten gebildet, die am besten beide quer zu den Kanten fein verstellt werden können. Schließt man den Spalt allmählich und blickt gegen eine helle Lichtquelle, z. B. den hellen Himmel in der Nähe der Sonne, so soll mit einem Ruck Dunkelheit eintreten, nur dann sind die Spaltbacken genügend gut geradlinig und einander parallel. Ist, wie bei Spektroskopen für Schulzwecke, nur eine Spaltbacke beweglich, so wandert beim Öffnen des Spaltes die Mitte der Spaltöffnung nach der Seite der beweglichen Backe, d. h. sie wechselt ihren Ort im Spektrum mit wechselnder Spaltbreite; solche Spektroskope sind daher nur mit Vorsicht zur Ablesung von Wellenlängen in einer Wellenlängenteilung zu gebrauchen, man bezieht dann am besten immer nur den festen Rand der Spaltlinie auf die Wellenlängenteilung. Weniger bedenklich wäre ein Spaltkopf, der mit mehreren festen Spalten von verschiedener Breite ausgestattet ist, die der Reihe nach in der Achse der Lupe gerückt oder gedreht werden können; die Breite des engsten Spaltes muß dann so bemessen sein, daß die stärkeren FRAUNHOFERschen Linien des Spektrums noch gut sichtbar sind. Die Lupe soll achromatisch sein, damit dem Beobachter erspart bleibt, sie bei der Durchmusterung des Spektrums immer von neuem nachstellen zu müssen. Selbst Handspektroskope, die nur zum Vergleiche von Absorptionsbanden, also nicht zu genauen Ermittlungen von Wellenlängen bestimmt sind, müssen als Ersatz für die Wellenlängenteilung wenigstens ein vorschaltbares Vergleichsprisma haben, damit zwei Spektra auf einmal betrachtet werden können; aus dem Gedächtnis kann man nie ein Spektrum mit einem kurz vorher betrachteten zuverlässig vergleichen. Auch der Verlauf einer spektralen Reaktion, d. h. der meist in kurzer Zeit als Folge chemischer Veränderungen in einer Lösung eintretenden Verschiebung, Verbreiterung oder Verdoppelung einer Absorptionsbande, wie sie in der klinischen Spektroskopie[1]) täglich zu verfolgen sind, kann nur durch die gleichzeitige Beobachtung des Absorptionsspektrums der behandelten und der unbehandelten Lösung mit Sicherheit beobachtet werden. Seinen vollen Wert erhält aber das Handspektroskop, das im Verhältnis zu seiner Leistungsfähigkeit eines der preiswertesten optischen Meßinstrumente ist, erst durch die Wellenlängenteilung, die, wie Abb. 35 lehrt, in einem kurzen seitlichen Rohre untergebracht ist und durch zweimalige Spiegelung dem Beobachter sichtbar wird. Das Skalenrohr wird zur Scharfeinstellung solange verschoben, bis die Striche der Teilung sich gegen die Spektrallinien eines Flammenspektrums oder die FRAUNHOFERschen Linien nicht mehr bewegen, wenn man das Auge vor dem Spektroskope seitlich hin- und herbewegt (Verschwinden der Parallaxe). Erst dann prüft man die Lage der Skalenstriche zu bekannten Spektrallinien. Ohne künstliche Lichtquellen geschieht dies bei Tage, indem man im Spektrum des hellen Himmelslichts, etwa einer weißen Wolke, die dunkle *D*-Linie im Orange aufsucht, die durch den Natriumdampf in der Sonnenphotosphäre entsteht. Deren Wellenlänge ($\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$) liegt dem Striche 590 $\mu\mu$ so nahe, daß es zur Justierung der Wellenlängenteilung genügt, die Linie dicht neben den Strich 590 zu bringen, zwischen 590 und 580. In manchen Spektroskopen ist diese wichtigste, weil verbreitetste Spektrallinie durch eine Verlängerung des Teilstrichs 590 unter die Zeile, auf der alle anderen Teilstriche stehen, besonders gekennzeichnet. Die Wellenlängenteilung wird bei der Beobachtung von Absorptionsbanden in der Regel durch dieselbe weiße Lichtquelle mit beleuchtet, die ihr Licht durch

[1]) Vgl. die Monographie O. SCHUMM, Klinische Spektroskopie. Jena: G. Fischer 1907, ferner O. LEERS, Die forensische Blutuntersuchung. Berlin: Julius Springer 1910, oder das Kapitel „Spektroskopische Methoden des Mediziners" von F. LÖWE in Abderhaldens Handb. d. biochem. Untersuchungsmethoden, Abt. II, Teil 2, S. 1431 ff. 1926.

das Absorptionsgefäß auf den Spalt wirft. Schwierig ist oft die Beleuchtung der Teilung bei der Beobachtung von Emissionsspektren geringer Ausdehnung oder Helligkeit, z. B. von Funkenspektren. Dann ist eine besondere Beleuchtungsvorrichtung, etwa durch ein seitlich aufgestelltes, den Beobachter nicht blendendes Lämpchen, das durch einen beliebig einfachen Hilfsspiegel die Skala beleuchtet, unentbehrlich; mit einer solchen Einrichtung läßt sich auch eine Anpassung der Helligkeit der Skalenstriche an diejenige der Spektrallinien vereinigen; es ist nicht schwer, schwache Linien zu übersehen, wenn das Auge durch eine leuchtend helle Wellenlängenteilung geblendet wird. Für häufig wiederkehrende Beobachtung schwacher Linien oder Banden ist ein durch einen Akkumulator mit Regulierwiderstand oder einen Transformator gespeistes und an das Skalenrohr angestecktes Glühlämpchen zur besonderen und regelbaren Beleuchtung der Wellenlängenteilung[1]) bestimmt. Die Notwendigkeit, ein Stativ auch für Handspektroskope zu benutzen, ist bei der Beobachtung von Funkenspektren einleuchtend, dagegen wird der Nutzen meist verkannt, den bei der Beobachtung von Funkenspektren ein Kondensor bringt, der ein schwach vergrößertes Bild des Funkens auf den Spalt wirft. Eine so kleine Lichtquelle wie ein Funke kann die Lupe eines Handspektroskops oder den Kollimator eines größeren Spektroskops ohne Kondensor nicht mit Licht ausfüllen, während der konvergente, vom Kondensor kommende Strahlenkegel alle Teile der Lupe erleuchtet. So erklärt sich die Steigerung der Helligkeit der Spektrallinien, die durch den Kondensor erzielt wird; die zweite Wirkung des Kondensors, die einzelnen Teile der Lichtquelle unverändert in der Ebene des Spaltes abzubilden und dadurch der spektroskopischen Erforschung zugänglich zu machen, kommt in dem Abschnitte über Spektralanalyse zur Sprache.

30. Spektroskope mit einfachem Prisma nach KIRCHHOFF und BUNSEN. Verglichen mit dem Handspektroskop hat das klassische Spektroskop nach KIRCHHOFF und BUNSEN eine geringere Farbenzerstreuung, aber dafür ein stärker vergrößerndes optisches System zur Beobachtung und Ausmessung des Spektrums. Ein zweiter grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden besteht darin, daß die Lupe des Handspektroskops nur ein virtuelles, das Fernrohr aller übrigen Spektroskope aber ein reelles Spektrum entwirft, das der Messung erheblich leichter zugänglich ist. Erst die Einführung des Fernrohrs in das Spektroskop ermöglicht, im Spektrum ein Fadenkreuz zum Einstellen auf eine Linie oder Bande zu benutzen und die mikrometrische Bewegung des Fernrohrs oder des Prismas zur genauen Messung der Abstände der Linien zu verwerten, sowie schließlich mikrometrisch verstellbare Skalen für die Wellenlängenmessung einzurichten. In Abb. 36 hat die Kollimatorlinse, in deren Brennebene der Spalt sitzt, die Aufgabe, das aus dem Spalte kommende Strahlenbüschel parallel zu machen, so daß es nach dem Durchgange durch das Prisma oder (s. Ziff. 38) ein Gitter in der Brennebene des Fernrohrs zu einer im kontinuierlichen Spektrum fester Körper stetigen, bei leuchtenden Gasen und Dämpfen unstetigen Folge farbiger Abbilder des Spaltes in der Brennebene des Fernrohrs vereinigt wird. Die Anforderungen an den Spalt sind hier höher als bei dem Handspektroskop, da oft die Brennweite des Okulars kleiner, seine Vergrößerung also stärker als die der Lupe des Handspektroskops ist; die Breite des Spaltes wird durch die zweckmäßig mit einer Meßtrommel ausgestattete Spaltverstellungsschraube gemessen und oft in Hundertstelmillimetern angegeben; die Brennweite des Kollimators sollte jeder Inhaber eines Spektroskops kennen, der sich rechnerisch Rechenschaft über die mögliche Definition des Spektrums geben will; vom Fernrohr braucht dann nur die Vergrößerung bekannt zu sein

[1]) Verfertiger Fa. Fr. Schmidt & Haensch, Berlin SW. 42, Prinzessinnenstr. 16.

(vgl. den Abschnitt „Reinheit des Spektrums"). Das Prisma wird in der Regel von einem 60°-Prisma aus mittlerem Flint (etwa $N = 1{,}65$) gebildet; braucht man stärkere Dispersion, so kann es bei moderneren Spektroskopen gegen ein dreiteiliges RUTHERFURDsches ausgewechselt werden, das die Wirkung zweier 60°-Prismen hat; in diesem Falle ist wegen der großen angularen Bewegung des Fernrohrs ein automatischer Prismentisch erwünscht, der das Prisma gleichsinnig mit dem Fernrohr, aber nur halb so schnell sich drehen läßt. Zur Messung der Wellenlängen dient seit Jahrzehnten eine Skala mit gleichen Abständen der Striche, die durchscheinend sind und durch ein besonderes Objektiv ins Unendliche gerückt werden; die Strahlen werden an der letzten Prismenfläche, wie beim Handspektroskop, gespiegelt und treten dann in das Fernrohr ein, wo die Skala sich dem Spektrum überlagert. Die gleichen Abstände der Striche ermöglichen es, Bruchteile eines Strichabstandes mit einer kleinen Meßschraube zu messen, wodurch das unsichere Schätzen der Zehntelintervalle wegfällt, und

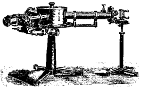


Abb. 36. Spektroskop nach KIRCHHOFF und BUNSEN mit mikrometrisch verstellbarem Meßfernrohr; vor dem VIERORDTschen Doppelspalte ist eine Küvette aufgestellt.

so den Vorteil der Wiederholungseinstellungen auszunutzen. Andererseits aber ist es nicht möglich, eine solche Teilung nach Wellenlängen zu beziffern, da den gleichen Winkelwerten der Strichabstände ganz verschiedene Wellenlängenunterschiede in den einzelnen Bereichen des Spektrums entsprechen. Da die Aufgabe, die Wellenlängen neu aufgefundener Spektrallinien zu messen, längst nicht mehr mit Prismenspektroskopen und mit dem Auge, sondern durch Aufnahmen mit Hohlgitterspektrographen bearbeitet wird, hat die Skala im Spektroskop nur noch den Rang einer Fingerteilung; aus diesem Grunde begnügt man sich auch neuerdings mit einer direkt nach Wellenlängen bezifferten Teilung, obwohl diese die mikrometrische Auswertung der Bruchteile nicht in so bequemer Weise zuläßt wie eine mit gleichen Strichabständen. Für die Interpolation unbekannter Spektrallinien zwischen bekannte oder zwischen die benachbarten Striche der Wellenlängenteilung benutzt man dann die Feinbewegung des Fernrohrs mittels der Mikrometerschraube, die vom Spektrometer übernommen ist. Als Einstellmarke im Fernrohre dient meist ein Andreaskreuz, aber auch der einfache oder ein Doppelfaden hat seine Freunde. Für die Ausmessung von

Emissionsspektren wählt man meist ein stärkeres Okular als für Absorptionsspektra, da flache Absorptionsbanden im stark vergrößernden Okular schwerer einzustellen sind als in einem schwachen.

31. Festarmige Spektroskope. Ein Prisma mit fester Ablenkung von 90°, drehbar zwischen einen festgelagerten Kollimator und ein ebenfalls festes Fernrohr eingesetzt, ergibt ein festarmiges Spektroskop (Abb. 37). Das Prisma wird durch eine Mikrometerschraube gedreht, die bei den für den Unterricht bestimmten einfachen Apparaten mit Umdrehungszähler und hundertteiliger Trommel, bei den für die Praxis des Physikers und des Chemikers bestimmten Modellen dagegen mit einer großen, nach Wellenlängen bezifferten einfachen oder Spiraltrommel ausgerüstet ist (Hilger, Leiss, Pellin & Broca, Zeiss). Zur Erzielung der doppelten Dispersion werden zwei Prismen von 90° oder 60° Ablenkung hintereinandergeschaltet bei dem Modell von F. Löwe[1]). Beide Prismen werden durch eine und dieselbe Meßschraube gedreht, die ebenfalls bei Bedarf eine nach Wellenlängen bezifferte Spiraltrommel hat (Abb. 38). Wechselt man die Objektive und die Glasprismen gegen Quarzfluoritachromate und Straubelsche Quarzprismen aus, so dient derselbe Apparat als Monochromator für das ultraviolette Strahlengebiet. Neuerdings wird die Spiraltrommel gleichzeitig mit zwei Wellenlängenteilungen, je einer für das sichtbare und für das ultraviolette Spektrum, ausgerüstet, wobei der Index mit einer Vorrichtung versehen wird, der eine Verwechslung der Ablesungen ausschließt. Über den Einbau eines solchen im Gebrauche sehr bequemen Monochromators in seine spektrophotometrische Einrichtung berichtet H. v. Halban[2]). Einzelne, paarweise gekoppelte festarmige Prismen und mehrteilige festarmige Prismensätze spielen in den optischen Anordnungen, die der Physiker im Forschungslaboratorium sich nach Bedarf aufbaut, eine von Jahr zu Jahr wachsende Rolle; es sei hier nur noch (Abb. 39) ein festarmiger Aufbau nach Försterling skizziert, bei dem man je nach Bedarf die Dispersion eines Prismas oder dreier Prismen zur Verfügung hat, ohne an der Lage von Kollimator und Fernrohr (oder Kamera) das geringste ändern zu müssen. Der gleiche Prismensatz wird auch bei dem Hohlspiegelspektrometer (vgl. Ziff. 39) benutzt.

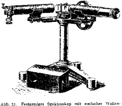


Abb. 37. Festarmiges Spektroskop mit einfacher Wellenlängentrommel und Schutzkasten für den Prismentisch.

[1]) F. Löwe, ZS. f. Instrkde., Bd. 28, S. 2641, 1918 und Verh. d. d. Phys. Ges. Bd. 10, S. 671. 1908.

[2]) H. v. Halban u. K. Siedentopf, ZS. f. phys. Chem. Bd. 100, S. 208. 1922; Bd. 103, S. 71, 1923 und H. v. Halban u. L. Ebert, ZS. f. Physik Bd. 14, S. 182. 1923.

32. Festarmige Spektroskope mit Autokollimation. Auf die guten Erfahrungen, die mit der Autokollimation bei der Messung des Brechungsindex von Gläsern im Abbeschen Spektrometer gemacht wurden, gründete C. Pulfrich[1])

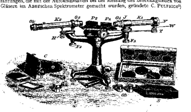


Abb. 38. Festarmiger Spektralapparat mit zwei Prismen und spiraliger Wellenlängentrommel *M*; *Sp* ist der gegen das Okular auswechselbare zweite Spalt, *C* eine gegen das Fernrohr austauschbare Kamera mit 6×9 cm Kassette.

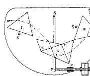


Abb. 39. Festarmiger Prismensatz nach K. Försterling, aus zwei 60°-Prismen I und III und einem dreiteiligen festarmigen Prisma mit 90° Ablenkung bestehend. Die durch I und II erzeugten Ablenkungen heben sich auf, es bleibt nur die Konstante Ablenkung (90°) von II übrig. P_1, P_2 und P_3 sind die Drehzapfen der drei Prismen, *M* die Mutter und *Sp* die Spindel der Meßschraube. $T_1 T_2$ sind die Umdrehungszahlen mit der Meßtrommel.

den Bau seines Autokollimationsspektroskops (Abb. 40). Es besteht aus dem Autokollimationsfernrohr, dessen Spalt durch zwei Vergleichsprismen bedeckt ist, und einem halben Rutherfurdschen Prisma mit versilberter Rückfläche, das mikrometrisch drehbar ist. Zur Wellenlängenmessung kann ein Skalenrohr mit nach Wellenlängen bezifferter Teilung hinzugenommen werden. Den schrägen Einblick und die tiefe Lagerung der Meßschraube der ursprünglichen Pulfrichschen Anordnung finden wir bei dem jüngsten Spektroskop von Ad. Hilger, nur daß hier das halbe Rutherfordprisma durch ein 30°-Flintprisma, dafür aber die Wellenlängenskala durch die modernere

[1]) C. Pulfrich, ZS. f. Instrkde. Bd. 14, S. 354. 1894.

Spiraltrommel ersetzt ist. Das Prinzip der Autokollimation mit einem Prisma ist auch von FÉRY in seinem eigenartigen Spektroskop ohne Linsen[1]) verwertet worden, allerdings nur als Spektrograph (vgl. Ziff. 39 dieses Kap.). Spektroskope

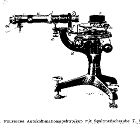


Abb. 40. C. PULFRICHS Autokollimationsspektroskop mit Spaltmeßschraube T, Objektivverstellung J, Prisma P, Teilkreis mit Nonius NL, und Meßschraube M, das Okular Ok wird durch zwei Blendschirme gegen die Strahlung der Lichtquellen geschützt, ein Blendschirm ist weggelassen.

mit mehreren auf einem Prismentische mit automatischer Erhaltung des Minimums der Ablenkung angeordneten Prismen sind nach den Erfahrungen von DU BOIS, ELIAS und LÖWE ihrem Auflösungsvermögen nach im sichtbaren Spektrum guten Gittern fast ebenbürtig, ihrer Lichtstärke nach weit überlegen; beides gilt in noch erhöhtem Maße im Ultraviolett nach FÜCHTBAUER für Mehrprismenapparate aus Quarz.

33. Gitterspektroskope für durchfallendes Licht. Beugungsgitter werden zum Bau von Spektroskopen häufiger erst in jüngerer Zeit herangezogen, seit die Herstellung guter Kontaktkopien von Metalloriginalen gelungen ist. Man geht dabei nicht auf Apparate besonders hohen Auflösungsvermögens aus, sondern begnügt sich mit Gittern, die Spektra von annähernd derselben Ausdehnung liefern, wie Spektroskope mit einem Prisma. Da die Lichtstärke eines Gitterspektroskops ganz allgemein derjenigen eines Prismenspektroskops gleicher

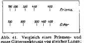


Abb. 41. Vergleich eines Prismen- und eines Gitterspektrums von gleicher Länge; die gesetzmäßige Verteilung der Spektralbezirke im Gitterspektrum zeichnet dieses vor dem Prismenspektrum aus.

[1]) CH. FÉRY, C. R. Bd. 150, S. 216. 1910.

Größenordnung unterlegen ist, liegt der Hauptwert des Gitterspektroskops in seiner Eignung für die Untersuchung von Absorptionsspektren, die durch eine gute Lichtquelle und durch zweckmäßige Wahl der Schichtdicke oder der Verdünnung immer genügend hell gemacht werden können. Während die schwächeren Linien der Flammenspektra im Gitterspektroskop kaum zu fassen sind, erscheinen das Spektrum der Bessemerflamme sowie Bogen- und Funkenspektra im Gitterspektroskop sehr schön. Im Gitterspektrum erster Ordnung sind Wellenlänge λ und Ablenkungswinkel ϑ durch die einfache Gleichung $\lambda = \text{konst} \cdot \sin\vartheta$ verbunden; es gehören zu großen Wellenlängen auch große Ablenkungen (im Gegen-

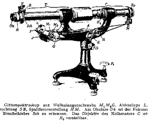


Abb. 42. Gitterspektroskop mit Wellenlängenschraube $M_1 M_2 G$, Ableselupe L, Fadenkreuzbeleuchtung SB, Spaltfernverstellung HM. Am Okulare Ok ist der Fokussierring R und ein Blendschieber Sch zu erkennen. Das Objektiv des Kollimators C ist mittels R_2 verstellbar.

satz zum Prismenspektrum); wie Abb. 41 zeigt, ist im Gitterspektrum Rot und Gelb erheblich ausgedehnter als im Prismenspektrum mit seiner unverhältnismäßigen Dehnung des blauen und violetten Bezirks. Die durch die obige Gleichung dargestellte Gesetzmäßigkeit des Gitterspektrums erlaubt, besonders einfache Vorrichtungen zur Messung der Wellenlängen zu verwenden. Eine Mikrometerschraube mit hundertteiliger Trommel läßt sich, wenn sie als Sinusschraube ausgebildet ist, dem Hebelarme so anpassen, daß die Trommelteile durch das ganze sichtbare Spektrum hindurch den Wert von je $^1/_{10}\,\mu\mu = 1$ Ångstromeinheiten haben, was an keinem Prismenspektroskop zu erreichen ist.

α) Das nach diesem Gesichtspunkte gebaute Gitterspektroskop[1]) mit Wellenlängenschraube (Firma A. Beck, London, Carl Zeiss, Jena) ist in Abb. 42 dargestellt. Der symmetrische Spalt kann durch einen Schnurlauf während der Beobachtung des Spektrums verstellt werden, bis die Aufhellung oder Verdunkelung einer Absorptionsbande den gewünschten Grad erreicht hat. Das Gitter wird von dem Kollimatorrohre getragen. Die Vergrößerung des Fernrohrs ist so bemessen, daß man das ganze Spektrum auf einen Blick übersehen

[1]) F. Löwe, Verh. d. d. Phys. Ges. Bd. 10, S. 671. 1908 und ZS. f. Instrkde. Bd. 28, S. 261. 1908.

kann. Als Umdrehungszähler dient bei dem deutschen Modell eine zweite Meßtrommel (die linke in Abb. 43), die der hundertteiligen entgegenläuft. So steht im Gesichtsfeld der Lupe, durch den durchgehenden Indexstrich angezeigt, die Wellenlänge als vierstellige Zahl, d. h. in Ångströmeinheiten zum Ablesen bereit; zwischen den Einstellungen auf die zwei Natriumlinien sind also 6 Intervalle. Die Verdoppelung der Natriumlinien ist auch gut zu sehen, wenn sie als dunkle Linien auf hellem Untergrunde mit Sonnenlicht oder durch Vereinigung der Natriumflamme mit einer vom Spektroskop aus gerechnet dahinter aufgestellten sehr hellen weißen Lichtquelle, etwa der Punktlichtlampe mit Kondensor, erzeugt werden. Dieses Gitterspektroskop leistet beim Studium von Lösungen der Farbstoffe in Kliniken (Hämoglobinderivate) und chemischen Laboratorien (natürliche und künstliche Farbstoffe) gute Dienste, es ist den Handspektroskopen durch seine Handlichkeit und durch die günstigere Unterteilung des Spektrums überlegen.

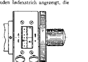


Abb 43 Die zweiteilige Wellenlangentrommel des Gitterspektroskops Der Indexstrich zeigt in der linken Trommel 68, in der rechten 93, also ist die Wellenlange 6893 ÅE = 689,3 $m\mu$ abzulesen.

β) Das Gitterhandspektroskop mit Okularskala (Abb. 44). Für Unterrichtszwecke und für den Gebrauch in den Bessemerwerken ist aus dem soeben beschriebenen Spektroskop das mit festem Fernrohr ausgerüstete einfache Gitterhandspektroskop entwickelt worden. Die Ablesung der Wellenlängen erfolgt an einer Okularskala über dem Spektrum und an der Meßtrommel neben dem Fernrohr; wiederum bedeutet ein Trommelteil eine Ångströmeinheit; wegen der geringeren Fernrohrvergrößerungkann man aber eine Spektrallinie nur auf ± 3 Trommelteile genau einstellen ($= \frac{1}{3}\ \mu\mu$). Immerhin hat dieses unverwüstliche Spektroskop, verglichen mit dem Handspektroskop, die dreifache Meßgenauigkeit und den Vorteil, daß keine Intervalle zu schätzen sind. Man bringt durch die zwischen festen Anschlägen gelagerte Meßschraube die zu messende Spektrallinie auf den einzigen erreich-

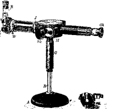


Abb. 44. Das Gitter-Handspektroskop mit Reagensglas *R*, Küvette *K*. Fokussierring *J* des Kollimatorobjektivs Schutzkappe *Sk* für die Meßtrommel *M* und Okular *Ok*. Der hohle Griff *G* kann von der Säule *B* abgezogen werden. *KH* ist ein vom Kollimatorkopf abgenommener Halter für Reagensgläser und Küvetten.

baren Strich der Okularteilung und liest eine zweiziffrige Zahl im Gesichtsfelde und die andere zweiziffrige Zahl an der Trommelteilung ab; beide nebeneinandergesetzt ergeben die Wellenlänge. In einen auf das Okularende aufsteckbaren Halter können nach Einschaltung des Vergleichsprismas zwei Küvetten oder zwei Reagensglashalter gesteckt werden, und dann kann das von seiner Säule abgezogene Spektroskop an dem Handgriff im Auditorium herumgegeben werden.

34. Gitterspektroskop mit Autokollimation nach Haschek. Ein metallenes Plangitter kann in Verbindung mit einem Autokollimationsfernrohr, z. B. auf dem Prismentische eines Spektrometers nach Abbe aufgestellt, so gedreht werden, daß es das einfallende Licht als Spektrum erster, zweiter oder höherer Ordnung wieder in das festgelagerte Fernrohr sendet. Ersetzt man die übliche Mikrometerschraube des Spektroskops durch eine Sinusschraube, so sind die Elemente des Autokollimationsgitterspektroskops nach Haschek gegeben, das demnächst veröffentlicht werden soll. Herrn Prof. Haschek-Wien sei auch hier für die Anregung zum Bau dieses sich durch sehr hohes Auflösungsvermögen auszeichnenden, besonders für die Messung linienreicher Metallspektren geeigneten Modells und für die Ermächtigung zur kurzen Beschreibung an dieser Stelle herzlich gedankt.

c) Spektrographen für sichtbares und ultraviolettes Licht.

Jedes noch so einfache Spektroskop läßt sich zu einem Spektrographen, d. h. zu einem das Spektrum photographierenden Spektralapparate ergänzen, nur bei den Autokollimationsspektroskopen bedarf es größerer Änderungen. Die Photographie, die z. B. im Dienste der Astronomie, der Topographie und der Photometrie so erheblich zur Vervollkommnung der Beobachtungen und zur Verfeinerung der Messungen beigetragen hat, gab auch der Spektroskopie einen großen Aufschwung; es sei nur an die photographische Messung der Tausende und Abertausende von Spektrallinien erinnert, die in der Geschichte der Spektroskopie zwei Generationen von Physikern beschäftigt und die Grundlagen für die Deutung der Gesetzmäßigkeiten der Spektra geliefert haben. Auch für den praktischen Spektroskopiker bedeutet die Möglichkeit, ein Spektrogramm aufzunehmen, einen großen Gewinn an Sicherheit für die spektroskopischen Studien; das Spektrogramm ist ein der Messung zu beliebiger Zeit zugängliches Dokument, in Streitfällen ein wertvolles Protokoll.

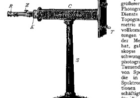


Abb. 45. Das Handspektroskop mit Kamera mit Wellenlängenteilung und verschiebbarem Kassettenrahmen (Z) für Platte 6×9 cm.

35. Spektrographen für sichtbares Licht. Der einfachste Spektrograph, mit dem jeder Chemiker und Physiker ausgebildet sein sollte, ist die Vereinigung eines guten, mit achromatischer Lupe ausgerüsteten Handspektroskops mit einer stabilen Kamera. Der in Abb. 45 dargestellte Lehrspektrograph gestattet die Aufnahme des ganzen sichtbaren Spektrums bis zu $\lambda = 390\ \mu\mu$ mitsamt der Wellenlängenteilung auf einer 6×9-Platte. Ein Kameraobjektiv von 25 cm Brennweite reicht aus, um die hohe Auflösung, die eine Eigenschaft des dreiteiligen Amiciprismas ist, auf der Platte zu beweisen: die Natriumlinien erscheinen bei gut bemessener Belichtungsdauer und genügend eng gestelltem Spalte deutlich getrennt. Betrachtet man die Wellenlängenteilung wieder nur als Finderteilung, so muß man ein Meßmikroskop zu Hilfe nehmen, um unbekannte Spektrallinien durch Anschluß an bekannte zu identifizieren, man kommt aber auf diesem Wege zu überraschend genauen Wellenlängenmessungen. Amateure brauchen zu Studien über Sensibilisierung überhaupt keinen größeren Spektrographen, und die Spektrogramme von Metallspektren sind zur Projektion als Negative für Unterrichtszwecke ohne weiteres geeignet.

36. Spektrographen für sichtbares und ultraviolettes Licht. In gleicher Weise kann man die neueren Modelle des KIRCHHOFF-BUNSENschen Spektroskops zu einem Spektrographen ergänzen (Abb. 46); man nimmt das Beobachtungsfernrohr ab und setzt eine Kamera ein. Diese wird vielfach mit einem Balgen versehen, der sowohl als Kameraauszug wie auch als bequemes Mittel

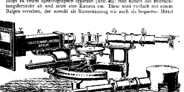


Abb. 46. Spektrograph für sichtbares Licht aus einem KIRCHHOFF-BUNSENschen Spektroskop entwickelt, indem das Fernrohr F abgenommen und durch die Kamera K_1 ersetzt wurde. Die Kamera kann gegen das Kollimatorrohr unter verschiedenen Winkeln eingestellt werden.

zur Verschwenkung der Plattenebene gegen die Brennebene dient. Die chromatischen Abweichungen der Brennweite werden im Fernrohre durch den Okularauszug ausgeglichen, der neuerdings vielfach durch einen Objektivauszug ersetzt wird; in der Kamera soll das Objektiv jedoch die parallelen Büschel jeder Farbe in einer und derselben, zur Objektivachse womöglich senkrechten Ebene vereinigen, eine Forderung, die praktisch nie erfüllt wird. Im allgemeinen liegen die scharfen Bilder der Spektrallinien auf einer zylindrischen Fläche, die ihre hohle Seite dem Objektiv zukehrt. Solange man mit ebenen Platten arbeitet,

und das ist bei den kleineren Spektrographen die Regel, ermittelt man durch Probeaufnahmen drei günstige Kombinationen von Kamera- (oder Objektiv-) Auszug und Kassettenverschwenkung, eine erste für die gleichzeitige Aufnahme des gesamten Spektrums als Übersichtsbild mit angenähert gleicher Schärfe in allen Spektralbezirken, eine zweite mit exakter Schärfe für das mittlere Drittel (Mittelschärfe) und eine dritte für die äußeren Drittel des Spektrums (Randschärfe). Diese Vorarbeit, die jeder Benutzer eines Spektrographen zu leisten hat, ist zeitraubend, am meisten bei den Quarzspektrographen (Abb. 47) (Verfertiger Krüss, Leiss, Schmidt & Haensch, Steinheil, Zeiss), die mit einfachen Linsen ausgestattet sind. Gerade die vielen Justiermöglichkeiten am Kollimator und Kamera, die ja alle nötig sind, machen die Justierarbeit mühsam. Dies

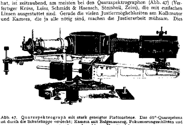


Abb. 47. Quarzspektrograph mit stark geneigter Plattenebene. Das 60°-Quarzprisma ist durch die Schutzkappe verdeckt; Kamera mit Balgenauszug, Fokussierungsschlitten und mikrometrisch verschwenkbarer Kasettenführung.

leuchtet noch mehr ein, wenn man bedenkt, daß die Ebene der Platte eines Quarzspektrographen wegen der erheblichen sich addierenden Dispersion der Brennweiten der Kollimator- und der Kameralinse aus der Normallage ($\perp$-Achse) um etwa 63° gedreht werden muß, um die Randbezirke des ultravioletten Spektrums scharf aufzufangen; dabei ist die Platte durch eine meist hölzerne Einlage in der Kassette so weit durchzubiegen, wie nur „extra dünne" Platten es vertragen. Mit der Schrägstellung der Platte ist aber neben dem Übelstande der mühsamen Justierung eine günstige Wirkung verbunden. Wie Abb. 48 zeigt, wird bei gegebenem Dispersionswinkel das Spektrum auf der schräggestellten Platte erheblich mehr in die Länge gezogen als auf der Brennebene oder in deren Nähe. Das längere Spektrum rückt die Spektrallinien weiter auseinander als das kurze, erleichtert also die Übersicht; freilich geht ein großer Teil dieses Vorzugs wieder verloren durch den Verlust an Schärfe jeder einzelnen Spektrallinie (Abb. 49); bei den üblichen geometrischen Verhältnissen ist der Durchmesser des Zerstreuungskreises rund das Doppelte der Fokusdifferenz, wenn das Objektiv das Öffnungsverhältnis 1 : 8 hat; bei 1 : 5 $=$ das Dreifache. (Vgl. Abb. 49.) Man wird deshalb an den Spektrographen mit einfachen Quarzlinsen nur dann festhalten, wenn vorwiegend besonders linienreiche Spektra zu untersuchen sind, und wird dann einzelne wichtige Spektralbezirke nacheinander fokussieren und aufnehmen.

37. Spektrographische Achromate. Viel günstiger hinsichtlich der Justierung und der erzielbaren Schärfe der Spektrallinien ist die Verwendung von Fernrohrobjektiven für Kollimator und Kamera, die für das sichtbare Spektrum als selbstverständlich gilt, auch für das ultraviolette Spektrum. Sie wäre wohl allgemein, wenn nicht die beschränkten Vorräte an genügend reinen und großen

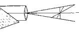


Abb. 48. Das Spektrum ist am kürzesten, wenn die Platte senkrecht zur Achse steht, bei der gezeichneten Neigung der Platte wird das langwellige Ende des Spektrums mehr gedehnt als das stärker abgelenkte kurzwellige.

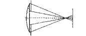


Abb. 49. Zusammenhang zwischen Öffnungsverhältnis, Fokusdifferenz und Zerstreuungskreis, an übertrieben großen Öffnungswinkeln dargestellt; das kleinere Öffnungsverhältnis macht ein Objektiv weniger empfindlich gegen sphärische und chromatische Abweichungen.

Stücken Fluorit den Bau von Quarzfluoritachromaten ausreichender Größe erschwerte. Solange man sich aber mit Objektiven von 2 bis 3 cm Durchmesser, also 12 bis 60 cm Brennweite begnügen kann, sind die Spektrographen mit Achromatobjektiven denjenigen mit einfachen Quarzlinsen überlegen; nur für besonders lichtstarke Spektrographen zum Studium kurzdauernder Leucht-

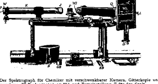


Abb. 50. Der Spektrograph für Chemiker mit verschwenkbarer Kamera, Gitterkopie und Cornuprisma, Wellenlangenteilung WL und Ferneinstellung T für den Spalt.

erscheinungen in begrenzten Spektralgebieten werden die Quarzspektrographen immer unentbehrlich sein; der Ausdehnung des Öffnungsverhältnisses der Linsen zu extremer Lichtstärke setzt die Absorption der alsdann gleichzeitig erforderlichen großen Quarzprismen eine Grenze.

Die recht gute, wenn auch nicht vollständige Ebnung des Bildfeldes in einem Spektrographen mit Achromaten erleichtert das Aufkopieren einer Wellenlängenteilung. In dem Spektrographen für Chemiker (Abb. 50), Verfertiger Zeiss, wird die in den metallenen Rahmen einschiebbare Wellenlängenteilung, nachdem

der Deckel der Kassette herausgezogen ist, auf die Schichtseite der Platte geklappt; belichtet wird sie mittels des an einer Prismenfläche reflektierten Lichts einer kleinen Glühbirne durch das Kameraobjektiv hindurch. Die Plattenebene ist nicht genau senkrecht zur Kameraachse; die Verschwenkung der Platte wird für das sichtbare und das ultraviolette Spektrum gesondert im Prüfraum des Verfertigers ermittelt und vom Benutzer an Hand einer Finderteilung eingestellt; ebenso wird die Fokussierung des Kameraobjektivs für die drei obenerwähnten Lagen festgelegt. Um das Spektrum zur Wellenlängenteilung genau justieren zu können, ist das Kameraobjektiv quer zur Achse in einem Schlitten verschiebbar, der mit Schraube und Stellstift betätigt werden kann. Zu dieser Justierung kann man eine sichtbare Spektrallinie (etwa $\lambda = 546{,}1\ \mu\mu$ des Hg-Spektrums) benutzen; dies ist aber der einzige Justiergang, der dem Benutzer des Spektrographen für Chemiker verblieben ist.

38. Die Autokollimation. Quarzspektrographen mit Autokollimation (Abb. 51 u. 52) sind diejenigen Spektralapparate, die die geringste Zahl von optischen Teilen, d. h. auch von Flächen mit Reflexionsverlusten, aufweisen. Das größte Modell dieser Art (Verfertiger Firma Ad. Hilger, London) hat eine Quarzlinse von 2 m Brennweite, die auf einem Fokusierschlitten gelagert ist, der auch das 30°-Quarzprisma mit trägt. Wegen der riesigen Ausdehnung des Spektrums muß dieses in drei Teilen aufgenommen werden. Die für jeden der drei Bezirke günstigste Neigung der Kassette, Fokusierung der Linse und Verschwenkung des Prismas wird durch Vorarbeiten im Prüfraum des Verfertigers aufs sorgfältigste ermittelt

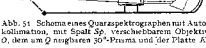


Abb. 51. Schema eines Quarzspektrographen mit Autokollimation, mit Spalt *Sp*, verschiebbarem Objektiv *O*, dem um *Q* neigbaren 30°-Prisma und der Platte *K*.



Abb. 52. Großer Quarzspektrograph mit Autokollimation, von der Spaltseite aus gesehen.

und in Form einer Justiertabelle dem Benutzer des Spektrographen mitgeteilt. Der kleinste Spektrograph dieser Art ist der Sonnenspektrograph zur Ermittlung der Reichweite der Sonnenstrahlung für Heilzwecke (Carl Zeiss), der in Abb. 53 dargestellt ist; er kommt mit einer $4^1/_2 \times 6$ cm-Platte aus, ist aber auch, wie alle bisher erwähnten (mit Ausnahme des letzten Riesenmodells), mit verschiebbarer Kassette für Serienaufnahmen ausgerüstet; er ist auch für die Prüfung von Bestrahlungslampen bestimmt. Als Gestell dient der Aufbewahrungskasten, der mit einer einfachen Einrichtung zur Verschwenkung des Spektrographen in Azimut und Höhe versehen ist.

39. Spektrographen mit Hohlspiegeln. Der von Newton in die Astronomie eingeführte Hohlspiegel hat gegenüber dem Fernrohrobjektiv den Vorzug, streng

achromatisch und, zumal in den größten Abmessungen, billiger zu sein. Außerdem ist ein großes Öffnungsverhältnis, also hohe Lichtstärke, bei einem Hohlspiegel, da er nur die planmäßige Bearbeitung einer einzigen abbildenden Fläche erfordert, leichter zu erreichen als bei einer Linse mit ihren zwei und bei einem Objektiv mit seinen mindestens vier Flächen. Hierzu kommt bei größeren Dimensionen noch der geringere Bedarf an Glas oder Quarzmaterial. Diesen Vorzugen stehen zwei Nachteile gegenüber, einmal die mit dem Spiegelbelag verbundenen Schwierigkeiten, die aber durch die jüngere Entwicklung der Kunst der Verspiegelung, auch durch die Heranziehung der Kathodenzerstäubung immer kleiner werden, dann aber das beschränkte Feld der scharfen Abbildung. Während gute Achromate in Spektrographen ein brauchbares Gesichtsfeld von vielen Graden ergeben, ist das nutzbare Feld eines Hohlspiegels oft nicht größer als ein Grad; die durch nichtsphärische Flächen erzielte Verminderung der sphärischen Aberrationen kommt vorwiegend der Abbildung in der Achse zugute, schafft aber hier gerade die hohe Bedeutung der Hohlspiegel für äußerste Lichtstärke. Dies gilt in gleichem Maße für die Himmelsphotographie wie für die Spektroskopie. Wenn auch die Hohlspiegel ihre Hauptbedeutung für die Erforschung der Wärmestrahlung haben, wobei man den Gebrauch von Linsen umgeht, um die Absorptionsverluste im Glase zu vermeiden, so soll doch hier ein Hohlspiegelspektrograph kurz erwähnt werden, der sich durch seine geometrische Eigenart auszeichnet. Benutzt man nach A. SONNEFELD[1]) von einem Hohlspiegel nur außeraxiale Abschnitte, so wird, wie Abb. 54 zeigt, durch den Spaltkopf kein Licht abgeblendet, während bei der klassischen, aus der Astronomie übernommenen Anordnung ein Fangspiegel, der das von dem seitlich angeordneten Spalte kommende Licht auf den Hohlspiegel zu werfen hat, seinerseits das vom Hohlspiegel zurückkehrende parallele Büschel in seinem zentralen Teile abblendet und so die Bildgüte (auch durch Beugung) beeinträchtigt.

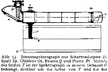


Abb. 53. Sonnenspektrograph mit Schattendiopter D, Spalt Sp, Objektiv Ob, Prisma Q und Platte Pl. Mittels des Stiftes T ist der Spektrograph in seinem Gehäuse G befestigt, drehbar um die Achse von T und die des Objektivs.



Abb. 54. Grundriß des Sonnefeldschen Hohlspiegel-Spektrographen. Der Kondensorspiegel S_3 bildet die Lichtquelle L auf dem Spalte Sp des Kollimators ab; S_1 ist der Kollimatorspiegel, dessen Achse A' ist, P das auswechselbare Prisma, S_2 der Kameraspiegel mit der Achse A'' (Lupe!). Mit Th ist eine Thermosäule, mit Ok das einrückbare Okular angedeutet. W stellt schematisch einen Schutzschirm gegen direkte Wärmestrahlung dar.

Ebenso willkommen ist die freie Verfügung über den Platz in der Achse des zweiten Spiegels, wo ein Okular, eine Kassette, eine Thermosäule oder sonst

[1]) A. SONNEFELD, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1922, Heft 28.

ein Empfangsapparat, etwa ein zu bestrahlendes chemisches oder biologisches Objekt, bei dieser neuen Anordnung leicht untergebracht werden kann. Auch für die Auswechslung kurzbrennweitiger Spiegel gegen langbrennweitige ist die SONNEFELDsche Montierung sehr bequem. Als Prisma kann ein 60°-Prisma auf automatischem Prismentische, ein festarmiges Prisma beliebiger Form, oder, wie in Abb. 39, Ziff. 32, ein FÖRSTERLINGscher festarmiger Prismensatz, oder schließlich ein Plangitter benutzt werden. Aufs äußerste vermindert ist die Zahl der optischen Flächen bei dem FÉRYschen Spektrographen, der nur ein optisches Stück hat, das Kollimatorobjektiv, Prisma und Kameraobjektiv in sich vereinigt, das CH. FÉRYsche Prisma mit Kugelflächen (Abb. 55). Man kann es sich aus einem 30°-Quarzprisma und einer dicht dahinter angeordneten plankonvexen Linse entstanden denken, deren konvexe Fläche verspiegelt ist, also als Hohlspiegel wirkt; beide Stücke sind natürlich zu einem vereinigt. Zur Verbesserung der Abbildung hat FÉRY auch die Eintrittsfläche des Prismas als Kugelfläche ausgebildet. Wenn es auch wegen der unbehebbaren Abbildungsfehler bisher nicht gelungen ist, den FÉRYschen Spektrographen mit größerem Öffnungsverhältnis auszuführen, so stellt diese Konstruktion, die von Ph. Pellin-Paris und Ad. Hilger-London ausgeführt wird, doch die eleganteste Lösung der Aufgabe dar, einen Prismenspektrographen mit Autokollimation zu bauen, der man nur den Hohlgitterspektrographen an die Seite stellen kann.

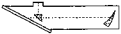


Abb. 55. Der Spektrograph nach CH. FÉRY, in $^1/_{33}$ natürlicher Größe schematisch dargestellt.

40. Spektrographen mit durchsichtigen Beugungsgittern. Seit durchsichtige Gitterkopien in guter Beschaffenheit im Handel sind, haben sie vielfach zum Bau von einfachen spektrographischen Anordnungen im Unterrichts- und Forschungslaboratorium gedient. Der Spektrograph für Chemiker (Ziff. 37) wird auch ausgerüstet mit einem Gitter von 600 Strichen auf dem Millimeter und mit einer an die Schichtseite der Platte heranzuklappenden Wellenlängenteilung. Derartige Spektrographen werden mit Vorteil zum Studium von Emulsionen, von Sensibilisatoren usf. verwendet, wobei die bequeme Ermittlung der Wellenlängen besonders wertvoll ist.

41. Spektrographen mit Hohlgittern. Für die Entwicklung der Spektroskopie, insbesondere zur Durchmusterung der Spektrallinien aller Elemente, also zur Auffindung der Spektrallinien und genauesten Messung der Wellenlängen, ist das Hohlgitter, ein mit feinster Gitterteilung versehener Hohlspiegel aus Metall, von der größten Bedeutung.

Hohlgitter sind metallene Hohlspiegel von meist kleinem Öffnungsverhältnis (z. B. 1 : 20), auf deren polierter Fläche eine sehr große Anzahl paralleler Diamantstriche nach den von ROWLAND im Laufe langjähriger mühevoller Versuchsarbeit gewonnenen Regeln gezogen sind. Wie Abb. 33 lehrt, haben nicht die in der Spiegelfläche selbst liegenden Striche, sondern deren Projektionen auf die Ebene der Sehne gleichen Abstand, mit anderen Worten, die Teilmaschine arbeitet so, als ob ein ebenes Gitter geteilt werden sollte. Eine ausführliche Beschreibung der ROWLANDschen Teilmaschine gab H. KAYSER[1]). Die Theorie des Hohlgitters findet sich ausführlich nach C. RUNGE in KAYSERS Handbuch der Spektroskopie[2]) und bei E. C. C. BALY[3]). Hier sei nur auf eine praktisch wichtige Eigenschaft der Abbildung durch einen Hohlspiegel eingegangen,

[1]) H. KAYSER, in KAYSERS Handb. d. Spektroskopie Bd. I, S. 406.
[2]) C. RUNGE in KAYSERS Handb. d. Spektroskopie Bd. I, S. 451ff.
[3]) E. C. C. BALY, Spectroscopy 3. Aufl., Bd. I, S. 160ff. Longmans Green & Co. 1924.

die daher rührt, daß man bei der Erzeugung eines Spektrums durch das Hohlgitter meist von schiefen Büscheln Gebrauch macht, die den Spalt weit außerhalb der Achse des Spiegels abbilden. Die Folge dieser sonst bei Hohlspiegeln, z. B. auch bei Hohlspiegelspektrometern konsequent vermiedenen Abbildungsart ist, daß ein beleuchteter Punkt des etwa streng in der Spiegelachse angeordneten Spaltes als Brennlinie, also als kurzer gerader Strich abgebildet wird; so ist das Bild eines endlichen Spaltstücks erheblich länger als das beleuchtete Spaltstück selbst. Nennen wir den Winkel zwischen dem senkrecht auf das Gitter einfallenden und dem durch Beugung abgelenkten reflektierten Strahle i und bezeichnen die Länge der Gitterstriche mit l, so erhält das Bild eines leuchtenden Punkts durch den Astigmatismus die Länge $l \sin i \operatorname{tg} i$; es wird z. B. (nach KAYSER, l. c.) bei dem größten ROWLANDschen Gitter ($l = 50$ mm) im Orange ($\lambda = 6000$ Å-E.) der ersten Ordnung $i = 28° 12'$ und die Brennlinie $0{,}25\, l = 12{,}5$ mm lang; ein Spalt von der Länge S mm liefert Spektrallinien, deren hellster Teil die Länge $S/\cos i + l \sin i \operatorname{tg} i$ hat. Diese Erscheinung hat zwei Folgen. Erstens werden Staublinien, die sonst ein oft willkommenes Mittel zur Kontrolle der Schärfe im Spektrum liefern, nicht am Orte der Spektrallinien abgebildet, sind also auf der Platte überhaupt nicht zu sehen, zweitens aber, und das ist wichtiger, gelingt es beim Hohlgitter nicht ohne weiteres, durch Vorschalten eines Vergleichsprismas zwei Spektra scharf aneinanderstoßen zu lassen, was sonst für das Auffinden identischer Spektrallinien ein gern benutztes Hilfsmittel ist. Man kann jedoch nach SIRKS[1]) dies erreichen, wenn man ein schmales Vergleichsprisma an demselben Orte vor dem Spalte anordnet, wo eine zur Richtung des Spaltes senkrechte Brennlinie liegt. Diese erscheint als wagerechte scharfbegrenzte Linie in der Ebene des reellen Spektrums wieder; so liefert ein dioptrisch richtig angeordnetes Vergleichsprisma einen schmalen Streifen mit den kurzen Linien des Vergleichsspektrums mitten in den langen Linien des Hauptspektrums; auf die Wichtigkeit einer sehr sorgfältigen Ausrichtung der Vergleichslichtquelle und ihres Kondensors gegen die Spaltebene sei hier nur kurz hingewiesen.



Abb. 56. Hohlgitter im Schnitt, die Sehne AB wird durch den Diamanten in gleiche Schnitte geteilt, die Schnittlinien projizieren sich aber auf die Kugelfläche ACB.

42. Die ROWLANDsche Montierung. Das Hohlgitter wird in zwei grundsätzlich verschiedenen Montierungen benutzt, deren jede ihre Freunde und ihre Gegner hat. In Abb. 57 ist ein Grundriß der älteren „ROWLANDschen" Montierung dargestellt, der die klassische Einfachheit der geometrischen Lage des Spaltes und der Spektra der verschiedenen Ordnungen zeigt. Schlägt man um den Krümmungsmittelpunkt des Hohlspiegels mit dessen Radius einen



Abb. 57. Die ROWLANDsche Gittermontierung, in $^1/_{250}$ natürlicher Größe dargestellt. K_1, K_2, K_3 bezeichnen schematisch die Lagen der Kassette bei der Aufnahme des Spektrums I., II. und III. Ordnung.

[1]) H. SIRKS, Astron. a. Astrophys. Bd. 13, S. 763. 1894 (nach BALY zitiert).

Kreisbogen, so ist der eigentliche Spiegel durch ein Stück desselben dargestellt. Nun bildet der Radius gleichzeitig den Durchmesser desjenigen Kreises, der der geometrische Ort für die Spektra der verschiedenen Ordnungen und für den Spalt ist; mit K_1, K_2, K_3 sind die Stellungen der Kassette schematisch dargestellt für das Spektrum erster, zweiter und dritter Ordnung. Die Platte muß so gebogen sein, daß ihre wagerechte Projektion ein Stück des Kreises ist, auf dem sämtliche Spektra liegen. Nun liegt die Spektrallinie $\lambda = 6000$ Å.-E. im Spektrum erster Ordnung an derselben Stelle, wo die Linie $\lambda = 3000$ Å.-E. der zweiten Ordnung liegt, d. h. die Spektra greifen ineinander über. Aus diesem Nachteil, der nur durch eine reichhaltige Auswahl von Lichtfiltern mit sorgfältig abgestuften Durchlässigkeitsbezirken überwunden worden ist, zog Rowland den Nutzen, Linien unbekannter Wellenlänge an bekannte anzuschließen (Koinzidenzmethode), was durch die folgende Tabelle erläutert sei.

Tabelle 2. Erläuterung von Rowlands Koinzidenzmethode.

I. Ordnung	5896,156	—	—	—
II. „	2948,087	5896,156	—	—
III. „	1965,385	3930,771	5896,156	—
IV. „	—	2948,087	4422,117	5896,156
V. „	—	2358,462	3537,694	4716,925
VI. „	—	1965,385	2948,087	3930,771
VII. „	—	—	2526,924	3369,232
VIII. „	—	—	2211,059	2948,087
IX. „	—	—	1965,385	2620,514
X. „	—	—	—	2358,462

Die Na-Linie D_1 ($\lambda = 5896,156$ Å.-E.) wird im Spektrum zweiter Ordnung von einer Linie mit $\lambda/2 = 2948,087$, im Spektrum dritter Ordnung von $\lambda/3 = 1965,385$ überlagert; dieselben drei Linien decken sich in der zweiten, vierten und sechsten Ordnung sowie der dritten, sechsten und neunten Ordnung. Dieselbe Linie D_1 in der zweiten Ordnung muß sich mit $2\lambda = 11992,232$ in der ersten Ordnung decken, ein Wert, der durch 3, 4, 5 und 6 geteilt die koinzidierenden Linien in der dritten, vierten, fünften und sechsten Ordnung ergibt.

So liefert das Prinzip der Koinzidenzen in Verbindung mit den obenerwähnten Lichtfiltern dem Forscher erstens ein Hilfsmittel, sich durch den Urwald von Spektrallinien hindurchzutasten und einen Kilometerstein nach dem anderen zu setzen und zu beziffern. Die Durchmusterung der Spektra der Elemente durch Rowland, Kayser und eine Generation von Mitarbeitern ist eine Leistung, die an Fleiß und Scharfsinn in der messenden Physik nicht ihresgleichen hat. Die Wellenlängen stellen diejenigen physikalischen Konstanten dar, die ihrem Werte nach am genauesten (auf rund ein Millionstel) bekannt sind. Als Nachteil der soeben beschriebenen Rowlandschen Gittermontierung gilt, insbesondere der in höheren Ordnungen stark zunehmende Astigmatismus.

43. Die Eaglesche Montierung. Daher erfreut sich die Eaglesche Montierung, obwohl sie in der Handhabung bei weitem nicht so einfach ist, neuerdings, wenigstens für die Ermittlung von Wellenlängen, höherer Wertschätzung[1]). Eagle macht von der Autokollimation Gebrauch (Abb. 58). Das vom Spalt *Sp* kommende Licht wird durch ein Reflexionsprisma auf das Gitter *M* geworfen, das so gedreht ist, daß das Spektrum der gewünschten Ordnung auf die Platte und in der Kassette *K* geworfen wird. Befindet das Prisma sich ein wenig über der wagerechten Spiegelachse, so geht das reflektierte Strahlenbüschel dicht

[1]) A. Eagle, Astrophys. Journ. Bd. 31, S. 120. 1910.

darunter vorbei und trifft ungehindert auf die Platte. So kommt man zu dem sehr kompendiösen schmalen Aufbau, der leicht lichtdicht abzuschließen ist. Um von einer Ordnung zur anderen überzugehen, muß allerdings, und das erschwert das Arbeiten mit dieser Montierung, das Gitter auf einem Schlitten in der Richtung der Längsachse des Apparates verstellbar sein, und zwar um große Beträge und mikrometrisch, und es muß auf einem mikrometrisch drehbaren Tische gelagert sein; auch die Neigung der Kassette gegen die Achse ist veränderlich. So braucht man drei Finderteilungen, und deren erstmalige Durcheichung erfordert viel Zeit. Für die Eagle-Montierung sprechen aber folgende Vorzüge. Erstens erleichtert der geringe von ihr beanspruchte Raum die Aufgabe, den Apparat gegen Temperaturschwankungen durch Isolationsstoffe zu schützen, während die ROWLANDsche Montierung große thermokonstante Räumlichkeiten (Keller) erfordert. Zweitens lehrt die Tabelle 2, daß bei dem Gitter mit 15020 Strichen pro Zoll (etwa 600 auf dem Millimeter) der Astigmatismus bei der Eagle-Montierung erheblich geringer ist als bei der ROWLANDschen Montierung, was einen Gewinn an Lichtstärke und die sehr erwünschte Verminderung der Belichtungszeiten bedeutet. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die geringen Einfallswinkel der Eagle-Montierung den Gebrauch der Spektra der höheren Ordnungen ermöglichen, mit der enormen Steigerung des Auflösungsvermögens. Ein Mangel ist die Richtlinearität der Spektra.

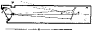


Abb. 58. Die EAGLEsche Gittermontierung, mit Spalt *Sp*, Reflexionsprisma, Hohlgitter *M*, dessen Normale *N* ist, und der drehbaren Kassette *K*. *M'* und *N' K'* entsprechen einem Spektrum geringerer Ordnungszahl. Der Abstand *R* des Gitters wird mittels einer Schlittenführung variiert, für die eine Finderteilung vorhanden ist, ebenso wie für die mikrometrische Drehung des Hohlspiegels.

Tabelle 3. Vergleich des Astigmatismus bei ROWLANDS und EAGLES Montierung.

Ordnung	ROWLANDS Montierung		EAGLES Montierung	
	Einfallswinkel	Astigmatismus	Einfallswinkel	Astigmatismus
I	18° 59′	0,112	9° 22′	0,053
II	40° 35′	0,557	18° 59′	0,212
III	77° 20′	4,34	29° 12′	0,476
IV	unmöglich	—	40° 35′	0,876
V	unmöglich	—	54° 23′	1,321

44. Vakuumspektrographen. Die Wellenlängenteilungen der meisten Spektrographen für Ultraviolett gehen bis 225 oder 215 $\mu\mu$, weil die Empfindlichkeit der üblichen photographischen Platte vermöge der Absorption der Gelatine nicht weiter reicht. Diese Begründung ist aber nicht stichhaltig, denn man kann nach HENRI mit einem Hauch von Vaseline jede Momentplatte bis zur Durchsichtigkeitsgrenze der Luft, die nicht weit unterhalb 185 $\mu\mu$ liegt, sensibilisieren. Die kurzwelligen Strahlen erregen in der dünnen Vaselinehaut Fluoreszenz, und die fluoreszierenden Linien schwärzen die lichtempfindliche Schicht so gut, daß ein Übergang zwischen den direkt wirkenden Wellenlängen ($\lambda > 225$ $\mu\mu$) und den durch Fluoreszenz wirkenden weder an der Schwärzung noch an der Schärfe der Linien in einem Mikroskope mit 25facher Vergrößerung zu erkennen ist. Deswegen wird der Spektrograph für Chemiker und das Gitterspektroskop mit Kamera mit einer bis zu $\lambda = 185$ $\mu\mu$ ausgedehnten Wellenlängenteilung ausgerüstet. Es ist anzunehmen, daß die Vaselinesensibilisierung sich auch für noch kürzere Wellenlängen bewähren wird, wenn sie erst mehr bekannt geworden ist.

Nun hat die Erforschung des Ultraviolett nach noch kürzeren Wellenlängen hin großes theoretisches Interesse. Wenn man nach Analogie der Lehre vom Schall einen Bereich von Schwingungen, deren kürzeste halb so groß als die längste ist, als Oktave bezeichnet, so bildet das sichtbare Spektrum (λ = rund 8000 bis 4000 Å.-E.) eine erste, das ultraviolette Spektrum, soweit es sich bequem photographieren läßt (λ = 4000 bis 2200 Å.-E.) eine zweite Oktave. Eine dritte (λ = 2200 bis 1200) ist der Forschung durch die Pionierarbeiten von V. Schumann und eine vierte (λ = 1200 bis 600 Å.-E.) durch Th. Lyman erschlossen worden. Da die Absorption der Luft als Ursache des scheinbaren Endes der Emission kurzwelliger Strahlen galt, verlegte Schumann, ein Maschineningenieur in Leipzig, die Lichtquelle und den ganzen Spektrographen in das Vakuum. Schumann hat seinen Spektrographen mit meisterhaftem Geschick selbst in zwei Formen gebaut[1]), und wer die Schumann-Zimmer im Physikalischen Institut der Universität in Leipzig besucht, bewundert das mechanische Kunstwerk nicht weniger als die Forschungsergebnisse dieses Gelehrten, der jahrelang seine knappen Mußestunden der Spektroskopie gewidmet hat. Die Absorption der Luft war so überwunden; diejenige des Materials der Prismen und der Linsen wurde von ihm durch Verwendung von ausgesuchtem Fluorit soweit als möglich herabgedrückt, und die Absorption der Gelatine in den Platten wurde durch seine Erfindung von nahezu gelatinefreien Platten ausgeschaltet. So gelang es Schumann, die Grenze des erforschbaren Ultravioletts bis an die Grenze der Durchlässigkeit von Fluorit vorzutreiben[2]). Allerdings war es ihm versagt, die Wellenlängen seiner Spektrallinien zu messen, da die Dispersion des Fluorits natürlich in der Gegend der „Schumannstrahlen" nicht bekannt war. Schumanns Spektra reichen bis λ = 1200 Å.-E., wie von Th. Lyman festgestellt wurde, der dasselbe Spektralgebiet mit einem Vakuum-Gitterspektrographen[3]) erforscht hat.

Lyman brachte Spaltkopf, Hohlgitter (r = 95 cm) und Kassette in einer der später von Eagle angegebenen ähnlichen Anordnung in einem Messingrohre unter. Dieser eigentliche Spektrograph wurde in ein starkwandiges, für die Evakuierung eingerichtetes Gehäuse geschoben, an das eine dicke Verschlußplatte angelötet wurde. Zwei Löcher in dieser kommunizierten mit den zwei Entladungsröhren, den Lichtquellen, die die zwei Spalten des Spektrographen beleuchteten. Durch die zwei Spalte wird jede Spektrallinie zweimal auf der Platte abgebildet; aus dem gemessenen Abstande der Spalte läßt sich an Spektrallinien bekannter Wellenlänge der Zusammenhang zwischen dem Abstande der identischen Linien, ihrer Lage im Spektrum und ihrer Wellenlänge ableiten und so die Wellenlänge neuer Linien ermitteln. Bereits in seiner ersten Arbeit konnte Lyman die Wellenlängen von 300 Linien des H-Spektrums mitteilen, die kürzeste lag etwa bei 900 Å.-E. Nach einer weiteren Verbesserung seines Apparates erreichte er mit disruptiven Entladungen der He-Röhre die Grenze 600 Å.-E., dabei erwies es sich günstiger, an Stelle des Vakuums eine Füllung des Gehäuses und der Entladungsröhre mit H oder He von geringem Drucke zu verwenden. Schließlich drang Lyman mit einem halb so großen Spiegel (r = 50 cm) und bei 1 bis 2 mm Heliumdruck bis zu 510 Å.-E. vor[4]).

---

[1]) Er wird von der Firma Fuess geliefert; vgl. die Beschreibung von C. Leiss in ZS. f. Instrkde. Bd. 17, S. 321, 357. 1897; Bd. 18, S. 325. 1898.

[2]) V. Schumann, Wiener Ber. (2a) Bd. 102, S. 415, 625, 944. 1893.

[3]) Th. Lyman, Astrophys. Journ. Bd. 23, S. 181. 1906 und Th. Lyman, Spectroscopy in the extreme Ultraviolet. London: Longmans 1914.

[4]) Th. Lyman, Astrophys. Journ. Bd. 43, S. 89. 1916; Science Bd. 45, S. 187. 1917; Nature Bd. 110, S. 278. 1922.

In jüngster Zeit sind die LYMANschen Forschungen von MILLIKAN und SAWYER weiterentwickelt worden. Sie gingen zu einem fast vollkommenen Vakuum über (Hg-Diffusionspumpe), benutzten als Lichtquelle sehr kurze Funken mit sehr hoher Spannung (mehrere hunderttausend Volt) und als Hohlgitter eine spezielle Form, bei der das Maximum der Energie in das Spektrum der ersten Ordnung geworfen wurde. Es wurden, um zufällige Fehler auszuschalten, acht verschiedene Gitter benutzt, mit 500 bis 1100 Strichen auf dem Millimeter. Beide Forscher gelangten durch sorgfältige Beobachtung und Eliminierung aller Fehlerquellen schließlich[1]) zu den kürzesten Wellenlängen $\lambda = 317{,}3$ Å.-E. für Zink, $\lambda = 271{,}6$ Å.-E. für Eisen, $\lambda = 260$ Å.-E. für Silber, $\lambda = 202$ Å.-E. für Nickel, $\lambda = 149{,}5$ Å.-E. für Kupfer und $\lambda = 136{,}6$ Å.-E. für Aluminium. So ist die Lücke, die jahrzehntelang zwischen den kürzesten gemessenen ultravioletten Linien und den längsten X-Strahlen der Röntgenspektroskopie bestand, beinahe ausgefüllt; die größte Wellenlänge der Röntgenstrahlen ist nur zehnmal kleiner als die kürzeste Wellenlänge im Ultraviolett; es fehlen nur noch rund drei Oktaven der Strahlung.

C. Das Auge und das Sehen.

Von

M. VON ROHR, Jena.

a) Das Auge.

Die heutzutage maßgebende Behandlung des Menschenauges findet sich bei A. GULLSTRAND. Die Leser dieses Buches sind besonders auf seine Behandlung in der 3. Auflage des HELMHOLTZschen Handbuchs der physiologischen Optik zu verweisen.

Für das Verständnis des Sehvorganges und der Verbindung von optischen Geräten mit dem Auge müssen im folgenden gewisse, besonders wichtige Abschnitte ziemlich eingehend behandelt werden.

α) Das in seiner Höhle ruhende Auge.

45. Die Flächenfolge des Auges. Das von den Gegenständen in das Auge gesandte Licht trifft zunächst auf die **Hornhaut** H, die den vorderen, durchsichtigen, stärker gewölbten Teil der **Sehnenhaut** S bildet, von der der Augapfel ganz umschlossen wird. Die Hornhaut gibt auch den vorderen Abschluß der **Augenkammer** ab, die mit dem **Kammerwasser** K_w angefüllt ist. Den hinteren Abschluß der Augenkammer bildet die **Iris** oder **Regenbogenhaut**, die sich an die Vorderfläche der **Kristallinse** L anlegt. Wie bald

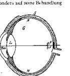


Abb. 59. Das rechte Auge im Horizontalschnitt.

H Hornhaut, SS Sehnenhaut, K_w Kammerwasser, L Linse, G Glaskörper, NN Netzhaut, gF gelber Fleck (schwarz, zu beiden Seiten der Achse), bF blinder Fleck (am Eintritt des Sehnerven).

[1]) R. A. MILLIKAN, Astrophys. Journ. Bd. 52, S. 47. 1920; R. A. SAWYER, ebenda Bd. 52, S. 286. 1920; R. A. MILLIKAN, J. S. BOWEN u. R. A. SAWYER, ebenda Bd. 53, S. 150. 1921.

zu besprechen sein wird, können die Linsenflächen bei einem nicht zu alten Auge stärker gekrümmt werden. An die Hinterfläche der Linse L legt sich der Glaskörper G, dessen gallertartige Masse den Hauptraum des Auges bis zur Netzhaut N ausfüllt. Die Netzhaut wird von den Verästelungen des Sehnerven, den Stäbchen und Zapfchen, gebildet, sie ist der lichtempfindliche Schirm des Auges. Die Fähigkeit, Einzelheiten zu unterscheiden, ist auf den verschiedenen Teilen der Netzhaut sehr verschieden; am größten ist sie auf dem gelben Fleck gF, namentlich auf seiner Mitte, der Netzhautgrube, und nimmt nach

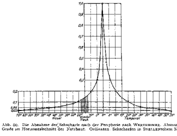


Abb. 60. Die Abnahme der Sehschärfe nach der Peripherie nach Wertheimer. Abszissen Grade im Horizontalschnitt der Netzhaut. Ordinaten: Sehschärfen in Snellenschem Maß.

den Seitenteilen rasch ab. Da, wo der Strang der Sehnerven in die Netzhaut eintritt, am blinden Fleck bF, ist überhaupt keine Lichtempfindung vorhanden. Die obenstehende Wertheimersche Zeichnung (Abb. 60) läßt diese rasche Abnahme der Sehschärfe nach dem Rande des Sehfeldes deutlicher erkennen, als es eine längere Beschreibung vermöchte.

Die eigenartige Höckerung bestimmter Flächen im Innern der Kristalllinse ist seit 1917 von dem Schweizer Augenforscher A. Vogt und seiner Schule beschrieben worden.

46. Das Gullstrandsche Übersichtsauge. Seit Th. Youngs Zeiten, von wo an die Ergebnisse der Augenforschung immer gesicherter wurden, hat man gelegentlich Versuche gemacht, in Übersichtsaugen die mit der Zeit gewonnenen Kenntnisse in einer möglichst bequemen Form niederzulegen. Heute ist das vollkommenste Übersichtsauge das von Gullstrand, und seine Angaben finden sich auf S. 335 des ersten Bandes der obenerwähnten Bearbeitung des Helmholtzischen Handbuchs, von wo sie hier übernommen und am Ende dieses Abschnitts wiedergegeben worden sind. An dieser Stelle sei darauf nicht allein wegen der sorgfältigen und zuverlässigen Messungsergebnisse, sondern auch

wegen der Behandlung der Kristallinse verwiesen. Auf diese soll sogleich noch näher eingegangen werden.

Früher war man bei der Behandlung der Kristallinse etwas ratlos, indem man ihre Zusammensetzung aus Schichten mit einer nach innen ständig wachsenden Brechzahl nicht ausreichend zu werten wußte. Man führte zu bequemerer Behandlung für Rechenaufgaben als Gesamtbrechzahl den Totalindex ein, der so bestimmt wurde, daß eine gleichartige Linse mit den Außenkrümmungen der für das Sehen in die Ferne eingestellten Kristallinse der Flächenfolge des in die Ferne schauenden Auges die gleiche Brennweite verlieh. Lagen bei einer solchen rechnerisch vereinfachten Linse schon die Hauptpunkte anders als bei der natürlichen, geschichteten, so ergab sich, worauf A. GULLSTRAND mit besonderem Nachdruck hinwies, dann eine weitere Schwierigkeit, daß der Totalindex bei einer auf die Nähe eingestellten oder akkommodierenden Linse merklich anders ausfiel. Er konnte zeigen, daß der Totalindex im ersten Falle, beim Sehen in die Ferne, zwar = 1,4085 zu setzen, aber im zweiten Falle bei stärkster Anspannung der Akkommodation eines etwa 20jährigen Menschen mit 1,4263 zu bewerten sei. Man erkennt auf diese Weise, wie GULLSTRAND auf das Glücklichste hervorgehoben hat, den großen Vorteil der Linsenschichtung darin, daß die Breite der Akkommodation in der geschichteten, also heterogenen oder ungleichartigen, viel größer ausfällt als bei gleicher Krümmungsänderung an einer homogenen oder gleichartigen Linse.

Die gründliche mathematische Behandlung dieser Frage führte GULLSTRAND zur Aufstellung der Indizialgleichung für einen Achsenschnitt durch die achsensymmetrisch angenommene Kristallinse, wodurch aus den rechtwinkligen Koordinaten x, y des Linsenortes die dort gültige Brechzahl berechnet werden konnte. Die nebenstehenden Zeichnungen lassen die beiden in der Unterschrift angegebenen Isoindizialkurven erkennen und vermitteln eine Vorstellung von der Schwierigkeit der Behandlung einer geschichteten Linse.



Abb 61



Abb. 62

Abb 61 u. 62. GULLSTRANDS Achsenschnitte durch die Augenlinse ohne Anspannung / mit starker Anspannung der Akkommodation.

Die Umgrenzungskurven und Parabeln mit willkürlich gewähltem Verbindungsstück; die inneren sind Isoindizialkurven für $n = 1,385$ und für $n = 1,404$ (innerste Kurven).

Nach einer so begründeten Einsicht in den Bau der Kristallinse konnte GULLSTRAND für das Übersichtsauge eine Drillingslinse (eine von zwei ungeschichteten [homogenen] Rindenlinsen umgebene ungeschichtete [homogene] Kernlinse) angeben, deren Krümmungen und Dicken zwar in den beiden Fällen der ruhenden und der äußerst gespannten Akkommodation verschieden waren, aber doch nur eine ganz geringe Verschiebung der Hauptpunkte (von etwa 0,45 mm nach innen) bei der Akkommodation erkennen ließen, wie das auch sein muß.

Bemerkt sei noch, daß die Flächenfolge des Auges (gebildet aus Hornhaut, Kammerwasser und geschichteter Linse) vorn an Luft, hinten an den Glaskörper grenzt und daher zwei verschiedene Brennweiten haben muß, deren hintere ihrem Ziffernwerte nach aus der vorderen durch Multiplikation mit der Brech-

Tabelle 4. Die Gullstrandschen Werte für das Übersichtsauge

	Streng		Angenähert	
	Akkomm.-Ruhe	Maxim. Akkomm.	Akkomm.-Ruhe	Maxim. Akkomm.
Brechungsverhältnis				
Hornhaut	1,376			
Kammerwasser und Glaskörper	1,336		1,336	
Linse	1,386		1,413	1,424
Äquivalente Kernlinse	1,406			
Ort				
Vordere Hornhautfläche	0		0	
Hintere Hornhautfläche	0,5			
Vordere Linsenfläche	3,6	3,2		
Vordere Fläche der äquivalenten Kernlinse	4,146	3,8725		
Hintere Fläche der äquivalenten Kernlinse	6,565	6,5275		
Hintere Linsenfläche	7,2			
Radius				
Vordere Hornhautfläche	7,7			
Hintere Hornhautfläche	6,8			
Äquivalente Hornhautfläche			7,8	
Vordere Linsenfläche	10	5,33	10	5,33
Vordere Fläche der äquivalenten Kernlinse	7,911	2,655		
Hintere Fläche der äquivalenten Kernlinse	− 5,76	− 2,655		
Hintere Linsenfläche	− 6	− 5,33	− 6	− 5,33
Brechkraft				
Vordere Hornhautfläche	48,83			
Hintere Hornhautfläche	− 5,88			
Äquivalente Hornhautfläche			43,08	
Vordere Linsenfläche	5	9,375	7,7	16,5
Äquivalente Kernlinse	5,985	14,96		
Hintere Linsenfläche	8,33	9,375	12,833	16,5
Hornhaut				
Brechkraft	43,05		43,08	
Ort des ersten Hauptpunkts	− 0,0496		0	
Ort des zweiten Hauptpunkts	− 0,0506		0	
Vordere Brennweite	−23,227		−23,214	
Hintere Brennweite	31,031		31,014	
Kristall-Linse				
Brechkraft	19,11	33,06	20,53	33
Ort des ersten Hauptpunkts	5,678	5,145	5,85	5,2
Ort des zweiten Hauptpunkts	5,808	5,255	5,85	5,2
Brennweite	69,908	40,416	65,065	40,485
Vollauge				
Brechkraft	58,64	70,57	59,74	70,54
Ort des ersten Hauptpunkts	1,348	1,772	1,505	1,821
Ort des zweiten Hauptpunkts	1,602	2,086	1,631	2,025
Ort des ersten Brennpunkts	−15,707	−12,397	−15,235	−12,355
Ort des zweiten Brennpunkts	24,387	21,016	23,996	20,963
Vordere Brennweite	−17,055	−14,169	−16,740	−14,176
Hintere Brennweite	22,785	18,930	22,365	18,938
Ort der Netzhautgrube	24		24	
Axiale Refraktion	+ 1,0	− 9,6	0	− 9,7
Ort des Nahpunkts		−102,3		−100,8
Ort der Eintrittspupille	3,047	2,668	3,048	2,671
Ort der Austrittspupille	3,667	3,212	3,519	3,096
Vergröß.-Zahl für die Pupillen	0,909	0,941	0,916	0,943

zahl $n = 1{,}336$ des Glaskörpers hervorgeht $f_{11} = -17{,}1$ mm; $n f'_{11} = 22{,}8$ mm. Berechnet man die Brechkraft der Flächenfolge des Auges, so erhält man $D_{11} = 1/f_{11} = 1/17 \cdot 1$ mm $= 58{,}64$ dptr.

Es sei ferner noch darauf hingewiesen, daß sich nach dem GULLSTRANDschen Übersichtsauge die Brechkraft des linsenlosen Auges (nach Entfernung der starerkrankten Kristallinse) zu $D_{II} = 43{,}05$ dptr ergibt, wobei dessen Hauptpunkte mit meist ausreichender Genauigkeit in dem Hornhautscheitel angenommen werden können. Für manche Brillenrechnungen kann diese Angabe von Bedeutung sein.

47. Die Messung am Auge. Geht man kurz auf die Meßverfahren ein, die bei der Ermittlung der vorhergehenden Tafel verwandt wurden, so ist für die Feststellung der Linsenkrümmung die Größe des Spiegelbildes zu messen, wie es von zwei Marken in bekannter Größe und Entfernung durch die nicht allein brechende, sondern auch spiegelnde Fläche entworfen wird. Da das Auge bei der Messung nicht ganz ruhig gehalten wird, so benutzte HELMHOLTZ (Abb. 63) die Doppelbilder zur Messung. Eine dicke Glasplatte war durch einen wagrechten Schnitt in zwei Teile, einen oberen und einen unteren, zerlegt worden, und sie ließen sich unabhängig voneinander um eine senkrechte Achse drehen. Man bringt zunächst die beiden parallelgestellten Platten so vor ein Meßgerät, daß der wagrechte Schnitt durch die Achse des Fernrohrs geht und die obere Optometerplatte vor der oberen, die untere vor der unteren Objektivhälfte steht. Verdreht man nun die Platten entgegengesetzt gleich gegeneinander, so machen die durch sie hindurch betrachteten Spiegelbilder der Marken eine Bewegung; bei richtiger Wahl des Drehungssinnes ist diese Bewegung derartig, daß sich die Bilder nähern. Fährt man mit der Drehung fort, bis sich die Markenbilder berühren, so erhält man eine Bestimmung der Bildgröße, deren Genauigkeit auch bei den unwillkürlichen kleinen Augenbewegungen erhalten bleibt.

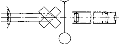


Abb. 63. Horizontalschnitt für ein Ophthalmometer nach HELMHOLTZ. Zwischen den Glasplatten und dem Fernrohr befindet sich das an der Hornhaut zu spiegelnde Markenpaar (gewöhnlich zwei Lampen).

Bei wirklich achsensymmetrischen Kugelflächen ist nichts weiter zu bemerken; bei einer astigmatischen Grenzfläche wird der wagrechte Trennungsschnitt der beiden Glasplatten im allgemeinen in keinem Hauptschnitt der Grenzfläche verlaufen. Das zeigt sich bei der Benutzung durch eine eigenartige Seitenabweichung, indem die Doppelbilder bei der Annäherung quer zur gewünschten Verschiebungsrichtung auseinandertreten, oder eine Denivellation (einen Querfehler) zeigen. Macht man den Trennungsschnitt der beiden Glasplatten beliebig um die Achse des Meßgeräts drehbar, so verschwindet der Querfehler, sobald der Trennungsschnitt in einen der beiden Hauptschnitte der spiegelnden astigmatischen Fläche fällt.

Auf die besonders zur raschen Feststellung und Messung des Hornhautastigmatismus gebauten Ophthalmometer der Augenärzte wird beim Astigmatismus noch näher eingegangen sein.

Was die *Entfernungen der Flächen* im Auge angeht, so wird insbesondere für die Dicke der Hornhaut und die Tiefe der Augenkammer das Ophthalmometer von Blix benutzt. Es handelt sich nach Abb. 64 um ein Doppelgerät, dessen Einzelmikroskope auf den beiden Achsen gemeinsamen Schnittpunkt eingestellt sind. In dem mit T_1 bezeichneten Rohr ist das Okular durch eine hell beleuchtete Blende ersetzt, deren Mitte bei d_1 liegt. Befindet sich der gemeinsame Schnittpunkt an dem Scheitel (oder dem scheinbaren Scheitel) einer der Augenflächen, so wird das Spiegelbild der Blende in dem Rohr T deutlich wahrgenommen. Die durch die Verschiebung des ganzen Geräts erhaltene scheinbare Dicke muß noch auf die wahre Dicke umgerechnet werden.

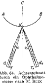


Abb. 64. Achsenschnitt durch ein Ophthalmometer nach M. Blix.

Wer genauere Angaben über die Meßverfahren am Auge zu erhalten wünscht, sollte sie dem Gullstrandschen Werke[1]) entnehmen.

48. Die Akkommodation des Auges. Das nicht greisenhafte Auge besitzt die Fähigkeit, sich auf nähere Gegenstände einzustellen oder auf sie zu *akkommodieren*. Man beobachtet bei dem Akkommodationsvorgange eine zuerst von Chr. Scheiner 1619 beobachtete Verengerung der Pupille, ein Vorrücken des vorderen Linsenscheitels und eine Krümmungszunahme bei den Linsenflächen namentlich der vorderen. Nach Helmholtz hat man sich die Akkommodationsverhältnisse so vorzustellen, daß der ständige Zug der Zonula die Linse in Akkommodationsruhe abplatte, während die mehr oder minder starke Verminderung dieses Zuges beim Akkommodationsvorgange der Elastizität der Linsenkapsel die Möglichkeit gebe, den Außenflächen eine stärkere Krümmung zu erteilen.

Das Akkommodationsgebiet. Die beiden Achsenpunkte, die das Gebiet begrenzen, auf das sich das Auge einstellen kann, nennt man den *Fernpunkt* R (*Punctum remotissimum*) bei erschlaffter und den *Nahpunkt* P (*Punctum proximum*) bei angespannter Akkommodation. Die Lage des Fernpunktes ist von dem holländischen Augenforscher F. C. Donders bewußt zur Einteilung der Brechungsfehler der Augen benutzt worden. Augen, deren Fernpunkt R im Unendlichen liegt, nennt man *rechtsichtige* oder *emmetropische*; liegt er in endlicher Entfernung, so spricht man von *fehlsichtigen* oder *ametropischen* Augen. Hier sind wieder zwei Unterfälle möglich: liegt der Fernpunkt R *vor* dem Auge, oder ist HR der Hauptpunktabstand des Fernpunktes negativen Zeichens, so nennt man das Auge *kurzsichtig* oder *myopisch*, und man bezeichnet es als *übersichtig* oder *hyperopisch*, wenn der Fernpunkt in endlicher Entfernung hinter ihm liegt, also HR von positivem Zeichen ist. Es ist ganz klar, daß ein solches Auge in Akkommodationserschlaffung keinen wirklichen Gegenstand deutlich sehen kann, sondern daß es einer Sammellinse bedarf, die den Achsenort des Gegenstandes an dem Fernpunkt R abbildet. Was den Nahpunkt P angeht, so liegt er immer in der Lichtrichtung *hinter* dem Fernpunkt, d. h. mit anderen Worten, beim kurzsichtigen Auge noch näher als R. Beim übersichtigen Auge verschiebt sich der Nahpunkt zunächst von R aus auf den unendlich fernen Achsenpunkt des Augenraumes zu und kann ihn je nach der Größe des Akkommodationsvermögens entweder nicht erreichen oder gerade erreichen,

[1]) Einführung in die Methoden der Dioptrik des Auges des Menschen Bd. III, von R. Tigerstedts Handbuch der physiologischen Methodik. Abt. 3, 180 S., Gr.-8°, 20+. Leipzig: Hirzel 1911.

oder schließlich vor dem Auge erscheinen. Während also (s. auch die Abb. 74, 75) beim kurzsichtigen Auge das Akkommodationsgebiet den fernen Achsenpunkt ausschließt, schließt es ihn gegebenenfalls beim übersichtigen gerade ein.

Der Grund für diese **Brechungsfehler** (**Ametropien**) des Auges sind in der Regel fehlerhafte Achsenlängen: **Längenfehler** oder **Achsenametropien**. Es können auch **Krümmungsfehler** oder **Krümmungsametropien** auftreten, deren auffälligster die **Linsenlosigkeit** oder **Aphakie** eines vom Star befreiten Auges ist, wodurch ein ursprünglich rechtsichtiges Auge zu einem in hohem Maße übersichtigen wird. Schließlich könnte eine Fehlsichtigkeit auch auf einen **Brechzahlfehler** oder eine **Indexametropie** zurückgehen.

Zur Feststellung des Brechungsfehlers eines Prüflingsauges sollte dessen Akkommodation entspannt sein.

Das sehr bequem und rasch arbeitende **objektive** Verfahren der **Schattenprobe** (**Skiaskopie**) nach CUIGNET soll hier nach der gründlichen Behandlung durch A. WOLFF ganz kurz geschildert werden. Mittels eines neigbaren durchlochten Planspiegels läßt man auf der Netzhaut des untersuchten (Prüflings-) Auges einen einigermaßen scharf begrenzten Lichtfleck wandern und betrachtet den Verschiebungssinn der Grenze zwischen Licht und Schatten auf der Prüflingspupille, wo sie in Zerstreuungskreisen gesehen wird. Ist die Verschiebung zur Spiegeldrehung gegenläufig, so ist das Prüflingsauge auf einen Punkt zwischen seiner Pupille und dem Planspiegel eingestellt; ist sie mitläufig, so liegt der Einstellpunkt entweder jenseits des Spiegels oder virtuell hinter dem Prüflingsauge. Man kann sich also aus diesem Schattenlauf über die Lage des Einstellpunktes des Prüflingsauges Rechenschaft geben. Fällt der Einstellpunkt in den Lochrand, so nimmt man keine merkbare Schattenwanderung mehr wahr; man kennt also in der Spiegelentfernung auch den Abstand des Einstellpunktes. Mit Hilfe von Vorschlagsgläsern und durch richtige Wahl der Spiegelentfernung von der Prüflingspupille kann man also das Brillenglas angenähert (abgesehen von der Akkommodation des Prüflingsauges) bestimmen.

Überprüft werden diese Ergebnisse mit dem **subjektiven** Verfahren nach F. C. DONDERS, wo an einer geeigneten Probetafel mit Buchstaben oder durchbrochenen Ringen (nach E. LANDOLT) die **höchste Sehschärfe** durch Vorschaltung von achsensymmetrischen Probierbrillengläsern bestimmt wird. Das stärkste Sammel- oder das schwächste Zerstreuungsglas, mit dem diese Sehschärfe erreicht werden kann, wird als das **Fernbrillenglas** des Prüflingsauges bezeichnet. Die Probetafel wird in 5 bis 6 m Entfernung angebracht, und damit sichert man die Entspannung der Akkommodation am Prüflingsauge, namentlich wenn am Schluß beidäugig durch die in Einzeluntersuchung gefundenen Brillengläser beobachtet wird.

Das Akkommodationsvermögen. Da man schon früher, jedenfalls aber dank den Bemühungen GULLSTRANDS, bei den Rechnungen in der Augenkunde von den — beim Akkommodieren fast ungeändert bleibenden — Augenhauptpunkten ausgeht, so wird man die Formeln in Ziff. 21, Kap. I verwenden.

Nennt man p = **HP** und r = **HR** die **Hauptpunktsabstände** von Nah- und Fernpunkt, so spielen die **Hauptpunktsbrechwerte** $1/p$ und $1/r$ eine große Rolle, und man hat sich nach dem Vorgang von F. C. DONDERS daran gewöhnt, die Größe

$$A = 1/p - 1/r$$

als **Akkommodationsbreite** zu bezeichnen. Wie man leicht einsieht, ist A eine negative Größe.

Mit zunehmendem Alter nimmt der Betrag der Akkommodationsbreite ständig ab, indem $1/p$ ziffernmäßig kleiner und kleiner wird, da sich der Nah-

punkt im Sinne der Lichtrichtung mehr und mehr vom Auge entfernt. Einzelheiten für ein rechtsichtiges Auge wird man der folgenden Zusammenstellung entnehmen, wobei für die Akkommodationsbreite $-A$ eingesetzt wurde, um negative Zifferwerte dieser Größe zu vermeiden.

Tabelle 5. Die Änderung der Akkommodationsbreite ($-A$) mit dem Alter für ein rechtsichtiges Auge

Lebensalter in Jahren	p in cm	$1/p$ in dptr	r in cm	$1/r$ in dptr	$1/r - 1/p$ in dptr
10	− 7,1	− 14	∞	0	14
15	− 8,3	− 12	∞	0	12
20	− 10,0	− 10	∞	0	10
25	− 11,8	− 8,5	∞	0	8,5
30	− 14,3	− 7,0	∞	0	7,0
35	− 18,2	− 5,5	∞	0	5,5
40	− 22,3	− 4,5	∞	0	4,5
45	− 28,6	− 3,5	∞	0	3,5
50	− 40,0	− 2,5	∞	0	2,5
55	− 66,6	− 1,5	400	0,25	1,75
60	− 200	− 0,5	200	0,5	1,0
65	400	0,25	133	0,75	0,5
70	100	1,00	80	1,25	0,25
75	57,1	1,75	57,1	1,75	0,0
80	40	2,5	40	2,5	0,0

Diese Tabelle ist aus einer Darstellung entwickelt, die F. C. Donders im Jahre 1876 durch E. Landolt veröffentlichen ließ.

Den Zustand, wo der Nullpunkt weiter vom Auge abrückt als 8 Pariser Zoll (= 21,7 cm) und also die Erkennung kleiner Einzelheiten erschwert wird, nannte Donders Presbyopie oder Alterssichtigkeit. Bei ursprünglich rechtsichtigen Beobachtern tritt dies meistens zwischen dem 40. und 45. Lebensjahre ein. Hier sei auch noch auf den weit verbreiteten Irrtum einer „mittleren deutlichen Sehweite" von 25 cm aufmerksam gemacht; die Nahpunktsentfernung ist ja, wie wir sahen, eine Funktion des Lebensalters.

49. Die Strahlenbegrenzung im ruhenden Auge. Die Öffnungsblende des Auges ist die Iris oder Regenbogenhaut. Die Eintrittspupille — hier schlechtweg Pupille genannt — ist das von Kammerwasser und Hornhaut bei rückkehrender Lichtrichtung in Luft entworfene Bild der Iris. Setzt man voraus, daß die Irismitte mit dem Scheitel der Kristallinse zusammenfalle, so ergibt sich der Abstand $\mathfrak{S}P$ der Eintrittspupille P vom Hornhautscheitel $\mathfrak{S}P = +3{,}05$ mm (+ 2·67 mm), wenn das Übersichtsauge mit entspannter Akkommodation (mit einer Akkommodationsanspannung von etwa 10 dptr) vorausgesetzt wird. In dieser Abbildung wird der Irisdurchmesser etwa um 13,1 (11,5)% vergrößert. Der Durchmesser der Augenpupille ist jedenfalls unter 10 mm, in der Regel sogar beträchtlich darunter; wir werden darauf noch bei der Strahlungsvermittlung einzugehen haben.

Die Mitte der Eintrittspupille ist der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen beim ruhenden Auge, nach Helmholtz Visierlinien genannt. Man kann mit ihnen die Punkte im Raume finden, deren Zerstreuungsscheiben auf der Netzhaut Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt sind. Gebraucht wird beim Visieren freilich immer nur der nach der Mitte der Netzhautgrube zielende Hauptstrahl. Das Gesichtsfeld des ruhenden Auges, Sehfeld genannt, ist sehr groß. Schon J. Kepler konnte 1604 einen Versuch angeben, wonach es 180° erreichen müsse.

Ferner ist die Mitte P der Eintrittspupille das perspektivische Zentrum für das auf das ruhende Auge wirkende Abbild (s. Ziff. 97). Freilich hat

nach Abb. 77 das einigermaßen deutliche Gesichtsfeld dieser **Füllperspektive** (s. Ziff. 57) nur eine sehr kleine Ausdehnung.

Zwei in der Mitte des Gesichtsfeldes eben noch trennbare Gegenstandspunkte bestimmen die **Sehschärfe** des Auges durch den Winkel, unter dem sie von P aus erscheinen. Weiter unten wird für die Zwecke der Augenuntersuchung noch eine genauere Bestimmung für die Sehschärfe gegeben werden, die für fehlsichtige Augen mit ihren unter Umständen sehr nahe gelegenen Sehdingen von Bedeutung sind. Als Wert für die Sehschärfe eines gesunden Durchschnittsauges pflegt man eine Winkelminute anzuführen.

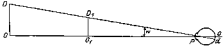


Abb. 65. Zum Sehen mit ruhendem Auge.

w Hauptstrahlneigung oder Gesichtswinkel, od der dem Gesichtswinkel w entsprechende Netzhautbogen. P das perspektivische Zentrum des kleinen Gesichtsfeldes.

Hier ist auch auf die **Abbildungstiefe** des Auges hinzuweisen, die, soweit man sich auf die Strahlenoptik stützen darf — beim Auge besonders bei recht kleinen Pupillenöffnungen —, in der gleichen Weise zu behandeln ist wie bei den optischen Vorkehrungen (s. Ziff. 97) im allgemeinen. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß namentlich bei größeren Öffnungswerten die Abbildungsfehler des Auges und die Berücksichtigung der Beugung sehr starke Abweichungen von den Ergebnissen der bloßen Strahlenoptik auftreten.



Abb. 66. Zur Sehschärfe des Menschenauges.

a der mittlere Abstand zweier Zapfenenden.



Abb. 67. Zur Schärfe der Breitenwahrnehmung.

Betrachtet man den Auffangschirm des Auges, die **Netzhaut**, namentlich in der Netzhautgrube genauer, so findet man nach Abb. 66 ein wabenähnliches Gefüge, das schon von HELMHOLTZ gelegentlich angedeutet, aber zuerst von L. HEINE durch photographische Vergrößerung nachgewiesen wurde. Sollen zwei Punkte getrennt wahrgenommen werden, so muß mindestens ein vollständiges unbelichtetes Sechseck zwischen den beiden Bildern liegen; die Ausmaße nach der HEINEschen vergrößerten Aufnahme stimmen befriedigend mit dem Abstande überein, der sich bei der Annahme einer Sehschärfe von einer Winkelminute aus der Brennweite von 17,1 mm beim Übersichtsauge ergibt.

Wesentlich feinere Unterscheidung erlaubt die **Schärfe der Breitenwahrnehmung**, wie sie sich aus dem wabenartigen Bau ergibt. E. HERING hat das Verdienst, auf die in obenstehender Zeichnung 67 wiedergegebene Weise die große Schärfe der Feststellung erklärt zu haben, wie man sie z. B. bei der Ablesung eines Nonius machen kann. Die Tatsache, daß zwei parallele Geraden nicht genau aufeinanderstoßen, läßt sich auch dann noch erkennen, wenn längst nicht eine volle ungereizte Zapfenreihe zwischen den beiden gereizten liegt. Hiermit wurden nicht nur die großen Ablesungsschärfen von Noniuseinstellungen verständlich, sondern man konnte nunmehr die große Feinheit der Tiefenwahrnehmung geeigneter Sehdinge bei beidäugiger Beobachtung erklären. Darauf wird weiter unten noch genauer einzugehen sein, wenn über die beidäugigen Vorkehrungen, namentlich die Meßgeräte, zu sprechen ist.

50. Die Strahlungsvermittlung im Auge. Das Auge kann seine Dienste sowohl im hellen Sonnenlichte wie bei schwacher Mondscheinbeleuchtung leisten. Dies wird ermöglicht zunächst einmal durch die seit langer Zeit bekannte Verengerung der Pupille bei stärkerer Beleuchtung. In Übereinstimmung mit der Angabe in Ziff. 49 kann man Pupillendurchmesser von 8 bis 9 mm bei ganz geringer Helligkeit solchen von 2 mm bei stärkster Beleuchtung gegenüberstellen. Neben dieser Änderung des Pupillendurchmessers, die übrigens für beide Augen gleichzeitig erfolgt, ist aber noch die Adaptation des Auges zu berücksichtigen, d. h. die Einstellung des Empfindlichkeitsgrades der Netzhaut für verschiedene Beleuchtung. Man unterscheidet Hell- und Dunkeladaptation, je nachdem das Auge längere Zeit unter der Einwirkung stärkeren Lichtes gestanden hatte oder vom Licht abgeschlossen worden war. Die Anpassung an die Helle wird in wenigen Minuten erreicht, während die Anpassung an das Dunkel eine vielmal längere Zeit, etwa eine Stunde, erfordert. Dann ist der Schwellenwert der Lichtempfindung auf ungefähr 1:100000 herabgesetzt. Besonders die Stäbchen sind beim Dunkelsehen von einer besonderen Wichtigkeit; da sie nach dem Rande der Netzhaut zu neben den Zapfchen eine immer größere Rolle spielen, so steigt die Empfindlichkeit bei Dunkelanpassung für die Netzhaut nach der Seite zu an. Das ist der Grund dafür, daß man bei sternenklarer Nacht, wenn fremdes Licht ausgeschlossen ist, beim Fixieren lichtschwache Sterne übersieht, während man sie erkennt, wenn die Gesichtslinie seitlich an ihnen vorbeigeht. Auch die Verschiedenheit der Empfindlichkeit für verschiedene Farben ist bei Zapfchen und Stäbchen verschieden; für die erstgenannten, also namentlich für die besonders zäpfchenreiche Netzhautgrube liegt die höchste Empfindlichkeit im Grüngelb etwa bei 550 $\mu\mu$, während sie für die Stäbchen nach dem blauen Ende hin verschoben ist und etwa bei 515 $\mu\mu$ liegt, wobei die Empfindlichkeit für Rot noch besonders stark herabgedrückt ist. Daraus erklärt sich auch die Purkinjesche Erscheinung, wonach in der Morgendämmerung zuerst Blau wahrgenommen wird und auch leuchtendes Rot noch lange fast schwarz erscheint.

Für die Wahrnehmung von Bewegungen sind die Seitenteile der Netzhaut besonders geeignet.

Was die eigentliche Strahlungsvermittlung durch die Flächenfolge des Auges angeht, so hat das Auge den künstlichen Vorrichtungen gegenüber den Vorteil, daß nur an einer Fläche, nämlich der vorderen Hornhautfläche, zwei Mittel mit einigermaßen großem Unterschied der Brechzahlen aneinanderstoßen. Das sind Luft und Hornhaut mit den Werten von $n = 1$ und $n' = 1{,}376$. Der Verlust eines jeden in das Auge tretenden Strahles an Leuchtkraft beträgt mindestens für senkrechten Auffall nach der Formel

$$\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2$$

etwa 2,5%, also ungemein viel weniger als bei der einfachsten photographischen Landschaftslinse (S. 441), die doch mindestens zwei Flächen gegen Luft hat. An den anderen Flächen des Augeninnern sind die Verluste natürlich noch geringer, und zwar erhält man für den Spiegelungsverlust an der ersten Fläche der Kristallinse den Betrag von 0,034%. Da von diesem so zurückgeworfenen Licht die Purkinjeschen Bildchen geliefert werden, so erkennt man, warum diese Erscheinungen so ungemein viel lichtschwächer sind als die an der Hornhaut entstehenden Spiegelbilder. Immerhin lassen sich die Purkinjeschen Bildchen bei geeigneter Versuchsanordnung noch gut beobachten, und sie haben bei der Untersuchung des Akkommodationsvorganges seit Cramer und Helmholtz eine ganz große Bedeutung gehabt.

Handelte es sich in diesen Fällen, der Spiegelung an der Hornhaut und den Flächen der Kristallinse, um Licht, das in den Augenraum zurückgeworfen wurde, so können unter Umständen auch Lichtwirkungen auf der Netzhaut wahrgenommen werden, die von einer doppelten (also wieder auf die Netzhaut zu gerichteten) Spiegelung herrühren. Sie entsprechen also dem Nebenbilde, wie es bei einfachen Landschaftslinsen (S. 442) vorhanden ist. Da man am Auge dieses auf doppelte Spiegelung zurückgehende Nebenbild zu keiner Messung verwenden kann, so ist seine Bedeutung auch viel geringer als die der oben behandelten, im Augenraum sichtbaren Bilder von einfacher Spiegelung.

Ferner muß als ein schädigender Umstand bemerkt werden, daß die Augenmittel von keiner vollkommenen Durchlässigkeit sind, sondern daß häufig im Glaskörper und der Linse vorhandene Trübungen sowie das Zellgefüge des Glaskörpers Verluste durch Dämpfung und zerstreuten Zurückwurf des eintretenden Lichtes bedingen werden.

Im allgemeinen wird man aber doch sagen können, daß bei der Anlage des Auges ein recht großer Bruchteil des auffallenden Lichtes der Netzhaut zugeführt wird.

51. Die Abbildungsfehler im Menschenauge. Nimmt man zunächst einmal ein solches Auge an, daß es als achsensymmetrisch betrachtet werden kann, so wird ein von einem Dingpunkt in das Auge gesandtes spitzes Strahlenbündel auf der Netzhaut nicht wieder in einem Punkte vereinigt, sondern bildet auf ihr ein Zerstreuungsscheibchen.

Die mittlere Zone der Hornhaut, ungefähr von 4 mm im Durchmesser, ist bei gut gebauten Durchschnittsaugen angenähert kuglig. Unter ihren Normalen scheint die durch die Pupillenmitte gehende auch auf den anderen Flächen der Folge angenähert senkrecht zu stehen. GULLSTRAND nennt sie die optische Achse des Auges. Sie geht aber nicht durch die Mitte der Netzhautgrube, sondern bildet mit der Visierlinie, die im Dingraum auf den deutlich wahrgenommenen Punkt führt, einen Winkel: sie verlauft meistens 4 bis 7° nach außen und 2 bis 3° nach unten, wenn man von der bevorzugten Visierlinie ausgeht. Da diese Abweichung sehr gering ist, so ist der auf die Durchtrittsschiefe zurückzuführende Astigmatismus schiefer Bündel längs der nach dem deutlich wahrgenommenen Dingpunkt verlaufenden Visierlinie hier zu vernachlässigen. Die Ausdehnung der (Füll-) Perspektiven (s. Ziff. 57) beim ruhenden Auge ist ferner so gering, daß man unter gewöhnlichen Umständen von dem Astigmatismus schiefer Bündel nichts bemerkt.

Beachtet man aber ein von dem Dingpunkt ausgesandtes spitzes Bündel, so daß es etwa die als einen Kreis von 4 mm angenommene Pupille vollständig ausfüllt, so ist, wie soeben bemerkt, mit einem Zerstreuungsscheibchen auf der Netzhaut zu rechnen. GULLSTRAND hat schon früh darauf hingewiesen, daß die Feststellung des Durchmessers bei diesem Zerstreuungskreise von geringerer Bedeutung sei als die Kenntnis der Lichtverteilung in ihm. Er hat die für das Auge ganz unerläßliche flächentheoretische Behandlung der Abweichungen in seine Behandlung der Abbildung eingeführt und damit Ergebnisse erzielt, die von den üblichen Darstellungen nicht erreicht werden konnten. Diese waren im wesentlichen von technischen Optikern geschaffen, die von der ausgerichteten Flächenfolge einer optischen Vorkehrung ausgingen und das Ziel durch eine Reihenentwicklung zu erreichen suchten. Hier beim Auge, wo im allgemeinen keine ausgerichteten Kugelflächen vorliegen, ist, wie bereits gesagt, die flächentheoretische Betrachtung der Wellenfläche in der Nähe eines ausgewählten Strahles unumgänglich. Da er bei seinen Entwicklungen auch dritte und vierte Differentialquotienten der Gleichung der Wellenfläche berücksichtigte, so be-

handelte er ein Gebiet der Flächentheorie, das auch rein mathematisch, ohne Rücksicht auf die Anwendung auf optische Aufgaben, vor ihm in dieser Ausdehnung nicht bestellt worden war. Eine Zusammenstellung seiner wichtigsten Ergebnisse und einen Hinweis auf seine Verfahren hat er wiederum in der 3. Auflage des Helmholtzischen Handbuchs der physiologischen Optik gegeben.

Aus der großen Fülle seiner Ergebnisse seien hier die folgenden zwei hervorgehoben.

Die Gestaltabweichung für endliche Einfallshöhen. Nennt man nach Gullstrand die Unterbesserung (Unterkorrektion) der Optiker eine positive Abweichung und nimmt eine solche für kleine Einfallshöhen der optischen Zone des Menschenauges an, so würde dies auf eine derartige Beeinflussung des Strahlenverlaufs führen, daß sich die Schnittpunkte höher einfallender Strahlen mit der optischen Achse mehr und mehr der Wellenfläche näherten, wie das die Abb. 68 darstellt. Eine solche Annahme ist aber nicht durchaus notwendig, sondern es könnte ja für das gebrochene Bündel die Kugelabweichung gehoben sein. In einem solchen Falle würden, wie Abb. 69 zeigt, die Schnittpunkte von Strahlen größerer Einfallshöhe mit der Achse zunächst wie 1, 2, 3 auf die Wellenfläche zustreben; indessen würde das nur bis zu einem gewissen Grenzwerte am linken Ende der dargestellten Strecke geschehen, dann erhielten höher einfallende Strahlen wieder weiter nach rechts liegende Schnittpunkte mit der optischen Achse, etwa wie bei 4, 5, 6. Und das könnte soweit gehen, daß, wie bei dem Punkte 6, der Schnittpunkt eines Strahles besonders großer Einfallhöhe von der Wellenfläche noch weiter entfernt wäre als der eines achsennahen Strahles mit der Achse. Gullstrand nennt die Strecken $\overleftarrow{15}$ und $\overrightarrow{16}$ die periphere Totalaberation und behandelt damit die Erscheinung, die der technische Optiker bei seinen Linsenfolgen als Zwischenfehler der Kugelabweichung bezeichnet. Er konnte dabei zeigen, daß ein solcher Zustand durch eine besondere asphärische (unkuglige) Gestalt der Hornhautvorderfläche in einigermaßen großen Achsenabständen zu erklären sei, und zwar hat man in neuerer Zeit solche gesetzmäßig von einer Kugelfläche abweichende Umdrehungsflächen mehrfach auch in der technischen Optik, und zwar zum Teil gerade auf Gullstrands Anregung hergestellt. Die Zwischenfehler, die von der natürlichen asphärischen Fläche übriggelassen werden, würde der technische Optiker als sehr beträchtlich ansehen. Betrachtet man zwei enge Strahlenbündel längs zwei Hauptstrahlen, deren einer ganz nahe der optischen Achse des Auges verläuft, während der andere an der Hornhaut 2 mm von ihr entfernt auffällt, so weisen die zugehörigen bildseitigen Brechwerte einen Unterschied von 4 dptr auf, was durch eine ziemlich große Anzahl von Messungen festgestellt ist. Mit diesem großen Zwischenfehler am Menschenauge steht es in Verbindung, daß bei dem Übersichtsauge die Netzhautgrube dem Hornhautscheitel etwas näher liegt als der Brennpunkt F' der achsennahen Strahlen. Geht man auf die Zusammenstellung der Werte für das Gull-



Abb. 68. Übersichtsdarstellung eines Bündels mit einfacher positiver Kugelabweichung.

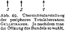


Abb. 69. Übersichtsdarstellung der peripheren Totalaberration Gullstrands. Je nachdem man die Öffnung des Bündels so wählt, daß die Punktreihe zwischen 5 und 6 aufhört, ergibt sich die Gullstrandsche Totalaberration positiv, als Null oder negativ.

STRANDsche Übersichtsauge zuruck (Ziff. 46), so erkennt man, daß der Netzhautgrube ein dingseitiger Hauptpunktsbrechwert von $+1$ dptr entspricht.

Eine stichhaltige Erklärung der von fast allen Augen wahrgenommenen Sternstrahlen vermochte erst GULLSTRAND durch seine Theorie zu geben. Diese Erscheinung war früher unerklärt geblieben, und man war über die HELMHOLTZische Erklärung nicht hinausgekommen, wonach sie in der Linse des Auges entstünden; als einen Grund dafür hatte HELMHOLTZ später die Tatsache angegeben, daß linsenlose Augen die Sterne ohne Strahlen wahrnähmen.

Genauere flächentheoretische Untersuchungen der Kreispunkte in den verschiedenen Grundformen astigmatischer Strahlenbündel hatten GULLSTRAND gezeigt, in welcher Weise die Kurvenspuren der abwickelbaren Strahlenflächen auf der durch die Blende gehenden Strahlenfläche sei es in den Kreispunkt einmündeten, sei es ihn umkreisten. Die erstgenannte Schar von Kurven zeigte eine strahlige Beschaffenheit, die andere in sich geschlossene Kurven, deren Radiusvektor abwechselnd Maxima und Minima aufwies. Eine solche Beschaffenheit läßt sich in dem vorliegenden Falle nur dadurch erklären, daß man annimmt, eine der brechenden Linsenflachen zeige ein entsprechendes Verhalten. Und in der Tat kann man namentlich bei der vorderen, besonders plastischen Linsenkapsel annehmen, daß ihre Befestigung durch die Zonula an dem eine endliche Zahl von Vorsprüngen bildenden Ziliarkörper geeignet sei, eine durch den Zug bedingte Oberflachenspannung hervorzubringen. Dem entsprechen auch Befunde am lebenden Auge, wo man nach Iridektomie hat feststellen konnen, daß der Linsenrand eingekerbt erschien. Aus den natürlichen Verschiedenheiten der Linsenaufhangung in den Augen anderer und anderer Beobachter sind denn auch die Verschiedenheiten des Strahlenkranzes um Sterne zu erklären, die von solchen Beobachtern festgestellt wurden.

Diese Erscheinungen lassen sich also Bildfehlern bei den Erzeugnissen der optischen Technik vergleichen, die dann entstehen, wenn die Fassungsteile auf die Linsen einen verspannenden Druck ausüben. Sind die Druckstellen, etwa wie bei unrichtig behandelten astronomischen Fassungen, regelmäßig angeordnet, so ergibt sich eine regelmäßige Sternfigur; ist die Spannung aber unregelmäßig verteilt, wie es unter Umständen bei photographischen Linsen durch das Herausquellen von Kitt geschieht, so erhält man ganz unregelmäßige Spannungserscheinungen an Stelle des scharfen Bildes eines fernen leuchtenden Punktes.



Abb. 70. Stark verkleinerte Wiedergabe von HELMHOLTZens Gitter zur Feststellung der Winkeltreue des ruhenden Auges.

A gibt den entsprechend verkleinerten senkrechten Abstand des Auges von der Mitte der Zeichnung an.

Was die Verzeichnung angeht, mit der die Flächenfolge des Auges bei der durch die Iris bedingten Strahlenbegrenzung behaftet ist, so hat dazu HELMHOLTZ (553) eine sehr wertvolle Feststellung gemacht. Er konnte zeigen, daß ein ebenes Gitter (Abb. 70), das nach zweckmäßiger Färbung der einzelnen Gebiete dem ruhenden Auge wie eine Schachbrettzeichnung erscheinen sollte, von zwei Gruppen bestimmter Hyperbeln gebildet werden mußte. Dabei standen die Achsen der einen Gruppe senkrecht zu denen der anderen.

52. Der Augenastigmatismus. Während es sich in den beiden soeben behandelten Fällen um Augen handelte, die wenigstens mit einigermaßen großer

Annäherung achsensymmetrisch gebaut waren, so kommt bei einer beträchtlichen Anzahl von Augen eine Abweichung von der Achsensymmetrie vor, die das Auftreten von **Astigmatismus** auch längs der Augenachse zur Folge hat. Alsdann gibt es die beiden sich längs der Augenachse unter rechtem Winkel durchdringenden Ebenen, die **Hauptschnitte** des astigmatischen Auges, für die wenigstens in den dünnen in ihnen verlaufenden Büscheln eine Strahlenvereinigung zustande kommt. Sie bestimmen auch die Richtung der abbildbaren Linien, die im Brillenabschnitt auch noch zu erwähnen sind (s. auch Ziff. 92). Ein längs der Achse in das Auge tretendes spitzes Bündel wird also im Augeninnern astigmatisch. Nennt man den Hauptpunktsabstand des Fernpunktes in dem einen Hauptschnitt kurz m, in dem anderen kurz a, so erhält man zunächst die Hauptpunktsbrechwerte

$$M = 1/m; \; A = 1/a$$

und daraus den Betrag des Astigmatismus

$$A_s = M - A.$$

Sehr häufig wird der Astigmatismus durch eine Gestaltung der vorderen Hornhautfläche verursacht, die in einem solchen Falle keine Drehfläche, sondern eine allgemeine Fläche von doppelter Krümmung ist. Man spricht dann von **Hornhautastigmatismus**.

Was die Bestimmung des für die Brillenverordnung besonders wichtigen Hornhautastigmatismus angeht, so sind hier zwei Geräte, **Ophthalmometer**, zu erwähnen, die von den Augenärzten in weitestem Maße verwandt werden.

Das ältere, namentlich auf dem Festlande verwandte **Ophthalmometer** von JAVAL und SCHIÖTZ stammt aus dem Jahre 1881. Wie man aus Abb. 71 ersieht, trägt ein Bogen mit seinem Mittelpunkt in dem Prüflingsauge U zwei Sehzeichen, die sich auf dessen Hornhaut spiegeln. Diese Spiegelbilder werden in dem ausgerichteten Fernrohr beobachtet und dabei durch ein WOLLASTONsches Quarzprisma verdoppelt. Das eine Sehzeichen zeigt Stufen, die je einer Dioptrie Hornhautbrechwert entsprechen. Im allgemeinen zeigen die Sehzeichen an der astigmatischen Hornhaut einen **Querfehler** (eine **Denivellation** [siehe Ziff. 47]), der aber bei zwei Stellungen des um die Fernrohrachse geschwenkten Bogens, nämlich in den beiden Hauptschnitten der Hornhaut, verschwindet. Verschiebt man die Sehzeichen so lange aufeinander zu oder voneinander fort, bis sie sich in dem Hauptschnitt schwächster Brechung gerade berühren, und schwenkt alsdann den Bogen durch eine Drehung von 90° in die Lage des

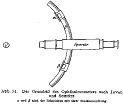


Abb. 71. Der Grundriß des Ophthalmometers nach JAVAL und SCHIÖTZ.
α und β sind die Sehzeichen mit ihrer Stufenanordnung.

Hauptschnittes stärkster Brechung, so greifen die Spiegelbilder der Zeichen aufeinander über und lassen aus der Anzahl der bedeckten Stufen den Grad des Astigmatismus ablesen.

Die neuere, namentlich in Ländern englischer Zunge verbreitete Vorkehrung heißt das Keratometer nach SUTCLIFFE und stammt aus dem Jahre 1907. Als Zeichen für die Spiegelung dient hier eine hakenkreuzähnliche Marke, deren Mittelstück durch einen Kreis ersetzt ist. Durch schwache, gekreuzte Zylinderlinsen wird das Sehzeichen mehrfach abgebildet, und zwar wirken fünf Teile der Austrittspupille in der Stellung ·:· dabei mit. Bei richtiger Einstellung liefert der obere und der untere Teil zusammen das eine, der rechte und der linke zusammen das zweite und der mittlere Teil für sich das dritte Bild. Die Abb. 72 zeigt ungefähr das Aussehen eines in diesem Gerät richtig eingestellten Hornhautspiegelbildes. Mangelhafte Scharfstellung zeigt sich durch die Verdopplung der Umrisse, und die Haken erlauben eine sehr genaue Erkennung (und damit auch völlige Vermeidung) des Querfehlers. Dem JAVAL-SCHIÖTZischen Gerät gegenüber ist der Vorteil einer einzigen Einstellung (gegen zwei durch eine Schwenkung zeitlich getrennte dort) vorhanden.

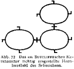


Abb. 72. Das im SUTCLIFFEschen Keratometer richtig eingestellte Hornhautbild des Sehzeichens.

Befindet sich der Sitz dieses astigmatischen Augenfehlers in der Kristallinse, so spricht man von Linsenastigmatismus und bezeichnet das Ergebnis beider Fehler zusammen als Totalastigmatismus. Geringe Beträge unter 0,5 dptr wird man als physiologische Abweichungen von der Norm bezeichnen, größere zwischen 0,5 und 4 dptr sind recht häufig und sollten durch entsprechende Brillengläser ausgeglichen werden (s. Ziff. 76). Noch größere Beträge kommen gelegentlich nach der Entfernung der durch grauen Star getrübten Kristallinse in linsenlosen Augen vor und werden als Narben- (oder postoperativer) Astigmatismus bezeichnet. Sie können 8 dptr und mehr betragen.

Den Totalastigmatismus prüft man ebenfalls nach dem subjektiven Verfahren von F. C. DONDERS, wie es auf S. 351 für die achsensymmetrischen Augen beschrieben worden war. Hier wendet man zweckmäßig eine Strahlen- oder Sternfigur zur Feststellung der Richtung der abbildbaren Linien an.

Beobachtet wurde dieser Augenfehler in der wissenschaftlichen Welt erst seit 1800 von TH. YOUNG, bei dem es sich um einen Fall von Linsenastigmatismus handelte, und Gelehrte haben sich dann in den nächsten vierzig Jahren mit seiner Natur und seiner Hebung beschäftigt, wie auch aus der Zeit bis zu 50 Jahren danach und später noch eine Reihe von Fällen gut beglaubigt sind, wo der Fehler von gescheiten Brillenverfertigern durch zweckmäßig gewählte Zylinderlinsen ausgeglichen wurde. Doch erst seit dem Jahre 1860 haben die Augenärzte, durch die Arbeiten namentlich von H. KNAPP und F. C. DONDERS auf die Wichtigkeit hingewiesen, auch auf diesen Augenfehler geachtet und ihn immer regelmäßiger ausgeglichen.

53. Die Farbenfehler des Auges. Da in der Flächenfolge des Auges die Farbenfehler in keiner Weise aufgehoben werden, so zeigen sich im Bilde Farbenfehler, die sich durch die farbigen Ränder der Zerstreuungsscheibchen kenntlich machen. Sie werden namentlich dann deutlich sichtbar, wenn man durch eine vorgehaltene Blendung die Pupille halb verdeckt, was K. B. MOLLWEIDE schon

seit 1804 vorgeschlagen und geubt hat. Daß sie unter gewöhnlichen Umständen nicht mehr auffallen, liegt hauptsächlich daran, daß das Auge für Licht von verschiedener Wellenlänge sehr ungleich empfindlich ist. Den Höchstwert fand J. Fraunhofer im hellen Grün; oben (s. Ziff. 50) war die Stelle bei $\lambda = 550\ \mu\mu$ angenommen worden.

Die farbige Längsabweichung wurde 1817 von J. Fraunhofer dadurch gemessen, daß er das Fadenkreuz eines Meßokulars mit farbigem Licht immer nur einer Wellenlänge beleuchtete und bei festgehaltener Akkommodation die Verschiebung der Augenlinse am Okular feststellte, die das Fadenkreuz wieder scharf erscheinen ließ. Die nicht leicht herbeizuführende Ausschaltung der Akkommodationsspannung suchte er dadurch zu erreichen, daß er mit dem freien Auge nach einem und demselben, stets mit weißem Licht beleuchteten Sehzeichen blickte. Schaltete er den Farbenfehler der einfachen Augenlinse durch Rechnung aus, so erhielt er, wenn sein Auge für Licht der roten Linie C ($\lambda = 656\ \mu\mu$) aus dem Okular parallele Strahlen erhielt, die gleiche Schärfe bei dem violetten Licht der Linie G ($\lambda = 431\ \mu\mu$), wenn der Bildpunkt vom Auge der Reihe nach $-0{,}642$, $-0{,}577$, $-0{,}528$, $-0{,}485$ m abstand. Geht man von diesen Hauptpunktsabständen auf die zugehörigen Hauptpunktsbrechwerte über, so erhält man die Reihe $-1{,}56$, $-1{,}73$, $-1{,}89$, $-2{,}06$ dptr. Bildet man das Mittel mit $-1{,}81$ dptr, so ist eben die Brechungswirkung der Flächenfolge des Auges für Licht der Wellenlänge G um 1,8 dptr stärker als fur Licht von der Wellenlänge C.

Später — 1895 — sind von J. J. Kunst die Zerstreuungsverhaltnisse der Augenmittel eingehender untersucht worden, und man kann seine Ergebnisse, die sich auf das Bereich zwischen den Linien D ($\lambda = 589\ \mu\mu$) und F ($\lambda = 486\ \mu\mu$) beziehen, zur Durchrechnung mit den Bestimmungsstucken des Gullstrandschen Übersichtsauges verwenden. Nur die Hornhaut wurde durch eine einfache Fläche von 7,8 mm Radius ersetzt. Man erhält dann die Schnittweiten fur die achsennahen Strahlen

$$s'_D = 17{,}472\ \text{mm};\quad s'_F = 17{,}197\ \text{mm},$$

also einen Unterschied

$$s'_D - s'_F = 0{,}275\ \text{mm},$$

wie er von W. Einthoven im Anschluß an die gleiche Kunstische Arbeit im Jahre danach sehr ähnlich festgestellt wurde. Bestimmt man im Anschluß an die Durchrechnung der achsennahen Strahlen die Brennweiten und die Brechkräfte, so erhält man für diese

$${}_D D_{11} = 59{,}0\ \text{dptr};\quad {}_F D_{11} = 59{,}946\ \text{dptr},$$

also einen Unterschied von 0,95 dptr zugunsten der kürzeren Wellenlänge.

Führt man mit einem rohen Überschlage und unter der Annahme, daß die Augenmittel in ihren Zerstreuungsverhältnissen dem Wasser gleichkommen, diesen Unterschied auf das größere Bereich von C bis G zurück, so erhält man den Betrag von etwa 2,25 dptr, der wenigstens der Größenordnung nach mit dem alten Fraunhoferschen, durch Versuche ermittelten übereinstimmt.

Jedenfalls ist nach dem Vorstehenden die Aussage gerechtfertigt, daß das Auge beim Sehen unter den gewöhnlichen Umständen an ziemlich große farbige Abweichungen längs der Achse gewöhnt ist und sie daher nicht leicht wahrnimmt.

β) Das beim Blicken bewegte Auge.

Wenden wir uns nunmehr zu dem beim Blicken bewegten Auge, so werden wir einen Nachtrag anzufügen haben, der sich im wesentlichen auf die Strahlenbegrenzung beziehen wird.

54. Die Schärfenflächen. Das Gesichtsfeld des ruhenden Auges konnte, soweit eine wirklich deutliche Wahrnehmung in Betracht kam, der geringen Ausdehnung des gelben Fleckes entsprechend darum eine so geringe Winkelerstreckung haben, weil sich das Auge bei gewöhnlichem Gebrauch schnell bewegt und auf den die Aufmerksamkeit, das Augenmerk, erregenden Punkt richtet. Im einzelnen dreht es sich dabei um einen im Augeninnern gelegenen Punkt, den **Augendrehpunkt**. Diese Erkenntnis wurde zuerst 1604 von J. Kepler vorbereitet und 1619 von seinem schwäbischen Landsmann, dem Jesuiten Chr. Scheiner, mit vorbildlicher Klarheit ausgesprochen. Dessen Auffassung wurde aber damals von der Wissenschaft nicht aufgenommen, und es währte noch mehr als 200 Jahre, ehe J. Müller 1825/6 auf die Augendrehung wieder aufmerksam machte und A. W. Volkmann 1836 die Lage des bei der Augendrehung festen Punktes, von ihm mit der heute üblichen Bezeichnung des **Augendrehpunktes** belegt, mit anerkennenswerter Genauigkeit bestimmte. Mindestens bei recht- und bei fehlsichtigen Augen geringeren Grades wird man ihn etwa 13 mm hinter der Hornhaut im Augeninnern anzunehmen haben. Vorläufig mag man annehmen, daß er auch bei ziemlich ausgiebigen Drehungen erhalten bleibt, aber selbst wenn spätere, genauere Untersuchungen erkennen lassen sollten, daß bei weiteren Wendungen des Auges kleine Abweichungen in der Lage des Drehpunktes auftreten, so würde der hier angenommene Zustand doch als eine brauchbare erste Annäherung immer noch einen gewissen Wert behalten.

Im einzelnen nennt man das Anblicken eines Dingpunktes **Fixieren**, dann fällt das Bild des Dingpunktes auf die Mitte der Netzhautgrube, und man spricht auch davon, daß dieser Dingpunkt **direkt gesehen** wird, während man seine Umgebung bei Festhaltung dieser Augenstellung im **indirekten** Sehen natürlich mit rasch abnehmender Deutlichkeit (s. Ziff. 45) erkennt. Diesen gerade fixierten Punkt nennt man nach Helmholtz auch den **Blickpunkt**, seine Verbindung mit dem Augendrehpunkt die **Blicklinie**. Das Feld, das der Blickpunkt in seitlicher Richtung durchlaufen kann, nennt man das **Blickfeld**; es beträgt 30 bis 50° nach jeder Seite und etwas weniger nach oben und nach unten, ist also kleiner als das **Sehfeld** des ruhenden Auges (s. Ziff. 49).

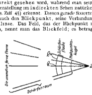


Abb. 73. Schärfenraum mit seinen Grenzkugeln und zwei inneren Schärfenflächen bei einem rechtsichtigen Auge.

Diese Bewegung des Auges um seinen Drehpunkt hat aber noch einen recht wichtigen Einfluß auf die Form der Flächen, die ohne Änderung der Akkommodation deutlich wahrgenommen werden können. Stellt man sich das Auge nach Abb. 73 auf einen Punkt Q eingestellt vor, der von dem Augendrehpunkt Z um die Strecke ZQ entfernt ist, so wird das Auge bei seiner ganzen Drehung, also etwa in einem Kegelwinkel von 2×40°, bei festgehaltener Akkommodation auf die Kugelkappe eingerichtet sein, die man um Z innerhalb dieses Kegelwinkels mit ZQ oder ZQ_W als Halbmesser beschreiben kann. Man nennt mit M. v. Rohr diese Fläche **Schärfenfläche**. Selbstverständlich nehmen auch die Grenzpunkte des Akkommodationsgebietes von Ziff. 48 an dieser Bewegung teil und beschreiben die **Nahpunkts-** und die **Fernpunktskugeln**, die in Abb. 73 bis 75 für die verschiedenen Zustände der Fehlsichtigkeit dargestellt sind. Im Falle des recht-

sichtigen Auges wird die Fernpunktkugel zu einem Stücke der unendlichen fernen Ebene, die aus dem Akkommodationsgebiet des kurzsichtigen Auges bestimmt ausgeschlossen sein muß, in dem eines übersichtigen aber eingeschlossen sein

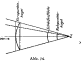


Abb. 74.

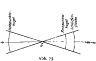


Abb. 75.

Der Schärfenraum, die Grenzkugeln und eine innere Schärfenfläche bei einem kurzsichtigen / übersichtigen Auge

Bei der Akkommodationsanstrengung verschiebt sich der eingestellte Punkt stets im Sinne der Lichtrichtung. Beim übersichtigen Auge Abb. 75 wurde angenommen, daß die Akkommodationsbreite größer sei als der Brechungsfehler, so daß also die Nahpunktskugel links von Z zu liegen kommt.

kann, wenn die Breite seiner Akkommodation den Betrag des Hauptpunktsbrechwertes R für den Fernpunkt übersteigt.

55. Die Perspektive. Was die Perspektive im direkten Sehen angeht, so ist aus der Begriffsbestimmung der Blicklinien klar, daß sie alle durch den Augendrehpunkt Z des blickenden Auges hindurchgehen. Ein beliebiger, die Aufmerksamkeit fesselnder Punkt Q bestimmt also eine Blicklinie ZQ, und man kann annehmen, daß bei dieser Stellung des Auges die Blicklinie mit der Augenachse zusammenfällt. Jedem Punkte der Oberfläche eines Raumdinges, sobald er nur von Z aus sichtbar ist, entspricht, soweit er die Aufmerksamkeit fesselt, nach Abb. 76 eine Blicklinie und allen irgendwie auffälligen Oberflächenpunkten innerhalb des ganzen Blickfeldwinkels von etwa $2 \times 40°$ das gesamte Blicklinienbündel von Z aus. Man sieht aber leicht ein, daß nur Punkte, die für Z nach Breite oder Höhe oder Breite und Höhe

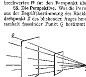


Abb. 76. Das Blicklinienbündel und zwei zugehörige ebene Perspektiven; ihre Ebenen stehen auf der mittleren Blickrichtung senkrecht.

verschieden sind, mit anderen Worten verschiedene Seitenabstände haben, zu verschiedenen Blickrichtungen Anlaß geben, während von zwei Oberflächenpunkten, die auf derselben Blickrichtung, aber in verschiedener Entfernung liegen, der dem Augendrehpunkt Z nähere den entfernteren verdeckt. Das Blicklinienbündel hat also nur die beiden Ausdehnungen von links nach rechts und von oben nach unten, obwohl es von den Oberflächenpunkten eines in der Regel räumlich, also nach allen drei Richtungen ausgedehnten Gegenstandes hervorgerufen wird. Man kann es also durch eine Ebene schneiden, auf der jede Blicklinie einen Punkt ausstößt, und diese Punkte liefern eine ebene **Perspektive** des vorliegenden Raumdinges.

Nach ihrer Entstehung deckt sich also die so entstandene ebene Perspektive von Z aus Punkt für Punkt mit der Oberfläche des betrachteten Gegenstandes und kann diesen überall da vertreten, wo es nur auf die Richtung des Gesehenen ankommt. Weitere Überlegungen zur Perspektive werden sich bei der Betrachtung des Sehvorganges beim einäugigen Sehen finden.

Zur Strahlungsvermittlung kann hier bemerkt werden, daß nach den vorstehenden Überlegungen die Pupille des blickenden Auges zu den angeschauten Oberflächenstücken immer so gerichtet ist, daß sie auf der Blicklinie senkrecht steht und kreisförmig erscheint. Es fällt also die Verminderung der eintretenden Lichtmenge fort, die bei optischen, während des Gebrauchs ruhenden Geräten dadurch entsteht, daß die kreisförmige Eintrittspupille einem seitlichen Dingpunkt als eine um so flachere Ellipse erscheint, je näher dieser dem Gesichtsfeldrande liegt.

Zu den Augenfehlern kann bemerkt werden, daß im direkten Sehen keine Verzeichnung auftreten kann, weil der ganze Augapfel beim Blicken um den erforderlichen Winkel selbst geschwenkt wird.

b) Das Sehen.

Wir werden uns hier zunächst mit dem Sehen mit freiem Auge beschäftigen und dabei in bezug auf die Tiefendeutung des einäugigen, die Tiefenwahrnehmung des beidäugigen Sehens stets die dafür in Betracht kommenden Strahlen bis zum Auge oder zu den Augen verfolgen, denn die Aufgabe der geometrischen Optik kann an dieser Stelle nur sein, beim einäugigen Sehen die perspektivischen Beziehungen, beim beidäugigen Sehen die Tiefenverhältnisse klarzulegen, nicht aber in das Bereich des Physiologen und Psychologen überzugreifen. Wir werden namentlich bei den Abschnitten über die Unterstützung der Augen durch optische Vorkehrungen im Hinblick auf Tiefendeutung und Tiefenwahrnehmung gelegentlich darauf noch ausdrücklich hinzuweisen haben.

56. Die Vorgänge beim einäugigen Sehen. Was das indirekte Sehen angeht, so ist im vorhergehenden schon Verschiedenes dazu mitgeteilt worden. Es sei also noch einmal darauf hingewiesen, daß das ruhende Auge angesehen werden kann als eine kleine Aufnahmekammer, wobei freilich die Grenzmittel, Luft und Glaskörper, vor und hinter der abbildenden Flächenfolge verschiedene Brechzahlen haben. Die Empfindung, die so von der Außenwelt vermittelt wird, hängt von der Beschaffenheit der Netzhaut ab. Diese ist in ihren Randteilen gar nicht imstande, Bildeinzelheiten aufzunehmen, sondern diese Fähigkeit ist in ihr, wie schon gesagt, auf die Netzhautgrube und ihre nähere Umgebung beschränkt. Der Strahl, der im Augeninnern die Mitte der Netzhautgrube durchstößt, enthält in rückkehrender Richtung den fixierten Punkt. Je weiter ein Gegenstand von dieser Richtung abweicht, um so undeutlicher erscheint er im indirekten Sehen oder um Helmholtzens Worte anzuführen (66), „das Auge stellt daher ein optisches Werkzeug von sehr großem Gesichtsfelde dar, aber nur in einer kleinen, sehr eng begrenzten Stelle dieses Gesichtsfeldes sind die Bilder deutlich. Das ganze Bild entspricht einer Zeichnung, in der zwar der wichtigste Teil des ganzen sorgfältig ausgeführt, die Umgebungen aber nur skizziert, und zwar desto roher skizziert sind, je weiter sie von dem Hauptgegenstande abstehen. Durch die Beweglichkeit des Auges wird es aber möglich, nacheinander jeden einzelnen Punkt des Gesichtsfeldes genau zu betrachten".

Im übrigen sind beim indirekten Sehen die nach der Mitte P der Augenpupille zielenden Hauptstrahlen, die Helmholtzischen Visierlinien, nach einem im Raume festen Punkt, nämlich P, gerichtet, der im Sinne der Lichtbewegung selbstverständlich hinter den Gegenständen liegt.

Da man also beim indirekten Sehen nicht von der Deutlichkeit der Wiedergabe einigermaßen ausgedehnter Gegenstände sprechen kann, so ist nur noch die Winkeltreue ihrer Bilder zu betrachten. H. Helmholtz hat, wie oben bemerkt, festgestellt, daß die Flächenfolge des Auges tonnenförmig verzeichnet. Daß man diesen Bildfehler am eigenen Auge überhaupt feststellen kann, ist darum möglich, weil man im allgemeinen eben nicht indirekt sieht, sondern beim natürlichen, ungezwungenen Gebrauche die leichte Beweglichkeit des Auges in seiner Höhle ausnützt.

57. Die einäugige Raumwahrnehmung. Eine Entfernungswahrnehmung beim einäugigen Sehen, wie sie schon Kepler 1604 ohne tieferen Einblick in die Anlage des Auges als möglich hinstellte und nach ihren Grenzen zu bestimmen suchte — er kam auf etwa 15 m — ist nur durch die Akkommodationsbetätigung möglich, also nur für kleinere Entfernungen denkbar, doch ist unser Gefühl dafür nicht sehr ausgebildet. Helmholtz (633) nimmt an, daß diese Empfindung zur Bestimmung der Entfernung selbst nicht verwandt werden könne, doch ließen sich Entfernungsunterschiede oder Tiefen mit einer gewissen geringen Genauigkeit angeben, die wegen der Anspannung der Akkommodation für nähere Gegenstände höher war als für fernere mit der dafür nötigen Erschlaffung. Da für einigermaßen weit entfernte Gegenstände — die Augenärzte setzen ihre Sehproben für Fernbrillen in einen Abstand von vielfach nur 5 m — die Akkommodationsbetätigung sicher unmerkbar wird, so soll diese Möglichkeit, sich beim einäugigen Sehen von der Entfernung auf der Augenachse oder Blicklinie Rechenschaft zu geben, nicht weiter behandelt werden.

Wenden wir uns nun zu dem direkten Sehen, so wird bei dem natürlichen Vorgange beim Sehen, von dem sich die meisten Menschen überhaupt nicht freimachen können, die Blicklinie bei der Betrachtung eines unter größerem Winkel erscheinenden Gegenstandes nacheinander auf seine verschiedenen Punkte gerichtet.

Schon oben war auf die Perspektive des direkten Sehens hingewiesen worden, hier bei der eingehenden Behandlung des Sehvorganges ist zu bemerken, daß unser Blick einen vorliegenden Winkelraum nicht stetig, sondern ruckweise durchläuft. In den Ruhepausen ist für die Perspektive als Zentrum die Mitte der Augenpupille in ihrer jeweiligen Ruhelage maßgebend, und die kleinen in dieser Weise deutlich wahrgenommenen Raumgebiete wirken im indirekten Sehen auf das Auge. Ein deutliches Gefühl für die Verschiedenheit des direkten und indirekten Sehens hat Chr. Scheiner in seinem Augenbuch schon 1619 ausgesprochen, wirklich mustergültig hat unsere Kenntnis auf diesem Gebiete O. Eppenstein 1904 zusammengefaßt, und seine Worte sollen hier folgen: „Da der Blick übrigens keinen Teil des Blickfeldes vollständig und stetig durchläuft, so kann kein Teil der Umgebung vollkommen, Punkt für Punkt, direkt gesehen werden. Das Bild setzt sich vielmehr aus den nacheinander gesehenen Stücken mosaikartig zusammen, während in den einzelnen Stücken das indirekte Sehen zur Geltung kommt. Es gleicht also einer aus einzelnen Blättern zusammengesetzten Zeichnung; und diese Blätter sind von verschiedenen, aber einander sehr nahegelegenen Punkten aufgenommen (den verschiedenen Orten, die die Pupille bei der Drehung nacheinander einnahm) und nachher so nebeneinander gelegt worden (wobei sie sich vielfach überdecken), daß die wichtigsten Punkte des Ganzen (die eben Blickpunkte gewesen sind) von einem anderen nahe gelegenen Punkte (dem Augendrehpunkte) als Zentrum der Perspektive aufgenommen erscheinen."

Die Abb. 77 wird mit ihrer Unterschrift dazu beitragen, diese Verhältnisse zu veranschaulichen. Man kommt mithin zu der Einsicht, daß für unsere Ge-

sichtswahrnehmung eines Raumdinges von beträchtlicher Winkelausdehnung zwei verschiedene perspektivische Zentren maßgebend sind, ein wichtiges, ruhendes für die Blickpunkte, die unsere Aufmerksamkeit gefesselt haben — der Augendrehpunkt — und ein unwichtigeres, wanderndes — die ruckweise bewegte Augenpupille — für die nähere Umgebung der Blickpunkte. Diese



Abb. 77. Der Augapfel (in ganz unrichtigen Größenverhältnissen) ist in drei Lagen dargestellt worden, wenn nacheinander Fuß, Mitte und Spitze des Flaggenstocks fixiert wurden. Die scheinbare Größe dieser drei Abschnitte wird offenbar nach den Augendrehungen um den Mittelpunkt Z beim Blicken beurteilt. Für die Zwischenteile, die nach Voraussetzung dem Beschauer weniger wichtig erscheinen, treten die roh angedeuteten Füllperspektiven ein, die von der jeweiligen Lage der Mitte der Augenpupille entworfen sind. Wie weit sie sich erstrecken, ist schwer zu entscheiden; es wurde auf der Zeichnung unbestimmt gelassen.

Füllperspektiven überdecken sich gegenseitig, ohne indessen an der Eindeutigkeit der Gesichtswahrnehmung größeren Schaden anzurichten, weil ja alle wichtigen Punkte durch Blicklinien bestimmt sind.

Gehen wir noch kurz auf die Beschaffenheit dieser Perspektiven ein, so war oben in Ziff. 55 der Einfachheit wegen immer eine ebene Perspektive angenommen worden. Das ist sicher möglich, weil, wie wir hier auch schon bemerkten, die einäugige Tiefenwahrnehmung nicht weit in den Augenraum hineinreicht (die Augenärzte pflegen ja ihre Grenze — wie gesagt — schon in 5 m vor dem Auge anzunehmen). Man kann also für einigermaßen entfernte Sehdinge, und nur solche werden hier vorausgesetzt, ziemlich beliebige ferne Flächen als Träger der Perspektive annehmen, wenn man nicht vorzieht, was sich später empfehlen wird, für das Auge die Perspektive auf der unendlich fernen Ebene zu entwerfen. Wir sind alle durch die uns in reicher Fülle umgebenden Darstellungen — von Künstlerhand entworfene Bilder gehören hier ebenso her wie Lichtbilder — an die ebenen Perspektiven auf lotrechten Schirmen so gewöhnt, daß man unwillkürlich zu diesem Mittel greift.

Natürlich sind an und für sich auch andere Trägerflächen möglich, und für Rundbilder hat sich seit den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts die Innenfläche eines geraden Kreiszylinders eingebürgert, offenbar durch die Möglichkeit erleichtert, solche Darstellungen unter einigem Verzicht auf Strenge einer ganzen Anzahl von Beschauern vorzuführen. Für optische Vorkehrungen haben sich indessen solche Perspektiven nicht einführen lassen, obwohl man es in London einmal versucht hat.

Selbstverständlich wäre es auch möglich, sich die Perspektive auf einer der oben eingeführten Schärfenflächen vorzustellen, die den Augendrehpunkt als Mittelpunkt haben. Eine Kugelfläche um das Auge als Mittelpunkt — der

scharfe Begriff des Augendrehpunktes war ihm noch unbekannt — hat aus allgemeinen Symmetriegründen H. v. Kleist schon 1800 nach dem ersten Besuch eines Rundgemaldes gefordert.

Im einzelnen kommt es bei dem gewaltigen Bereich der Abbildungstiefe, wenn das Auge fur ferne Gegenstände eingestellt ist, auf den Träger der flächenhaften Perspektive nicht an, vielmehr dient diese — und namentlich die am besten bekannte ebene Perspektive — im wesentlichen nur zu leichterer Vorstellung: man soll sich die flächenhafte Perspektive gegenwärtig halten und sich durch die Verbindungslinien ihrer einzelnen Punkte mit dem Augendrehpunkt Z das Bündel der Blickrichtungen ZQ leicht vorstellen. Dieses Blicklinienbündel ist eben das einzige, was dem bewegten Einzelauge von der Form bei einem genügend fernen Gegenstande zugänglich ist. Kann man fur das ferne Raumding eine flächenhafte Perspektive in ausreichendem Abstande so vor das betrachtende Auge bringen, daß sie zu dem Raumding perspektivisch liegt, so kann man das Raumding ruhig verschwinden lassen und erhält durch die Betrachtung der genügend entfernten flächenhaften Perspektive alles, was das einäugige Blicken an der Form erkennen kann. Es ist daher durchaus gerechtfertigt, wenn man das so ungemein wichtige Blicklinienbündel, wie es durch die auffälligen Punkte eines gerade betrachteten Raumdinges hervorgebracht wird, auch als dessen **Perspektive** auffaßt. Daß unter den hier gemachten und weiterhin auch festzuhaltenden Voraussetzungen genügend ferner Raumdinge zwischen der Haupt- und den Füllperspektiven kein Unterschied hervorgerufen wird, wenn man allein das Blicklinienbündel an die Stelle des Raumdinges bringt, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.



Abb. 78. Die Parallaxe ε zwischen der scheinbaren Größe von OO_w nämlich ω im direkten und w im indirekten Sehen. C ist der Augendrehpunkt und P und P_w die beiden Grenzlagen der Pupillenmitte.

Solch ein Blicklinienbündel liefern dem einzelnen Auge, wie bald des näheren zu zeigen sein wird, auch die optischen Vorkehrungen, mit deren Hilfe ferne Gegenstände einäugig betrachtet werden sollen, und darum mußte hier etwas genauer auf diese Verhältnisse eingegangen werden.

Liegen in Abb. 78 Raumdinge vor, bei deren Entfernung der Abstand PC zwischen der Mitte P der Augenpupille und dem Augendrehpunkt C nicht vernachlässigt werden kann, so entsteht eine Parallaxe zwischen der scheinbaren Lage der Dingpunkte bei direktem und indirektem Sehen. Sie wird zwar wegen der großen Undeutlichkeit des indirekten Sehens in der Regel nicht bemerkt, führt aber, wenn unter besonderen Umständen die Aufmerksamkeit auf die zwischen dem direkten und dem indirekten Sehen bestehende Verschiedenheit gelenkt wird, auf ein Schwanken der Umrisse.

58. Das Blicken mit behindertem Auge. Wenn wir soeben das gänzlich unbehinderte Blicken im allgemeinen behandelt hatten, so wollen wir hier noch besonders darauf hinweisen, daß wir bei freier Bewegung durch Einnehmen eines bestimmten Ortes für den Drehpunkt eines Einzelauges die Perspektive wählen

können, die uns zusagt. Um einige Beispiele zu geben, lehnt man sich unwillkürlich aus dem offenen Fenster hinaus, um einen möglichst weiten Überblick zu haben, und man verschiebt den Kopf im Innenraum bei geschlossenem Fenster ganz unbewußt von der linken Rahmenseite weg, wenn man nach links, und von der rechten Rahmenseite weg, wenn man nach rechts eine weitere Aussicht zu erfassen sucht.

Durch die mit den Kopfbewegungen verbundenen perspektivischen Verschiebungen der Außendinge (sie werden häufig unwillkürlich herbeigeführt) vermag sich selbst der Einäugige einige Auskunft über die Tiefenanordnung der Teile des Raumdinges vor ihm zu geben; und in der ersten Zeit der Eisenbahnen fielen aufmerksamen Beobachtern bei schneller Fahrt vorbei an den Gegenständen zur Seite der Bahnstrecke häufig sehr merkliche Größenunterschätzungen dieser Gegenstände und ihrer Abstände auf.

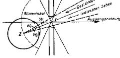


Abb 79a. Das behinderte Blicken durch die Lochöffnung um I.

Während in den beiden soeben angeführten Beispielen die Drehbewegungen des Auges um den (nicht allzu rasch) zur Seite bewegten Drehpunkt nur durch die Beschaffenheit des gerade betrachteten Raumdinges bestimmt wurden, kommen wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieses Abschnittes, wenn wir die Aufgabe stellen, durch eine verhältnismäßig enge Öffnung — etwa ein Schlüsselloch — in einen nach allen drei Richtungen ausgedehnten Raum zu sehen.

Da man mit ruhig gehaltenem Kopf nur einen verhältnismäßig engen Winkelraum überschauen könnte, so bewegt man Abb. 79a von selbst den Kopf hinter der Öffnung herum, richtet das Auge aber immer so, daß die Gesichtslinie durch die Mitte der lichten Öffnung tritt. Die Drehbewegungen des Auges sind hier also nicht frei, sondern mit den Verschiebungen des Kopfes gekuppelt, und zwar in einer leicht zu beschreibenden Weise. Stellt man in der Öffnung den Punkt fest, von dem aus nach Abb. 79b vorderer und hinterer Lochrand etwa unter gleichem Winkel erscheinen, so kann man diesen Punkt etwa als Hauptstrahlenkreuzungspunkt I auffassen. In I vermag ein von den beiden Lochrändern bestimmtes Hauptstrahlenbündel durch die Wand hindurchzutreten. Kopfbewegungen in dem diesseitigen (augenseitigen) Teile des Bündels führen auf bestimmte Hauptstrahlneigungen w, und wenn man etwa von einer mittleren Nullage des Kopfes ($w = 0$) ausgeht, so dreht sich bei einer durch $w = \overline{w}$ bestimmten Hauptstrahlneigung auch bei so behindertem Blick das Auge in seiner Höhle eben um den Drehwinkel $\overline{w}$.



Abb. 79b. Die für die Hauptperspektive des behinderten Blickens maßgebende Lochmitte I.

Diese neue Gesichtswahrnehmung mit behindertem Blick weicht übrigens nicht in allen Punkten grundsätzlich vom natürlichen, freien Sehen ab: auch hier wird die Öffnung der eingelassenen Bündel durch die Augenpupille bestimmt; das Hauptbild kommt nacheinander auf Grund der Zusammensetzung von Einzelbildern, gleichsam Füllperspektiven, zustande, und die Einzelbilder werden durch den Winkelraum bestimmt, unter dem die gerade wirksame lichte Weite der Lochöffnung von der Mitte der Augenpupille aus erscheint. Daher wird es also kommen, daß die Schlüssellochbeobachtung auch solchen Personen unmittelbar verständlich ist, die keine deutliche Vorstellung von ihrer geometrischen Grundlage haben.

An Unterschieden sei zunächst auf den Fortfall des großen indirekten Sehfeldes hingewiesen, mit dessen Hilfe die Reglung der freien Augendrehung so zweckmäßig vorgenommen wurde. Von besonderer und unterscheidender Wichtigkeit aber ist es, daß der Hauptstrahlenkreuzungspunkt I hier außerhalb des Auges liegt und von ihm nicht verändert werden kann. In dem jenseitigen Raum wirkt in perspektivischer Hinsicht allein das durch die geometrische Begrenzung bestimmte Hauptstrahlenbündel, und als Zentrum der Perspektive gilt natürlich der Punkt I. Es handelt sich also um eine von der Lochöffnung gesetzte und von dem hin und her bewegten blickenden Auge nur aufgenommene Perspektive.

In der Tat ist die Anbringung einer solchen Lochöffnung eines der hauptsächlichsten Mittel, eine bestimmte perspektivische Wirkung zu erzwingen, und wenn es beispielsweise darauf ankommt, ein besonders naturgetreu ausgeführtes Gemälde nicht anders als vom richtigen Standpunkt aus betrachten zu lassen — etwa bei einigen Gemälden der Wirtzischen Sammlung in Brüssel —, so hat man schon seit langer Zeit zu dieser Aushilfe gegriffen.

Ein in gewisser Weise hierher gehöriger Fall eines solchen Blickens mit behindertem Auge liegt auch vor, wenn man etwa in einem Flur, rasch vorwärtsschreitend, seitlich durch eine enge Türspalte in ein dahinter befindliches Zimmer blickt. Am besten sollte dazu aber der Flur merklich dunkler sein als das Zimmer, dessen Perspektive man im Vorüberschreiten in ziemlicher Winkelausdehnung aufnimmt. Mindestens für die rein seitlichen Winkel in der wagerechten Ebene in Augenhöhe wird man das perspektivische Zentrum da annehmen müssen, wo diese wagrechte Ebene die Türspalte durchschneidet.

59. Das freie Sehen mit beiden Augen. Wir müssen nunmehr die bisher festgehaltene Beschränkung auf den Gebrauch nur eines Auges aufgeben und das Vorhandensein beider Augen im Hinblick auf die Folgen betrachten, die dadurch auch für die geometrischen Bedingungen der in die Augen eingelassenen Bündel gesetzt werden. Nach den weiter oben ausgesprochenen Grundsätzen ist es klar, daß wir uns hier mit der Kreuzungsstelle der Sehnerven und mit der Ausnutzung der beiden Bilder des Augenpaares im Gehirn nicht zu beschäftigen haben. Das gehört bestimmt in das Gebiet des Physiologen. Aber auch bei dieser Beschränkung bleibt uns die Ableitung mancher geometrischer Beziehungen übrig, die eben für die in das Augenpaar eingelassenen Strahlen und Strahlenbündel bestehen.

Man kommt auf diese Weise zu der Lösung der Aufgabe, die schon J. Kepler im Jahre 1604 beschäftigte, innerhalb gewisser Grenzen die Entfernung der beidäugig wahrgenommenen Raumpunkte zu bestimmen. Er ist damit nicht sehr weit gekommen und hat im wesentlichen nur zu begründen versucht, daß die Grenze der Tiefenwahrnehmung bei 100 Doppelschritten also rund 150 m liege. Obwohl namentlich im 18. Jahrhundert noch manche Versuche mit der Lösung einer solchen Aufgabe, besonders in England, gemacht wurden, ist das doch erst dem englischen Gelehrten Ch. Wheatstone geglückt, dem schon 1833 die

folgenschwere Erkenntnis gelang, daß die beiden Perspektiven der beiden Augen für Gegenstände innerhalb der Grenze der Tiefenwahrnehmung verschieden seien. Die ausführliche Darlegung ließ er allerdings erst 1838 ans Licht treten.

Stellt man sich nun beide Augen vor, deren Drehpunkte einen gegenseitigen Abstand l haben, für den bei Menschen je nach Alter, Geschlecht und Stammesangehörigkeit in runden Zahlen gilt

$$5\,\text{cm} \leqq l \leqq 7^1/_2\,\text{cm},$$

so richten sich bei einem Augenpaare mit ungestörter Muskeltätigkeit von selbst beide Achsen auf den gleichen seitlichen Punkt. Da nun, wie schon oben benutzt, die Blicklinie eines jeden Auges durch den Drehpunkt geht, so bestimmt in Abb. 80 ein Blickpunkt Ω mit den beiden Drehpunkten Z_l und Z_r eine ganz eindeutig

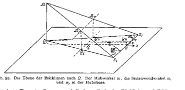


Abb. 80. Die Ebene der Blicklinien nach Ω. Der Hubwinkel w, die Seitenwendwinkel w_l und w_r in der Hubebene.

festgelegte Ebene im Raum, innerhalb deren die beiden Blicklinien auf Ω hinlaufen. Die Neigung dieser Ebene gegen die wagrechte Ausgangsebene nennt man nach der Anregung HELMHOLTZens, den Hub- oder Senkwinkel, und man kann für das ungestörte beidäugige Sehen (also unter Ausschluß von Schielaugen, auch Augen hinter astigmatischen Brillengläsern) die Forderung stellen, daß die beiden durch die Augenstand- und jede Blicklinie bestimmten Hub- oder Senkwinkel bei beiden Augen einander gleich sein müssen.

Innerhalb der im allgemeinen gehobenen oder gesenkten Blickebene tritt nun, je nach der Entfernung des Blickpunktes und seiner mehr oder weniger seitlichen Lage, noch ein Paar anderer Winkel auf. Man rechnet sie von den in der Blickebene aus den beiden Augendrehpunkten Z_l und Z_r senkrecht zur Augenstandlinie $Z_l Z_r$ gezogenen Richtungen aus und nennt sie — wiederum nach einer von HELMHOLTZ ausgegangenen Anregung — Seitenwendwinkel. Man erkennt, daß durch den Hub- oder Senkwinkel und die beiden Seitenwendwinkel bei einer bestimmten Augenstandlinie jeder Raumpunkt Ω eindeutig festgelegt ist; und auch umgekehrt liefert irgendein durch seine Raumkoordinaten x, y, z festgelegter Raumpunkt auf eindeutige Weise eine derartige Winkeldreiheit.

Fällt man von Ω aus das Lot ΩQ auf die wagrechte Ausgangsebene, so erhält man in dem Dreieck $Z_l Q Z_r$ mit der Höhe $QV = \varrho$ und in der Spur $Q_r Q_l$ der Trägerebene — sie sei um b von der ihr parallelen Augenstandlinie $2a = Z_l Z_r$ entfernt — alle Größen zur Ableitung der HELMHOLTZischen Sätze über die stereoskopische Differenz. Man wird das weiter unten sofort erkennen.

Man würde auf solche Weise auch rechnerisch der beidäugigen Tiefenwahrnehmung folgen können; doch sollen hier — wieder nach Helmholtzens Vorgange — auf die für die rechnerische Verwertung bequemeren stereoskopischen Differenzen behandelt werden.

Bevor wir im nächsten Absatz auf diese Behandlung näher eingehen, heben wir nur hervor, daß man hier für jedes der beiden Augen das durch die Oberflächenpunkte des beidäugig betrachteten Gegenstandes bestimmte Blicklinienbündel zu beachten hat. Entwirft man auf einer gemeinsamen Trägerebene — meistens wählt man dazu eine lotrechte, zur Augenstandlinie $Z_l Z_r$ parallele Ebene in genügender Ferne — die beiden flächenhaften Perspektiven (hier Halbbilder genannt), so entstehen auf ihr für Gegenstände innerhalb der Grenze der Tiefenwahrnehmung zwei merklich verschiedene Halbbilder. Da jeder Punkt Ω für beide Augen nur eine und dieselbe Hub- oder Senkebene bestimmt, die natürlich die Trägerebene in einer Parallelen zur Augenstandlinie $Z_l Z_r$ schneidet, so ist die vom Horizont aus gemessene Höhe des Ω vertretenden Punktes (Ω_l oder Ω_r in jedem einzelnen der beiden Halbbilder) in dem Halbbilderpaare notwendig die gleiche $Q_l \Omega_l = Q_r \Omega_r$. Es ist das der geometrische Ausdruck dafür, daß die Augendrehpunkte bei gewohnter Kopfhaltung in derselben Höhe über der wagrechten Ebene liegen.

60. Die Ersetzung der Winkelbestimmung durch die Messung stereoskopischer Differenzen. Sind in der Fußpunktsebene — als Ausgangsebene sei die wagrechte Ebene durch die beiden Augendrehpunkte angenommen (freilich weicht die Helmholtzische Bezeichnung von der oben benutzten ab) — die beiden Punkte P und Q für die beiden Augendrehpunkte gegeben, wie es Abb. 81 nach der Helmholtzischen Zeichnung darstellt, so kann man die Entfernung ϱ des Fußpunktes S eines höher oder tiefer gelegenen Raumpunktes von der Linie PQ (der Augenstandlinie) finden, wenn man die Winkel SPQ und PQS mißt, unter denen die Strecke ϱ von den Augendrehpunkten P und Q erscheint.

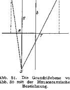


Abb. 81. Die Grundrißebene von Abb. 80 mit der Helmholtzischen Bezeichnung.

Helmholtz (665) hat die Größe

$$e = 2a - RT$$

als stereoskopische Differenz in der Entfernung b des Trägers beider — je von den beiden Augendrehpunkten entworfenen — ebenen Perspektiven eingeführt und gezeigt, daß der senkrechte Abstand ϱ des Fußpunktes S von der Strecke

$$PQ = 2a$$

zu der Größe e in der Beziehung steht,

$$\varrho = \frac{2ab}{e}.$$

Damit hat er die Messung der Entfernung ϱ auf die Bestimmung der stereoskopischen Differenz e zurückgeführt.

Setzt man nun eine gewisse Grenze für die Genauigkeit fest, womit der Unterschied $e_I - e_{II}$ der stereoskopischen Differenz zweier Entfernungen ϱ_{II}, ϱ_I festgestellt werden kann — wir werden sogleich darauf noch näher eingehen — so

ist an derselben Stelle gezeigt worden, daß die gerade noch wahrnehmbaren Unterschiede $\varrho_{II} - \varrho_I$ quadratisch mit der Entfernung wachsen:

$$\varrho_{II} - \varrho_I = \frac{\mathfrak{r}^2}{f}$$

wo

$$\mathfrak{r}^2 = \varrho_{II}\,\varrho_I$$

und

$$f = \frac{2ab}{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}$$

gilt.

Wie man aus der Beziehung

$$\frac{1}{\varrho_I} - \frac{1}{\varrho_{II}} = \frac{1}{f}$$

erkennt, ist f die Entfernung des Gegenstandes, der sich gerade noch von der Unendlichkeit

$$\varrho_{II} = \infty$$

abhebt.

Mit der folgenden einfachen Betrachtung lassen sich noch andere Ausdrucke entwickeln, mit denen man bei gegebenem Unterscheidungsvermögen $\varepsilon_I - \varepsilon_{II}$ für jede endliche Entfernung ϱ nach vorn (ϱ_v) und nach hinten (ϱ_h) die Grenzen angeben kann, nach deren Überschreitung die beidäugige Tiefenwahrnehmung beginnt. Da nämlich

$$\frac{1}{\varrho_v} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{f}\,; \qquad \varrho - \varrho_v = \frac{\varrho\,\varrho_v}{f}$$

und

$$\frac{1}{\varrho_h} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{f} = \frac{\varrho + f}{\varrho \cdot f}$$

gilt, so ergibt sich ganz einfach

$$\frac{\varrho_v}{f} = \frac{\varrho}{f + \varrho},$$

und man erhält durch Einsetzen in die vorangehende Gleichung als Unterscheidungsgrenze auf das Augenpaar zu

$$\varrho - \varrho_v = \frac{\varrho^2}{f + \varrho}$$

und mit einer ganz entsprechenden Ableitung als Unterscheidung vom Augenpaar fort

$$\varrho_h - \varrho = \frac{\varrho^2}{f - \varrho}.$$

Nach Maßgabe dieser Ausdrucke kann man also einen beobachteten Punkt weiter nach hinten (von dem Augenpaar weg) als nach vorn (auf das Augenpaar zu) verschieben, ehe man diese Verschiebung wahrnimmt.

Setzt man mit HELMHOLTZ $f = 240$ m, mit Neueren 500 m, so erhält man für die Entfernungen ϱ unter 100 m die folgende Zusammenstellung.

Wertet man die Formeln für die Dingabstände = 5, 10, 20, 30, 100 m aus, wobei man einmal $f = 250$ und dann $[f = 500]$ setzt, was bei einem Augenabstand von 62,5 mm den η-Werten von 51,6″ [25,8″] entspricht, so erhält man die nebenstehenden Wertepaare:

Dingabstand in m	Ungenauigkeit in m nach hinten	Ungenauigkeit in m nach hinten
5	0,098 [0,049]	0,102 [0,0505]
10	0,38 [0,20]	0,42 [0,20]
20	1,48 [0,77]	1,74 [0,83]
30	3,24 [1,70]	4,09 [1,92]
40	5,52 [2,96]	7,62 [3,48]
50	8,33 [4,54]	12,5 [5,56]
60	11,6 [6,43]	18,9 [8,18]
70	15,3 [8,6]	27,2 [11,4]
80	19,4 [11,0]	37,7 [15,2]
90	23,8 [13,7]	50,6 [19,8]
100	28,6 [16,7]	66,7 [25,0]

Man kann ihr zunächst einmal entnehmen, daß die Sicherheit der beidäugigen Entfernungsbestimmung mit unbewaffneten Augen für einigermaßen große Entfernungen sehr rasch abnimmt, und ferner, daß eine Erhöhung der Schärfe der Breitenwahrnehmung die Fehler nach vorn und besonders nach hinten sehr merklich verkleinert.

Während die Bestimmung der Entfernung selbst also für die kleinen am Menschen vorkommenden Augenabstände von unbedeutender Genauigkeit ist, können die Entfernungsunterschiede bei einigermaßen günstigen Bedingungen mit einer recht bemerkenswerten Sicherheit bestimmt werden. Nimmt man an, daß in f die Schärfe η der Breitenwahrnehmung eingeführt werden kann, so hat man zu setzen

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{e_I - e_{II}}{b},$$

und man erhält nach der obigen, f bestimmenden Gleichung

$$f = 2a \operatorname{ctg}\eta .$$

Daß aber die Breitenwahrnehmung im Einzelauge hier tatsächlich eine Rolle spielen wird, wird in dem Sonderfalle unmittelbar klar, wo zwei senkrechte Marken so hintereinander angeordnet sind, daß sie für eines der beiden Augen eine gerade Linie bilden. Es läßt sich dann folgern, daß unter diesen Umständen die Tiefenwahrnehmung die gleiche Genauigkeit erreichen kann wie die Breitenwahrnehmung des einäugigen Sehens unter günstigen Umständen (Abb. 82). Auch wenn solche besonders günstigen Umstände, wie in der Zeichnung angenommen, nicht mehr bestehen, ist die beidäugige Tiefenwahrnehmung natürlich auch noch vorhanden, reicht aber dann nicht mehr ganz so weit. Namentlich in den englischen photographischen Liebhabergesellschaften sind Beobachtungen über die Tiefenwahrnehmung bei Stereoskopaufnahmen ferner Raumdinge mitgeteilt und besprochen worden. Man kann daraus wie aus eigenen Versuchen unmittelbar an einigermaßen fernen Baumgruppen und ähnlichem wohl den Schluß ziehen, daß bei einigermaßen beträchtlichem Abstande von den nächsten Gegenstandsteilen das Formgedächtnis und die auch dem einzelnen Auge zugänglichen Anhaltspunkte für die Tiefendeutung von größerem Gewichte sind als die beidäugige Tiefenwahrnehmung.

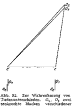


Abb. 82. Zur Wahrnehmung von Tiefenunterschieden. O_1, O_2 zwei senkrechte Marken verschiedener Entfernung (oben im Grundriß) erscheinen dem Auge c als gerade Linie, weisen aber für das andere C eine Breitenverschiedenheit auf.

Aus der Form $\operatorname{tg}\eta = \frac{2a}{f}$

ersieht man, daß der kleine Winkel η auch aufgefaßt werden kann als der Konvergenzwinkel der Blicklinien, wenn die beiden Augen auf den Gegenstand gerichtet sind, der sich gerade noch von der unendlich fernen Ebene abhebt.

Für die Ermittlung von η hat Helmholtz (644) ein Verfahren vorgeschlagen, das auch heute noch im Gebrauch ist. Unter Ausschluß aller Anzeichen, die zur Deutung der Tiefe beitragen konnten, suchte er eine lotrechte, bewegliche Marke in eine durch zwei lotrechte, feste Nadeln bestimmte Ebene zu bringen. Obwohl er dabei einen Wert von

$$\eta = \tfrac{1}{2}\ \text{Winkelminute}$$

erhielt, trug er doch Bedenken, eine solche, den Winkelwert der Sehschärfe übertreffende Annahme zu machen, und setzte η ebenfalls auf

$$\eta = 1 \text{ Winkelminute}$$

fest, womit er auf $f =$ etwa 240 m kam.

Spätere Beobachter haben immer kleinere Werte von η erhalten; man hat zunächst die halbe Winkelminute wieder in ihr Recht eingesetzt, konnte aber verhältnismäßig bald η auf 10 und 5 Sekunden vermindern, während ein neuerer amerikanischer Forscher sogar Beobachter festgestellt hat, die ein η unter 2 Sekunden aufwiesen.

Bei $\eta = 30$ Sekunden kommt man je nach der Augenstandlinie auf Werte von $f = 360$ bis 500 m, und dieser letzte Wert war oben für die Rechnung angenommen worden.

c) Die Unterstützung des Sehens durch optische Vorkehrungen.

Hier können zunächst nur ganz allgemeine Überlegungen angestellt werden, wenn man vorläufig davon absieht, die optischen Vorkehrungen in bestimmte Gruppen einzuordnen.

61. Über die Vergrößerung durch die als Augenhilfe dienenden Vorkehrungen. Wenn es mindestens bei den älteren zusammengesetzten optischen Geräten, dem Fernrohr und dem Mikroskop, allein auf die Steigerung der Vergrößerung ankam, so ist auch heute, wo für andere optische Gebiete optische Vorkehrungen geplant wurden, bei denen die Vergrößerung nicht die Hauptsache ist, diese Leistung doch wichtig genug, um hier in einem besonderen Abschnitt behandelt zu werden.

Vorausgeschickt sei, daß das nicht greisenhafte Durchschnittsauge seine höchste Leistung bei entspannter Akkommodation liefert. Mithin ist es verständlich, daß man die allgemeine Regel gibt, optische Geräte so einzustellen, daß das Bild in unendlicher Entfernung, also für den Hauptpunktsbrechwert $A = 0$ des benutzenden Auges entworfen werde[1]).

In einem solchen Falle muß der Beobachtungsgegenstand y verglichen werden mit dem Gesichtswinkel w' — bei endlichen Werten zweckmäßig $\operatorname{tg} w'$ — wobei der Scheitel in der Mitte P' der Austrittspupille des Geräts angenommen wird.

Schon 1884 hatte E. Abbe für das Vergrößerungsvermögen eine strenge Formel abgeleitet, die nach einfachen Umschreibungen, wie M. v. Rohr (Die Brille als optisches Instrument 3. Aufl., S. 60) zeigte, für kleine Winkel w' übergeht in die neuerdings von A. Gullstrand mit Recht sehr betonte Beziehung

$$\frac{w'}{y} = D_1 - A(1 - \delta D_1),$$

wo D_1 die Brechkraft (Stärke) des optischen Geräts, A der Akkommodationszustand des Beobachterauges und $\delta = H_1' \mathsf{H}$ der Abstand der zugewandten Hauptpunkte von Gerät und Auge sind.

Abbe hatte damals ganz bewußt sein Hauptaugenmerk auf das erste Glied D_1 gerichtet und beim Mikroskop auf das zweite (Zusatz-) Glied keinen besonderen Wert gelegt. Hat man aber auch mit schwächeren Augenhilfen, beispielsweise Lupen, zu tun, so verlangt auch das zweite Glied die Beobachtung, die ihm bei der Gullstrandschen Behandlung zuteil wird.

[1]) Von dieser Vorschrift weichen viele Benutzer optischer Geräte dadurch ab, daß sie das Okular auf eine endliche Entfernung einstellen und also mit Anspannung der Akkommodation beobachten. Nach Gullstrand ist eben im gewöhnlichen Leben mit dem Gedanken, scharf zu sehen, eine Betätigung der Akkommodation verbunden, die von solchen Benutzern noch nicht durch Übung überwunden ist.

Gullstrand führt unter Annahme des erwünschten Zustandes $A = 0$

$$\frac{w'}{y} = D_1 ,$$

als absoluten Wert des Vergrößerungsvermögens ein und stellt ihn dem individuellen

$$\frac{w'}{y} = D_1 - A(1 - \delta D_1)$$

gegenüber, wo $A \lesseqgtr 0$ ist.

Beachtet man, daß man wegen $D_1 = 1/f_1'$ auch setzen kann

$$1 - \delta D_1 = \frac{1}{f_1'}(f_1' - \delta)$$

und berücksichtigt weiter, daß bei einer dem benutzenden Auge möglichst genäherten Lupe mit positivem f_1' die Anordnung der Punkte bei

mittelstarken

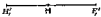


Abb. 83.

starken Lupen



Abb. 84.

Die Lage des Lupenbrennpunktes F_1' zum vordern Augenhauptpunkt H in diesen beiden Fällen.

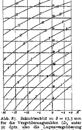


Abb. 85. Schichtenbild zu $\delta = 13,3$ mm für die Vergrößerungszahlen (D_1 unter 50 dptr. also die Lupenvergrößerung $N_L \leqq 12,5$) für -20 dptr $\leqq A \leqq +8$ dptr.

auf die Beziehung führt

$$H_1'F_1' - H_1'\mathrm{H} = \mathrm{H}F_1'$$

oder

$$-\delta + f_1' = \mathrm{H}F_1' > 0$$

und

$$-\delta + f_1' = \mathrm{H}F_1' < 0 ,$$

so sieht man die Berechtigung zu folgendem Gullstrandschen Satze ein.

Bei mittelstarken Lupen ($f_1' - \delta > 0$) ist das individuelle Vergrößerungsvermögen bei Kurzsichtigen (Übersichtigen) größer (kleiner) als das absolute. Bei starken Lupen ($f_1' - \delta < 0$) ist das Verhältnis gerade umgekehrt. Wechselt im zweiten Falle w'/y sein Zeichen, so wird das Bild umgekehrt wahrgenommen.

Das nebenstehende Schichtenbild für schwache bis mittelstarke Lupen und eine ziemlich reiche Wahl von A-Werten wird die Unterschiede zwischen absolutem und individuellem Vergrößerungsvermögen auf einen Blick erkennen lassen, obwohl hier die Lupenvergrößerungen

$$N_L = 0,25 \text{ m} \cdot D_1 = D_1/4 \text{ dptr}$$

angegeben sind.

Das Vergrößerungsvermögen, das in Dioptrien anzugeben ist, hat sich bisher nicht besonders eingebürgert. Schon Abbe hat — wie das soeben geschehen ist — als Auskunftsmittel nahegelegt, mit dem Bildwinkel $\operatorname{tg} w'$ die scheinbare Größe

$\operatorname{tg} w^* = y/0{,}25$ m zu vergleichen, die man erhält, wenn man den Gegenstand y mit bloßem Auge aus 0,25 m Entfernung betrachtet. Man erkennt leicht, daß

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w^*} = D_1 \cdot y \cdot \frac{0{,}25\,\mathrm{m}}{y} = 0{,}25\,\mathrm{m} \cdot D_1 = N_L$$

gilt, wie soeben vorausgreifend benutzt.

H. Erfle, der sich in neuerer Zeit mit der Bestimmung der Vergrößerung beschäftigt hatte, konnte mit der einfachen, hier übernommenen Zeichnung Abb. 86 darauf hinweisen, daß gelegentlich auch andere Durchstoßebenen für den von P' rückwärts verlangerten Hauptstrahl mit Vorteil zu wählen seien, wobei er darauf keinen besonderen Wert legt, daß sich das Auge des Benutzers auch auf diese Entfernung genau eingestellt habe.

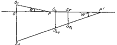


Abb. 86. Zur Lupen-, Fernrohr- und Ablesevergrößerung. OO_1 Gegenstand; P Eintritts-, P' Austrittspupille. $P'S_L = -250$ mm, $P'S_F = PO$.

So bestimmt er die Fernrohrvergrößerung N_F in der folgenden Weise. Nimmt man an, daß sich das Auge dem Gegenstande nur ebenso weit nähern könne wie die Mitte P der Eintrittspupille des Geräts, für die $PO = \xi$ gilt, so ist

$$N_F = \operatorname{tg} w' : y/\xi = \operatorname{tg} w' : \operatorname{tg} w = \Gamma$$

die übliche Bestimmung der Fernrohrvergrößerung; natürlich gilt auch

$$N_F = \xi\, D_1 .$$

Ist schließlich der für das Auge bei P' geltende Abstand $P'O$ für den betrachteten Gegenstand unveränderlich

$$P'O = P'P + PO$$
$$= p + \xi ,$$

wo p die Länge des Sehrohrs bedeuten soll, so ergibt

$$N_A = \operatorname{tg} w' : \frac{y}{p + \xi} = (p + \xi)\, D_1$$

den Vorteil, den die Zwischenschaltung des Geräts vor der Betrachtung mit freiem Auge gewährt.

Diese Beziehung hat O. Eppenstein als Ablesevergrößerung eingeführt, doch muß bemerkt werden, daß eine ganz entsprechende Überlegung Gullstrand wesentlich früher auf seinen absoluten Nutzeffekt des Geräts geführt hat.

Ist die Sehrohrlänge p klein gegen ξ, wie sicher bei den Fernrohren, so wird N_A zu N_F.

62. Allgemeine Überlegungen zur Wahrnehmung von Lage und Form. Da eine optische Vorkehrung die eingestellte Ebene nur in einem flächenhaften Gebilde (gelegentlich wieder in einer Ebene) abbilden kann, und der Benutzer die Bildfläche auf sein Auge wirken lassen muß, so wird man die auf dieser Bildfläche entstehende Perspektive zu betrachten haben. Mit Hilfe der in Ziff. 119, Kap. I angegebenen Tiefenformeln wird man entscheiden können, welches auch in die Tiefe ausgedehnte Raumgebiet nach den Lehren der geometrischen Optik mit genügender Deutlichkeit auf der Bildebene erscheint.

Im Hinblick auf die Perspektive sind nun drei Fälle, **drei verschiedene Formen der Perspektive**, möglich. Die Eintrittspupille kann einmal im Sinne des Lichtes **hinter** den Gegenständen liegen, auf die das optische Gerät gerichtet ist. Alsdann tritt ein Fall ein, wie er in Abb. 87 in einer Übersichtsdarstellung wiedergegeben ist. Dient im Achsenschnitt ein auf der Achse stehendes Quadrat mit gleicher Höhenerstreckung $AB = CD$ als Gegenstand, und liegt P hinter CD, dem der Mitte P der Eintrittspupille nächsten Teile des Aufnahmegegenstandes, so wird immer die fernere Länge AB in dem Abbilde EFG kleiner erscheinen als die nähere DC. Da offenbar auch beim Sehen (s. S. 363) eine solche perspektivische Verkürzung eintritt, so nennen wir eine Perspektive dieser Art eine **natürliche** und den Strahlengang **entozentrisch** oder **schnittstrebig**, denn diese Erscheinung kommt ja eben dadurch zustande, daß die Hauptstrahlen in der Richtung von dem Aufnahmegegenstande nach dem optischen Gerät zu zusammenstreben.



Abb. 87. Der entozentrische Strahlengang. AB, die fernere der beiden gleichen Langen AB und DC, erscheint kleiner.

Hierher gehört die weitaus überwiegende Mehrzahl der optischen Vorkehrungen, und diese Gleichartigkeit der Perspektive ist ein Grund dafür, daß die durch die optischen Geräte entworfenen Bilder ohne weitere Schwierigkeit auch von Laien verstanden werden.

Es macht keine Schwierigkeit, wie in Abb. 88 dargestellt, die Mitte P der Eintrittspupille in **weite Ferne** fallen zu lassen. In diesem Falle wird von unserem auf der Achse stehenden Quadrat in der Einstellebene EF ein solches Abbild entworfen, daß die dem Beobachter im Bildraum nähere Seite CD nur ebenso groß erscheint wie die ihm fernere AB. Es tritt also keine Verkürzung fernerer Gegenstände auf, und es handelt sich um einen Fall von **Kavalierperspektive**. Der Strahlengang, der eine solche Wiedergabe hervorruft, wird ein **telezentrischer** oder **schnittferner** genannt, und er ist zuerst 1878 von E. Abbe zur Erhöhung der Genauigkeit von Messungen vorgeschlagen worden, da hier die Messungsgröße von dem Ort der Einstell- oder dem der Mattscheibenebene unabhängig ist. Bei starken Mikroskopen pflegt von selbst mit mehr oder minder großer Annäherung telezentrischer Strahlengang vorhanden zu sein. Da aber gerade in diesem Falle die Schaudinge durch Schneide- oder Schleifverfahren auf ganz dünne Schichten gebracht zu sein pflegen, so spielt gerade diese Verwirklichung hier bei der Behandlung der Tiefenwahrnehmung keine wichtige Rolle.

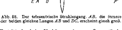


Abb. 88. Der telezentrische Strahlengang. AB, die fernere der beiden gleichen Langen AB und DC, erscheint gleich groß.

Läßt man die Mitte P der Eintrittspupille, wie es Abb. 89 erkennen läßt, aus dem Unendlichen zurück auf der linken Seite der Achse zum Vorschein kommen, so ergibt sich eine durchaus **widernatürliche** Erscheinungsform, was durch die Bilder 90 und 91 noch bekräftigt wird. Hier erscheint die dem Beobachter nähere Länge DC sogar kleiner als die ihm fernere AB. Den Strahlengang nennt man in diesem Falle **hyperzentrisch** oder **schnittflüchtig**, denn die Widernatürlichkeit des Eindrucks wird ja eben dadurch erzielt, daß die Hauptstrahlen von dem Aufnahmegegenstande nach der Vorderfläche des optischen Geräts hin auseinanderfahren.

Obwohl diese Perspektive erst 1906 aus theoretischen Überlegungen heraus genauer untersucht und bekanntgegeben wurde, mag sie schon häufig beobachtet worden sein, ohne daß ihr eigentliches Wesen erkannt wurde. Sie kann mit mittelstarken Lupen leicht vorgeführt werden, und O. RINGLEB hat darauf

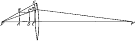


Abb. 89. Der hyperzentrische Strahlengang. AB, die fernere der beiden gleichen Langen AB und DC, erscheint großer.

aufmerksam gemacht, daß sie auch bei einem zusammengesetzten Gerät, dem Kystoskop, namentlich bei der Beobachtung des Blasenausganges auftreten und den unerfahrenen Betrachter stören kann.

Wir verlassen hiermit die von der natürlichen Perspektive abweichenden Erscheinungsformen, auf die gelegentlich optische Geräte führen können, und setzen im folgenden voraus, daß es sich um einen Vertreter der überwiegenden Mehrzahl handle, und daß sich der Beobachter vor einer natürlichen Perspektive befindet, wenn er in das optische Gerät schaut.

Liegt, wie hier angenommen, P (und natürlich auch P') auf der Achse des Geräts, so wird man das Verhältnis der Winkel $w':w$ im allgemeinen als unabhängig von der Lage des Achsenschnitts im Raum ansehen können. Immerhin aber mag darauf hingewiesen werden, daß diese Voraussetzung bei zweifach oder bei einfach symmetrischen Linsen oder Linsenfolgen, wie sie namentlich unter Brillengläsern vorkommen, nicht zutrifft.

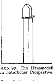


Abb. 90. Ein Hausmodell in natürlicher Perspektive.

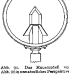


Abb. 91. Das Hausmodell von Abb. 90 in unnatürlicher Perspektive.

Besonders aber muß bei allen zur unmittelbaren Unterstützung des Auges dienenden Vorkehrungen die Frage nach der **aufrechten** oder **umgekehrten** Lage der Bilder beantwortet werden. Zwar legt man bei den ältesten zusammengesetzten Geräten, dem Mikroskop und dem Himmelsfernrohr, keinen Wert auf die Aufhebung der Bildumkehrung, doch liegen bei beiden Einrichtungen Beobachtungsdinge vor, deren Tiefenerstreckung entweder ganz gering ist oder doch bei der Beobachtung nicht erkannt werden kann. Will man sich aber, wie beim Erdfernrohr oder beim Opernglas, in allgemein bekannter Umgebung schnell und sicher zurechtfinden, oder will man unter Leitung des Auges einigermaßen

schwierige Verrichtungen im Gegenstandsraume des Geräts durchführen, so wird man gut tun, ein aufrechtes Bild herbeizuführen.

Beachtet man, daß beim freien Sehen die Netzhaut von aufrechten Gegenständen umgekehrte Bilder aufnimmt, da sich die Hauptstrahlen in der Pupillenmitte oder im Augendrehpunkt schneiden, so wird man verlangen müssen, daß die das aus Linsen bestehende Gerät verlassenden Hauptstrahlen mit der Achse Gesichtswinkel w' von gleichem Vorzeichen einschließen, wie sie sich bei freier Betrachtung vom Orte der Eintrittspupille des Geräts aus ergeben würden. Die Hauptstrahlen dürfen also bei ihrem Wege durch das Linsengerät die Achse entweder gar nicht (wie bei der Lupe oder beim holländischen Fernrohr), oder sie müssen sie eine gerade Anzahl von Malen (wie beim Erdfernrohr oder beim bildaufrichtenden Mikroskop) geschnitten haben, wenn der Beobachter die Dinge durch ein solches Gerät aufrecht sehen soll. Faßt man alles zusammen und berücksichtigt, daß beim natürlichen Sehen bereits ein bestimmter Schnittpunkt der Hauptstrahlen mit der Achse vorhanden ist, so kommt man zu dem Schluß, daß die Dinge aufrecht oder umgekehrt erscheinen, je nachdem die von ihnen ausgehenden Hauptstrahlen auf dem Wege zur Netzhaut die Achsenrichtung des aus Linsen bestehenden Geräts eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Malen schneiden.

Handelt es sich dagegen um ein optisches Gerät mit einer einzelnen Spiegelung (oder einer ungeraden Anzahl solcher), so erscheint im Bilde rechts und links vertauscht, was einfach eine Folge der in solchen Fällen eintretenden Umkehrung der Blickrichtung ist. Da eine solche Richtungsänderung auch eintritt bei den als Bildwerfer dienenden Geräten, sobald die Lichtrichtung an einem undurchsichtigen Schirm umgekehrt wird, so muß man in solchen Fällen eine besondere spiegelnde Fläche in den Strahlengang einführen, um bestimmte, ihrer Lage nach bekannte Gegenstände (Schriften, Städtebilder u. ä.), bei denen eine Spiegelverkehrung stören würde, befriedigend auf dem undurchsichtigen Schirme wiederzugeben.

Die hier stillschweigend durchgeführte Unterscheidung zwischen den als Bildwerfer und den als Augenhilfe dienenden Geräten ist insofern noch tiefer begründet, als es sich im ersten Falle um eine unterbrochene, im zweiten um eine ununterbrochene Abbildung handelt. An dieser Stelle ist es von besonderer Wichtigkeit, daß bei Schirmbildern, die dem unbewaffneten (oder höchstens brillenbewaffneten) Auge dargeboten werden, der Standpunkt des Beobachters noch ziemlich willkürlich gewählt werden kann. Damit wird aber die Wirkung der Perspektive im Augenraum des Beobachters einigermaßen unbestimmt, wie sogleich näher gezeigt werden soll. Bei den als Augenhilfe dienenden optischen Geräten aber ist der Augenort in einem viel höheren Maße an die Lage des Gerätes gebunden, worauf ebenfalls noch näher einzugehen sein wird.

Für die Einteilung der optischen Geräte in große Gruppen ist aber die schon in Ziff. 61 behandelte Tatsache von besonderer Bedeutung, ob die Gegenstände durch das optische Gerät betrachtet, unter größeren Winkeln w' erscheinen als mit bloßem Auge w^* betrachtet oder nicht. Ist das der Fall, so bezeichnet man sie als vergrößernde oder verdeutlichende. Als Grenze wird einigermaßen willkürlich festgesetzt

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w^*} = 2;$$

Zu diesen Vorkehrungen gehören namentlich die älteren optischen Geräte, wie Lupen, Mikroskope und Fernrohre. Ihnen haben sich auf Grund einer

namentlich in den letzten Jahrzehnten geförderten Entwicklung nach der Bezeichnungsweise O. RINGLEBS die **wiederholenden** oder **orientierenden** Geräte gegenübergestellt, für die die Ungleichung besteht

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} < 2.$$

Die Hauptzahl der hierhergehörigen Einrichtungen liefern die Aufnahmelinsen, doch gehören von älteren Geräten die heute fast verschwundenen dunklen Kammern und Guckkästen sowie die Bildwerfer und die Sehrohre für Tauchboote mit fast allen Untersuchungsgeräten der Körperhöhlen und -röhren hierher.

Während man früher die Instrumente hauptsächlich danach gliederte, ob sie ein auffangbares Bild auf einem außenstehenden Schirm entwerfen, scheint der neue Einteilungsgrundsatz mehr die besondere Leistung zu berücksichtigen. Es störte auch in der alten Einteilung, daß durch eine geringfügige Verschiebung der Teile gegeneinander eine Vorkehrung aus der einen Gruppe aus- und in die andere Gruppe eintrat, was bei der hier vorgeschlagenen Ordnung nicht zu befürchten ist.

63. Die Tiefendeutung in besonders einfachen Fällen. In perspektivischer Hinsicht liefern die als Bildwerfer dienenden Geräte Bilder in der Regel auf ebenen Schirmen, während man sich bei den als Augenhilfe dienenden Vorkehrungen zweckmäßig die Perspektive auf der unendlich fernen Ebene entworfen denkt. Für die sogleich durchzuführende Tiefendeutung zunächst auf Grund perspektivischer Verkürzungen wohlbekannter Gebilde empfiehlt es sich der Anschaulichkeit wegen, von einem nahen Schirm auszugehen, wobei man zunächst ein Auge mit ausreichender Akkommodationsbreite annehmen mag.

Als man in der Renaissancezeit die Regeln der Perspektive für den Maler entwickelt hatte, war die Freude daran sehr groß, und der Kenner beurteilte die Lösung schwierigerer Aufgaben, wie sie etwa die Architekturmalerei stellte, mit besonderer Hingabe. Schon aus den Darstellungen L. DA VINCIS und denen A. DÜRERS geht hervor, daß den Kennern die Vorstellung geläufig war, eine völlig fehlerfreie Perspektive würde



Abb. 92. Das Abbild O bei der Aufnahme, die Entstehung des Abbildes O' und seine Einschaltung bei o in den Hauptstrahlenkegel. Im obern Teil der Zeichnung sind die Pupillenmitten im Achsenschnitt angedeutet.



Abb. 93. Das vollständige Abbild des direkten Sehens und das richtig vor dem Auge eingeschaltete verkleinerte Abbildsbild der Aufnahme.

geschaffen, wenn man als Träger des Bildes eine durchsichtige Schicht zwischen dem durch eine ziemlich enge Blende bestimmten Augenorte des Zeichners und dem Aufnahmegegenstande anbringen könnte und darauf die Durchstoßpunkte der vom Blendenort nach den Dingpunkten gezogenen Sehstrahlen vermerkte. Man erkennt aus derartigen Erinnerungen, wie groß der Lehrwert einer solchen VINCIschen Glastafel war. Noch in der Mitte des 18. Jahrhunderts konnten Mathematiker wie J. H. LAMBERT in seiner „Freyen Perspektive" ein gutes Verständnis der perspektivischen Regeln voraussetzen. Im 19. Jahrhundert verlernten weite Kreise bei der Überfütterung mit technischen Hilfsmitteln die

Grundlagen der Perspektive und namentlich nach 1839, wo die photographische Kunstfertigkeit ihren Siegeszug antrat, war der Mehrzahl der Beschauer der Zusammenhang zwischen dem Gegenstande der Aufnahme und dem Lichtbild durchaus nicht mehr klar. Sicht man von der Abbildungstiefe ab, die bei gelungenen Lichtbildern groß genug vorausgesetzt werden kann, so ist das Lichtbild nichts weiter als eine richtige Perspektive des Aufnahmegegenstandes und die vorhergehende Abbildung 92 zeigt, daß man sie zwischen ihn und die Mitte P der Eintrittspupille der Aufnahmelinse gehörig einschalten kann. Gehörig, d. h. so, daß sie von P aus Punkt für Punkt perspektivisch liegt zu den einzelnen Punkten der Einstellebene und der Oberfläche des Aufnahmegegenstandes. So kann sie dann nach Abb. 93 auch von einem genügend akkommodationsfähigen Auge betrachtet werden. Das mag hier genügen, denn an einer anderen Stelle, bei der Aufnahmelinse (Ziff. 103), sollen diese Beziehungen noch eingehender behandelt werden.

Gegeben sei Abb. 94, 1, die Wiedergabe von einer Würfelfläche $ABCD$ in einem Achsenschnitt, wobei das perspektivische Zentrum in der Verlängerung von AB angenommen sei. Die Einstellebene gehe durch AD, so daß E den

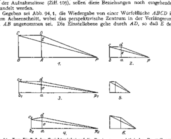


Abb 94. Zum Einfluß der Gesichtswinkel auf die Deutung perspektivischer Darstellungen. 1. Der Entwurfsvorgang für das ebene Abbild. 2. Die Betrachtung des verkleinerten Abbildsbildes aus dem richtigen Abstande. 3. (5.) Die Vertiefung (Verflachung) des als rechtwinklig erkannten Gebildes infolge eines zu weiten (zu nahen) Augenortes. 4. (6.) Die Verkleinerung (Vergrößerung) des Hintergrundes infolge eines zu weiten (zu nahen) Augenortes bei Kenntnis der Tiefenerstreckung des Gebildes.

Punkt C vertreten möge. Die Gesichtswinkel bei P sind dann durch APE, APD und EPD gegeben. Wird nun in Abb. 94, 2 ein verkleinertes (beispielsweise im halben Maßstabe angefertigtes) Abbildsbild dea so betrachtet, daß der Augendrehpunkt p einen zu da senkrechten Abstand $ap = {}^1/_2\, AP$ hat, so sind selbstverständlich die Winkel ape, apd und epd den entsprechenden obigen gleich. Wenn man nun weiß (hier tritt das Formengedächtnis ein), daß dea die perspektivische Darstellung eines Rechtecks sein soll, so führt die gleichsam unbewußt vorgenommene Ziehung der Parallelen dc und ab, sowie die Verlängerung

von pe bis c nach Fällung der Höhe cb zu einem Quadrat, weil die ganze Zeichnung der ersten Linie für Linie ähnlich ist. Man ist also zu einer ähnlichen Wiederherstellung der Form gekommen. Zu demselben Ergebnis würde es führen, wenn man — wieder aus seinem Formengedächtnis heraus — wüßte, daß die Tiefe ab der von zwei Loten begrenzten Fläche ihrer Höhe da gleich wäre; man hätte dann, wieder aus Ähnlichkeitsgründen, schließen können, daß der senkrecht über b gefundene Punkt c auf einer durch d gehenden Parallelen zur Grundlinie läge.

Wie man sieht, ist immer die Voraussetzung einer solchen richtigen Wiederherstellung, daß p im richtigen Abstande $^1/_2\, AP$ von der Ebene des Abbildsbildes angenommen wurde. Das kann aber nur geschehen, wenn die Brennweite f' der Aufnahmelinse bekannt ist (bei Landschaftsaufnahmen mit starker Verkleinerung des Abbildes würde $ap = f'$ werden), was man für das durchschnittliche Lichtbild nicht annehmen kann. Man wird mithin damit rechnen müssen, daß bei der Betrachtung von Lichtbildern der richtige Abstand häufig nicht eingehalten wird, sondern entweder zu groß oder zu klein gewählt wird.

Es sei aber nun (Abb. 94, 3) angenommen, der Augendrehpunkt p_1 gelange in einen zu weiten Abstand von dem Abbildsbilde acd, so daß die mit diesen Punkten bestimmten Gesichtswinkel dp_2a und cp_1a zu klein ausfallen. Dann sind wieder ebendieselben beiden Möglichkeiten vorhanden, auf Grund der Erfahrung zu einer Raumanschauung zu kommen. Kennt man die überall gleiche Höhe der Fläche $ABCD$ (etwa als die einer Wand oder Grenzmauer), dann kommt man mittels der Parallelen durch d und der Verlängerung p_1c auf das Gebilde ab_2c_1d, das ist ein Rechteck mit einer Tiefenerstreckung ab_1, die in demselben Verhältnis zu groß ist, in dem der tatsächliche Abstand ap_1 zu den richtigen ap steht. Die andere Möglichkeit ist die, daß man (Abb. 94, 4) aus der Erfahrung über die richtige Tiefenerstreckung $ad = ab_2$ besser unterrichtet ist, alsdann kommt man auf ein Gebilde ab_2c_2d (oder ein solches der Abb. 94, 6), worin die ferneren Gegenstände c_2b_2 zu klein (zu groß) erscheinen[1]).

War diese Ableitung auch nur an der streng faßbaren geometrischen Perspektive durchgeführt worden, so sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei guten Schirmbildern ganz unregelmäßig gestaltete Raumdinge — ich denke gerade an die Aufnahme einer Waldlichtung mit prachtvoller Wiedergabe der Bodenschwellen und Vertiefungen — infolge der Lichtverteilung und der Schattenwirkung Anhaltspunkte genug zu überraschend eingehender Tiefendeutung bieten. Man sollte aber ein Auge schließen, die Bildfläche senkrecht sowie in zutreffender Höhe vor dem betrachtenden Auge halten und schließlich sich einige Zeit in die Aufnahme hineindenken.

Für die ganze Überlegung macht es offenbar keinen Unterschied, ob das betrachtete Bild für sich besteht, also auf einer Zeichen- oder Malfläche greifbar vorliegt oder gleichsam in der Luft schwebt, wie es eben bei dem virtuellen Bilde der Fall ist, das die als Augenhilfen dienenden Instrumente in der Regel liefern. Die Herleitung des obigen Ergebnisses beruht ja allein auf der Veränderung der Gesichtswinkel, unter denen das Abbildsbild dem Auge dargeboten wird.

Es leuchtet ein, daß unter sonst gleichen Umständen die Nichteinhaltung der Gesichtswinkel einen um so fühlbareren Einfluß auf den Beschauer ausüben wird, je größer der Winkel $2w$ ist, für den das Abbild entworfen wurde.

[1]) Selbstverständlich handelt es sich in dem eingeklammerten Falle nur um eine Urteilstäuschung, und der Hintergrund erscheint nur höher als der Vordergrund, im Gegensatz zu der Perspektive mit hyperzentrischem Strahlengang, wo der Hintergrund tatsächlich in einem größeren Maßstabe auf der Einstellebene wiedergegeben wird.

Faßt man alles zusammen, so kommt man hinsichtlich des Einflusses der Veränderung der Gesichtswinkel (oder unrichtiger Betrachtungsabstände bei greifbaren Abbildsbildern) zu folgendem Ergebnis: Werden bei der Betrachtung eines geometrisch ähnlichen Abbildsbildes eines Raumdinges die Gesichtswinkel verkleinert (wählt man den Betrachtungsabstand zu groß), so liegen alle Bedingungen vor, die Perspektive falsch zu deuten, und zwar kann nach der Erfahrung des Beschauers als Grenzfall sowohl eine entsprechende Vertiefung des ganzen Raumbildes als eine Erniedrigung des Hintergrundes eintreten. Bei einer Vergrößerung der Gesichtswinkel (Verkleinerung des Betrachtungsabstandes) können die entgegengesetzten Grenzfälle eintreten.

64. Die Tiefendeutung bei wiederholenden Geräten. Als weitaus wichtigsten Vertreter dieser großen Gruppe diene die heute so weit verbreitete Aufnahmelinse, deren Ergebnis, das Lichtbild, unter denselben Winkeln betrachtet werden sollte, wie sie das Auge am Orte der Eintrittspupille während der Aufnahme erhalten würde. Wir müssen uns dazu zum mindesten ein wenig näher auslassen.

Beim Beginn dieser ganzen Betrachtung war ausdrücklich angenommen worden, daß man auf die Abstände *ap* oder die kleineren von den Bildern 5 und 6 akkommodieren könne. Bei den kurzen Brennweiten der neuzeitigen Aufnahmekammern ist das aber durchaus nicht immer möglich. Um den Akkommodationsschwierigkeiten zu entgehen, die übrigens auch einem aufmerksamen Beobachter den Eindruck zu stören vermögen, wird man an eine zweckmäßige Vergrößerung des Abbildsbildes *acd* zu denken haben.

Das kann durch eine das blickende Auge unterstützende Lupe geschehen, wie sie als V e r a n t l u p e eingeführt wurde und unten (S. 450) genauer beschrieben ist, oder durch die Vergrößerung eines Glasbildes auf einem Schirm, wo das Schirmbild von selbst mit entspannter Akkommodation betrachtet wird, wenn der Abstand des Beobachters 5 m erreicht und überschreitet. Einen richtigen Eindruck kann natürlich — bei Landschaftsaufnahmen — nur ein einzelner Beobachter erhalten, nämlich der sich — bei M-facher Vergrößerung des Glasbildes — in der Entfernung Mf' senkrecht vor der Mitte des Schirmbildes befindet. Alle näher sitzenden empfinden vermutlich bei genugend bekannten Aufnahmegegenständen eine zu geringe Tiefenausdehnung, alle auf entfernteren Plätzen vermutlich eine übertriebene, und dabei ist noch von den Fälschungen ganz abgesehen, die durch eine seitliche Verschiebung des beobachtenden Auges hervorgerufen werden. Der Änderung der Tiefendeutung könnte man durch passende Änderung der Gesichtswinkel entgegenwirken: zu fern sitzende Personen müßten durch Ferngläser entsprechender Vergrößerung, zu nah sitzende durch umgekehrt benutzte Ferngläser das Schirmbild betrachten. Alles dies gilt bei einäugigem Schauen auf die Schirmvorführung. Daß die Abweichung von dieser Forderung — natürlich benutzen die Zuschauer in überwiegender Mehrzahl beide Augen — nicht mehr auffällt, liegt sowohl an der ziemlich großen Entfernung des Schirmes, besonders aber wohl an der Stärke des Formengedächtnisses.

Bringt man aber das beobachtende Auge an den richtigen Ort vor den Schirm, so kann die Naturtreue erstaunlich weit gehen, wenn eben die Neigungswinkel w erreicht werden, wie sie für die Aufnahme galten.

Die oben angeführten wiederholenden Geräte, die als Augenhilfe dienen, haben natürlich den Vorzug, daß, wenn für sie wirklich $w' = w$ gilt (kleinere w'-Werte sind ja bei den wiederholenden Geräten nach der Bedingung für die Zusammenordnung möglich), der richtige Augenort in der Nähe der Austrittspupille viel sicherer erreicht wird. Am geeignetsten wäre für solche Tiefendeutungen ein Unterseebootfernrohr mit der Vergrößerung $= 1$, aber man wird

es selten zu derartigen Untersuchungen heranziehen können. Die weitaus häufigste Verwirklichung wiederholender Gerate liegt eben, wie oben hergeleitet, in der Betrachtung von Schirmbildern.

65. Die Ergebnisse bei verdeutlichenden Geräten. Die Tiefendeutung in diesem Falle, wo für die Verdeutlichung kleiner Einzelheiten die Gesichtswinkel w' größer sein mussen als die dingseitigen w an der Eintrittspupille, war in den zusammenfassenden Sätzen bereits eingeschlossen: es mussen sich verminderte Tiefen ergeben.

Das bevorzugte Gerät dafür ist das Erdfernrohr. Denn wenn auch bei verdeutlichenden Vorkehrungen Schirmbilder sehr wohl vorkommen (man braucht nur an Vergrößerungen mit dem Mikroskop zu denken und die starksten Leistungen in dieser Hinsicht liefert die KÖHLERsche, mit ultraviolettem Licht arbeitende mikrophotographische Einrichtung), so wird man dabei doch keine Tiefen beobachten wollen. Beim Erdfernrohr dagegen liegen gerade Raumdinge vor, bei denen man die Tiefenwiedergabe zu würdigen weiß.

Bei der Benutzung sind hier zwei Fälle möglich, je nachdem das Fernrohr einen eigenen Strahlengang hat, oder ob der Strahlengang erst durch das Auge des Benutzers gesetzt wird.

In dem ersten Falle, zu dem alle älteren und weitaus die meisten neueren Erdfernrohre gehören, liegt die Austrittspupille mit einem Durchmesser von 4 mm oder darunter in einer Entfernung von rund 1 cm auffangbar hinter der Okularfassung. Die altere Lehre von der Benutzung optischer Vorkehrungen nahm nun an, daß man bei der Benutzung die Augenpupille mit der Austrittspupille der Vorkehrung und ihre Achse mit der Gesichtslinie zusammenfallen lasse, so daß dann ein Netzhautbild von einer Größe entworfen wurde, wie sie dem scheinbaren Gesichtsfelde entspräche. Tatsächlich würde man in dieser Weise vorgehen, wenn man — etwa zu Prufzwecken — das Gesichtsfeld eines bestimmten Fernrohrs mit einer kleinen Aufnahmekammer auf der photographischen Platte festhalten wollte.

Aber wenn das Auge auch wie ein kleiner Dunkelkasten gebaut ist, so unterscheidet es sich doch insofern wesentlich von ihm, als es sich beim Gebrauch um seinen Drehpunkt bewegen muß, wenn man überhaupt deutliche Bilder von seitlichen Dingflächenstücken wahrnehmen will. Infolgedessen eignet sich jene Vorschrift der älteren Lehre mit ihrer stillschweigend und irrig gemachten Voraussetzung nicht für die Verbindung von Fernrohr und Auge, sondern man muß auf die im vorhergehenden behandelte Schlüssellochbeobachtung zurückgreifen, um die Einzelheiten richtig zu verstehen. Da an der Beschaffenheit der durch solch ein Fernrohr überhaupt hindurchtretenden Strahlenbündel vom Auge in keiner Weise etwas Wesentliches geändert werden kann, wenn das Auge die größte, ihm unter diesen Umständen mögliche Helligkeit erhalten soll, so muß man es vor der Austrittspupille wie vor einem Schlüsselloch hin- und herbewegen und mit diesen Drehpunktsverschiebungen Augendrehungen kuppeln. Auf diese Weise kann man *nacheinander* das gesamte scheinbare Blickfeld gleichsam absuchen, und man hat noch über den Fall der Schlüssellochbeobachtung hinaus den Vorteil, daß man in jeder Stellung das ganze scheinbare Gesichtsfeld im indirekten Sehen empfängt und danach seine Kopfbewegungen regeln kann.

Es sei hier übrigens darauf hingewiesen, daß der kleine Abstand der Austrittspupille von der Okularfassung noch den Vorteil hat, die notwendigen Kopfbewegungen sehr weitgehend zu beschränken. Denn wenn man sein Auge von dem Lochrand in einer greifbaren Blendenwand aus leicht begreiflichen Gründen einigermaßen weit entfernt halten muß, so gilt das von dem Luftbildchen der Austrittspupille durchaus nicht: sie kann man im Auge, und sogar nahe an der

Augenpupille entwerfen lassen, ohne das Auge zu gefährden, und vermindert dadurch die Kopfverschiebungen in einem sehr hohen Maße. Die Größe der Augendrehungen überhaupt ist natürlich durch das scheinbare Gesichtsfeld des Fernrohres bestimmt.

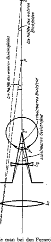


Abb. 95. Blick- und Gesichtsfeld auf der Ding- und der Augenseite eines schwachen holländischen Fernrohrs.

Im zweiten Falle wird, wie schon gesagt, der Strahlengang durch den Augendrehpunkt des Benutzers bestimmt. Bei solchen Fernrohren wird die Austrittspupille der Linsenfolge — sie läßt sich in diesen Fällen in der Regel nicht auf einer Mattscheibe auffangen — von der augennahen Fassung des Gerätes eingerahmt, so daß sie wie eine Fenster- oder Lukenöffnung aussieht. Hierher gehört das holländische Fernrohr (Abb. 95), und wir wollen darauf etwas genauer eingehen.

Es sei das holländische Fernrohr schwacher Vergrößerung besprochen. Wir bringen ganz von selbst das Auge möglichst nahe vor die augennahe Okularfläche und wollen annehmen, das ganze scheinbare Gesichtsfeld von $2 \times 15° = 30°$ werde zunächst nur im indirekten Sehen wahrgenommen, wo das Auge der Fernrohrachse entlang schaut, der Augendrehpunkt also ebenfalls auf der Achse, etwa 10 mm hinter der Augenpupille, anzunehmen ist. Da es nun ganz ausgeschlossen ist, daß wir auch nur 5° seitlich von der Achse eine deutliche Gesichtswahrnehmung haben, so drehen wir ganz unwillkürlich unser Auge um seinen Drehpunkt so lange, bis seine Gesichtslinie in den augenseitigen Hauptstrahl zu dem die Aufmerksamkeit erregenden Punkte liegt. Nach den vorstehenden Überlegungen erkennt man leicht, daß hiermit ein ganz bestimmtes Strahlenbündel, nämlich das Blicklinienbündel aus dem beim Gebrauch hinter dem Gerät liegenden Augendrehpunkt Z' heraus, als augenseitiges Hauptstrahlenbündel ausgewählt wird, und daß die Güte der Leistung des Geräts in hohem Maße von dieser Wahl abhängt.

Wir müssen bei diesen Verhältnissen etwas länger verweilen, da sie natürlich aufgetreten sind, solange man schwache holländische Fernrohre benutzt hat, auch wenn der Beobachter von der Art keine Vorstellung hat, in der er sein Gerät beansprucht.

Was die Fehler gegen die Strahlenvereinigung betrifft, so werden besonders auffällig sein die Fehler schiefer Bündel, wie Farbenverschiedenheit der Vergrößerung, Astigmatismus schiefer Bündel und auch die Verzeichnung. Bei einer nicht achsenrechten Lage des Drehpunktes können sich namentlich ungemein störende einseitige Farbensäume einstellen, die man bei den Fernrohrbrillen von ähnlicher Anlage als deutliche Kennzeichen unrichtiger Anpassung zu besserer Ausrichtung des Geräts in seiner Fassung vor dem Auge verwendet.

Auch bei der Strahlenbegrenzung muß der Drehpunkt berücksichtigt werden. Die bisher am sorglichsten ausgeführte Behandlung der Strahlenbegrenzung am holländischen Fernrohr stammte von S. Czapski, und sie ist vollkommen zutreffend, wenn man etwa einen kleinen Dunkelkasten mit einer auf 2 bis 3 mm abgeblendeten Eintrittspupille dicht hinter ein holländisches Fernrohr schaltet, z. B. um dessen scheinbares Gesichtsfeld aufzunehmen. Bei der eigentlichen Benutzung eines solchen schwachen Fernglases aber liegen, wie wir oben sahen, die Verhältnisse ganz anders, weil ein festes Gerät mit einem während des Gebrauchs bewegten Auge verbunden wird, was eben aus der alten Abbeschen Lehre herausfällt, die zwar die beim Gebrauche ruhenden Geräte völlig einschließt, aber das blickende Auge nicht umfaßt. Daß sich gewisse Abweichungen einstellen, zeigt schon ein Blick auf die Strahlungsvermittlung. Während nämlich ein Flächenstückchen zur Seite der Achse, dem ein scheinbarer Abstand von 10° zukommen möge, in die ruhende Pupille einen elliptischen Zylinder schickt, dessen große Achse zwar 3 mm ist, dessen kleine Achse aber nur 3 mm · cos 10° beträgt, erhält das lebende in diese Richtung des Bildraumes gewandte Auge genau wie in der Mittelstellung einen Zylinder mit kreisförmiger Grundfläche von 3 mm Durchmesser.

Hier sei nur noch auf die perspektivischen Grundlagen hingewiesen. Man suche etwa bei einem besonders einfachen holländischen Fernrohr mit 60 mm Objektiv- und 30 mm Okularbrennweite in einem Abstande von 30 mm, wo die Gesamtbrennweite, wie es auch sein muß, unendlich groß ist, die für die Strahlenbegrenzung auf der Dingseite maßgebenden Punkte auf, d. h. also die scheinbare Mitte der Augenpupille und den scheinbaren Augendrehpunkt. Dabei sei angenommen, daß die Pupille P' 13, der Augendrehpunkt Z' 25 mm von der letzten Okularfläche entfernt sei. Dann liegt P 112 mm und Z 160 mm vom Objektiv aus in der Richtung auf das Okular zu, wie es auch sein muß, in dem $2^2 = 4$fachen Abstand zwischen P' und Z', und man erkennt, das Gesichtsfeld des ruhenden Auges sei 160/112 — 1,4mal so groß wie das des blickenden; natürlich gilt genau die gleiche Zahl auch von dem scheinbaren Gesichtsfeld und dem scheinbaren Blickfeld.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Behandlung des holländischen Fernrohrs in der Verbindung mit dem blickenden Auge zuerst von A. Gullstrand als notwendig hervorgehoben worden ist.

Unter den einfachen Geräten ist es in erster Linie die Brille, hinter der das blickende Auge durch seinen Drehpunkt den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen überhaupt erst setzt. Einzelheiten darüber werden weiter unten bei dem Brillenglase für das blickende Auge zu finden sein.

Das beidäugige Sehen durch Doppelrohre.

66. Allgemeine Überlegungen zur Tiefenwahrnehmung. Handelt es sich nunmehr darum, festzustellen, in welcher Weise die uns hier in erster Linie stehende Tiefenwahrnehmung durch beidäugige Geräte unterstützt oder beeinflußt werden kann, so läßt sich das Vorgehen dabei kurz kennzeichnen.

Man wird zunächst gewisse, beim gewohnten Sehen mit unbewaffneten Augen stets vorkommende Beziehungen der Blicklinien festzustellen haben und alsdann untersuchen, wie diese durch ein beidäugiges Gerät geändert werden können. Da es sich dabei, wie sogleich abzuleiten ist, nur um zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten handeln kann, so werden wir die überhaupt denkbare Beeinflussung der Tiefenwahrnehmung in zwei große Gruppen sondern können.

Wendet man sich nunmehr zur Ermittlung dieser regelmäßig vorkommenden geometrischen Beziehungen, so wird es zu möglichster Kürze zulässig sein, die

Augendrehpunkte Z'_l und Z'_r zu stricheln, so daß wir sie später unmittelbar in den Augenraum eines beidäugigen Geräts gebracht denken können.

Man lege durch die beiden Drehpunkte Z'_l und Z'_r in Abb. 96 eine wagrechte Grundriß- oder Fußpunktsebene und ziehe in der Mitte der Augenstandslinie $Z'_l Z'_r$ senkrecht zu ihr eine Gerade, die eben die Spur der Symmetrieebene des Kopfes in der Grundrißebene ist. Wir erhalten die einfachsten und übersichtlichsten Verhältnisse, wenn wir die beiden Punkte O'_1 und O'_2 auf dieser Spur annehmen. Natürlich schneidet die Grundebene unser Gesicht in einer Kurve, die um Z'_l und Z'_r andeutungsweise wiedergegeben ist, so daß wir für jedes Auge die Nasen- und die Schlafenseite voneinander unterscheiden können. Verbindet man nun im Grundriß den ferneren Punkt O'_1 durch ausgezogene, den näheren Punkt O'_2 durch gestrichelte Geraden mit Z'_l und Z'_r, so kann man den allgemein bekannten Umstand, daß nähere Punkte mit stärkerer Konvergenz der Blicklinien betrachtet werden, auch mit den Worten ausdrücken, daß die beiden Blicklinien nach dem näheren Punkt mehr nasenseitig, die beiden nach den ferneren mehr schläfenseitig verlaufen.

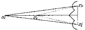


Abb. 96. Die Blicklinienpaare in der Grundrißebene des Augenraumes. $Z'_l O'_1$ und $Z'_r O'_1$ verlaufen mehr schläfenseitig. $Z'_l O'_2$ und $Z'_r O'_2$ verlaufen mehr nasenseitig.

Für die weitere Behandlung wird auch noch ein einfacher Aufriß des Gesichtes von Nutzen sein können, der durch die Augenbrauen, Pupillenmitten und den Nasenrücken dargestellt sein möge und die Form hat ⌒|⌒.

Stellt man sich in dem Augenraum eines einheitlichen optischen Geräts von einer für die beidäugige Beobachtung genügenden Größe (etwa einer Linse von großem Durchmesser) befindlich vor, so kann man die vorausgehende Abbildung ohne weiteres für die Fußpunkte der auf diese Weise abgebildeten Dingpunkte verwenden. Man weiß aus Erfahrung, daß man so — beispielsweise bei der Betrachtung einer Münze oder eines Druckstocks — keine Tiefenfehler macht. Das geht zwar schon aus der für die optische Abbildung allgemein bestehenden Rechtläufigkeit hervor, aber man kann es auch mit den soeben eingeführten Mitteln leicht feststellen. Bildet man das Augenpaar, den Gesichtsaufriß, durch das optische Gerät ab, entwirft also in rückkehrender Lichtrichtung für den Gegenstandsraum den scheinbaren Gesichtsaufriß, so wird diese Ebene natürlich zusammenhängend wiedergegeben, also ⌒|⌒ oder ⌣|⌣, und handelte es sich um einen großen Spiegel, so tritt in jedem Falle noch eine Spiegelverkehrung hinzu, ohne daß der Zusammenhang der abgebildeten Ebene des Gesichtsaufrisses gestört würde. Unter Berücksichtigung dieses wichtigen Umstandes erhält man in Abb. 97 den Grundriß des Strahlenverlaufs nach den Dingpunkten O_1 und O_2, die der Rechtläufigkeit der Abbildung wegen so angenommen werden müssen, daß O_1 früher als O_2 von der Lichtbewegung getroffen wird. Zieht man die entsprechenden Strahlen — die scheinbaren Blicklinien auf der Dingseite — so verläuft auch hier das Blicklinienpaar nach dem ferneren Dingpunkte O_1 mehr schläfenseitig, das nach dem näheren O_2 mehr nasenseitig.



Abb. 97. Die im Dingraum einer einheitlich wirkenden optischen Vorkehrung der Abb. 96 entsprechenden Blicklinienpaare. $Z_l O_1$ und $Z_r O_1$ verlaufen mehr schläfenseitig. $Z_l O_2$ und $Z_r O_2$ verlaufen mehr nasenseitig.

In unserer soeben eingeführten Sprechweise können wir also sagen: Bestimmen wir der Einfachheit wegen die Raumpunkte in der Grundrißebene durch den Schnitt zweier Blicklinien je von den beiden Augendrehpunkten aus, so erhalten wir bei einheitlich wirkenden Geräten eine dem Sinne nach richtige Tiefenwahrnehmung, weil der scheinbare Gesichtsaufriß zusammenhängend abgebildet wurde und die scheinbaren Blicklinien nach näheren Dingpunkten mehr nasenseitig verliefen als nach ferneren.

Nun sind aber nur in Ausnahmefällen die optischen Vorkehrungen zu beidäugigem Gebrauch einheitliche Geräte; in der Regel handelt es sich für die beiden Augen um besondere Vorkehrungen, was zum mindesten für die beiden Okulare gilt.

Unter diesen Umständen ist die zusammenhängende Wiedergabe des scheinbaren Gesichtsaufrisses durchaus nicht gesichert, und es sind dabei neben den

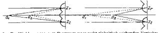


Abb. 98a. Die Blicklinienpaare im Dingraum einer nicht einheitlich wirkenden Vorkehrung bei naturlicher / gekreuzter Stellung der scheinbaren Augenorte.

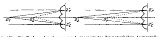


Abb. 98b. Die Tiefenwahrnehmung im Augenraum bei der natürlichen Augenstellung.

beiden oben geschilderten Möglichkeiten auch die gekreuzten |⌣ ⌣| und |⌢ ⌢| denkbar, wobei auch noch Spiegelverkehrungen vorhanden sein können. In den einfachsten dieser Fälle handelt es sich um solche vertauschenden Verschiebungen der beiden Aufrißhälften gegeneinander durch Spiegelung allein.

Will man nun die Möglichkeiten bei einem Doppelgerät sämtlich umfassen, so muß man zwei Darstellungen des Grundrisses wählen, wobei verständlicherweise im Augenraum die zusammenhängende Gesichtsaufrißanordnung gewahrt bleiben muß. Die Abbildungen 98a und 98b zeigen diese Möglichkeiten, wobei sich die oberen Teile auf den Dingraum beziehen.

Man erkennt dann leicht, daß in dem Falle gekreuzter Drehpunkte dem im Bildraum **ferner** erscheinenden Punkte O'_2 ein **näherer** Dingpunkt O_2 entspricht, und daß für O'_1 und O_1 die jeweils entgegengesetzte Beziehung gilt. Der Grund liegt natürlich daran, daß bei der Kreuzung der scheinbaren Drehpunkte dem ferneren Dingpunkte O_1 ein mehr nasenseitig verlaufendes Blicklinienpaar entspricht und dem näheren ein mehr schläfenseitiges. Daraus folgt dann die **Verkehrung der Tiefen** oder die **Pseudoskopie**.

Man sieht aber ferner auch ein, daß im Grunde nur diese beiden Möglichkeiten vorhanden sind, daß die scheinbaren Drehpunkte im Dingraum entweder in **natürlicher** oder in **gekreuzter** Lage abgebildet werden.

Insofern ist eben die Bestimmung eines Bildpunktes durch den Schnitt zweier Hauptstrahlen abwechslungsreicher als die allgemeine kollineare Be-

ziehung, wie sie Abbe untersucht hat. Während er die rückläufige Abbildung ausschließen konnte, kommt sie eben in dem hier länger betrachteten Falle vor und liefert die von Wheatstone zuerst 1838 bemerkte und 1851 genauer behandelte pseudoskopische Abbildung.

Stellt man sich den Übergang von der natürlichen zur gekreuzten Augenstellung im Dingraum allmählich vorgehend vor, so kommt man auf den Sonderfall, daß die beiden Drehpunkte in einen einzigen zusammenfallen. Man könnte den Fall natürlich als Grenzpunkt sowohl der natürlichen wie der gekreuzten Stellung zurechnen. Bestimmend für ihn ist, daß die beiden Augen genau die gleiche Perspektive erhalten, so daß die Tiefenwahrnehmung verschwindet. Im folgenden ist das damit ausgedrückt, daß der Eindruck als flachgepreßt bezeichnet wird, wie er tatsächlich auf manche Beobachter wirkt. Für die Betrachtung eines Gemäldes, also einer auf die einäugige Betrachtung hin entworfenen Darstellung, wirkt dagegen eine derartige Vorführung sehr günstig: da ein jedes Auge die gleiche Perspektive unter den richtigen Winkeln erhalten kann, so kann die Naturtreue des Gemäldes gesteigert werden, weil das sonst dafür nötige Schließen oder Verdecken des einen Auges dabei erspart und doch nur die eine, die richtige, Perspektive wirksam wird.

Da nun eine jede der beiden gleichartigen, den beiden Augen zugänglichen Perspektiven mit entozentrischem, telezentrischem oder hyperzentrischem Strahlengange entworfen sein kann, so erhält man das folgende Gefach für die überhaupt möglichen Raumwahrnehmungen, wobei in jeder ersten Zeile der für das Einzelauge geltende Strahlengang, in jeder zweiten Zeile die Lage der scheinbaren Augenorte bei der Beobachtung gekennzeichnet wird.

I_1 entozentrisch natürlich	II_1 telezentrisch natürlich	III_1 hyperzentrisch natürlich
I_2 entozentrisch zusammenfallend	II_2 telezentrisch zusammenfallend	III_2 hyperzentrisch zusammenfallend
I_3 entozentrisch gekreuzt	II_3 telezentrisch gekreuzt	III_3 hyperzentrisch gekreuzt

Was die Wahrnehmung betrifft, so läßt sie sich nach einem entsprechenden Plan kurz kennzeichnen, wenn man als Kennworte der von den verschiedenen Perspektiven (s. Ziff. 62) hervorgerufenen Erscheinungsform die Bezeichnungen:

mit Verkürzung ohne Verkürzung mit Verlängerung

einführt, die verständlicherweise für die ferneren bei einer Reihe gleich hoher Senkrechten gelten, die sich vom Beobachter aus in die Tiefe hinzieht.

I_1 mit Verkürzung tiefenrichtig	II_1 ohne Verkürzung tiefenrichtig	III_1 mit Verlängerung tiefenrichtig
I_2 mit Verkürzung flachgepreßt	II_2 ohne Verkürzung flachgepreßt	III_2 mit Verlängerung flachgepreßt
I_3 mit Verkürzung tiefenverkehrt	II_3 ohne Verkürzung tiefenverkehrt	III_3 mit Verlängerung tiefenverkehrt.

67. Vorkehrungen zum beidäugigen Sehen. Wendet man sich nunmehr den Vorkehrungen zum beidäugigen Sehen zu, so sind auch hier, wenigstens grundsätzlich, Geräte für Schirmbilder und als Augenhilfe wirkende Vorkehrungen vorhanden.

Was die erstgenannten angeht, so werden die Halbbilderpaare heutzutage so gut wie ausschließlich von Zwillingskammern geliefert und in besonderen

Stereoskopen betrachtet, deren Linsen eine gewisse vergrößernde Wirkung ausüben. Das ist nicht von jeher so gewesen, vielmehr war das erste berühmte WHEATSTONEsche Stereoskop (veröffentlicht 1838) ein Gerät mit einem Spiegelpaare, dessen Glieder je für eines der beiden Augen bestimmt waren und die beiden, in ziemlich großem Maßstabe gezeichneten Halbbilder (Abb. 99) ohne irgendwelche Vergrößerung nur an die richtige Stelle im Augenraum brachten, da sie sich sonst gegenseitig gestört hätten. Hier konnte man also wirklich von einem Gerät sprechen, wo ein Paar von Halbbildern auf Schirmen unmittelbar von den beiden Augen des Beobachters wahrgenommen wurden. An Strenge ist auch das WHEATSTONEsche Spiegelstereoskop nie übertroffen worden.

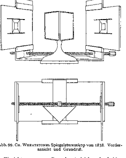


Abb. 99. CH. WHEATSTONEs Spiegelstereoskop von 1838. Vorderansicht und Grundriß.

WHEATSTONEs Halbbilder waren 1838 noch gezeichnet, doch beschäftigte sich die 1839 veröffentlichte Photographie ungefähr nach 12 Jahren lebhaft mit der Herstellung photographischer Halbbilder in kleinerem Maßstabe, wofür D. BREWSTER sein ungemein beliebtes Prismenstereoskop seit 1851 vorgeschlagen hatte. Auf seine Fehler werden wir noch eingehen, wenn wir auseinandersetzen, warum dieses Gerät mit exzentrisch-benutzten Linsenhälften hier nicht näher behandelt werden kann. Immerhin sind bestimmte seiner Einrichtungen, vor allem das Aufziehen der beiden Halbbilder, in einem unveränderlichen Abstande auf einem Träger, bei den Benutzern so beliebt geworden, daß man sich ein Paar von Halbbildern fast gar nicht mehr ohne einen solchen gemeinsamen Träger vorstellen kann. Diese feste Trennung etwa der beiden Halbbildmitten voneinander führt bei Beschauern von abweichendem Augenabstand zu einer bestimmten Tiefenfälschung, die HELMHOLTZ mit dem älteren Namen der Reliefperspektive bezeichnet hat.

Die neuere Zeit hat, wie gesagt, andere Stereoskope geschaffen, wobei es sich hauptsächlich um die Steigerung des Gesichtswinkels handelte, und benutzte Lupen nicht mehr exzentrisch, sondern zentrisch, um die Halbbilder zu vergrößern, die ja nicht breiter sein dürfen als etwa 6 cm, wenn sie sich beim Aufkleben auf den gemeinsamen Träger nicht stören sollen. Wünscht man nun, daß ein Bild von $(2 \times 29 = 58)$ mm Breite unter einem Breitenwinkel etwa von $2 \times 30° = 60°$

erscheinen soll, so muß die Brennweite f' der Aufnahmelinse ebenso wie die der Betrachtungslupen die Gleichung erfüllen

$$f' = 29 \text{ mm} \cdot \operatorname{ctg} 30° = 50{,}2 \text{ mm}.$$

Es würde sich hier also schon um ziemlich starke, 5fache, Lupen handeln, die mit bewegtem Auge zu benutzen wären. Der erfolgreichste Vertreter dieser Richtung ist L. VAN ALBADA in Amsterdam, und man findet in dem Abschnitt über das photographische Objektiv noch einige Einzelheiten dazu.

Sobald die Lupen hinreichend verzeichnungsfrei sind und eine genügende Bildebnung der Brennfläche besitzen, erhält ein jedes Auge ein deutliches und winkeltreues Halbbild in weiter Ferne, das solche Strahlenbündel in seine Augen treten läßt, wie sie das Raumding in die Eintrittspupillen der beiden Aufnahmelinsen an der Zwillingskammer schickte. Soweit es sich also um die geometrischen Bedingungen für die Tiefenwahrnehmung handelt, wird man bei der Benutzung eines solchen Stereoskops keinen Unterschied gegen die Betrachtung des Raumdinges vom Aufnahmeort aus feststellen können.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß wir 1903 bei unseren einschlägigen Arbeiten am Doppelverant, bei der Beobachtung vom Aufnahmeort aus, dem linken Auge das linke Halbbild, dem rechten aber den Aufnahmegegenstand selber darbieten konnten, ohne einen Verlust in der Tiefenwahrnehmung zu verspüren. Man wird daraus erschließen können, daß es möglich war, eine recht befriedigende Annäherung an das mit der Aufnahme erstrebte Ziel zu erreichen.

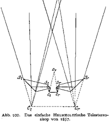


Abb. 100. Das einfache HELMHOLTZische Telestereoskop von 1857.

Eine solche Wiederherstellung der bei der Aufnahme aus den Strahlen der Dingseite ausgewählten Bündel tritt natürlich nur dann ein, wenn der Abstand der Pupillenmitten P_l und P_r beider Aufnahmelinsen gleich ist der Augenstandlinie des Beobachters und wenn die Brennweiten der Aufnahmelinsen und der Betrachtungslinsen ganz gleich sind. Ist diese letzte Bedingung nicht erfüllt, so tritt für den Beobachter die Wirkung eines verkleinernden oder vergrößernden Doppelfernrohrs ein; sie wird später behandelt werden.

Die erste Möglichkeit abweichender Länge der Augenstandlinie läßt sich leicht an dem HELMHOLTZischen Spiegeltelestereoskop vom Jahre 1857 behandeln.

Zwei Paare paralleler Spiegel $S_l s_l$, $S_r s_r$ sind nach Abb. 100 in der Regel so aufgestellt, daß die inneren s_l, s_r einen rechten Winkel miteinander bilden. Den beiden Augendrehpunkten c_l, c_r entsprechen im Dingraum gespiegelte, schein-

bare Drehpunkte C_l, C_r. Jedem dingseitigen Strahlenpaare C_lO_1, C_rO_1 (auch in einer beliebigen Hub- oder Senkebene) durch jeden dieser scheinbaren Drehpunkte nach einem Raumpunkte O_1 mit irgendwelchen Neigungen gegen die scheinbare Standlinie C_lC_r entspricht ein bildseitiges Strahlenpaar (in einer Hub- oder Senkebene von gleichem Winkel) c_lo_1, c_ro_1 durch die wahren Augendrehpunkte c_l, c_r mit entsprechend gleichen Neigungswinkeln gegen die wahre Augenstandlinie c_lc_r. Mithin erhält man in aller Strenge durch die Ziehung von Parallelen ein den Augen dargebotenes ähnliches Raumbild, dessen Ausmaße in demselben Verhältnis zu denen des Raumdinges stehen, wie die Standlinie der Augen selbst zu der Entfernung der beiden scheinbaren Drehpunkte. Selbstverständlich gilt das alles nur innerhalb des nicht übermäßig ausgedehnten beidäugigen Blickfeldes der Vorkehrung.

Man erhält ganz strenge, also ähnliche, aber zwerghafte Raumbilder. HELMHOLTZ scheint sie auch so aufgefaßt zu haben, was nicht einem jeden Benutzer des Telestereoskops möglich ist. Doch gehört das schon in das physiologische Gebiet und fällt aus dem unsrigen heraus.

Die beidäugig erkennbare Entfernung reicht nach der obigen Begründung (S. 371) bis auf etwa 500 m, und diese Entfernung gilt ebenso für das neue $\varkappa$-fach verkleinerte Raumbild, man hat also eine auf das $\varkappa$-fache gesteigerte Tiefenwahrnehmung, wenn man — wozu die meisten Beobachter von selber geneigt sind — alle an dem Raumbilde gemachten Tiefenfeststellungen unmittelbar auf das Raumding überträgt. Man drückt diesen Umstand, daß bei der Benutzung des Telestereoskops ohne Fernrohrvergrößerung (mit einer scheinbaren Augenstandlinie $C_lC_r = \varkappa c_lc_r$) das Tiefenunterscheidungsvermögen am Raumding auf das $\varkappa$-fache gesteigert ist, durch die Bezeichnungsweise aus, das Telestereoskop steigere die Körperlichkeit auf das $\varkappa$-fache, oder es habe eine $\varkappa$-fache spezifische Plastik.

Blieb hier die Ähnlichkeit zwischen Raumding und Raumbild streng erhalten, so weicht das zusammengesetzte Doppelgerät, dem wir uns im Doppelfernrohr zuwenden, insofern ab, als das Raumbild zwar noch in aller Strenge zustande kommt, aber nicht mehr ähnlich ist. Dieses Gerät gehört vielmehr unter die tiefenändernden, doch ist das Gesetz sehr einfach und erlaubt, auf eine sehr bequeme Art aus dem Raumding das Raumbild abzuleiten.

Das so abzuleitende Ergebnis gilt sowohl für Doppelfernrohre holländischer Art als auch für doppelte Erdfernrohre, wobei allerdings vorauszusetzen ist, daß die Einzelrohre verzeichnungsfrei sind oder mit anderen Worten die Gleichung

$$\operatorname{tg} w' = \varkappa \operatorname{tg} w$$

innerhalb des ganzen Gesichtsfeldes gültig sei. Bei den neueren Ausführungen ist diese Forderung mindestens mit großer Annäherung erfüllt.

68. Die gewöhnlichen Doppelfernrohre. Für das gewöhnliche Doppelfernrohr ist es wesentlich, daß die Hauptstrahlneigung w' hinter dem $\varkappa$-fach vergrößernden Instrument bestimmt wird durch die Tangentenbedingung

$$\operatorname{tg} w' = \varkappa \operatorname{tg} w; ,$$

wenn w die Hauptstrahlneigung auf der Dingseite war.

Da im einzelnen Fernrohr die Vergrößerung (s. auch Ziff. 61) gegeben ist durch

$$N_F = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \varkappa;\ \varkappa > 1,$$

so kann man in der folgenden Weise die Wirkung eines Doppelfernrohres mit parallelen Achsen im Abstande der Augendrehpunkte des Benutzers beschreiben.

P_l und P_r seien die Eintrittspupillen des Doppelfernrohrs und $P_l M_l \parallel P_r M_r$ seine Achsenrichtungen. Man errichtet nun in M_l und M_r zwei zusammenfallende achsensenkrechte Auffangebenen, die man sich in einigermaßen großer endlicher Entfernung vorstellen kann. Ein beliebiger Gegenstandspunkt Q liefert durch seine Verbindungslinien mit P_l und P_r das ihn bestimmende Paar von Hauptstrahlen, die die gemeinsame achsensenkrechte Ebene in Q_l und Q_r durchstoßen mögen. Fällt man die Lote auf die durch beide Achsen gelegte, hier wagerecht angenommene (Grund-) Ebene, so erhält man ja die Punkte O_l, O, O_r und man

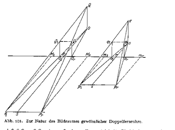


Abb. 101. Zur Natur des Bildraumes gewöhnlicher Doppelfernrohre.

sieht ein, daß $Q_l O_l = Q_r O_r$ sein muß, denn die gestrichelte Verbindungsgerade $Q_l Q_r$ wird ja von der Hubebene des Blicks aus der Auffangebene ausgestoßen. R werde durch das Lot OS auf die Augenstandlinie in der Geraden $M_l M_r$ bestimmt.

Geht man nun auf möglichst einfache Weise auf den Bildraum über, so braucht man nur die Darstellung auf der Auffangebene, also hier die Punkte Q_l, O_l, Q_r, O_r, unter den Winkeln w' zu betrachten. Dafür wiederholen wir in der Abb. 101 die Darstellung mit den Punkten m_l, o_l, r, o_r, m_r, q_l, q_r in der Auffangebene kongruent zu der mit großen Buchstaben. In m_l und m_r werden Senkrechte zur Auffangebene errichtet und darauf die Punkte p_l und p_r so aufgetragen, daß gilt

$$m_l p_l = m_r p_r = r s = \frac{M_l P_l}{\varkappa} = \frac{M_r P_r}{\varkappa} = \frac{RS}{\varkappa},$$

womit offenbar in aller Strenge die Tangentenbedingung für jedes Einzelfernrohr erfüllt ist.

Man kann nun ohne weiteres im Bildraume in der neuen Hubebene des Blicks die Linien $p_l q_l$, $p_r q_r$ bis zum Schnittpunkt q verlängern und das Lot qo fällen. Es fragt sich nun, wie weit entfernt ist o von $p_l p_r$ (genauer von s) und wie groß ist oq.

Zur Beantwortung der ersten Frage bilden wir in der Fußpunktsebene

$$P_l P_r : O_l O_r = SO : RO .$$

Alsdann bilde man nach einem bekannten Satze der Lehre von den Proportionen

$$\frac{P_l P_r - O_l O_r}{O_l O_r} = \frac{SR}{RO}.$$

Für den Bildraum gilt natürlich von selbst die gleiche Beziehung mit kleinen Buchstaben

$$\frac{p_l p_r - o_l o_r}{o_l o_r} = \frac{sr}{ro} .$$

Da nun die linken Seiten wegen

$$P_l P_r = M_l M_r = m_l m_r = p_l p_r ; \; O_l O_r = o_l o_r$$

nach Anlage der Zeichnung identisch sind, so erhalten wir

$$\frac{SR}{RO} = \frac{sr}{ro}$$

und, da vorher bestimmt war

$$sr = \frac{SR}{\varkappa} ,$$

auch $ro = RO/\varkappa$ und $so = SO/\varkappa$.

Das bedeutet in Worten aber: bei einem Doppelfernrohr erhält man im Bildraum die Entfernung des von dem bildseitigen Hauptstrahlenpaare bestimmten Bildraumfußpunktes o von der Augenstandlinie $p_l p_r$ dadurch, daß man den dingseitigen Wert SO durch die Fernrohrvergrößerung dividiert.

Zur Beantwortung der zweiten Frage bildet man für den Dingraum

$$OQ : O_l Q_l = P_l O : P_l O_l = P_l P_r : O_l O_r .$$

Dem entspricht natürlich für den Bildraum

$$oq : o_l q_l = p_l p_r : o_l o_r .$$

Da nun je das zweite, dritte und vierte Glied dieser beiden Proportionen einander gleich sind, so gilt das notwendigerweise auch für das erste, und man erhält

$$oq = OQ .$$

Es ergibt sich also ein Raumbild, in dem alle Punkte wegen des nur den $\varkappa$-ten Teil des früheren betragenden Abstandes zwischen Auge und zugehörigem Abbilde unter Winkeln erscheinen, deren Tangenten den $\varkappa$-fachen Betrag der am Raumding haben, und wo die Tiefenerstreckung im Verhältnis zur Breiten- und Höhenausdehnung auf den $\varkappa$-ten Teil zusammengeschrumpft ist. Es sei daran erinnert, daß nach S. 381 ein entsprechender Eindruck schon auf das einzelne Auge gemacht werden konnte.

Diesem Raumbilde gegenüber besitzt das Tiefenunterscheidungsvermögen den normalen Wert, und es ist auf das $\varkappa$-fache gesteigert, wenn man die am Raumbilde gemachten Tiefenfeststellungen unmittelbar auf das Raumding überträgt. Was die Tiefenausdehnung allein angeht, so hat man also hier denselben Gewinn wie bei einem Helmholtzischen Telestereoskop $\varkappa$-facher Körperlichkeit, doch ist im Gegensatze zu jenem das hier vorliegende Raumbild nicht mehr ähnlich, sondern in einer allerdings leicht übersichtlichen Weise geändert.

69. Die Doppelfernrohre mit verändertem Achsenabstande. Stellt man ein gewöhnliches Doppelfernrohr von $\varkappa_1$-facher Vergrößerung hinter ein Helmholtzisches Telestereoskop von $\varkappa$-fach gesteigerter Körperlichkeit, so erhält man

ein Doppelfernrohr mit verändertem Achsenabstande. Man kommt wohl am einfachsten zum Verständnis seiner Leistung, wenn man versucht, sie aus den Leistungen der Einzelteile zu folgern.

Das Telestereoskop mit $\varkappa$-fach gesteigerter Körperlichkeit lieferte ein in allen Richtungen $\varkappa$-fach verkleinertes Raumbild, das seinerseits das Raumding für das gewöhnliche $\varkappa_1$-fach vergrößernde Doppelfernrohr abgibt. Dieses rückt den Standpunkt des Beobachters bis auf den $\varkappa_1$-ten Teil an das verkleinerte Gebilde heran und läßt außerdem die Tiefenerstreckung der einzelnen Gegenstände auf den $\varkappa_1$-ten Teil zusammenschrumpfen. Das endgültige Raumbild ist also dem Raumding gegenüber von folgender Beschaffenheit: In einem $\varkappa$-fach gleichmäßig verkleinerten Gebilde, das aus einem Abstand von $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}/\varkappa$ betrachtet wird, werden alle in die Achsenrichtung des Doppelfernrohrs fallenden oder Tiefenerstreckungen $\varkappa_1$-fach verkleinert, und der Abstand des Beobachters wird auf

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a}}{\varkappa} = \frac{\mathfrak{A}}{\varkappa\varkappa_1}$$

gebracht. Der Beschauer hat dann ersichtlich ein Tiefenunterscheidungsvermögen, das auf das $\varkappa\varkappa_1$-fache des ursprünglichen von etwa 500 m gesteigert ist, wenn er seine Wahrnehmungen unmittelbar auf das Raumding überträgt, und die Veränderung der Tiefenerstreckung ist $\varkappa_1$-fach, d. h. genau dieselbe wie beim gewöhnlichen Doppelfernrohre. Für die derart eintretende Steigerung des Tiefenunterscheidungsvermögens auf das $\varkappa\varkappa_1$-fache gebraucht man auch den Ausdruck gesamte Tiefenwirkung oder totale Plastik. Die verschiedenen dabei möglichen Fälle sind von C. PULFRICH besprochen worden.

Verständlicherweise läßt sich durch Stereoskope, deren Betrachtungslinsen von kürzerer Brennweite sind als die Linsen der Aufnahmekammer, die Wirkung solcher abflachender Instrumente ebensogut wiedergeben wie weiter oben durch geeignete Stereoskope die Wirkung raumähnlich vorführender Instrumente, etwa des HELMHOLTZischen Telestereoskops. Dieser allgemeine Hinweis mag hier genügen.

Besondere Erwähnung verdient hier der Raumbildentfernungsmesser nach H. DE GROUSILLIERS, dem ein Doppelfernrohr mit vergrößertem Achsenabstande zugrunde liegt. In der Brennebene eines jeden Okulars ist das stereoskopische Halbbild einer schwebenden Markenreihe so angebracht, daß diese beim beidäugigen Sehen an den Stellen des Raumbildes erscheint, die regelmäßig abgestuften Entfernungen (500, 1000, 1500 m usw.) entsprechen. Diese Markenreihe wird gleichzeitig mit dem Raumbilde körperlich wahrgenommen und die ungenaue Schätzung der Entfernungen im Raumbilde ist nun zurückgeführt auf die genauere Messung der Tiefenunterschiede von Punkten des Raumbildes gegen die nächstgelegenen Marken der Reihe. Der stereoskopische Entfernungsmesser ist später in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena von E. ABBE und C. PULFRICH vervollkommnet worden.

Ferner ist hier hinzuweisen auf den Stereokomparator von C. PULFRICH, der zuerst besonders für astronomische Zwecke — zur Durchmusterung und Ausmessung von Sternaufnahmen — später auch für Vermessung irdischer Gebiete in Aufnahme gekommen ist. Bei dem Stereokomparator ist der Grundgedanke des stereoskopischen Entfernungsmessers auf greifbare Abbildsbilder angewandt worden. Die Aufnahmen stammen von Objektiven, deren Achsen zueinander parallel sind und häufig senkrecht auf der gemeinsamen Standlinie stehen.

Bei den hier behandelten beidäugigen Geräten lag ein mathematisch strenges Raumbild vor, denn die von einem Dingpunkt ausgehenden, nach den Mitten

der linken und rechten Eintrittspupille (gegebenenfalls nach dem linken und rechten scheinbaren Drehpunkt) gerichteten Hauptstrahlen treten so an die Mitten der rechten und linken Austrittspupille (waren so auf die beiden Augendrehpunkte gerichtet), daß sie, gegen die Lichtrichtung verlängert, einander in einem wahren Bildpunkt schnitten.

Das ist nicht bei allen beidäugigen Geräten so. In den Prismenstereoskopen Brewsterscher Art, in den stereoskopischen Mikroskopen und in der großen Klasse der astigmatischen Brillen schneiden sich die beiden Hauptstrahlen der linken und der rechten Seite gegen die Lichtrichtung und in den Augenraum hinein verlängert nicht, sondern kreuzen sich nur oder sind windschief. In solchen Fällen gibt es überhaupt kein mathematisches Raumbild und seine Form kann daher nicht mit mathematischen Mitteln bestimmt werden.

Eine Tiefenwahrnehmung ist aber bei allen diesen Vorkehrungen mindestens für ein Feld von einer gewissen Ausdehnung vorhanden. Sie kommt zustande, weil unser Augenpaar unter dem Zwange der Bilderverschmelzung Stellungen annehmen kann, die von den natürlichen abweichen: bis zu gewissen Beträgen kann der in das beidäugige Gerät schauende Benutzer seinen beiden Augenachsen die Richtungen geben, die von den beiden windschiefen Hauptstrahlen vorgeschrieben werden. Dann wird zwar jeder Hauptstrahl auf die Mitte der zugehörigen Netzhautgrube stoßen, aber es gibt keinen Schnittpunkt im Augenraum. Wohin man dort den einfach empfundenen Punkt verlegt, kann mit mathematischen Mitteln nicht entschieden werden, diese Aufgabe fällt in das Gebiet physiologischer Forschung.

D. Das Brillenglas und die Brille[1]).

Von

M. von Rohr, Jena.

Wir kommen hiermit zu der einfachsten und verbreitetsten optischen Vorkehrung, die im wesentlichen zur Verbesserung der Netzhautbilder ersonnen ist. Zunächst muß ein ganz kurzer Abschnitt den Schutzbrillen gewidmet werden.

70. Die Schutzbrillen. Sie haben nicht in erster Linie die Verbesserung der Netzhautbilder zum Gegenstande, sondern sollen entweder den Augapfel vor Schädigungen durch Staub, Wind und sogar durch Fremdkörper (Steinsplitter) bewahren oder gar zu grelle Lichtwirkungen für die Netzhaut herabmindern (Brillen für Kraftfahrer, Schweißerbrillen). Gelegentlich kommt auch noch die Aufgabe vor, die Netzhaut vor besonders als schädlich erachteten Strahlengruppen zu schützen; dabei kann es sich um besonders kurzwellige oder um besonders langwellige Strahlen handeln, die gelegentlich wohl die Augenmittel schädigen können. So mag darauf hingewiesen werden, daß der „Glasmacherstar" nach A. Vogt auf die langwelligen Strahlen zurückzuführen ist, die von den glühenden Glasmassen ausgesandt


Abb. 102. Kriegsbrille gegen Splitterwirkung nach F. Della Valle.

[1]) Hier sind zwei Schriften zum gelegentlichen Nachschlagen zu empfehlen: M. v. Rohr, Die Brille als optisches Instrument. Aus dem Handbuch der gesamten Augenheilkunde; auch allein. A. Brückner, Grundzüge der Brillenlehre für Augenärzte. Berlin: Julius Springer 1924.

werden. Namentlich der englische Physiker W. CROOKES hat schon in der Zeit kurz vor dem Kriege solche Glasarten herausgebracht, die ziemlich durchsichtig, jene schädlichen Strahlen größerer Wellenlänge zu einem großen Teile verschlucken. Zu gleicher Zeit hat er sich auch mit der Dampfung kurzwelliger (ultravioletter) Strahlung abgegeben, und Brillengläser dieser Art haben namentlich in den Ländern englischer Zunge eine weite Verbreitung gefunden. Nach den VOGTschen Äußerungen muß man an der Erforderlichkeit solchen Schutzes zweifeln.

Wenn nun bei derartigen Glasscheiben die Dämpfungswirkung von erster Wichtigkeit ist, so hat man schon früh die Forderung gestellt, auch bei Sammel- oder Zerstreuungslinsen (die nebenbei auch einen Brechungsfehler heben sollen) der Dämpfungswirkung über das ganze Blickfeld den gleichen Wert zu geben. An sich neigen die Sammel- (Zerstreuungs-) Linsen mit ihrer größeren Mittel- (Rand-) Dicke dazu, die stärkste Dämpfungswirkung in der Mitte (am Rande) auszuüben. Einrichtungen mit der erwünschten Gleichmäßigkeit hat man schon vor etwa 100 Jahren als isochromatische bezeichnet. Das ist ein unglücklicher Ausdruck; gleichmäßig dämpfende gibt das erstrebenswerte Ziel wohl besser wieder.

Wenden wir uns nun zu dem Hauptteile der Brillenlehre in optischer Hinsicht, so kommt es darauf an, die Güte des Netzhautbildes zu steigern. Man erkennt unter Berücksichtigung der Abschnitte bei der Behandlung des Auges, daß man sich zunächst beschränken muß auf das Brillenglas für das ruhig gehaltene, der Achse entlang schauende Auge.

a) Das Brillenglas für das ruhig gehaltene, der Achse entlang schauende Auge.

71. Die gewohnten Brillengläser mit geringem Abstande. Handelt es sich zunächst um ein achsensymmetrisches, aber zu lang oder zu kurz gebautes, also kurz- oder übersichtiges (myopisches oder hyperopisches) Auge, so wird bei dem Brillenträger das Netzhautbild eines fernen Gegenstandes nicht

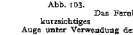


Abb. 103.

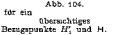


Abb. 104.

Das Fernbrillenglas für ein kurzsichtiges / übersichtiges Auge unter Verwendung der inneren Bezugspunkte H_1' und H.

von dem Auge mit $D_{11} = 58{,}64$ dptr entworfen, sondern von der Verbindung Brille (mit D_1) + Auge (mit D_{11}), und zwar in dem Abstande δ zwischen den zugewandten Hauptpunkten: $\delta = H_1'\mathsf{H}$.

Aus Formeln entsprechend Ziff. 21, Kap. 1, weiß man, daß die Brennweite D_{12} der Folge (Brille + Auge) gegeben ist durch

$$D_{12} = D_1 + D_{11} - \delta D_1 D_{11}. \tag{1}$$

Erinnert man sich, daß die Bildgröße ferner Gegenstände der Brennweite $f' = 1/D$ entspricht, so wird der Brillenträger nur dann von fernen Sehdingen die gleichen Netzhautbilder erhalten wie der Rechtsichtige, wenn gilt

$$D_{12} = D_{11}.$$

Berücksichtigt man die rechte Seite von (1), so ist zu fordern

$$D_1 - \delta D_1 D_{11} = D_1(1 - \delta D_{11}) = 0.$$

Da $D_1 = 0$ offenbar keinen allgemeinen Sinn gibt, so muß für sammelnde oder zerstreuende Brillengläser von endlicher Brennweite D_1 offenbar gelten

$$1 - \delta D_{11} = 0; \qquad \delta = 1/D_{11} = f'_{11} = 17{,}05 \text{ mm}. \tag{2}$$

In Worten kann man sagen, daß nach der Abb. 105 ein Brillenglas nur dann keine Änderung der Netzhautbildgröße hervorbringt, wenn sein hinterer Hauptpunkt H'_1 mit dem Augenbrennpunkt **F** des nicht akkommodierenden Auges zusammenfällt. Das würde unter Berücksichtigung der in Ziff. 46 angegebenen Entfernung zwischen Hornhautscheitel und Augenhauptpunkt besagen, daß der augennahe Scheitel des Brillenglases etwa $15^1/_2$ mm vor dem Hornhautscheitel stehen solle. Bei den neuzeitigen Brillengläsern wird dieser Betrag aus später zu besprechenden Gründen nicht erreicht; vielmehr schreibt man meistens einen Abstand von 12 mm zwischen diesen beiden Scheiteln vor. Man führt also einen etwas zu kleinen δ-Wert ein und kommt damit bei zerstreuenden Brillengläsern auf ein etwas vergrößertes, bei sammelnden auf ein etwas verkleinertes Netzhautbild.

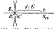


Abb. 105. Die Normalstellung des Brillenglases und die Lage des vorderen Hauptpunktes H_{12} der Verbindung.

Mit leichter Mühe kann man, immer ferne Sehdinge voraussetzend, einen Ausdruck für diese **Vergrößerung** (besser Maßstabsänderung) des Netzhautbildes durch die Brille im Vergleich zu der Größe im rechtsichtigen Auge bilden, wenn man wie in Abb. 106 die neue Größe des Glasabstandes vom vorderen Augenbrennpunkt δ_f einführt

$$\mathsf{F}H'_1 = \mathsf{FH} + \mathsf{H}H'_1$$
$$\delta_f = f'_{11} - \delta; \tag{3}$$



Abb. 106 Die Beziehung des Brillenglases auf den vordern Augenbrennpunkt **F**.

alsdann wird leicht aus dem Verhältnis der beiden Netzhautbilder, die ja den Luftwerten der Brennweiten entsprechen

$$\frac{f'_{12}}{f'_{11}} = \frac{D_{11}}{D_{12}} = \frac{D_{11}}{D_{11} + D_1 - \delta D_1 D_{11}} = \frac{1}{1 + D_1(f'_{11} - \delta)} = \frac{1}{1 + \delta_f D'_1}. \tag{4}$$

Noch andere ähnliche Ausdrücke finden sich in den einschlägigen Arbeiten aus der Augenheilkunde, doch würde uns deren Ableitung hier zu weit führen. Schon aus (4) läßt sich die obige Aussage über ein zu kleines δ, wo also $\delta_f > 0$ gilt, durchaus rechtfertigen. Auf diesen Ausdruck kommt man auch bei der

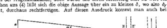


Abb. 107. Die Bestimmung des Brennpunktswinkels ω_f zur Ermittlung der absoluten Sehschärfe S

Bestimmung der Sehschärfe, und man kann an dieser Stelle kurz auf diese Frage eingehen. Die Sehschärfe zu bestimmen, kann man aus zwei Gründen bestrebt sein. Man mag einmal wie in Abb. 107 zwei verschiedene Augen auf ihre Leistungsfähigkeit vergleichen wollen; für diesen Winkel wählt man die Spitze im vorderen Augenbrennpunkt **F**, dann verlaufen die Hauptstrahlen des Gaussischen Raumes im Glaskörper achsenparallel, unabhängig von der Länge der Augenachse. Das ist die von F. C. Donders eingeführte absolute Sehschärfe S.

Wünscht man aber die Leistung eines und desselben Auges bei verschiedenen Akkommodationszuständen zu erforschen, so legt man den Scheitel des Sehwinkels in den vorderen Augenhauptpunkt H, der ja bei der Akkommodationsanspannung genügend genau an der gleichen Stelle bleibt. Man bekommt nach der Abb. 108 die 1909 von A. GULLSTRAND eingeführte natürliche Sehschärfe S_n.



Abb. 108. Die Bestimmung des Hauptpunktswinkels ω_h zur Ermittlung der natürlichen Sehschärfe S_n.

Verständlicherweise nennt man die Sehschärfe um so größer, je kleiner der Gegenstand ist, der von dem Auge in bestimmter Entfernung noch unterschieden werden kann, läßt also die Sehschärfe dem Kehrwert des Winkels entsprechen.

Für die Brille hat dann wieder A. GULLSTRAND die relative Sehschärfe S_r in der Weise eingeführt, daß er die Spitze des sie bestimmenden dingseitigen Winkels in den vorderen Hauptpunkt H_1 des vorgeschalteten Brillenglases legte.

Alle diese Bestimmungen gingen von Haupt- und Brennpunkten, also inneren Bezugspunkten, aus und gestatten eine sehr bequeme Rechnung, doch haben sie den Übelstand, daß man die Lage der Bezugspunkte im Falle der Anwendung entweder nur ungenau oder nur nach vorausgegangener Untersuchung kennt.

Diesem Verfahren an die Seite zu stellen ist die Einführung der äußeren Bezugspunkte, nämlich des inneren Brillenscheitels S_1' und des Hornhautscheitels S oder, was fast damit übereinstimmt, des vorderen Augenhauptpunktes H; da man für SH nach dem Vorhergegangenen den Durchschnittswert von 1,3 mm ansetzt. Man sehe dafür Abb. 109 und 110, wo zu setzen ist $\partial = S_1'\mathrm{H}$.

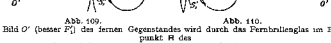


Abb. 109. Abb. 110.

Das Bild O' (besser F_1') des fernen Gegenstandes wird durch das Fernbrillenglas im Fernpunkt R des kurzsichtigen / übersichtigen Auges entworfen.

Alsdann gilt bei einem Fernbrillenglase (korrigierenden Brillenglase), für das bei entspannter Akkommodation der Fernpunkt R des zu unterstützenden Auges zusammenfällt mit dem hinteren Brennpunkt F_1' des Fernbrillenglases, die selbstverständliche Gleichung

$$\mathrm{HR} + F_1'S_1' + S_1'\mathrm{H} = 0.$$

$$a - s_1' + \partial = 0; \qquad a = s_1' - \partial. \tag{5}$$

Nennt man $1/a = A$ den Brechungsfehler des Auges und $1/s_1' = A_\infty$ den Scheitelbrechwert des Brillenglases, so gilt nach einer einfachen Umschreibung von (5)

$$\frac{1}{A_\infty} = \frac{1}{A} + \partial; \qquad A_\infty = \frac{A}{1 + \partial A}, \tag{6}$$

und man erkennt, wie man bei vorliegendem Brechungsfehler A zu verschiedenen ∂-Werten verschiedene Scheitelbrechwerte A_∞ ermitteln kann (Umrechenformel).

Dabei ist aber ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß ∂ — der Abstand vom inneren Brillenscheitel bis zum vorderen Augenhauptpunkt H — mit δ nur bei unendlich dünnen Brillengläsern zusammenfallen kann. Wenn es demnach bei zerstreuenden Gläsern denkbar ist, diese beiden Größen einander gleichzusetzen, so wird man das bei den sammelnden Gläsern und namentlich bei den noch kurz zu erwähnenden Fernrohrbrillen nicht tun dürfen und im allgemeinen gut tun, die Größen δ und ∂ auseinanderzuhalten. Man benutzt den Scheitelbrechwert A_∞ heute bei der Ausübung der Brillenanpassung ganz allgemein für die Abstufung der Linsenwirkung nach Dioptrien (1 dptr = 1/*m*); er eignet sich darum zu diesem Zweck, weil es sehr bequem ist, gleichbezifferte Linsen bei demselben ∂-Wert (meist ist $\partial = 13{,}3$ mm) in aller Strenge gegeneinander austauschen zu können, auch wenn sie, wie eben die bald zu erwähnenden Fernrohrbrillen, im Vergleich mit dünnen Brillengläsern eine ganz verschiedene Anlage haben.

Und in der Tat lassen sich auf diese Weise Brillengläser von ganz verschiedener Brennweite f_1' und daher — unter der festgehaltenen Bedingung eines gleichen ∂-Wertes — von ganz verschiedenem δ-Wert, mithin verschiedener Vergrößerung des Netzhautbildes, miteinander austauschen.

Auf zwei Sonderfälle der Anwendung von (5) sei noch besonders hingewiesen

72. Die Brillengläser mit großem Abstande. Was die Brillengläser mit besonders großem ∂-Wert angeht, so hat man namentlich für linsenlose Augen nicht selten die Verwendung schwacher Sammellinsen vorgeschlagen, die in einer merklichen Entfernung (10 bis 20 cm) dem Auge vorzuhalten seien. Sie liefern einem solchen, meist ziemlich stark übersichtigen, Auge ein merklich vergrößertes, aufrecht erscheinendes Bild, das bei der Umschau wohl verwertet werden kann. Hier sei bemerkt, daß solche Vorkehrungen mit noch wesentlich längeren ∂-Werten vor der Erfindung der Fernrohre eben zur Verdeutlichung entfernter Sehdinge in großem Umfange im Gebrauch gewesen sein müssen. Sie sind uns schon 1585 aus England mit der Bezeichnung perspective glasses bekannt und treten bald danach auch in Italien und Deutschland auf, bis sie nach 1608 infolge der Entdeckung des holländischen Fernrohrs durch J. LIPPERHEY an Ansehen verloren.

73. Die Fernrohrbrillen. Die zweite Möglichkeit wird durch die Fernrohrbrillen verkörpert, die ebenfalls den Zweck haben, ein aufrechtes, vergrößertes Bild darzubieten. Die dafür nötige Verminderung der Brechkraft und die Verschiebung der Brillenhauptpunkte bei einer solchen Brillenanlage wird durch die alterprobte Verbindung zwischen einem schwächeren Sammelglied und einem stärkeren Zerstreuungsglied erreicht. Sie sind so zueinander abgestimmt, daß sich außerdem der vorgeschriebene Scheitelbrechwert ergibt. Die nebenstehende Zeichnung gibt die Grundanlage einer besonders einfachen, für stark kurzsichtige Augen bestimmten Fernrohrbrille wieder, wobei die verschiedenen hauptsächlichsten Werte erkennen lassen werden, daß die inneren Bezugspunkte



Abb. 111. Achsenschnitt durch eine Fernrohrbrille mit Hervorhebung der wichtigsten Achsenpunkte. In dem zugehörigen Beispiel gilt:
$1/S'F' = A_\infty = -18$ dptr, $1/HF' = A = -14{,}64$ dptr. $1/H'F' = D_{12} = -11{,}42$ dptr.

sehr eigenartig gelagert sind; hinsichtlich der äußeren Bezugspunkte ist nichts Besonderes zu bemerken, und der richtigen Bezifferung des Scheitelbrechwertes steht nichts entgegen.

74. Die Brillenabstufung. Einige wenige Worte sollen auch der alten Abstufung nach der Brennweite gewidmet sein, obwohl sich dabei gewisse Schwierigkeiten einstellten, die in einer viel zu weit getriebenen Annahme wurzelten, man hätte es stets mit dünnen Linsen zu tun.

Bei der alten Annahme gab die Zollzahl der Brennweite die Nummer der Brille, also bei rheinländischen Zollen von 26,15 mm Länge bestand, da man die Brennweite gleich dem Halbmesser der bei gleichseitigen Gläsern verwandten Schleifschale setzte

$$\frac{2(n-1)}{r_s} = \frac{2(n-1)}{M_z \cdot 26{,}15\ \text{mm}} = \frac{1}{f_1'}.$$

Bei der späteren Einführung der Dioptrie setzte man

$$\frac{1}{f_1'} = M_{\text{dptr}} \cdot \text{dptr},$$

also für

$$n = 1{,}523,$$

$$\frac{2 \cdot 0{,}523}{M_z \cdot 0{,}02615\ \text{m}} = M_{\text{dptr}} \cdot \text{dptr},$$

$$\frac{1{,}046}{0{,}02615} = 40{,}0 = M_{\text{dptr}} \cdot M_z.$$

Man erhält also die Beziehung, daß man die Maßzahl nach der alten Zollteilung nur in 40 zu dividieren hat, um die Dioptrienteilung zu erhalten.

Die auf Vorarbeiten von Burow, Nagel und Monoyer zurückgehende Dioptrienteilung wurde von den Augenärzten Deutschlands 1875 (Unterteilung mindestens der schwächeren Nummern nach $^1/_4$ dptr), von den Brillenfabriken und Ladenoptikern aber erst merklich später angenommen.

75. Die Brille und die Akkommodationsleistung. Kurz erwähnt sei ferner noch der Einfluß der Brille auf die Akkommodationsleistung des Brillenträgers.

Bildet man durch ein Brillenglas den Fern- und den Nahpunkt des Trägers (**R**, **P**) in rückwärtiger Lichtrichtung in den Dingraum ab, so kommt man auf den scheinbaren Fernpunkt $\mathfrak{R}$ und den scheinbaren Nahpunkt $\mathfrak{P}$. Bezieht man diese, zunächst für das Brillenglas und den Dingraum bestimmten Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ auf den vorderen Hauptpunkt **H** des Brillenträgers, so kann man, man sehe Abb. 112, mit den Strecken

$$\mathfrak{r} = \mathbf{H}\mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = \mathbf{H}\mathfrak{P}$$

den äußeren Akkommodationserfolg $\mathfrak{A}_k = 1/\mathfrak{r} - 1/\mathfrak{p}$ des Brillenträgers bestimmen.

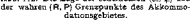


Abb. 112. Die Lage der scheinbaren ($\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$) und der wahren (**R**, **P**) Grenzpunkte des Akkommodationsgebietes.

Eine ziemlich umständliche, wenn auch nicht schwierige, Rechnung zeigt, daß

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{K} A_k$$

ist, wo für dünne Fernbrillengläser

$$1/\mathfrak{K} = (1 + \delta A)^2 - \delta^2 A A_k$$

gilt. Bei der weiteren Verfolgung dieser Überlegung läßt sich leicht einsehen, daß die dünnen Sammelgläser den äußeren Akkommodationserfolg verringern, dünne Zerstreuungsgläser ihn aber, gelegentlich sehr merklich, erhöhen.

76. Die astigmatischen Brillen. Noch eine andere wichtige Gruppe von Brillengläsern muß hier besprochen werden, wo es sich nur um das ruhende Auge handelt, nämlich die astigmatischen Gläser zur Hebung des Augenastigmatismus. Es kommen nämlich durchaus nicht selten Augen vor, die ein eintretendes spitzes Strahlenbündel durch die Brechung auch längs der Achse zu einem zweifach symmetrischen machen.

Man ist früh von dem Gedanken ausgegangen, für solche Fälle Abb. 113 zwei gekreuzte Planzylindergläser zu verwenden, deren jedes den Brechungsfehler des zugehörigen Augenhauptschnittes fast ganz ohne Rücksicht auf den anderen Hauptschnitt heben sollte. Doch hat schon beim ersten Auftreten dieses Gedankens die Erleichterung der Herstellung soviel Berücksichtigung gefunden, daß man eine sphäro-zylindrische Form vorschlug. Genaueres über die späteren Abänderungen wird man zweckmäßig erst in dem zweiten Abschnitt bringen, so über die Brille und das bewegte Auge gehandelt werden wird. An dieser Stelle sei nur noch darauf hingewiesen, daß dem zu unterstützenden Auge die Lage der Hauptschnitte (man sagt häufig der Zylinderachsen) festzustellen ist, da diese die Richtung der abbildbaren Linien bestimmen. Der Begriff dieser Linien findet auf S. 427 bei den Abbildungsfehlern des photographischen Objektivs auseinandergesetzt.



Abb. 113. Eine der Anschaulichkeit halber überhöhte Darstellung eines zweifach symmetrischen astigmatischen Strahlenbündels. Nur in den beiden Brennlinien — der wagrechten am Schnittpunkt des senkrechten Büschels und der senkrechten am Schnittpunkt des wagrechten Büschels — findet eine Art von Strahlenvereinigung statt. Zwischen diesen beiden Brennlinien zeigt die Abbildung den Kreis kleinster Verwirrung.

Hier sei nur bemerkt, daß die erste Anwendung von Zylinderflächen zur Hebung des Augenastigmatismus von dem englischen Astronomen G. B. Airy 1825 vorgetragen und 1827 veröffentlicht wurde, während man vorher in den (seltenen?) Fällen, wo man behelfsmäßig den Augenastigmatismus fortschaffen wollte, zur Schiefstellung des Brillenglases gegen die Gesichtslinie, also zur Herbeiführung des entgegengesetzten Betrages von Astigmatismus schiefer Bündel gegriffen hatte, was nach der Angabe des Londoner Optikers W. Cary schon vor dem Spätherbst des Jahres 1800 einigermaßen üblich gewesen war.

b) Das Brillenglas in Verbindung mit dem bewegten Auge.

Verfolgt man die leider sehr unvollständig überlieferte Brillengeschichte, so genau es heute noch möglich ist, so findet man in verhältnismäßig früher Zeit — sicherlich schon im Beginn des 17. Jahrhunderts — an den Sitzen der Brillenerzeugung die Kenntnis verbreitet, daß gewisse Formen von Brillengläsern, beispielsweise eben-erhabene Formen, mit der Planfläche dem Auge zugekehrt, bessere Dienste leisteten als die gleichseitig-erhabenen. Etwa 100 Jahre danach — bei J. G. Leutmann 1719 — finden wir den Meniskus besonders in dieser Hinsicht bevorzugt, und seit 1804 hat sich der Londoner Arzt W. H. Wollaston mit Erfolg um die Begründung dieser Tatsache bemüht.

77. Die punktmäßig abbildenden Brillen bei achsensymmetrischem Auge. Jedem, der die obige Behandlung der Leistungsweise des Menschenauges in sich aufgenommen hat, wird es verständlich sein, daß hier die ersten Anzeichen

zu finden sind, das Brillenglas dem blickenden Auge anzupassen. In der ersten Zeit war noch nicht klar geworden, welcher Wert auf den Ort des Augendrehpunktes zu legen war, und der schöne Hinweis, den Kepler darauf schon 1611 gab, blieb allgemein unbeachtet, wie ja von dort aus bis zu einer wirklichen Fehlertheorie des Brillenglases vor dem blickenden Auge noch ein weiter Weg war.

Der erste, der die Bedeutung und das Wesen der hier vorliegenden Aufgabe deutlich erkannte, war L. J. Schleiermacher 1842, aber ein merkwürdiges Mißgeschick hinderte diesen sehr befähigten Theoretiker, auf seine Zeitgenossen den Einfluß zu gewinnen, der ihm in seinem Fach unzweifelhaft gebührt hätte.

78. Die punktmäßig abbildenden Brillengläser für achsensymmetrische Augen. So blieb es denn bei der Behandlung der Brille bei einigen wenigen, fast stets von Augenärzten ausgehenden Anregungen ohne irgend weitere Bedeutung, bis der in Paris wirkende Augenarzt Franz Ostwalt 1898 die vorliegende Aufgabe merklich weiter förderte. Er zeigte auf dem mühsamen Wege trigonometrischer, weiter und weiter geführter Versuchsrechnungen mit schiefen Bündeln, daß es im allgemeinen zwei Glasformen gäbe, für die der Astigmatismus schiefer Bündel auch bei endlicher Blickschiefe verschwände. Obwohl er noch einen Fehler im Ansatz gemacht hatte — er hatte den scheinbaren Drehpunkt statt des wahren in einer festen Entfernung vom Brillenglase angenommen — muß man seinen Eifer und seinen Arbeitsernst anerkennen, und es war nur noch eine Frage der Zeit, wann die Aufgabe richtig gestellt und mindestens in den einfacheren Fällen gelöst werden würde.

Das geschah schon im nächsten Jahre durch M. Tscherning, der in einer Mitteilung an den internationalen Ophthalmologen-Kongreß zu Utrecht nicht allein die Aufgabe von der fehlerhaften Annahme Ostwalts befreite, sondern für dünn anzusehende achsensymmetrische Brillen auch eine brauchbare Lösung angab. Er bestimmte nämlich, wenn man sich auf die Seidelsche Theorie der Fehler dritter Ordnung bezieht, den Koeffizienten des zum Astigmatismus schiefer Bündel gehörenden Gliedes und wählte die Krümmung der ersten Brillenfläche so, daß dieser Koeffizient verschwand. Das bedeutete ohne jede Frage für jene Zeit einen wahren Fortschritt, und der Verfasser möchte diese Leistung um so deutlicher herausheben, als er selber einige Jahre später auf diesem Gebiete gearbeitet hat. Dabei muß unter allen Umständen jeder Anschein vermieden werden, als wolle er die früheren Bearbeiter dieses Gebietes und ihre Leistungen irgendwie hinabsetzen.

Ich wende mich nunmehr zu einer Darstellung der Theorie allein und bemerke, auf den Anfang dieses Abschnittes zurückweisend, daß man bei der Anlage eines brauchbaren Brillenglases von dem bewegten Auge auszugehen hat. Der



Abb. 114. Das Bündel der Blicklinien hinter dem das blickende Auge unterstützenden Brillenglase.



Abb. 115. Die mit dem Augendrehpunkt zusammenfallende ideale Blende als Hauptstrahlenkreuzungspunkt für die Berechnung.

Hauptstrahlenkreuzungspunkt Z' auf der Augenseite muß dann nach Abb. 114 und 115 in solcher Entfernung von der letzten Brillenfläche angenommen

werden, daß man beim Gebrauch den Augendrehpunkt des durch die Brille unterstützten Auges an diesen Ort bringen kann.

Es stände grundsätzlich nichts im Wege, den Abstand so groß anzunehmen, daß der innere Brillenscheitel mit dem durchschnittlichen Orte von **F** zusammenfiele (s. Ziff. 71), aber das führt auf Abstände von 27 mm und mehr zwischen Augendrehpunkt und innerem Brillenscheitel. Die Folge davon ist einmal ein größerer Durchmesser und ein größeres Gewicht des Brillenglases, verglichen mit einem näher herangerückten; ferner aber treten ungünstigere Verhältnisse für die Hebung des Astigmatismus schiefer Bündel ein. Dies letzte ist ganz natürlich, da auch im allgemeinen die Hebung der Fehler schiefer Bündel unter sonst gleichen Umständen um so schwieriger wird, je größer der vorgeschriebene Abstand des Hauptstrahlenkreuzungspunktes ist. Die näheren Umstände erkennt man verständlicherweise am klarsten bei Betrachtung des TSCHERNINGschen Koeffizienten.

79. Die Möglichkeit punktmäßig abbildender Brillengläser. Beachtet man die kurzen Bemerkungen, die bei der Besprechung des längs der Achse astigmatischen Auges Platz gefunden hatten, so wird die große Beengung der Abbildungsmöglichkeiten klar, die aus dem Vorhandensein des Astigmatismus schiefer Bündel folgt. A. GULLSTRAND ist wohl der erste gewesen, der diese störenden Erscheinungen in glücklicher Weise beschrieben hat und (s. Ziff. 92) hervorhob, daß solche Linsen bestenfalls nur Linien (nämlich die a b b i l d b a r e n

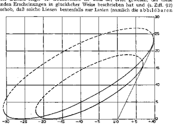


Abb. 116. Die TSCHERNINGschen Ellipsen für die Drehpunktsabstände $\mathfrak{b}' = 28$ mm (die kleinere) und $\mathfrak{b}' = 20$ mm (die größere Ellipse). Die WOLLASTONschen Züge sind gestrichelt, die OSTWALTschen ausgezogen.

Linien) in Linien, nie aber Punkte in Punkte abbilden könnten. Er forderte die Aufhebung des Astigmatismus schiefer Bündel in erster Linie darum, weil nur so derartige Linsen zu p u n k t m ä ß i g a b b i l d e n d e n würden.

Aus der Betrachtung des TSCHERNINGschen Ausdruckes erkennt man verständlicherweise am sichersten den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Größen. Da die Brechkraft D_2 des Brillenglases durch den Brechungsfehler

A des Auges gegeben ist und der Abstand $S_1' Z'$ für die ganze Reihe von Brillengläsern ein für allemal bestimmt wird, so bleibt, da für die Brillengläser des Handels fast immer Glas mit der Brechzahl $n = 1{,}523$ verwandt wird, als Veränderliche nur die Brechkraft D' der Vorderfläche des Brillenglases übrig. Für genügend dünne Gläser — δ_1 ang. $= 0$ — gilt verständlicherweise

$$D' + D'' = D_1,$$

so daß D'', die Brechkraft der Hinterfläche des Brillenglases, nicht mehr frei ist. Den Einfluß des Abstandes $\xi' = 1/Z' = S_1' Z'$ auf die Möglichkeit der Herstellung punktmäßig abbildender Brillengläser erkennt man bequem aus dem vorhergehenden Schaubilde Abb. 116; darin sind als Abszissen die D_1-Werte und als Ordinaten die D'-Werte gewählt, und die nahe der Achsenrichtung punktmäßig abbildenden Brillengläser werden durch eine Tscherningsche Ellipse hervorgehoben, die einem bestimmten D_1-Wert in der Regel zwei D'-Werte zuordnet. Auf dem vorhergehenden Schaubilde sind nun für $\xi' = 28$ mm und $\xi' = 20$ mm die zugehörigen Tscherningschen Ellipsen gezeichnet, und man erkennt leicht den Einfluß einer Verkleinerung von ξ': Das Gebiet der D_1-Werte, denen überhaupt reelle D'-Werte durch die Tscherningsche Ellipse zugeordnet werden, nimmt mit wachsenden ξ'-Werten sehr rasch an Ausdehnung ab. Man kann verständlicherweise auch sagen, daß sich die Größe der Hauptachsen für die Tscherningschen Ellipsen mit wachsendem ξ' schnell vermindert.

Da man nun, wie sich sofort zeigen wird, darauf aus sein muß, den Hauptachsen der Tscherningschen Ellipsen möglichst große Werte zu verleihen, so gibt man eben $\xi' = S_1' Z'$ ohne Rücksicht auf die Größe des für den Gaussischen Raum geltenden Netzhautbildes einen möglichst kleinen Wert. Dabei richtet man sich nur auf einen solchen Abstand $S_1' Z'$ ein, daß die Wimperenden die augennahe Glasfläche nicht beschmutzen, und das führt auf $\xi' = S' Z' = 25$ mm oder $Z' = 40$ dptr.

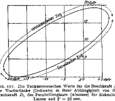


Abb. 117. Die Tscherningschen Werte für die Brechkraft D' der Vorderfläche (Ordinate) in ihrer Abhängigkeit von der Brechkraft D_1 des Fernbrillenglases (Abszisse) für dickenlose Linsen und $\xi' = 28$ mm.

Denkt man sich in Abb. 117 diese Tscherningsche Ellipse für einen bestimmten Drehpunktsabstand wirklich gezogen, so erkennt man, daß, wie schon bemerkt, zu jeder Linsenbrechkraft D_1, die überhaupt eine reelle Lösung dieser Aufgabe zuläßt, immer zwei Vorderkrümmungen D_I', D_{II}' gehören, eine stärkere und eine schwächere. Die stärkeren Krümmungen bilden den Wollastonschen, die schwächeren den Ostwaltschen Zug, und diese beiden Züge gehen ineinander über an den Stellen, wo die beiden Wurzeln des gleich Null gesetzten Tscherningschen Ausdrucks einander gleich werden. Wenn man bei dem Schaubilde bleiben will, so kann man die Übergangsstellen von dem einen Zuge in den anderen auch durch

ihre Eigenschaft kennzeichnen, daß die Ellipsentangenten an diesen Stellen der D'-Achse parallel verlaufen. Drückt man die bisher gewonnene Kenntnis mehr in der optischen Fachsprache aus, so kann man sagen, daß im allgemeinen zu jeder Brechkraft D_1 eines Brillenglases zwei punktmäßig abbildende Glasformen gehören. Die stärker durchgebogene bezeichnet man als die Wollastonsche, die schwächer durchgebogene als die Ostwaltsche Form. An den beiden Grenzstellen, außerhalb denen es keine punktmäßig abbildenden Gläser mehr gibt, fallen die beiden Formen zusammen. Hält man an der Brechkraft von $n = 1{,}523$ und an $\mathfrak{Z}' = 40$ dptr fest, so sind die Grenzen für D_1, innerhalb derer punktmäßig abbildende Brillengläser möglich sind, gegeben durch

$$-25 \text{ dptr} \leqq D_1 \leqq 7^1/_2 \text{ dptr}.$$

Im allgemeinen sind alle diese Formen Menisken mit sammelnder Vorderfläche, doch gibt es unter den stark zerstreuenden Fernbrillengläsern auch eines, das strenge eine plane Vorderfläche hat, während verständlicherweise die Nachbarformen nur ungemein kleine Sammelwirkungen haben.

80. Die Fehler der Brillengläser in einem weiteren Blickfelde. War bisher an dem engen Seidelschen Gebiet festgehalten worden, so zeigt eine Durchrechnung mit endlichen Blickschiefen w' vom Augendrehpunkt Z' aus und eine Feststellung der astigmatischen Fehler, daß die mittels der algebraischen Vorrechnung bestimmten Formen auch für endliche Hauptstrahlneigungen im wesentlichen brauchbar sind.

Man kann das am einfachsten damit beschreiben, daß man sagt, bei diesen einfachen, möglichst dünnen, beiderseits von Kugelflächen begrenzten Brillengläsern sind die Zwischen- oder Zonenfehler bemerkenswert klein: hat man einmal für eine endliche Schiefe $\bar{w}'$ den Astigmatismus schiefer Bündel gehoben, so tritt er auch bei den Zwischenschiefen nicht auf. Das gilt schon für die Ostwaltschen Formen, in besonders hohem Maße aber für die Wollastonschen, wo man eine Hebung des Astigmatismus schiefer Bündel von bemerkenswerter Vollkommenheit auch bei Neigungsschiefen erhält, die von den Augendrehungen nicht mehr erreicht werden können, wie sie dem Muskelwerk des Auges hervorzubringen möglich sind.

Hier sei gleichsam nebenbei bemerkt, daß für die an die Brillenträger abzusetzenden punktmäßig abbildenden Brillengläser so gut wie ausschließlich die Ostwaltschen Formen in Betracht kommen. Ihre wesentlich geringere Durchbiegung macht sie weniger auffällig, und da die Brillenkäufer ihre Augengläser mindestens ebensosehr zum Ansehen wie zum Durchsehen tragen, so würde mit den Wollastonschen Formen auch dann kein Absatz erzielt werden können, wenn sie noch viel größere Vorzüge hätten, als das tatsächlich der Fall ist.

Ist auf diese Weise die Punktmäßigkeit der Abbildung in einem großen Blickwinkel erreicht, so hat man mit dem Brillenglase der soeben beschriebenen besonders einfachen Anlage auch alles geleistet, was überhaupt möglich ist, denn die beiden hauptsächlichsten Bestimmungsstücke, die Krümmungen der beiden Grenzflächen, sind ja durch die beiden Forderungen bestimmter Brennweite und punktmäßiger Abbildung für Z' als Hauptstrahlenkreuzungspunkt festgelegt. Alle übrigen Eigenschaften des punktmäßig abbildenden Brillenglases muß man eben hinnehmen, da ja bei dieser Anlage zu ihrer Beeinflussung und Abänderung keine Mittel mehr verfügbar sind.

Solcher Eigenschaften sollen nun zwei hier besonders behandelt werden.

Die Bildfeldkrümmung punktmäßig abbildender Brillen. Verständlicherweise kann man die Form der Brennfläche bei punktmäßig abbildenden Brillen untersuchen, und man weiß ja nach dem Coddington-Petzvalschen

Satz, daß in der Nachbarschaft des Brennpunktes F_1' die Krümmung $1/R$ gegeben ist (s. auch Ziff. 93) durch den Ausdruck

$$-1/R = 1/n f_1'.$$

Da nun auch für die Brennfläche die Zwischenfehler nur verschwindend sind, so kann man sagen, daß bei einer punktmäßig abbildenden Fernbrille die Brennfläche auf einer Kugelkappe liegt, die der Linse ihre Hohlung zukehrt und einen verhältnismäßig großen Halbmesser hat. Die Folge davon ist, daß im allgemeinen (s. auch Abb. 118) die Bildkrümmung etwas zu schwach ist, als daß die Brennfläche mit der Fernpunktskugel (s. S. 361) zusammenfallen könnte. Diese Anordnung findet sich nur bei besonders starken Zerstreuungslinsen, etwa $D_1 = -17$ dptr.

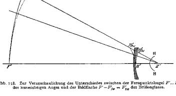


Abb. 118. Zur Veranschaulichung des Unterschiedes zwischen der Fernpunktskugel $F' \ldots F'$ des kurzsichtigen Auges und der Bildfläche $F' - F_{fw}' = F_{tw}'$ des Brillenglases.

Mit einem solchen Fernbrillenglas ausgerüstet, würde der Träger allerdings die unendlich ferne Ebene bei jeder Blickrichtung ohne Änderung seines Akkommodationszustandes deutlich sehen. Leider sind Kurzsichtige solchen Grades ausnahmslos schwachsichtig, so daß sie von der Gunst der Verhältnisse, wie sie für sie vorhanden ist, keinen rechten Nutzen ziehen können.

Fehlsichtige von nicht so starker Kurzsichtigkeit müssen für seitliche Teile der Brennfläche den Akkommodationszustand ändern, und zwar wird bei Kurzsichtigen für die Seitenteile eine etwas geringere, bei Übersichtigen eine etwas stärkere Anspannung der Akkommodation verlangt. In dem letztgenannten Falle macht die Anspannung in der Regel keine Schwierigkeit weiter, zumal da im Gebiete der hier behandelten punktmäßig abbildenden Gläser eine so geringe Betätigung der Akkommodation verlangt wird, daß sie selbst Übersichtige höheren Alters ohne Beschwerde leisten können.

Bei Kurzsichtigen kann man verständlicherweise auf keine Erschlaffung über den Zustand für die Fernpunktskugel hinaus rechnen, und daher wird man bei Berücksichtigung der Seitenausdehnung des Blickfeldes den Kurzsichtigen in der Glasachse ein etwas zu starkes Brillenglas darbieten können, so daß für die Seitenteile nunmehr die gewünschte Erschlaffung der für die Mitte erforderlichen ganz geringen Akkommodationsanspannung ermöglicht wird.

In allen diesen Fällen handelt es sich eben nur um ganz geringe Beträge deren Aufbringung ganz unwillkürlich geschieht, ohne daß etwa die Aufmerksamkeit darauf gelenkt würde.

Die Unschärfe refraktionsrichtiger Brillengläser. Im Gegensatz zu dieser hier in Übereinstimmung mit A. GULLSTRANDS Ansichten an die Spitze gestellten Forderung punktmäßiger Abbildung steht eine namentlich von weiland A. GLEICHEN vertretene Auffassung. Danach solle, da man die Schale des punktmäßigen Bildes im allgemeinen nicht mit der Fernpunktskugel zusammenfallen lassen könne, diese Deckung der Fernpunktskugel mit der Fläche der kleinsten Zerstreuungskreise (s. Ziff. 76) des Brillenglases erreicht werden. Man opfert alsdann — namentlich für seitliche Blickrichtungen — die höchste Deutlichkeit der Wahrnehmung einer auch für das noch akkommodationsfähige Auge als wichtiger hingestellten Ruhe des Akkommodationsspiels bei seitlichem Blick. Man hat solche Anlagen auch als refraktionsrichtige Brillengläser bezeichnet und sie anfänglich unter dem Namen der Sinerralgläser (später Largongläser) in den Handel zu bringen gesucht. Dem Berichtenden scheint gegen diese Anlage besonders die Forderung zu sprechen, daß sie ganz besonders genau — geradezu mit übermäßig peinlicher Sorgfalt — angepaßt werden müssen, wenn man den beabsichtigten Zweck überhaupt erreichen will. Und mit einer solchen Sorgfalt der Anpassung kann man im allgemeinen durchaus nicht rechnen.

81. Die Farbenfehler. Eine weitere Bemerkung verdienen die Farbenfehler, die mit der Unterstützung der blickenden Augen mit einer solchen einfachen Brille unter allen Umständen verbunden sind.

Nach dem Abschnitt über die Farbenwirkungen kann man erwarten, daß die Farbenfehler der einfachen Brille um so großer sein müssen, je kleiner der



Abb. 119. Übersichtsbild der Farbensäume eines seitlich gelegenen schwarzen Gegenstandes SO auf hellem Grunde für eine Zerstreuungslinse / Sammellinse und rote (—) sowie blaue (. . .) Strahlen auf der Dingseite.

ν-Wert des für sie verwandten Werkstoffes (Glas, Quarz usw.) ist. Bei dem für die Brillen meistens verwandten harten Tafelglas ist ν etwa = 60 oder wenig kleiner.

Wendet man sich zu der Erscheinungsform dieses Fehlers, so muß darauf hingewiesen werden, daß nach Ziff. 53 das Auge für die bloße Längsabweichung sehr wenig empfindlich ist, während es einen Farbenfehler in der Hauptstrahlneigung sehr leicht bemerkt.

Nimmt man nach Abb. 119 den für die Wahrnehmung dieses Fehlers günstigen Fall an, daß sich ein seitlicher dunkler Gegenstand etwa vom hellen Himmel ab-

hebe, so kann man das Ergebnis aus der Abbildung ablesen. Für ein zerstreuendes (sammelndes) Brillenglas erscheint ein dunkler, seitlicher Gegenstand auf der der Achse zugewandten mit einem roten (blauen), auf der der Achse abgewandten Seite mit einem blauen (roten) Rande umgeben.

Daß man mit achromatischen Brillengläsern diese Fehler der Farbenverschiedenheit der Hauptstrahlneigung heben und dabei noch etwa den Astigmatismus schiefer Bündel günstig beeinflussen könnte, ist richtig. Doch kommen derartige Brillenformen zu selten vor, als daß sie hier zu besprechen wären. Einzelheiten sind in meinem auf S. 395 angeführten Brillenbuche zu finden. Es scheint aber nicht, daß der durchschnittliche Brillenträger geneigt wäre, mit der unvermeidlichen Gewichtszunahme eines solchen Glases die Farbenfreiheit in den Randteilen des Blickfeldes zu erkaufen.

82. Die Verzeichnung der Brillengläser. Was die Verzeichnung angeht, deren Hebung gelegentlich einzelne Wissenschafter einen besonders hohen Wert für die Gesichtswahrnehmung zugeschrieben haben, so sei gleich hier hervorgehoben, daß man mit den in unserem Falle zu Gebote stehenden Mitteln — einfachen, kuglig begrenzten, möglichst dünnen Linsen mit Hinterblende — die Verzeichnung nicht einmal in erster Annäherung heben kann, geschweige denn für endliche Blickschiefen. Man muß sich eben mit dem Schönheitsfehler abfinden, der bei Kurzsichtigen zu tonnen-, bei Übersichtigen zu kissenförmiger Verzeichnung führt.

83. Bemerkungen zu den Nahgläsern. (Die Vorhänger, Zweistärkengläser.) Gibt man die Beschränkung auf ferne Sehdinge ($A_1 = 0$) auf und setzt etwa $A_1 = -4$ dptr oder $= -3$ dptr, wie das ebenfalls schon M. Tscherning zu früher Zeit getan hatte, so erhält man die Vorrechenformeln für Nahbrillen mit punktmäßiger Abbildung.

Verständlicherweise ergibt sich alsdann aus dem entsprechend erweiterten Tscherningschen Ausdruck eine neue Ellipse, die nach Abb. 120 nicht allein mehr oberhalb der D_1-Achse verläuft. In Worte gefaßt heißt das: bei punktmäßig abbildenden Nahbrillen kommen — für stark zerstreuende Wirkungen mindestens — auch doppelt hohle Formen vor; im übrigen bleibt aber auch hier der durch eine Ellipse darzustellende Zusammenhang zwischen D_1 und D' gewahrt.

Stellte man beide Kurven auf demselben Blatte dar, so würde man sofort erkennen, daß die Wollastonschen Zweige fast zusammenfallen, während die Ostwaltschen Äste sehr merklich auseinanderweichen. Die Ostwaltsche Form ist eben für die Änderung des richtigen Dingabstandes viel empfindlicher als die Wollastonsche, die aber, wie schon oben gesagt, wegen ihrer auffälligen Durchbiegung in allgemeineren Gebrauch nicht eingeführt werden kann.

Es sei gleich hier darauf aufmerksam gemacht, daß Nahgläser punktmäßiger Abbildung mit Fernbrillengläsern zusammenfallen, die einigermaßen refraktionsrichtige Wirkungen im Blickfelde (durch die Übereinstimmung des Feldes der kleinsten Abbildungsflecke mit der Fernpunktskugel des Trägers) ergeben. Die oben geschilderten Linsen Gleichenscher Anlage verlieren also mit der Annäherung der Sehdinge ihre „Refraktionsrichtigkeit".

Von dieser Seite betrachtet, stellen die refraktionsrichtigen Gläser einigermaßen die Verwirklichung einer Forderung dar, die man in England kurz vor Kriegsbeginn für ein Brillenglas stellte, das eine besonders günstige Fehlerverteilung haben sollte. Freilich wurde dort damals die „Refraktionsrichtigkeit" allem Anscheine nach übersehen.

Die Nahbrillen werden namentlich in neuerer Zeit häufig mit den Fernbrillen vereinigt, indem man entweder Vorhänger oder Zweistärkengläser vorsieht.

Unter einem Vorhänger versteht man nach Abb. 121/2 eine Vorsatzlinse halbkreisförmiger oder halbelliptischer Begrenzung, die vor die untere Hälfte des Fernbrillenglases gebracht wird, und dieses für die Arbeitszeit in ein Nahglas verwandelt, das ja stets mit geneigter Kopfhaltung und gesenktem Blick benutzt

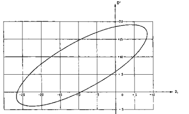


Abb. 120. Der TSCHERNINGsche Zusammenhang der Brechkraft D' der Außenfläche und D_1 des Nahbrillenglases für $b' = 28$ mm und $a_1 = -0{,}33$ m.

wird. Blickt man von der Arbeit auf, so schaut man durch den frei gebliebenen oberen Teil des Fernbrillenglases. Nach Vollendung der Naharbeit kann man den Vorhänger entfernen und die Fernbrille unverändert benutzen.

Den gleichen Zweck bequemer Vereinigung der Fernwirkung in der oberen und der Nahwirkung in der unteren Hälfte des Brillenglases erstreben die Zweistärkengläser (zum ersten Male 1784 von B. FRANKLIN erwähnt). Sie werden



Abb. 121. Vorderansicht



Abb. 122. Blick von oben hinab

für den Vorhänger von Carl Zeiss.

(s. Abb. 123—26) sowohl aus einem einzelnen Glasstück durch Schleifen hergestellt als auch aus zweien, durch Kittung oder Verschmelzung verbundenen. Sie sind in den letzten Jahren viel verbreiteter geworden. Man kann darauf hinweisen, daß sie vielfach so hergestellt werden, daß sie unauffällig wirken, während sie dem Träger einen unangenehmen Bildsprung bei Übergang vom Fern- zum

Nachteil verursachen. Bei den durch Schliff hergestellten Zweistärkengläsern schließt sogar die Erfüllung der einen Forderung die der anderen aus.



Abb. 123. Ein zerstreuendes Zweistärkenglas mit einem Berührungspunkt der beiden Grenzflächen (dort also ohne Bildsprung) aber mit einer endlichen Stufe.

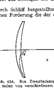
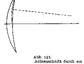


Abb. 124. Ein Zweistärkenglas aus zwei Bestandteilen von verschiedenem Brechungsverhältnis.

84. Die Brillengläser mit einer asphärischen Fläche. Wendet man sich nunmehr zu weiteren achsensymmetrischen Brillenformen, so muß zunächst auf die Unmöglichkeit hingewiesen werden, punktmäßig abbildende, einfache, möglichst dünne, von zwei Kugelflächen begrenzte Brillengläser für Sammelwirkungen herzustellen, die $7^1/_3$ dptr überschreiten (Ziff. 79). Wie oben beim Auge betont wurde, bedarf das durch einen Eingriff seiner Kristallinse beraubte Auge in der Regel einer etwa 11 bis 13 dptr starken Sammellinse, wenn auf seiner Netzhaut deutliche, nicht unbeträchtlich vergrößerte Bilder entworfen werden sollen.



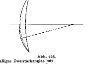


Abb. 125. Abb. 126.
Achsenschnitt durch ein unauffälliges Zweistärkenglas mit kleinem großem
Fernteil.
Beide Formen zeigen einen merklichen Bildsprung.

Die Unmöglichkeit, derartige kuglig begrenzte Starlinsen als punktmäßig abbildende herzustellen, zwang ihre Träger durch Kopfbewegungen die Achse der Starlinse über den zu betrachtenden Gegenstand hinzubewegen, da eben nur die engere Nachbarschaft der Achsenrichtung ohne störenden Astigmatismus schiefer Bündel wiedergegeben wurde.

Wenn nun zwar Versuche angeregt und 1908 auch durchgeführt wurden, durch die Zerlegung der Starlinse in ein Paar hintereinander geschalteter zweckmäßig durchgebogener Menisken eine bessere Strahlenvereinigung herbeizuführen, so führte doch eine solche Zusammenstellung auf eine so empfindliche und dabei auffällige Anlage, daß die Aussichten, sie in einigermaßen großen Mengen ab-

zusetzen, sehr gering waren. Es war daher ein durchaus zweckmäßiger Hinweis, den A. GULLSTRAND im Spätsommer 1908 tat, lieber mit einer der Grenzflächen von der Kugelform abzuweichen und auf die Weise der Abb. 127 zu versuchen, eine genügend starke Sammellinse punktmäßig abbildend zu gestalten.

Die Jenaer Werkstätte, die in Heidelberg schon im gleichen Jahre von einem nicht aussichtslosen Rechenversuch berichten konnte, arbeitete hier auf einem Gebiete, das ihr 1899 der unvergeßliche ERNST ABBE gewiesen hatte, und es war ganz verständlich, daß man 1908 in Jena versuchte, ganz im ABBEschen Sinne mit dieser Abweichung von der Kugelfläche zu gleicher Zeit zwei verschiedene Fehler schiefer Bündel zu beeinflussen. Dazu wählte man den Astigmatismus schiefer Bündel und die Verzeichnung. Es gelang, jenen für ein verhältnismäßig großes Blickfeld zu heben und diese merklich zu verringern, wie das von H. ERGGELET einige Jahre später in einer sehr lesenswerten Arbeit über die Raumauffassung Einseitig-Linsenloser festgestellt wurde. Die optischen Mittel würden wohl gestattet haben, dem Ziele einer Hebung der Verzeichnung noch näher zu kommen, doch mußte man dann eine ziemlich tiefe Durchbiegung einführen. Diese hätte aber eine so auffällige Form bedingt, daß man sie dem Schönheitssinne der Träger nicht zumuten mochte. Aber auch die hinter dem anfänglichen Ziele zurückbleibende Verbesserung genügte, um in einem geeigneten Versuchsfalle eine erfreuliche und unbezweifelbare Erweiterung des Blickfeldes zugleich mit einer größeren Richtigkeit der Wiedergabe zu schaffen.

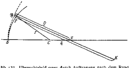


Abb. 127 Übersichtsbild einer durch Auftragung nach dem Rande zu von einer Kugel abweichenden Umdrehungsfläche. 𝔓N ist die Normale der neuen Fläche.

Man entschied sich in Jena, zur Ehrung des hervorragenden Augenforschers, dem man die gleich von Anfang richtige Aufgabenstellung verdankte, die in Jena errechneten Starlinsen als GULLSTRANDsche Katralgläser einzuführen.

Bei der weiteren Durcharbeitung wurde die Wirkung derartig unkugliger Flächen auch an weniger stark sammelnden und an zerstreuenden Fernbrillengläsern versucht; es lassen sich auch ganz bemerkenswerte Ergebnisse herbeiführen, doch ist vorderhand bei den verhältnismäßig großen Kosten und der recht geringen Schulung des durchschnittlichen Brillenträgers keine Möglichkeit vorhanden, derartige Hilfsmittel von gesteigertem innerem Wert auf den Markt zu bringen.

85. Die Fernrohrbrillen. Hatte es sich hier um die Ausdehnung des Gebietes punktmäßig abbildender Brillengläser in das Bereich stärkerer Sammellinsen hinein gehandelt, so verlangten auch die in Ziff. 73 berührten Fernrohrbrillen für schwachsichtige Augen eine Durchbildung für ein endlich ausgedehntes Blickfeld mit dem Hauptstrahlenkreuzungspunkt im Augendrehpunkt. Die an sich nicht besonders verzwickte Aufgabe wurde durch die handgreifliche Notwendigkeit erschwert, das Gewicht dieser aus zwei getrennten Gliedern bestehenden Anlage möglichst niedrig zu halten. Es war daher ausgeschlossen, in das

vordere größere Sammelglied eine Kittfläche zur Farbenhebung hineinzuverlegen; ein solches Mittel konnte, wenn überhaupt, nur in dem augennahen, kleinen und leichten Zerstreuungsgliede Platz finden (Abb. 128).

In der Tat gelang es, neben der störenden Farbenverschiedenheit der Vergrößerung den Astigmatismus schiefer Bündel und die Verzeichnung zu beseitigen, freilich nicht mehr ohne Zwischenfehler, denn die unvergleichlich größeren Einfallswinkel, die bei so einfacher und leichter Anlage unvermeidlich waren, zogen solche Zwischenfehler nach sich. Wollte man diese nicht zu auffallender Größe ansteigen lassen, so mußte man das Blickfeld dementsprechend begrenzen. Die Ergebnisse der ersten Erprobung an einem verständigen und teilnehmenden Kurzsichtigen waren sehr erfreulich, und es wird den Beteiligten ständig ein Grund zu dankbarer Freude sein, einer ganzen Reihe Kriegsverletzter ihr schweres Los ein wenig erleichtert zu haben.



Abb. 128. Fernrohrbrille für Augen von geringer Fehlsichtigkeit in etwa natürlicher Größe.

Sollte später die Teilnahme der Augenärzte und die Anpassungsgewandtheit der Brillenoptiker größer werden, so wird man hoffen können, für eine ziemliche Anzahl von Schwachsichtigen hiermit ein brauchbares Hilfsmittel zur Verfügung zu haben.

Die Brillengläser zweckmäßiger Form für astigmatische Augen.

Von einer besonderen Wichtigkeit erwies sich die Untersuchung der verfügbaren Mittel, auch einem astigmatischen Auge beim Blicken eine möglichst vollkommene Unterstützung zu bieten, d. h. in den beiden Hauptschnitten (Symmetrieebenen) des Brillenglases zwei verschiedene Scheitelbrechwerte (in erster Annäherung zwei verschiedene Brechkräfte) vorzusehen. Es ist verständlich, daß man sich 1909, als man für diese Aufgabe zum ersten Male, und zwar in Jena, rechnete, auf den Fall beschränkte, die Blickbewegungen nur insoweit zu berücksichtigen, als sich die Gesichtslinie in den beiden Symmetrieebenen des astigmatischen Glases bewegte. Diese Annahme kommt, geometrisch gesprochen, selbstverständlich auf die Tatsache hinaus, daß man aus dem ganzen von Z' ausgehenden zweifach ausgedehnten Hauptstrahlenbündel nur jene beiden einfachen Mannigfaltigkeiten von Hauptstrahlen näher untersucht, die von den beiden Symmetrieebenen des astigmatischen Glases aus dem soeben erwähnten kegelförmigen Bündel ausgeschnitten werden (Abb. 129).



Abb. 129. Die Spuren von rechnerisch verfolgten Büscheln in einer zur Brillenglasachse senkrechten Ebene.

Übrigens ist in den 18 inzwischen vergangenen Jahren von anderen Werkstätten gelegentlich zwar reichlicher Widerspruch gegen die Zeisssche Arbeitsrichtung lautgeworden, aber beruhigenderweise haben die Nachrechnenden mindestens die Rechnungsgrundlagen in der soeben geschilderten Beschränkung bestehen lassen.

86. Allgemeine Überlegungen. Die technischen Mittel für die Verwirklichung der Forderung verlangen die Anbringung mindestens einer zweifach symmetrischen Fläche an dem astigmatischen Brillenglase. Als eine solche wählte man seit

G. B. AIRYs grundlegender Arbeit von 1825 eine Zylinderfläche und ging im wesentlichen nach den POULLAINschen Arbeiten um das Ende der 70er Jahre zur Anbringung der allgemeinen Wulstflächen (torischen Flächen) über. Solche Flächen (Abb. 130) kann man sich dadurch entstehend vorstellen, daß man einen Kreisbogen von gegebener (Meridian-) Krümmung M um eine in seiner Ebene aber nicht durch den Kreismittelpunkt verlaufende Achse, die Drehachse, schwenkt. Man erhält dann für den Schnitt senkrecht zur Meridiankurve die Äquatorialkrümmung A. Selbstverständlich kann man es durch geeignete Wahl des Meridian- und des Äquatorialradius dahin bringen, daß eine sphäro-torische Linse, deren eine Fläche kuglig ist und den Radius r haben möge, während die andere eine Wulstfläche ist, in den beiden Symmetrieebenen vorgeschriebene Brennweiten hat. Aus den beigegebenen Zeichnungen kann man eine weitere Einteilung der Wulstflächen in wurst- und tonnenförmige entnehmen, je nachdem der Äquatorialradius r_a größer (Abb. 131) oder kleiner (Abb. 132) ist als der Meridionalradius r_m.

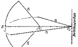


Abb. 130. Die Entstehung einer torischen oder Wulstfläche. Der zum Radius r_2 gehörige Umlaufsbogen ist zum Unterschied von dem Meridianbogen mit r_1 punktiert worden.

Das Rechenverfahren bei der Berechnung einer astigmatischen Linse läßt sich am einfachsten durch ein Beispiel beschreiben, wie es seinerzeit in M. v. ROHRs Brillenbuch[1]) auf Grund einer Arbeit H. BOEGEHOLDs eingehend durchgeführt worden ist. Auf diese Stelle sei verwiesen, wer genauere Kenntnis auf diesem Gebiete zu erwerben wünscht.

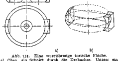


Abb. 131. Eine wurstförmige torische Fläche. a) Oben: ein Schnitt durch die Drehachse. Unten: ein Schnitt senkrecht zur Drehachse. — b) Eine perspektivische Darstellung planotorischer Linsen von sammelnder und zerstreuender Wirkung.

Zu berechnen sei ein astigmatisches Fernbrillenglas mit den beiden Brechkräften M und A, wofür die Ziffernwerte $+4$ und $+8$ dptr angegeben seien; der Astigmatismus beträgt alsdann 4 dptr.

Dann liegen bei einer sphäro-torischen Linse die folgenden 4 Möglichkeiten vor:

I. die Kugelfläche vorn:	1. $M = +4$;	$A = +8$
	2. $M = +8$;	$A = +4$
II. „ „ hinten:	3. $M = +4$;	$A = +8$
	4. $M = +8$;	$A = +4$.

Hat man eine dieser 4 Möglichkeiten gewählt, so kann man noch die Durchbiegung der astigmatischen Linse durch die Wahl der Kugelkrümmung $\varrho = 1/r$

[1]) Man sehe S. 395, Anm. 1 und daselbst auf S. 168—176.

bestimmen. Die beiden Radien der torischen Fläche, r_a und r_m, ergeben sich als dann ganz von selber aus A und M. Die Mitteldicke d kann nicht etwa als eine neue Veränderliche herangezogen werden, da man sie bei Sammellinsen so gering als möglich ansetzt (bei vorgeschriebenem Blickfelde soll sich eine eben genügende Randdicke ergeben), um an Gewicht zu sparen.



Abb. 132. Eine tonnenförmige torische Fläche. a) Oben: ein Schnitt durch die Drehachse Unten: ein Schnitt senkrecht zur Drehachse. — b) Eine perspektivische Darstellung planotorischer Linsen von sammelnder und zerstreuender Wirkung

Aus der auf S. 412 aufgeführten Abb. 129 geht hervor, daß man neben den Rechnungen für die Achse des Brillenglases, die natürlich auf die Werte M und A führen, noch mindestens zwei weitere für den Meridianrand (sie führen auf M^m und A^m) und den Äquatorialrand (sie führen auf M^a und A^a) anstellen muß. Welcher Blickschiefe man die Randstelle entsprechen lassen soll, muß im einzelnen Falle entschieden werden. Aus den Abbildungen wird sich herausstellen, daß man in den Beispielen mit w' bis zu 30° und 35° gegangen ist, je nachdem es sich um zerstreuende oder um sammelnde Brillengläser handelt.

Es sei ferner auch darauf hingewiesen, daß hier zum ersten Male die Aufgabe zu lösen war, eine zweifach symmetrische Anlage für schiefe Büschel durchzurechnen.

Benutzt man wieder die Abb. 129, so würde ein astigmatisches Brillenglas, das wirklich eine punktmäßige Abbildung auf der Netzhaut ermöglichte, auf die Gleichungen führen

$$M^m = M^a = M; \qquad A^m = A^a = A,$$

doch kann man nicht erwarten, mit einer einzigen Veränderlichen (der Durchbiegung $\varrho = 1/r$) vier Gleichungen zugleich zu erfüllen.

Da der Astigmatismus der Randstrahlen gegeben ist durch

$$M^m - A^m \quad \text{und} \quad M^a - A^a,$$

während für die Achse galt $M - A$, so kommt man nach E. WEISS auf die beiden astigmatischen Fehler

$$Y_1 = (M^m - A^m) - (M - A)$$
$$Y_2 = (M^a - A^a) - (M - A).$$

Könnte man nun beide astigmatische Fehler heben, also erreichen, daß sei

$$Y_1 = Y_2 = 0,$$

so ergäben sich die Gleichungen

$$M^m - M = A^m - A$$

und

$$M^a - M = A^a - A,$$

mit andern Worten, an den beiden Randstellen tritt dann kein verschiedener Astigmatismus, sondern nur eine höhere oder geringere Sammelwirkung auf. Liegt eine Abweichung unter der Breite der dem Brillenträger noch eigenen Akkom-

modation, so würde ihm — ähnlich wie in Ziff. 80 — unter An- oder Entspannung der Akkommodation durch eine solche Brille auch am Rande des Blickfeldes ein deutliches Netzhautbild vermittelt werden.

Indessen ist mit einer einzelnen Veränderlichen die Erfullung zweier Gleichungen im allgemeinen nicht zu leisten, und daher begnügt man sich bei der ZEISSischen Rechenanlage mit der Erfullung der Forderung

$$Y_1 = Y_2 = Y.$$

Man wählt unter den verschiedenen Brillenformen, die sich auch unter Berücksichtigung der oben aufgeführten 4 Anlagemöglichkeiten ergeben können, die aus, wo die Beträge Y möglichst klein sind, damit man sich so dem erstrebenswerten Falle $Y_1 = Y_2 = 0$ wenigstens einigermaßen nähere. Solche Formen werden dann Gläser zweckmäßiger Durchbiegung genannt. Die näheren Angaben, die H. BOEGEHOLD zu der Bestimmung solcher gunstigsten Formen gemacht hat, möge man an der oben angegebenen Stelle nachlesen.

87. Die Vorführung der Leistungen alter und verbesserter Brillengläser an Schaubildern. Um diesen rein theoretischen Überlegungen eine größere Anschaulichkeit zu geben, seien zunächst einige Zahlen fur die gunstigste Form bei verschiedenen Brillengläsern immer mit $M - A = 4$ dptr mitgeteilt,

Für $w = 30°$

		$Y_1 = Y_2$
−20 dptr,	−16 dptr:	+0,06 dptr
−18 „	−14 „	−0,01 „
−16 „	−12 „	−0,09 „
−14 „	−10 „	−0,14 „
−12 „	− 8 „	−0,14 „
−10 „	− 6 „	−0,11 „
− 8 „	− 4 „	−0,06 „
− 6 „	− 2 „	0,00 „
− 4 „	− 0 „	−0,02 „
− 2 „	+ 2 „	+0,07 „

Für $w' = 35°$

		$Y_1 = Y_2$
− 2 dptr,	+ 2 dptr	+0,10 dptr
0 „	+ 4 „	+0,17 „
+ 2 „	+ 6 „	+0,25 „
+ 4 „	+ 8 „	+0,40 „
+ 6 „	+10 „	+0,58 „



Abb. 133. Die Symmetrieebenen je eines zerstreuenden und eines sammelnden sphärozylindrischen Glases
−10 dptr −6 dptr +2 dptr +6 dptr
Die Umdrehungsbogen sind punktiert.

Man erkennt aus diesen Zahlenreihen, daß sich große astigmatische Fehler $Y_1 = Y_2 > 0{,}25$ dptr in dem Gebiet einigermaßen stärkerer Sammelwirkungen einstellen. Man ist, um diesen Übelstand zu vermeiden, auch hier genötigt, die nicht astigmatische Grenzfläche des Brillenglases zu einer nicht-sphärischen zu machen, und so namentlich astigmatische Katralgläser auszuführen.

Die zweite Bestrebung, eine größere Anschaulichkeit für die neueren Rechenleistungen herbeizuführen, besteht in der Mitteilung von Schaubildern der verschiedenen Brechkräfte am Rande und in der Mitte für zwei Paare in ihren Achsenwerten gleicher Brillengläser, wo (Abb. 133) das eine Paar sphäro-zylin-

drisch ist, also für die alten Formen steht, während das andere Paar ein solches zweckmäßiger Durchbiegung ist und das Ergebnis der neuen Rechenverfahren veranschaulicht.

Um dabei Größen zu erhalten, die mit dem Scheitelbrechwert längs der Achse streng vergleichbar sind, führt man die Scheitelkugel für die Hauptstrahlen von endlicher Neigung ein. Legt man nämlich durch den inneren Brillenscheitel S' eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Augendrehpunkt, so braucht man nur die schiefen, längs dem bildseitigen Hauptstrahl gemessenen Bildabstande von dieser Scheitelkugel aus zu rechnen; man erhält dann in ihren Kehrwerten die strenge vergleichbaren Werte M^m, M^a, A^m und A^a. Hier sind als Musterbeispiele die Zerstreuungslinsen von -6, -10 dptr und die Sammellinsen von $+6$, $+2$ dptr angenommen worden, wobei — ganz entsprechend der obigen Zahlentafel — die augenseitigen Hauptstrahlneigungen für die ersterwähnte Linsengruppe bis zu 30°, für die zweite bis zu 35° hin berücksichtigt wurden. Für die verbesserten torischen Linsen sind noch in Abb. 136 die Formen immer in den beiden zueinander senkrechten Symmetrieebenen kenntlich zu machen. Und zwar sind die Radien

	in der ersten Symmetrieebene	in der zweiten Symmetrieebene
für *a*	$r_1 = 144.8$	$r_1 = 144.8$
	$r_2 = 38.4$ (mer.)	$r_2 = 54.3$ (rot.)
für *b*	$r_1 = 72.2$ (mer.)	$r_1 = 47.3$ (rot.)
	$r_2 = 97.3$	$r_2 = 97.3$

$$n = 1{,}522$$

anzusetzen.

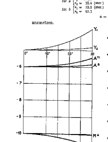


Abb. 134. Darstellung der vier auf die Scheitelkugel (S. 416) bezogenen Kehrwerte M^m, M^a, A^m, A^a, sowie der astigmatischen Fehler Y_1 und Y_2 in ihrer Abhängigkeit vom Blickwinkel $w' \leqq 30°$ für das sphäro-zylindrische Brillenglas -6, -10 dptr.

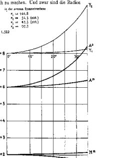


Abb. 135. Darstellung der vier auf die Scheitelkugel (S. 416) bezogenen Kehrwerte M^m, M^a, A^a, A^m, sowie der astigmatischen Fehler Y_1 und Y_2 in ihrer Abhängigkeit vom Blickwinkel $w' \leqq 35°$ für das sphäro-zylindrische Brillenglas $+6$, $+2$ dptr.

Schon die Betrachtung der Schaubilder Abb. 136—138 wird den so erreichten Fortschritt deutlich machen. Auch zahlenmäßig läßt er sich veranschaulichen, und zwar sollen die astigmatischen Fehler nicht allein durch ihren Betrag in Dioptrien, sondern auch in Hundertteilen des längs der Achse vorgeschriebenen Betrages von 4 dptr angegeben werden.

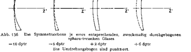


Abb. 136. Die Symmetrieebene je eines entsprechenden, zweckmäßig durchgebogenen sphäro-torischen Glases

−10 dptr −6 dptr +2 dptr +6 dptr

Die Umdrehungsbogen sind punktiert.

Astigmatische Fehler für $w' = 30°$
bei zerstreuenden Linsen (−6, −10 dptr)

	Y_2 dptr	Y_2 %	Y_1 dptr	Y_1 %
von sphäro-zylindrischer Form	1,30	32,5	0,19	4,75
von zweckmäßiger Durchbiegung	−0,11	2,75	−0,11	2,75
für $w' = 35°$ bei sammelnden Linsen (+6, +2 dptr)				
von sphäro-zylindrischer Form	0,27	6,7	2,85	71,25
von zweckmäßiger Durchbiegung	0,4	10,0	0,28	7,0

Man erkennt, daß hier die Fehler genügend eingeschränkt worden sind, um die Bezeichnung Linsen zweckmäßiger Durchbiegung zu rechtfertigen. Ferner sieht man leicht, daß diese beiden Formen auch zu der oben angeführten tabellenmäßigen Zusammenstellung stimmen.

Was die Strahlenvereinigung längs den im Dingraum übrigens windschief zur Achse verlaufenden Hauptstrahlen zwischen den beiden Symmetrieebenen angeht, so beschränkt man sich ganz allgemein auf Versuchsaufnahmen. Dabei bringt man eine kleine Aufnahmekammer hinter dem zu prüfenden Brillenglase so an, daß man sie

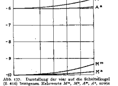


Abb. 137. Darstellung der vier auf die Scheitelkugel (S. 416) bezogenen Kehrwerte M^m, M^s, A^m, A^s, sowie der astigmatischen Fehler Y_1 und Y_2 in ihrer Abhängigkeit vom Blickwinkel $w' \leq 30°$ für das zweckmäßig durchgebogenen sphäro-torische Brillenglas −6, −10 dptr.

um den Ort Z' schwenken kann, der beim gewöhnlichen Gebrauch von dem Drehpunkt des zu unterstützenden Auges eingenommen wird. Natürlich muß die Aufnahmelinse der kleinen Kammer durch ein Zusatzglas in dem Maße astigmatisch gemacht werden, wie es der Astigmatismus $M - A$ längs der Achse des zu prüfenden Brillenglases angibt. Wiederholt man nun bei der Prüfung mit der Aufnahmekammer die Bewegung eines um 30° (35°) zwischen den Symmetrieebenen gedrehten Auges, so kann man jeweils für einen kleinen Bildwinkel (etwa für Leseproben) Aufnahmen mit gesättigtem Licht — etwa dem der grünen Quecksilberlinie — machen und so den Zustand der wirklich erreichten Strahlenvereinigung einwandfrei und ohne Rechnung prüfen. Auch mit dieser Probe läßt sich die Berechtigung der Bezeichnung von Linsen zweckmäßiger Durchbiegung sehr wohl feststellen.

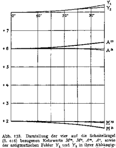


Abb. 138. Darstellung der vier auf die Scheitelkugel (S. 416) bezogenen Kehrwerte M^m, M^s, A^m, A^s, sowie der astigmatischen Fehler Y_1 und Y_2 in ihrer Abhängigkeit vom Blickwinkel $w' \leq 35°$ für das zweckmäßig durchgebogene sphäro-torische Brillenglas $+6$, $+2$ dptr.

Schlußbemerkungen zu den Richtungsänderungen durch Brillengläser. Die zum Ausgleich von Schielstellungen eines der beiden Augen notwendigen prismatischen Brillengläser sollen hier nur erwähnt werden.

Die Änderungen, die Brillengläser an der Perspektive und der Raumerfüllung hervorrufen, können nach Ziff. 63 behandelt werden. Mindestens in erster Annäherung, d. h. solange man die im Gebrauche nicht besonders störende Verzeichnung — tonnenförmig bei zerstreuenden, kissenförmig bei sammelnden Brillengläsern — unbeachtet läßt, kann man sagen, daß zerstreuende Brillengläser (entsprechend 3 auf Abb. 94) den ursprünglichen Tiefenwert steigern, sammelnde (entsprechend 5 auf Abb. 94) ihn vermindern.

Die beidäugige Brille sollte zwar als ältestes stereoskopisches Gerät besprochen werden, doch stört die bei einfachen Brillengläsern stets vorhandene Verzeichnung eine strenge Behandlung: Die Brille und namentlich die astigmatische Brille gehört nicht zu den in Ziff. 69 hervorgehobenen strengen Geräten zu beidäugigem Gebrauch. Auch hier sind Einzelheiten aus dem in S. 395 Anm. 1 angeführten Teile von dem Handbuch der Augenheilkunde zu entnehmen.

E. Das photographische Objektiv.

Von

M. VON ROHR, Jena.

a) Einleitung.

88. Allgemeines zum photographischen Objektiv. In dem photographischen Objektiv oder der Aufnahmelinse liegt für diese Zusammenstellung zum ersten Male ein besonderes Gerät vor, dessen Zweck in der Regel nicht ist, dem Beschauer die aufgenommenen Gegenstände unter größerem Winkel, d. h. mit mehr Einzelheiten vorzuführen, sondern wo in den weitaus meisten Fällen nur die Wiederholung eines bestimmten Eindrucks erreicht werden soll.

Die neue Gruppe von Geräten, deren Hauptvertreter die Aufnahmelinse ist, hat man seit einigen Jahren als die wiederholenden Vorkehrungen zusammengefaßt und stellt sie in dieser Weise den älteren und bekannteren Einrichtungen gegenüber, die eine Vergrößerung bezwecken und zusammen als verdeutlichende Vorkehrungen bezeichnet werden. Es läßt sich gleich hier bemerken, daß die wiederholenden Vorkehrungen, mindestens soweit es sich um einigermaßen durchgearbeitete Anlagen handelt, jüngerer Herkunft sind und nicht weiter als etwa 90 Jahre zurückgehen.

Das photographische Objektiv aber unterscheidet sich noch in einer anderen Weise von den älteren zusammengesetzten Geräten, nämlich dadurch, daß die auf einer chemisch vorbereiteten Platte erzeugte und durch chemische Mittel festgehaltene Aufnahme (das Photogramm) niemals während des optischen Abbildevorgangs selbst betrachtet wird, sondern immer erst später und in einer von der Aufnahmekammer völlig losgelösten Weise: es handelt sich hier um eine unterbrochene Abbildung, und zwar wird ein so festgehaltener Eindruck damit von Ort und Zeit unabhängig. Dabei wird die fertig gedruckte und aufgezogene Aufnahme scheinbar zu einem neuen Schauding, das man beliebig wie ein anderes Raumding betrachten könne. Im nachstehenden soll ein ziemlich eingehender Abschnitt zu dem Beweise verwandt werden, daß man diesem Scheine nicht folgen solle, da man sich damit des Hauptvorteils der Lichtbilder, ihrer völligen Treue in der Wiedergabe, begebe.

Soviel aber wird unter allen Umständen schon aus dieser Einleitung bekannt geworden sein, daß eine verständige und umfassende optische Behandlung der Aufnahmelinse beides berücksichtigen müsse, nämlich:

Die Herstellung der eigentlichen Aufnahme in optischer Hinsicht und die Betrachtung des fertigen Bildes.

b) Die Herstellung der eigentlichen Aufnahme in optischer Hinsicht.

Es sei zunächst ein ganz einfacher Fall angenommen, daß etwa der Sternenhimmel, wo man sich die Aufnahmedinge in der unendlich fernen Ebene vorstellen kann, oder eine endliche Ebene, etwa eine Zeichnung oder ein Gemälde, auf der Mattscheibe wiederzugeben sei. Man kann sich bei dieser Fragestellung zunächst kurz bemühen um

Die Grundanlage der Aufnahmelinse.

Da schon nach der Fragestellung von einem Außending ein Bild auf der Mattscheibe entworfen werden soll, so wird man, wenn es sich zunächst um einfache Linsen handelt, zu einer solchen von sammelnder Wirkung greifen, da

Zerstreuungslinsen von fernen oder nahen Außendingen nur unzugängliche (virtuelle) Bilder entwerfen, die man nicht auf dem Schirm der Mattscheibe auffangen kann. In der Tat sind die ersten Aufnahmelinsen ziemlich einfach gebaute, dünne Linsen gewesen, und man kann wohl sagen, daß die Lichtbildlinsen in ihrer ganz überwiegenden Mehrzahl die Anlage einer Gruppe verhältnismäßig eng aneinandergerückter Linsen beibehalten haben. Wo davon wesentlich abweichend geplante Anlagen vorkommen, wird darauf im nachstehenden besonders hingewiesen werden.

Gleich hier sei bemerkt, daß wohl infolge eines eigenartigen Mißverständnisses eines Werkstattausdrucks auch für die ersten wissenschaftlich geplanten Aufnahmefolgen aus zwei getrennten Gliedern zu Wien und im Herbst 1840 für weitere Kreise die Bezeichnung „Objektiv" verwandt ward, die dem Hörer insofern keinen Sinn lieferte, als ja eine weitere, etwa der lichtempfindlichen Schicht zugewandte, Linsengruppe gar nicht vorhanden war. Dieser einmal unglücklich gebildete Ausdruck hat aber mit erstaunlicher Lebenskraft in ganz verschiedenen Sprachen Wurzel geschlagen und wird schwerlich mehr auszureuten sein. Wir werden versuchen, ihm weiter unten auf S. 451 einen gewissen vernünftigen Sinn beizulegen.

Geht man nunmehr zu der Grundaufgabe zurück, eine Ebene auf dem Schirm der Mattscheibe abzubilden, so mag man dafür auf die früheren Abschnitte dieses Buches zurückverweisen, wenn man sich zunächst auf die Abbildung im Gaussischen Bildraum beschränkt.

Die Formeln werden besonders bequem, wenn man von den Grundpunkten der Linsenfolge ausgeht, und man hat sich bei der Ausübung der Photographie vielfach daran gewöhnt, auf das Vorzeichen der Strecken zu verzichten. In der Tat handelt es sich ja immer um umgekehrte, auffangbare Bilder, so daß auf diese Vereinfachung schwerlich große Mißverständnisse folgen werden.

Bezieht man sich auf die Brennpunkte F, F', so kommt man, wenn N der Maßstab der Wiedergabe ist, auf

$$N = \frac{y}{y'}, \tag{1}$$

und wenn unter $f' = H'F'$ die hintere Brennweite verstanden wird, zu den Ausdrücken für den Ding- und Bildabstand von dem zugewandten Grundpunkt.

$$x = FO = Nf'; \qquad x' = F'O' = \frac{f'}{N}; \tag{2}$$

man erkennt also, daß für die beiderseits an Luft grenzenden Aufnahmelinsen die Newtonsche Beziehung

$$xx' = f'^2$$

gilt, wenn man die hier gültige Vorzeichenbestimmung berücksichtigt. Bildet man für $a = HO = HF + FO$ und $a' = H'O' = H'F' + F'O'$

$$a = x + f' = (N+1)f' \quad \text{und} \quad a' = x' + f' = \frac{f'}{N} + f' = \frac{f'}{N}(N+1), \tag{3}$$

so erhält man für die Hauptpunktsabstände a und a' die Beziehungen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{a}{a'} = N, \tag{4}$$

ein ebenfalls aus dem Vorhergehenden bekanntes und nur durch die hier gültige Vorzeichenbestimmung verändertes Gleichungspaar. Alle diese Beziehungen lassen sich an Abb. 139 verfolgen.

89. Die Farbenfehler. Sehr bald zeigte sich aber, daß mit einer einfachen Linse gewisse Farbenfehler in der photographischen Aufnahme verbunden waren, die darin ihren Grund hatten, daß die photographische Schicht, ähnlich wie das Auge, nicht für alle Farben gleichmäßig empfindlich ist. Da die kürzerwelligen (aktinischen) Strahlen die stärksten Wirkungen auf die lichtempfindliche Schicht ausübten, so mußte man, solange man mit Linsen aus einer einzigen Glasart arbeitete, nach der Einstellung den Abstand zwischen Linse und Schicht verkleinern, um ein möglichst deutliches Bild zu erhalten. Man versuchte schon



Abb. 139. Lage und Größe des Bildes eines vorwärts bewegten Gegenstandes.

vor 1839, dem Jahre der Kundgebung der photographischen Verfahren, dem dadurch abzuhelfen, daß man achromatische Linsenpaare — deren Glieder also aus zwei verschiedenen Glasarten bestanden — zur Abbildung verwandte. Aber auch dann fiel das schärfste optische Bild mit dem schärfsten chemischen nicht zusammen, sondern es bestand eine Einstellverschiedenheit (ein chemischer Fokus in der damaligen fremdwortfrohen Fachsprache) in dem Sinne, daß man nach erfolgter Einstellung nunmehr den Abstand zwischen Linse und Schicht vergrößern mußte.

Der Grund dieser Erscheinung ist darin zu suchen, daß, obwohl zwar die Netzhaut ebenso wie die lichtempfindliche Schicht für Farben verschiedener Wellenlänge verschieden empfindlich ist, die höchste Empfindlichkeit der Netzhaut auf ein anderes Spektralgebiet fällt als die der gewöhnlichen photographischen Platte. Während nämlich die Netzhaut (Ziff. 50) am meisten für gelbgrünes Licht (550 $\mu\mu$) empfindlich ist, gilt das bei der gewöhnlichen photographischen Platte für einen Bezirk im kurzwelligen Teile des Spektrums.

Zu der Empfindlichkeit der photographischen Platten sei hier noch in einer Art Einschaltung bemerkt, daß es gelungen ist, die früher auf die blauen und kürzerwelligen Farben beschränkte Empfindlichkeit in den orthochromatischen (farbenrichtigen) Platten auch bis in das Gebiet der gelben hinein auszudehnen; freilich besteht für das grüne Gebiet ein gewisses Minimum. In neuerer Zeit hat man in den panchromatischen (farbenvollkommenen) Platten sogar bis in das Rot hinein eine Steigerung der Empfindlichkeit tragen können; immer aber ist es vorteilhaft, durch ein geeignetes Filter (meistens eine Gelbscheibe) für eine Verminderung der Leuchtkraft der hindurchgelassenen Strahlen kürzerer Wellenlänge zu sorgen.

Man beachte nun, daß man (s. den Abschnitt über die Farbenfehler) für das Auge das Farbenband des Spektrums so zusammenfaltet, daß das Minimum der Brennweite einer achromatischen Linsenfolge (z. B. eines Fernrohrobjektivs) (Abb. 140) im Grün bei $\lambda = 550\ \mu\mu$ liegt, während die übrigen Farben paarweise längere und immer längere Brennweiten haben. Dieser Zustand wird

am bequemsten dadurch herbeigeführt, daß man die Brennweiten für die Farben der Fraunhoferschen Linien C und F zusammenfallen läßt. Man nennt diesen Zustand optische Achromasie oder augenrechte Farbenvereinigung.

Man könnte daran denken, bei einer Platte mit ihrem Höchstwert der Empfindlichkeit für das durchgelassene Licht bei $\lambda = 430\,\mu\mu$ ganz entsprechend vorzugehen und eben etwa an diese Stelle das Minimum der Brennweite einer unter dieser Bedingung achromatisierten Linsenfolge zu legen. Das geschieht, wenn man der in solchen Fällen beobachteten Regel folgt und F mit H_δ vereinigt (Abb 140). Man kommt so auf den Zustand der rein aktinischen Achromasie oder der plattenrechten Farbenvereinigung.

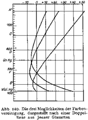


Abb. 140. Die drei Möglichkeiten der Farbenvereinigung, dargestellt nach einer Doppellinse aus Jenaer Glasarten

1 C und F vereinigt (augenrecht, beste Farbenvereinigung bei $Gr.Hg$; 2 F und $Viol.Hg$ vereinigt (plattenrecht), beste Farbenvereinigung bei G', 3. D und G' vereinigt (einstellrecht), beste Farbenvereinigung bei F, doch wird sie im Gebrauche nicht verwendet.

In der Tat geht man derart bei solchen Aufnahmegeräten vor, bei denen die Einstellung der Platte zur Aufnahmelinse ein für allemal die gleiche ist, etwa bei Linsen zu Sternaufnahmen, denn auf eine bequeme Einstellung braucht man bei einer solchen Anlage in keiner Weise Rücksicht zu nehmen: man hat sich dabei vielmehr allein um die beste Wirkung auf die Platte zu kümmern.

Da nun bei der gewöhnlichen Aufnahmekammer aber von einem festen Plattenorte nicht die Rede sein kann, sondern die Einstellung unter Leitung des Auges je nach dem Dingabstande vorgenommen werden muß, so versteht man, daß die Bequemlichkeit im Gebrauche des Tages dazu zwang, auf die bestmögliche Ausnutzung der Platte zu verzichten. Man verlangte derartig berechnete Linsenverbindungen, daß das hellste sichtbare bei D und das chemisch wirksamste Bild bei H_γ an denselben Ort fielen, wobei man dann freilich das optisch bevorzugte Farbenbereich um das Minimum der Brennweite herum weder für die Einstellung noch für die Aufnahme ausnutzen konnte. Ein derartiger Farbenzustand (Abb. 140) heißt photographische (uneigentlich aktinische) Achromasie oder einstellrechte Farbenvereinigung, und er ist heute bei allen photographischen Aufnahmelinsen ohne Ausnahme anzutreffen.

Der Kampf gegen diese Einstellverschiedenheit hat ziemlich lange Zeit gedauert, und man kann wohl erst für das Ende der 40er und den Anfang der 50er Jahre des vorigen Jahrhunderts annehmen, daß er in England und Frankreich mindestens für die besten der dortigen optischen Häuser entschieden war. In Deutschland dauerte er etwas länger. Wie es scheint, hat ihn hier erst das Eintreten Petzvals seit dem Jahre 1854 günstig beeinflußt, doch hat es bis zu den Jahren 1857 und 1858 gewährt, ehe die großen deutschen Fabriken die Herstellung der alten Linsenfolgen mit Einstellverschiedenheit aufgaben.

Die Erweiterung der Abbildungsgrenzen über das Gaussische Gebiet hinaus. Auch eine ganz einfach gebaute Einzellinse, zumal mit einstellrechter Farbenvereinigung, wird gestatten, in mäßiger Weise über den fadenförmigen achsennahen Raum der Gaussischen Abbildung hinauszugehen: man wird, wenn auch kleine, doch endliche Öffnungen verwenden und die Abbildung eines vielleicht nur geringen, aber doch ein endliches Gebiet umfassenden Ebenenstückes rings um die Achse wagen. Gleich die erste Aufgabe, die Petzval, dem Vater der Aufnahmelinse, 1839 gestellt wurde, verlangte ein besonders großes Öffnungsverhältnis und ein Feld von endlicher Größe. Damit traten aber hier zum ersten Male Forderungen auf, die bei den Objektiven der damals altgewohnten zusammengesetzten Geräte, des Mikroskops und des Fernrohrs, nie vereinigt gewesen waren. Um die Bedeutung dieser Ansprüche leicht zu kennzeichnen, seien die hauptsächlichsten hier besprochen, und zwar halten wir uns an die fünf Seidelschen Fehlerausdrücke, die schon bei der ersten Erweiterung über das Gaussische Gebiet hinaus auftreten.

90. Die Strahlenvereinigung eines von einem Achsenpunkt ausgehenden Strahlenbündels (Die Kugelabweichung im engeren Sinne). Zunächst wird man bei der Aufnahmelinse den abzubildenden Gegenstandspunkt in weiter Ferne annehmen, was streng für Landschaftsaufnahmen gilt, aber auch bei Gebäude- und Gruppenaufnahmen auf keine großen Fehler führt (Abb. 141). Rechnet man eine einzelne, kuglig begrenzte Sammellinse in dieser Weise durch, so vereinigen sich die Öffnungsstrahlen nicht in dem Brennpunkt F' der Nullstrahlen, sondern haben stets kürzere Schnittweiten $Bs_3 < Bs_2 < Bs_1$. Laßt man also, wie üblich, das Licht von links einfallen, so liegen die Schnittpunkte der Öffnungsstrahlen links von F'. Man hat sich daran gewöhnt, diesen Strahlenverlauf als Zustand der Unterbesserung (Unterkorrektion) zu bezeichnen, weil er eine damit kurz beschriebene Abweichung von dem Ziele der Besserung bedeutet, die Öffnungsstrahlen in F' zu vereinigen. Im Gegensatz dazu zeigt das unzugängliche Bild einer einfachen Zerstreuungslinse (Abb. 142) den Zustand der Überbesserung (Überkorrektion) $Bs_3 > Bs_2 > Bs_1$, wobei eben das negative Vorzeichen dieser Schnittweiten zu beachten ist.

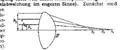


Abb. 141. Die Kugelabweichung bei einer einfachen Sammellinse (Unterbesserung).



Abb. 142. Die Kugelabweichung bei einer einfachen Zerstreuungslinse (Überbesserung).

Hat man für kleine Öffnungen die Kugelabweichung gehoben, und läßt mittlere und große Öffnungsbündel zu, so stellen sich Zwischenfehler (Zonen-

fehler) ein, die in den Ausdrücken des Seidelschen Ansatzes der ganzen Anlage nach nicht enthalten sein können. Da sie aber für die Beurteilung der vor-

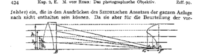


Abb. 143. Schaubild für die Zwischenfehler der Strahlenvereinigung.

liegenden Linsenformen von großer Bedeutung sind, so müssen wir hier ein wenig näher auf sie eingehen. Im folgenden seien verbesserte Doppellinsen vorausgesetzt.



Abb. 144. J. Petzvals Bildnislinse von 1840 für $f' = 100$ mm in $^1/_3$ der natürlichen Größe.

Wie man aus Abb. 143 ersieht, nehmen, wenn man die Einfallshöhen von h_1, h_2, h_3 auf h steigert, die Schnittweiten Bs_1, Bs_2, Bs_3 zunächst ab, bis schließlich für h die Schnittweite BF' wieder erreicht ist. In der Lehre von der Aufnahmelinse hat man sich daran gewöhnt, eine solche Linsenfolge als verbessert (sphärisch korrigiert) für die Öffnung $2h$ zu bezeichnen. Man erkennt, daß dabei die Achsenstrecke $F's_r$ zweimal durchlaufen wird, zunächst langsamer gegen und dann schneller mit der Lichtrichtung. Um die Vorstellung zu erleichtern, hat man nach einem von M. v. Rohr 1897 eingeführten Verfahren den oberhalb $F's_r$ gezeichneten Verlauf als Schaubild für die Zwischenfehler der Kugelabweichung an einer großen Menge verschiedener Anlagen der Aufnahmelinse[1] niedergelegt. Man erkennt dann aus der Betrachtung dieses Übersichtsbildes leicht, daß die Abweichungen in einer Linse mit gehobener Kugelabweichung zunächst das Wesen der Unterbesserung haben (hier bis nahezu zur Höhe h_2), und daß dann nach Erreichung des Mindestwertes der Schnittweite Bs_r die Abweichungen das Wesen der Überbesserung zeigen. Stellt man die Forderung, die Öffnung zu finden, wo weder Unter- noch Überbesserung besteht, so muß man sie etwa bei h_2 suchen, also bei einem wesentlich niedrigeren Betrage als bei der hier bevorzugten Bestimmung, wo die gleiche Schnittweite erreicht wird, wie sie für die Nullstrahlen gilt. Diese letzte Art der Bestimmung wird in der Regel in der Ausübung der Photographie angenommen. In den beiden folgenden Zeichnungen 144 und 145 sei eine besonders zwischenfehlerfreie Linsenfolge, die Petzvalsche Bildnislinse, vorgeführt, wo bei einer Öffnung von $2 \times 14{,}7$ mm auf die Einheitsbrennweite von 100 mm die Zwischenfehler nur einen Betrag von knapp 0,2 mm erreichen. Das zweite Beispiel 146 und 147 steht für eine Linse mit Ebenung des punktmäßigen Bildes, den Goerzschen Doppelanastigmat. Trotz der kleineren Öffnung von nur $2 \times 6{,}2$ mm auf die Einheitsbrennweite stellt

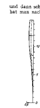


Abb. 145. Kugelabweichung (—) und Fehler gegen die Sinusbedingung (- - -) für Petzvals Bildnislinse.

[1] M. v. Rohr, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs. Berlin: J. Springer, 1899.

sich hier ein Zwischenfehler von etwa 1,0 mm ein. Die neuesten Linsenfolgen haben trotz gleich vollkommener Streckung des punktmäßigen Bildfeldes wieder kleinere Zwischenfehler, und sie mussen diese Eigenschaft haben, da man heute, wie weiter unten noch zu zeigen sein wird, ganz besonders große Öffnungsverhältnisse bevorzugt.



Abb. 146 E. v. HOEGHS Doppelanastigmat von 1892 fur $f' = 100$ mm in naturlicher Große



Abb. 147. Kugelabweichung (—) und Fehler gegen die Sinusbedingung (– – –) für E. v. HOEGHS Doppelanastigmat, eine Anlage mit bemerkenswerter Streckung des anastigmatischen Bildfeldes.

91. Die Abbildung des Nachbargebietes um den Achsenpunkt. (Die Erfüllung der Sinusbedingung). Als E. ABBE im Jahre 1873 über die Arbeiten berichtete, die ihn zu den ersten erfolgreich berechneten Mikroskopobjektiven geführt hatten, gab er (52) als unumgängliche Zusatzforderung zu der guten Strahlenvereinigung für das vom Dingachsenpunkt ausgehende Bundel die Erfüllung der Sinusbedingung an. Er sprach damit als erster diese wichtige Regel aus, die indessen schon 1840 bei den ersten PETZVALschen Bildnislinsen VOIGTLÄNDERscher Herstellung erfüllt worden war. Denkt man daran, daß dem dingseitigen Strahlachsenwinkel u — unter Voraussetzung vollkommener Strahlenvereinigung — auf der Bildseite der Strahlachsenwinkel u' entspreche, so läßt sich die Sinusbedingung schreiben

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{1}{\beta_0} = \frac{y_0}{y_0'}\,; \qquad 0 \leqq u \leqq \bar{u}, \qquad 0 \leqq u' \leqq \bar{u}'; \tag{5}$$

wo y_0 und y_0' Ding- und Bildgröße für den achsennahen Raum sind, und man für u' und u ein beliebiges Paar einander zugeordneter Öffnungswinkel innerhalb der zulässigen größten Öffnung $\bar{u}'$ nehmen kann.

Er hat später die Bedeutung dieser Bedingung dadurch besonders anschaulich gekennzeichnet, daß er sagte, bei ihrer Erfüllung lieferten alle die verschiedenen Objektivzonen gleichgroße Bilder eines Dingflächenstückchens um den eingestellten Achsenort.

Setzt man entsprechend (4) für die rechte Seite der letzten Gleichung ihren Gegenwert, so ergibt sich

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{a}{a'}\,; \qquad a \sin u = a' \sin u'. \tag{6}$$

Läßt man nun entsprechend unserer obigen Voraussetzung großen Dingabstandes a größer und größer, also u kleiner und kleiner, werden, so erhält man

$$\lim_{a=\infty} a \sin u = h; \qquad \lim_{a=\infty} a' = f_0',$$

wo h irgendeine Halböffnung innerhalb der vollen Halböffnung $\bar{h}$ ist, für die die Strahlenvereinigung erreicht wurde.

Mithin erhält die nach den Besonderheiten der Aufnahmelinse umgestaltete Sinusbedingung (6) die Form

$$f_0' = h/\sin u'; \qquad 0 \leqq u' \leqq \bar{u}' \tag{7}$$

oder in Worten: erfüllt eine Aufnahmelinse für alle Höhen $0 \leqq h \leqq \bar{h}$ die Sinusbedingung, so ist das Verhältnis einer beliebigen dingseitigen Halböffnung h zu dem Sinus des zugehörigen bildseitigen halben Öffnungswinkel u' unveränderlich und gleich der Brennweite der Nullstrahlen.

Man hat diese unveränderliche Länge f_0 auch wohl als **Brennweite der schiefen Strahlen** oder der **Objektivzonen** beschrieben; doch muß man sich gegenwärtig halten, daß bei den vorhandenen Linsenformen mit ihren Zwischenfehlern die Objektivzone in der Regel bei strenger Behandlung zwei verschiedene Brennweiten, die der t- und die der f-Büschel hat, die im allgemeinen beide von f'_0 verschieden sein werden.

In den üblichen Schaubildern für die Strahlenvereinigung in Bündeln endlicher Öffnung pflegt man nach M. v. Rohrs Vorgange von 1899 mit gestrichelten Zügen die Abweichung für die Größe von f_0 einzutragen. Ist in der Ausdrucksweise der für die Fabriken beschäftigten Rechenmeister die Sinusbedingung für die gleiche Öffnung $2\bar{h}$ erfüllt, für die auch die Kugelabweichung gehoben worden ist, so schneiden die beiden Verlaufslinien, die ausgezogene und die gestrichelte, einander auf der in F' errichteten Senkrechten.

Andere Verfahren, die Abweichung von der Sinusbedingung darzustellen, sind später sowohl von H. Harting als auch von R. Richter angegeben worden.

Gelegentlich findet sich auch noch ein anderer Ausdruck für den mit der Erfüllung der Sinusbedingung verbundenen Vorteil; man sagt, dadurch werde die Anlage von der **Koma**, d. h. einem unsymmetrisch den wahren Bildpunkt umgebenden oder **haarsternähnlichen** Zerstreuungsfleck, befreit. Wir werden auf ähnliche Fragen noch in den nächsten beiden Abschnitten etwas eingehen müssen.

92. Der Astigmatismus längs Hauptstrahlen endlicher Neigung. Man mag vor dem Eingehen auf den eigentlichen Inhalt dieses Abschnittes noch darauf hinweisen, daß bis jetzt nur solche Rechnungen besprochen wurden, mit denen man Strahlen von einem bestimmten **Achsenpunkt** aus durch eine ausgerichtete Flächenfolge verfolgte. Im Gegensatz dazu seien nunmehr die Dingpunkte in einer durch den vorher betrachteten Achsenpunkt achsensenkrecht gelegten Ebene angenommen.

Wendet man sich nunmehr zu Gegenstandspunkten, die innerhalb der Dingebene einen endlichen Abstand von dem Durchstoßpunkte der Achse haben, so tritt eine solche Menge möglicher Abweichungen und Fehler auf, daß eine Beschränkung geboten ist, wenn die Übersichtlichkeit nicht völlig verloren gehen soll. Diese Beschränkung schafft sich der Rechner dadurch, daß er die Öffnungsblende — infolgedessen natürlich auch die Ein- und die Austrittspupille — **unendlich eng** annimmt. Alsdann kann nur eine zweifache Mannigfaltigkeit von Strahlen (sie heißen hier die **Hauptstrahlen**) durch die Linsenfolge treten, und zwar gehört zu einem beliebigen Punkt der Dingebene **ein und nur ein** Hauptstrahl. Da die ausgerichtete Linsenfolge selbstverständlich achsensymmetrisch ist, so braucht man nur einen einzelnen Achsenschnitt zu untersuchen; denn läßt man ihn um die Achse der Folge einen vollen Umlauf machen, so fällt er mit einem jeden anderen Achsenschnitt zusammen. Auf diese Weise gelingt es, mit der Betrachtung einer einzigen Mannigfaltigkeit von Hauptstrahlen auszukommen, nämlich mit den Hauptstrahlen aller unter einem Höchstwert bleibenden Neigungsschiefen w, w' in einem ausgewählten Achsenschnitt.



Abb. 148. Die abbildbaren Linien (Kreisschar und Geradenbüschel) am Achsenpunkt der achsensenkrechten Einstellebene.

Nimmt man nunmehr auf der ausgewählten Dingebene in einem Dingpunkt O_w von endlichem Achsenabstande einen Hauptstrahl an, der die Öffnungsblende durchsetzt und in der Eintrittspupille die Achsenneigung w, in der Austritts-

pupille die Achsenneigung w' hat, so erlauben natürlich die zur Untersuchung der Achsenstrahlen ausreichenden Formeln nicht, durch die Linsenfolge den von O_w ausgesandten beiden engen Strahlenbüscheln der t- und der f-Strahlen zu folgen, für die man, wie auf Seite 401 auseinandergesetzt wurde, überhaupt von einer Vereinigung sprechen kann.

Die Formeln für schiefe Bündel waren zwar schon TH. YOUNG 1800 und H. CODDINGTON 1829 bekannt gewesen und fanden sich in ihren Veröffentlichungen, aber für eine regelmäßige rechnerische Untersuchung vorliegender Linsenverbindungen sind sie erst verwandt worden, als sie von E. ABBE um 1888 von neuem entwickelt wurden.

Rechnet man nun auf einem vorher in seiner Bahn festgelegten Hauptstrahl mit der Neigung w, w' die von O_w ausgeschickten unendlich schmächtigen schiefen



Abb. 149



Abb. 150

Bei Einstellung auf die t-Schale ist die Kreisschar deutlich, das Geradenbüschel ganz undeutlich.



Abb. 151.



Abb. 152

Bei Einstellung auf die f-Schale ist die Kreisschar ganz undeutlich, das Geradenbüschel deutlich.

Bündel durch die Folge durch, so findet sich im allgemeinen auf der Bildseite kein einzelner Punkt O'_w, sondern ihrer zwei O'_{wt} und O'_{wf}, die Bildpunkte für die speichenrechten (tangentialen) und die felgenrechten (sagittalen) Büschel; bei weiten Dingabständen werden sie, wie in Abb. 155 zu F'_t und F'_f.

Wendet man die schon in Ziff. 76 verwandte Ausdrucksweise A. GULLSTRANDS an, so kann man sagen, daß solche Linsenfolgen nicht mehr Punkte in Punkte, sondern nur Linien in Linien abbilden, und nach Abb. 149—152 sind die abbildbaren Linien für eine achsensymmetrische Aufnahmelinse das Büschel der durch den Durchstoßpunkt der Achse in der Dingebene gezogenen Graden, die am Bildpunkt des felgenrechten Büschel, und die Schar der in der Dingebene um diesen Durchstoßpunkt als Mittelpunkt gezogenen Kreise, die am Bildpunkt der speichenrechten Büschel wiedergegeben werden.



Abb. 153. W. H. WOLLASTONS Meniskus von 1812; für $f' = 100$ mm in natürlicher Größe.

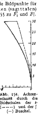


Abb. 154. Achsenschnitt durch die Bildschalen der t- (– – – –) und der f (—) Büschel.

Sucht man in der ausgewählten Achsenebene die Bildpunkte O'_{wt}, O'_{wf} für Dingpunkte O_w von verschiedener Hauptstrahlneigung auf und verbindet sie durch einen stetigen Linienzug, ausgezogen für die f- und gestrichelt für die t-Büschel, so erhält man zu der achsensenkrechten Schnittspur der Dingebene die beiden zugehörigen Schnittkurven der Bildschalen für die f- und die t-Büschel Abb. 155. Ein voller Umlauf um die Achse macht aus diesen Spuren auf der Dingseite die Dingebene, auf der Bildseite aber ergeben sich die beiden astigmatischen Bildschalen.

Bei sammelnden Linsen einfacher Bauart, z. B. der altgewohnten Linse für die dunkle Kammer als Zeichenhilfe, waren beide Schalen zur Linse hohl, und die ausgezogene lag der Linse näher; man kann diesen Zustand als den astigmatischer Unterbesserung bezeichnen; beim WOLLASTONschen Meniskus (Abb. 153) von 1812, der ebenfalls für diese Zeichenhilfe bestimmt war, kehrten zwar auch beide Schalen der Linse ihre Hohlung zu, aber Abb. 154 die gestrichelte Schale lag der Linse näher entfernt als die ausgezogene; man kann diesen Zustand als den astigmatischer Überbesserung bezeichnen.

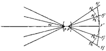


Abb. 155. Ein Übersichtsbild für die beiden astigmatischen Bildschalen $F_t' F_t'$ (— — —) der t- und $F_f' F_f'$ (—) f-Büschel für die unendlich ferne Ebene des Dingraums.

Bevor man aus der Tatsache, daß man auch hier eine Unter- und eine Überbesserung findet, weitere Folgerungen zieht, sei bemerkt, daß auch der Bildfehler des Astigmatismus seine bestimmte Form für die Wiedergabe gefunden hat. Die ältere Form ist in England entwickelt worden und hat ihren ersten Platz in dem gewaltigen Vortrage TH. YOUNGS vom Jahre 1800 und dann in einem sehr lehrreichen Aufsatze R. H. BOWS um 1863 gefunden. Sie kann namentlich bei großen astigmatischen Fehlern einigermaßen sperrig werden, hat sich aber wohl nur deshalb nicht eingeführt, weil diese englischen Arbeiten in Jena unbekannt waren, als P. RUDOLPH um 1891 und 1893 seine ersten Darstellungen dieses Bildfehlers an weitere Kreise brachte. Er ging — weniger unmittelbar — von der Darstellung seiner Rechenergebnisse aus und gab Schaubilder für die Verschiebung der Mattscheibe in Abhängigkeit von dem Winkel w, wenn man die Bildpunkte der felgen- oder der speichenrechten Büschel auffangen wollte. Da in dem auf S. 424 erwähnten ROHRschen Buche von 1899 eine große Menge astigmatischer Kurven nach dem RUDOLPHschen Verfahren gezeichnet und leicht zugänglich gemacht worden ist, so hat dieses Darstellverfahren heute das ältere englische gleichsam verdrängt, zumal da man sehr bequem die für einen bestimmten Winkel w erforderliche Mattscheibenverschiebung an der Abszissenachse ablesen kann. Auch in dieser Darstellung wurde von diesem Verfahren Gebrauch gemacht.

Man wird ohne weiteres verstehen, daß dieser Fehler des Astigmatismus schiefer Bündel störend werden mußte, und begreifen, daß man früh auf Mittel sann, ihm zu begegnen. Das war allerdings um so schwieriger, als man keinen wirklichen Einblick in die Natur dieses Fehlers hatte. Immerhin hatte der gelehrte Jesuit CHR. SCHEINER bereits vor der Mitte des Jahres 1618 für die Linse einer dunklen Kammer als Schauraum einen stark gekrümmten Auffangschirm vorgeschlagen, erprobt und die wesentlich deutlichere Zeichnung darauf festgestellt: wie wir heute wissen, weil auf einem solchen die Zerstreuungsscheibchen bei seiner besseren Anschmiegung an die beiden Bildschalen kleiner ausfielen als auf einem ebenen Schirm. Diese wohl schon 1626 veröffentlichte Erfahrung hat — wir wissen nicht, auf welchen Wegen — weitergewirkt, und ihre Verwendung läßt sich nicht nur im 17. und im 18. Jahrhundert dartun, sondern sogar noch bis in die ersten photographischen Zeiträume verfolgen, so wenig anziehend auch die Benutzung eines hohlen Auffangeschirms für den ausübenden Photographen war.

Ganz im Gegensatz zu diesem Mittel stand das wohl auf TH. YOUNG und seine Einführung des **kleinsten Bildflecks** (*circle of least confusion*) zurück zu verfolgende Bestreben, die Fläche der kleinsten Bildflecke dadurch zu ebnen, daß man den Astigmatismus in hohem Maße überbesserte. In Abb. 157 wurde die Schale der *t*-Büschel soweit vorgeschoben, daß sie ihre Hohlung von der Linse abkehrte und die zwischen beiden Bildschalen verlaufende Fläche der kleinsten Bildflecke einigermaßen gestreckt war. Man hat das später **astigmatische Bildfeldebenung im uneigentlichen Sinne** genannt. In der Tat ist man früh schon (vor 1839) in Frankreich mit der als **französischer Landschaftslinse** bekannten Anlage etwa in dieser Weise vorgegangen, ohne daß man damals (gegen das Ende der 30er Jahre) genau hätte angeben können, mit welchen Mitteln die so erreichte Schärfenverteilung auf der lichtempfindlichen Schicht herbeigeführt worden wäre. Auch noch in viel späterer Zeit, den 60er und 70er Jahren, hat man auch bei Doppellinsen für ein größeres Feld und bei Bildnislinsen für bestimmte Arten der damaligen Bildnisaufnahmen zur Streckung der Fläche der kleinsten Bildflecke gegriffen.



Abb. 156. Die französische Landschaftslinse von 1839, für $f' = 100$ mm in natürlicher Größe. (In Abb. 157 ihr Bildfeld.)

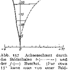


Abb. 157. Achsenschnitt durch die Bildschalen t-(------) und der f-(—) Büschel. (Für etwa 15° kann man von einer Bildebenung in uneigentlichem Sinne sprechen.)

98. Die Hebung des Astigmatismus schiefer Bündel und die Bildfeldebenung. Schon aus der Darstellung für die beiden astigmatischen Bildschalen und dem Zustand der Unter- und Überbesserung des Astigmatismus schiefer Bündel wird man schließen können, daß es auch eine Hebung dieses Bildfehlers geben wird. Dabei fallen zunächst für einen ausgewählten Bildwinkel w die Spuren beider Schalen zusammen, oder mit anderen Worten ist für diesen Fall der Astigmatismus schiefer Bündel gehoben, und man kann jetzt nach Abb. 158 von einer punktmäßigen Abbildung für die Hauptstrahlneigung w sprechen.



Abb. 158. Übersichtsbild für die Hebung des Astigmatismus schiefer Bündel über das ganze Bild an älteren photographischen Objektiven. Die Bildfläche kehrt der Linse ihre Hohlung zu. Nimmt die Mattscheibe die gestrichelte Stellung ein, so kann man von einer ausgleichenden Einstellung sprechen.

Setzt man voraus, daß zunächst einmal w als eine kleine Größe festgesetzt sei, so mag man von einer Krümmung des eigentlichen Bildes in der Nähe der

Achse sprechen, und es muß hier hervorgehoben werden, daß sich dafür ein allgemeiner Ausdruck angeben läßt; er lautet für die Bildfläche:

$$-\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right)\frac{1}{r_1} + \left(\frac{1}{n_3} - \frac{1}{n_2}\right)\frac{1}{r_2} + \cdots \qquad = \frac{1}{n_2 f_1'} + \frac{1}{n_3 f_2'} + \cdots$$

wenn eine ferne Aufnahmeebene vorausgesetzt ist.

Dieses Gesetz war bereits H. CODDINGTON im Jahre 1829 bekannt, wurde dann durch J. PETZVALS erste kurze Darstellung vom Jahre 1843 von neuem hervorgehoben und wird in der neuzeitigen Optik als das PETZVAL-CODDINGTONsche Gesetz bezeichnet. Da in diesen Ausdruck die Linsendicken und -abstände nicht eingehen, so kann man ihn auch (mit PETZVAL) so beschreiben, daß man sagt, zur Bestimmung der erreichbaren Bildkrümmung einer gegebenen Verbindung denke man sich alle sie bildenden Linsen sowohl dünn als auch eng zusammengeschoben und bilde die Summe aller ihrer durch die zugehörige Brechzahl dividierten Brechkräfte.

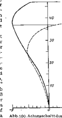


Abb. 160. Achsenschnitt durch die Bildschalen der s-(— — —) und der f-(—) Büschel für Abb. 159. (Unterhalb von $w = 25°$ kann man von Hebung des Astigmatismus schiefer Bündel sprechen, während für etwa $w = 40°$ Bildfeldebenung im uneigentlichen Sinne erreicht ist.)

Nimmt man w von endlicher Größe, so ist nicht gesagt, daß auch für alle Werte $w_k < \bar{w}$ ebenfalls der Astigmatismus schiefer Bündel gehoben sei; vielmehr treten hier wie oben bei der Hebung der Kugelabweichung wiederum Zwischenfehler auf, die gelegentlich zu ziemlichen Beträgen anwachsen können. Selbstverständlich sind im allgemeinen die Zwischenfehler für $w_r > w$ viel beträchtlicher und das in Abb. 160 dargestellte Beispiel läßt erkennen, daß die Zwischenfehler unterhalb von $w = 25°$ ziemlich unbedeutend sind, während sie oberhalb so stark anwachsen, daß man im Gegensatz zu der für die Mitte des Feldes geltenden Krümmung (auf die Aufnahmelinse zu) etwa für $w = 40°$ sogar von der Ebnung des Bildes der kleinsten Zerstreuungsflecke sprechen kann.



Abb. 159. H. A. STEINHEILS Weitwinkelaplanat von 1867; für $f' = 100$ mm in natürlicher Größe.

Bei der gewöhnlichen Anlage der Aufnahmelinsen bis zum Ende der 80er Jahre waren — es handelte sich in der Regel um sammelnde Glieder — mit wenigen Ausnahmen die stärkeren Sammellinsen aus Kron von niederer Brechzahl n_{Cr}, während die schwächeren Flintlinsen aus Flint von höherer Brechzahl n_{Fl} bestanden, was sich durch die Ungleichungen ausdrücken läßt:

$$D_{Cr} > |D_{Fl}| \qquad \text{und} \qquad n_{Cr} < n_{Fl}.$$

Daraus folgt aber mit Sicherheit für die Krümmung des Bildes punktmäßiger Abbildung in der Nähe der Achse:

$$-\frac{1}{R} = \frac{D_{Cr}}{n_{Cr}} - \frac{D_{Fl}}{n_{Fl}} > 0$$

mit anderen Worten, die einigermaßen eng gebauten Aufnahmelinsen aus altem Kron und Flint mußten in der Nähe der Achse eine derartige Bildkrümmung aufweisen, daß sich wie in Abb. 158 die Hohlung der Aufnahmelinse zukehrte.

Diese zunächst ganz gesetzmäßige Krümmung, die natürlich auch der PETZVALschen Bildnislinse eigen war, störte nicht besonders, solange der Bildwinkel $2\bar{w}$ nicht besonders groß war, auch vermochte man sie durch eine ausgleichende Einstellung zwischen Mitte und Rand weniger auffällig zu machen. Im allgemeinen aber empfand man sie als eine Störung, namentlich wenn man Aufnahmeebenen (Zeichnungen, Gemälde) auf die Platte bringen wollte. Darauf, daß man sie gelegentlich z. B. beim Aufnehmen eines Kirchenschiffs, wohl verwenden konnte, wo sich die Seitenteile (die Kirchenwände) der Aufnahmekammer näherten, die Mitte (der Altarraum) aber am weitesten entfernt war, sei nur im Vorbeigehen hingewiesen. In solchen Fällen, wo man im wahren Sinne des Wortes aus der Not eine Tugend machte, konnte man wohl mit den alten unbeholfenen Geräten die Leistung der neueren Linsen übertreffen, aber für die allgemeineren Aufgaben blieb die Forderung, die Fläche punktmäßiger Wiedergabe zu strecken, mit vollem Rechte bestehen.

Gewiß hatte schon 1856 L. SEIDEL deutlich auf diese Schwierigkeit hingewiesen und betont, daß sich nur durch Einführung größerer Dicken und Abstände ein Ausweg aus dieser Lage böte. Indessen hat sich keiner der damaligen Rechenmeister mit einer solchen Anlage beschäftigt, und es gelang erst 18 Jahre danach einem sehr begabten schottischen Liebhaber, dem Astronomen CH. PIAZZI SMYTH, eine (PETZVALS Bildnislinse enthaltende) Verbindung vorzuschlagen, die in der Tat mit Bündeln großer Öffnung eine aplanatische Abbildung vermittelte und gleichzeitig das Bildfeld für einen endlichen Winkel völlig streckte. Freilich mußte er dabei (s. S. 420) von der Annahme eng aneinander gerückter Linsenflächen abgehen.

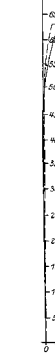


Abb. 162. Achsenschnitt durch die Bildschalen der t-(— — —) und der f-(---) Büschel von Abb. 161. Die weite Ausdehnung des anastigmatischen Feldes ist hervorzuheben.

Bei der Beschränkung auf die Streckung des Feldes punktmäßiger Abbildung allein waren die alten rein mit tappenden Versuchen vorgehenden Optiker erfolgreicher; hier hatte 1866 E. BUSCH in seinem Pantoskop (Abb. 161—162) eine Linsenfolge geschaffen, die eine bemerkenswert zwischenfehlerfreie Streckung des punktmäßigen Feldes auch für ganz große Winkel erlaubte. Freilich konnte man an eine Hebung der ganz ungemein großen Beträge von Kugelabweichung nicht denken, und diese gescheute Weiterführung eines noch verbesserungsbedürftigen amerikanischen Vorschlags konnte, wie alle die ihm verwandten Anlagen, nur bei engster Abblendung verwandt werden.


Abb. 161. E. BUSCHS Pantoskop von 1865; für $f' = 100$ mm in natürlicher Größe.

Hier mag im engsten Anschluß an diesen ersten wahren, von Astigmatismus schiefer Bündel freien Weitwinkel auf den Hypergon-Doppelanastigmat des Hauses C. P. GOERZ vom Jahre 1900 hingewiesen werden. Dabei war durch

Verwendung einer einfachen Halblinse mit $r_1 = r_2$, also mit $D_{12} = 0$, eine symmetrische Anlage mit einem geradezu gewaltigen ebenen Bildfeld geschaffen worden, wo auch für $w = 70°$ der Astigmatismus schiefer Bündel beseitigt war, ohne daß irgend merkbare Zwischenfehler auftraten. In einem späteren Abschnitte werden wir noch auf Nebeneinrichtungen einzugehen haben, die zu einem erträglichen Ausgleich der Beleuchtung über ein so riesenhaftes Feld verwendet wurden (Ziff. 101).

Aber alle diese oben aufgeführten älteren Anlagen bedeuteten noch nicht die Lösung der wichtigen Frage der Streckung des punktmäßigen Bildes für eine Linse mittlerer oder größerer Öffnung, da der einzige hierunter zu rechnende Fall der Smythschen Folge eine große, ganz nahe an der Mattscheibenebene stehende Zerstreuungslinse enthielt, die wohl für ferne Aufnahmedinge nicht zu sehr störte, dagegen bei der Einstellung auf näher gelegene wohl unbequem werden konnte.

Eine wirkliche Abhilfe schuf erst die Erfindung des Rechenmeisters Paul Rudolph an der Zeissischen Werkstätte, der 1890 von den kurz vorher im Jenaer Glaswerk erschmolzenen neuen Glasarten einen zweckmäßigen Gebrauch machte. Er konnte nämlich auf Grund eingehender astigmatischer Rechnungen zeigen, daß die Hohlung des Feldes punktmäßiger Abbildung bei der Verwendung symmetrisch gestellter Glieder aus je einem Glaspaar wesentlich von dem Zeichen und dem Betrage des Unterschiedes der Brechzahlen $n_{Cr} - n_{Fl}$ abhängig ist. Auf Grund dieser Kenntnis verwandte er in einer unsymmetrisch gebauten Doppellinse in dem einen Gliede ein Glaspaar alter, in dem anderen ein Glaspaar neuer Art, wo die Brechzahl des Kronbestandteils höher war als die des Flintbestandteils. Schon im


Abb. 163. P. Rudolphs Anastigmat 1:9 von 1891; für $f' = 100$ mm in natürlicher Größe.



Abb. 164. Kugelabweichung (—) und Fehler gegen die Sinusbedingung (— — —) für Rudolphs Anastigmat 1:9.



Abb. 165. Achsenschnitt durch die Bildschalen der t-(— — —) und der s-(—) Büschel für Rudolphs Anastigmat 1:9.

Jahre darauf, nämlich 1891, vermochte er genaue Angaben über eine Doppellinse mit Mittelblende zu machen, wo zum ersten Male seit Ch. Piazzi Smyth alle fünf Seidelschen Fehler gehoben worden waren, wo aber, was für den Gebrauch an den Kammern üblicher Bauart unumgänglich nötig war, die Glieder (Abb. 163 und 165) enge zusammenstanden. Die Zwischenfehler der Kugelabweichung waren ganz wie bei dem in Abb. 146 aufgeführten Goerzischen Doppelastigmat von S. 425 gegen die Petzvalsche Anlage gehalten von merklicher Größe.

Mit dieser Neuerung wurde die letzte große Blütezeit der Aufnahmelinse eingeleitet, die sich zunächst im wesentlichen auf Deutschland beschränkte; später hat namentlich auch der englische Rechenmeister H. D. Taylor mit

seiner Drillingslinse schöne Erfolge erzielen können. Man hielt in Deutschland zunächst, den recht merklichen Zwischenfehlern der Kugelabweichung des geraden Bündels zum Trotz, an Formen mit nur vier Flächen gegen Luft fest, wobei sich die ZEISSischen Wettbewerber hauptsächlich auf die Ausbildung der symmetrischen Doppellinsen warfen; dann wagte 1896 wiederum P. RUDOLPH den Schritt, in einer Aufnahmelinse die Zahl der Flächen gegen Luft gerade zu verdoppeln, also auf acht zu bringen, und von einer solchen Freiheit haben dann die Rechenmeister namentlich deutscher Häuser einen sehr reichlichen Gebrauch gemacht. Es ist hier nicht der Ort, alle Einzelheiten der neuen Anlagen auch nur anzudeuten, und dazu muß man auf neuere Handbücher des optischen Rüstzeuges der Photographie verweisen. Bemerkt mag nur werden, daß sich heute Linsen mit sechs Flächen gegen Luft, wie das alt erprobte, in seiner heutigen Form auf Arbeiten von P. RUDOLPH und E. WANDERSLEB zurückgehende Tessar, einer sehr weitverbreiteten Würdigung erfreuen.

Indessen ist mit unserem Hinweis auf die Zwischenfehler der Streckung des punktmäßigen Feldes noch nicht die volle Aufklärung geschaffen, die in solchen allgemeinen Abhandlungen gefordert werden kann, und so sollen noch einige Worte zu der ganzen Rechenanlage hinzugefügt werden. Offenbar kann man das Ergebnis der Hebung des Astigmatismus schiefer Bündel und der Streckung des wahren Bildfeldes doch nur so beschreiben, daß hier im GAUSSischen Bildraum längs den schiefen Hauptstrahlen ein wunschenswerter Bildort gesichert wird. Von einer Verfolgung schiefer Bündel endlicher Öffnung ist bei den neuzeitigen Rechenverfahren für Aufnahmelinsen keine Rede, denn das Beispiel H. A. STEINHEILS, der allerdings 1881 über Rechnungen dieser Art berichtete, hat keine Nachahmung gefunden, soweit Veröffentlichungen vorliegen.

Es bleibt also die Frage bestehen, warum die Aufnahmelinsen neuerer Anlage eine so befriedigende Ausdehnung ihres ebenen Bildfeldes zeigen, obwohl man keine Rechnung für schiefe Bündel ausführt, die der zur Hebung der Kugelabweichung und der Feststellung der Zwischenfehler gerader Bündel entspräche. Erst A. GULLSTRAND hat mit einer Antwort auf diese Frage begonnen, und zwar hat er auf die Bedeutung hingewiesen, die der Lichtverteilung im Bildfleck zukommt, so daß diese Kenntnis vielmehr zu gesicherten Schlüssen verhilft als die altgewohnte Kenntnis der bloßen Größe des Bildflecks. Besteht nämlich, wie er erkannt hat, in einem ziemlich großen Bildfleck eine Stelle mit einem sehr steilen Lichtgefälle, so wird sich doch noch eine erträglich scharfe Abbildung erreichen lassen. Als einleuchtendes Beispiel hat er auf eine Einzellinse von großem Öffnungsverhältnis hingewiesen, wie sie zu Beleuchtungszwecken verwandt wird. Trotz einem sehr hohen Betrag von Unterbesserung kann man damit doch ziemlich deutliche Bilder eines scharf begrenzten Glühfadens entwerfen, wenn man den Auffangschirm ungefähr an den Ort des GAUSSischen Bildes bringt; auch die Kristallinse des Auges bei mittlerer Weite der Pupille liefert ein gutes Beispiel für die Bedeutung steilen Lichtgefälles bei der Wiedergabe feiner Einzelheiten durch stark unterbesserte Linsenverbindungen. In dieser Art auch wird von einer Aufnahmelinse mit Streckung des punktmäßigen Bildes ein steiles Lichtgefälle den Bildflecken in den Seitenteilen des Feldes verliehen, und auf diese Weise ist die erstaunliche Schärfe der Wiedergabe durch die neuzeitigen Aufnahmelinsen zu erklären, obwohl beim ersten Anschein für schiefe Bündel die Erfüllung von solchen Bedingungen fehlt, die man beim geraden Bündel einer Untersuchung unterzieht.

Stellt man an eine Aufnahme schief zur Achse liegender Ebenenteile besonders hohe Anforderungen, etwa wie bei der Wiedergabe eines Teiles des Sternhimmels, wo sich einzelne mehr oder minder achsenferne helle Punkte vom dunklen Hinter-

grunde abheben, so wird auch bei Aufnahmelinsen von großer Vollkommenheit die Größe des Bildfleckes mit seiner eigenartigen Lichtverteilung um so deutlicher sichtbar, als man für Sternaufnahmen Linsen von recht merklicher Brennweite verwendet. Der Unterschied in der Güte der Strahlenvereinigung zwischen geraden und schiefen Bündeln wird hier auch bei so gut geplanten Anlagen wie der Petzvalschen Bildnislinse sehr deutlich.

Erwähnt sei schließlich hier noch das für photographische Zwecke 1851 von I. Porro vorgeschlagene Teleobjektiv mit großem Abstande (S. 420) zwischen dem sammelnden Vorder- und dem zerstreuenden Hinterglied. Während man anfänglich, namentlich zur Zeit der Neuaufnahme im Jahre 1891, die Brennweite der Verbindung durch Veränderung des Abstandes meistens innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählen konnte, hat man sich in neuerer Zeit zur Verbesserung der Strahlenvereinigung mit einem festen Abstand der beiden Linsenglieder, also auch mit einem festen Wiedergabemaßstab, begnügt.

94. Die Verzeichnung. Neben den in den vorhergehenden vier Abschnitten betrachteten Schärfenfehlern ist nun noch ein weiterer zu behandeln, der sich auf die Richtigkeit der Wiedergabe bezieht. Weiter unten wird noch auf die Notwendigkeit hinzuweisen sein, den fertig entwickelten Druck zu der Beschauung in perspektivische Lage mit den Aufnahmedingen zu bringen oder sich doch in solcher Lage vorzustellen. Bei dem hier betrachteten Sonderfalle einer aufzunehmenden Ebene kommt das auf eine strenge Ähnlichkeit von Dingebene und Wiedergabe hinaus. Man kann leicht unter diesen Voraussetzungen und bei enger Abblendung die Bedingungen aufstellen, denen genügt werden muß, wenn die Durchstoßpunkte auf der Gaussischen Bildebene streng ähnlich liegen sollen wie die Dingpunkte auf der Dingebene.

Bezeichnet man die einander entsprechenden Abstände von den Durchstoßpunkten der Achse im Ding- und Bildraum mit

$$l = OO_w;\; l' = O'O'_w$$

so erhält man aus der nebenstehenden Abbildung:

$$M = \frac{l'}{l} = \frac{O'P' \cdot \operatorname{tg} w'}{OP \cdot \operatorname{tg} w} = \frac{P'O' \cdot \operatorname{tg} w'}{PO \cdot \operatorname{tg} w} = \frac{P'S' + S'O'}{PS + SO} \cdot \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \frac{-(x' + \delta x') + s'}{-(x + \delta x) + s} \cdot \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w}$$

wo δ_x und δ_x' die Längsabweichungen der Aus- und Eintrittspupille für das Wertepaar w, w' bedeuten. Die Unabhängigkeit des Tangentenverhältnisses $\operatorname{tg} w'/\operatorname{tg} w$ ist also bei endlicher Ding- und Bildweite nur dann für die Verzeichnungsfreiheit (den festen Wert von M) entscheidend, wenn die Mitte der Innenblende abweichungsfrei nach außen abgebildet wird. Man nennt diese Forderung die Bow-Suttonsche Bedingung; sie stammt aus dem Anfang der 60er Jahre des vorigen Jahrhunderts.



Abb. 166. Zur Abhängigkeit der Verzeichnung von der Kugelabweichung der Bilder der Blendenmitte und von der Hauptstrahlneigung.

Deutet man an dieser Stelle noch auf die Verzeichnung in dem häufig wichtigen Falle symmetrischer Anlagen hin, so sei zunächst bemerkt, daß es sich um hemi- oder holosymmetrische Anlagen handelt, je nachdem die Längen-

abmessungen des der Innenblende vorausgehenden Vordergliedes zu denen des ihr folgenden Hintergliedes in dem Verhältnis k oder 1 stehen. Setzt man dieses Verhältnis allgemein $= \iota$, so erhält man, da für die Winkel $w = w'$ in aller Strenge gilt, den Wert

$$M = \frac{-\iota(x+\delta) + s'}{-(x+\delta) + s}.$$

Setzt man, worauf zuerst R. H. Bow hingewiesen hat, $s' = \iota s$, oder nimmt man an, daß im Luftraum der symmetrischen Linse paralleler Strahlengang herrsche, so wird strenge $M = \iota$, und man ist zu dem Satze berechtigt:

Eine symmetrische Aufnahmelinse vom Verhältnis $\iota = \begin{cases} 1 \\ k \end{cases}$ gibt, eng abgeblendet, eine ebene Zeichnung im Verhältnis ι auf einer Bildebene deutlich und streng ähnlich wieder.

Die Entwicklung dieser Bedingungen ist fast vollständig das Verdienst englischer Liebhaber und Gewerbsmänner um das Ende der 50er und den Anfang der 60er Jahre des vorigen Jahrhunderts. Ihre Arbeiten sind dann später — nach 1897 — von der Jenaer Schule wieder ausgegraben und in das rechte Licht gesetzt worden, wovon die Benennung des Bow-Suttonschen Gesetzes noch heute Zeugnis ablegt.

Auf Grund der oben besprochenen Formeln ist von E. Wandersleb im Jahre 1907 eine größere Arbeit der Untersuchung von vielen verschiedenen Anlagen der Aufnahmelinse mit Rücksicht auf die Verzeichnung gewidmet und an allgemein zugänglicher Stelle veröffentlicht worden. Dabei ist nicht allein die Verzeichnung für eine unendlich weit entfernte Aufnahmeebene, sondern auch für bestimmte endliche Abstände untersucht worden.

Der englische Ingenieur R. H. Bow hat aber auch noch eine weitere Anregung für die Behandlung der Verzeichnung gegeben, die im folgenden etwas weiter verfolgt werden soll.

Setzt man in guter Übereinstimmung mit der jetzt noch festgehaltenen Grundannahme voraus, daß die Aufnahmeebene mit engen schiefen Bündeln vollkommen scharf auf der Schirmebene abgebildet werden soll, so wird man zunächst allerdings nur gleiche Schnittweiten der t- und der f-Büschel fordern. Sucht man aber auf dem schiefen Hauptstrahl von O'_w gegen die Lichtrichtung zurückgehend den hinteren Hauptpunkt H'_{tw} und H'_{fw} auf, so wird man nur dann eine gleiche Vergrößerung in den schief zum schiefen Hauptstrahl gelegenen kleinsten Ebenenteilen erwarten können, wenn auch diese schiefen Hauptpunkte H'_{tw} und H'_{fw} in einem einzelnen Punkte zusammenfallen.

Bei dem Fernbrillenglase hatte eine solche Überlegung gewisse Aufschlüsse über die Lage der Hauptpunkte längs schiefen Hauptstrahlen geliefert, und sie würde sich entsprechend auch hier durchführen lassen und hier ebenfalls als Bedingung des Verschwindens der Verzeichnung für die betrachteten Winkel $w_1 w'$ auf einen Schnittpunkt der beiden Hauptpunktsspuren in dem Achsenschnitt der Rechnung führen.

95. Die Farbenverschiedenheit wichtiger Bildfehler. Genau so wie man zur Hebung der Einstellverschiedenheit untersuchen mußte, welchen Einfluß die Zerstreuung in den Glasarten auf die Schnittweite im Gaussischen Raum hatte, kann man auch den Einfluß der Farbenzerstreuung auf die verschiedenen Bildfehler feststellen. Man kommt dann auf eine Farbenverschiedenheit der Kugelabweichung, der Fehler gegen die Sinusbedingung, der Krümmung der astigmatischen Bildschalen und der Verzeichnung.

Nicht alle diese Farbenverschiedenheiten sind für die einzelnen Klassen von Geräten von gleichem Gewicht. Am größten ist dieses da, wo ein Zwischen-

bild einer merklichen Vergrößerung unterworfen wird wie namentlich bei Mikroskopobjekten kurzer Brennweite. Hier hat E. Abbe schon seit 1873 auf die Bedeutung der Farbenverschiedenheit der Kugelabweichung (der chromatischen Differenz der sphärischen Aberration in seiner späteren Ausdrucksweise) hingewiesen und mit der Zeit Anlagen ausführen lassen (Apochromatobjektive), worin diese Abweichung ihrem Betrage nach weit herabgedrückt oder aufgehoben worden war. Auch für Fernrohrobjektive hat C. F. Gauss einen Vorschlag veröffentlicht, bei dem dieser Fehler vernichtet wurde. Ferner hat man auch bei Mikroskopobjektiven die Farbenverschiedenheit der Vergrößerung (Abbes chromatische Vergrößerungsdifferenz) untersucht und auf einen ein für allemal bestimmten, im Okular leicht zu hebenden Betrag gebracht.

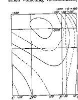


Abb. 167. Schichtenbild für die Farbenverschiedenheit der Kugelabweichung bei Petzvals Bildnislinse $f' = 100$ mm. Die Abszissen ergeben die Wellenlängen, was durch die Fraunhoferschen Linien C, D, F, G' angedeutet ist. Die Ordinaten sind die vierfach vergrößerten Einfallshöhen. Die Schichtenhöhe ist 0,05 mm.

Ähnliche Aufgaben bestehen für die Aufnahmelinse und eines ihrer Hilfsgeräte. Bei der Aufnahmelinse ist wenigstens die Farbenverschiedenheit der Kugelabweichung häufiger untersucht und gelegentlich nach dem Vorgange M. v. Rohrs von 1899 in einem Schichtenbilde dargestellt worden; es sei hier ebenfalls Abb. 167 wiedergegeben, um den Einfluß der Zerstreuung in der Petzvalschen Bildnislinse als einer sehr wichtigen photographischen Anlage ohne Hebung der Einstellverschiedenheit darzutun. Man sieht bei näherer Betrachtung des Schichtenbildes, daß mit abnehmender Wellenlänge (oder zunehmenden Brechzahlen) die Kugelabweichung immer mehr überbessert wird, so daß einer Unterbesserung (Randschnittweite — Nullstrahl für D) von $-0{,}15$ mm für tiefes Rot eine Überbesserung von über 0,1 mm für Violett gegenübersteht. Ferner erkennt man auf den ersten Blick, daß das Gebiet bester Fehlerhebung, wie es von der Linie $-0{,}2$ mm im gelben und grünen Gebiet umgeben wird, für die chemische Wirkung auf der lichtempfindlichen Schicht mindestens in der Zeit vor der Erfindung farbenrichtiger Platten in keiner Weise verwertet werden konnte. Wenn man auch für Einzelheiten auf Schriften aus dem rein photographischen Gebiet hinweisen muß, so werden doch schon diese kurzen Andeutungen einen Begriff von der Ausdehnung des Arbeitsgebiets geben, das von den Rechenmeistern optischer Fabriken bei den Vorbereitungen für eine neue Linsenfolge bearbeitet werden muß.

Die Strahlenbegrenzung.

Wenn man nun auch annimmt, mit einer bestimmten Anlage seien die verschiedenen Bedingungen der vorstehenden Seiten besonders gut erfüllt und die Abbildungsfehler gehoben, so ist damit doch nichts weiter gesichert als die Wiedergabe einer Aufnahmeebene, und die Frage ist zu beantworten, was die Aufnahmelinse leistet, wenn ihr nicht eine besondere Aufnahmeebene dargeboten wird. In den weitaus meisten Fällen liegt diese Aufgabe auch nicht vor, sondern es soll eben von einem räumlich ausgedehnten Gegenstande, einer Person, einer

Gruppe, einer Baulichkeit, einem Innenraum, einer Landschaft die Aufnahme gemacht werden.

Nun entspricht aber einem **Raumding**, wie man ohne weiteres aus den Gleichungen (2) und (3) ebenso wie aus der Abb. 139 ersehen kann, ein **Raumbild** oder mit anderen Worten ein Gebilde mit einer bestimmten Tiefenausdehnung, und es wird damit sofort klar, daß es sich bei dem Ausdruck der photographischen Aufnahme eines der oben angeführten Aufnahmegegenstände unmöglich um seine Abbildung auf der ebenen lichtempfindlichen Schicht im strengen optischen Sinne handeln kann.

Man kommt am bequemsten zu einer klaren Vorstellung von der hier vorliegenden Aufgabe, wenn man daran denkt, daß man die Mannigfaltigkeit der in der Aufnahmekammer die Austrittspupille verlassenden und nach den nach Länge, Breite und Tiefe verschiedenen Bildpunkten strebenden Strahlenbündeln durch den Schirm der Mattscheibe schneidet. Diese Darstellung — unstreng ein „Bild" des Aufnahmegegenstandes genannt — wirkt auf den Photographen; hier ändert er durch Betätigung der Einstellung (Verschiebung der Mattscheibe oder Verlagerung der Aufnahmelinse) oder durch Umstellung der Öffnung (Erweiterung oder Einengung der Stellblende) so lange, bis er ein ihm zusagendes Ergebnis erreicht hat.

Wir können und wollen nun fragen, in welcher Beziehung diese ebene Darstellung auf der Mattscheibe zu dem räumlich ausgedehnten Aufnahmeding steht, und ob wir wirklich nur erst auf der Mattscheibe die Wirkung der photographischen Aufnahme beurteilen können.

96. Die Perspektive der Aufnahme. In Abb. 168 sei ein bestimmter Dingpunkt O auf der Mattscheibe eingestellt, was optisch nichts anderes bedeutet, als daß die Mattscheibe durch seinen Bildpunkt O' gelegt sei, und alsdann sei die Aufnahmelinse stark abgeblendet, was für das Gebiet in der Nachbarschaft des eingestellten Punktes nichts weiter bedeutet als einen Lichtverlust. Ist die Abblendung weit genug getrieben, so kann man sich wiederum (wie in Ziff. 94) vorstellen, daß nur das Hauptstrahlenbündel von der Aufnahmelinse durchgelassen werde. Diese Bemerkung erlaubt uns auf der Dingseite eine sehr bequeme Auffindung des Gebildes, das der Darstellung auf der Mattscheibe als Gegenstand zugeordnet ist. Es muß, da ja das Mattscheibenbild seiner Entstehung nach auf einer achsensenkrechten Bildebene zustande kommt, auf der zugeordneten achsensenkrechten Dingebene liegen. Von dieser Dingebene kennen wir aber nach der Annahme im Anfang den bestimmten Dingpunkt O, und durch ihn können wir nur eine einzige achsensenkrechte Dingebene legen, wir nennen sie die **Einstellebene**. Die **Mattscheibenebene** wurde nach der Zuziehung der Stellblende von dem ganzen Hauptstrahlenbündel des Dingraumes durchstoßen, soweit es in der Pyramide über dem viereckigen Mattscheibenrahmen Platz fand. Dementsprechend wird man auch die Einstellebene von dem dingseitigen Haupt-

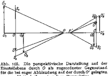


Abb. 168. Die perspektivische Darstellung auf der Einstellebene durch O als zugeordneter Gegenstand für die bei enger Abblendung auf der durch O' gelegten Mattscheibe entworfene Perspektive.

strahlenbündel durchstoßen lassen, soweit es in die vierseitige Grenzpyramide fällt, deren Grundfläche dem lichten Rande des Mattscheibenrahmens als Gegenstand (oder in rückkehrender Lichtrichtung als Bild) entspricht. Die dingseitigen Hauptstrahlen werden aber je durch zwei Punkte bestimmt: einmal von der Eintrittspupille P, die sie sämtlich durchsetzen müssen, denn sie kreuzen ja die Achse eben in der Eintrittspupille[1]); sodann aber durch alle innerhalb der vierseitigen Grenzpyramide liegenden irgendwie auffälligen Punkte der Dingoberfläche.

Eine solche Darstellung aber, die durch geradlinige von einem einzelnen Punkt ausgehende Strahlen auf einer Ebene ausgestoßen wird, ist in der Kunst seit langem bekannt; sie ist unter dem Namen einer ebenen Perspektive mit dem zugehörigen Zentrum bekannt.

Übertragen wir die so gewonnene Einsicht in die photographische Fachsprache, so kommen wir zu dem folgenden Ergebnis: Handelt es sich um Aufnahmen mit eng abgeblendeter Linse, so braucht man nur nach vollzogener Aufstellung der Kammer durch den willkürlich gewählten Einstellpunkt die achsensenkrechte Einstellebene zu legen, und die durch jene Aufstellung der Kammer gesetzte Eintrittspupille liefert dann die vom Gesichtsfeldrande der Kammer begrenzte Perspektive.

Man erkennt daraus ohne weiteres, daß man einäugig und mit ruhig gehaltenem Kopf im Blicken sofort den perspektivischen Eindruck eines irgendwie gewählten Aufnahmedinges feststellen kann, ohne überhaupt erst für diese Auswahl die Kammer zu richten. Man muß nur den Augendrehpunkt Z an den Ort P der Eintrittspupille bringen. Die Grenzen des auf diese Weise benutzten Gesichtsfeldes kann man sich bequem durch einen in die richtige Entfernung gebrachten, also unter den zutreffenden Grenzwinkeln, nach Breite w_b und Höhe w_h erscheinenden Blendrahmen (ein Ikonometer) feststellen.

Die Tatsache, daß die gleichen Gesetze der geometrischen Perspektive in aller Strenge für die Aufnahmekammer gelten wie für den überlegend und bewußt arbeitenden Künstler, muß hier deutlich hervorgehoben werden; sie ist erst langsam und allmählich, am ersten und liebevollsten in den musterhaft geleiteten englischen Arbeitsgesellschaften der 60er Jahre, entwickelt worden.

97. Die Abbildungstiefe photographischer Aufnahmen. Nun kann man verständlicherweise in Wirklichkeit nicht mit eng abgeblendeten Linsen arbeiten. Läßt man in Abb. 169 einen endlichen Durchmesser der Pupille zu, so entsteht auf der Mattscheibe der Kammer insofern eine Änderung, als die Dingpunkte vor oder hinter der Einstellebene nunmehr auf der Mattscheibe durch einen Zerstreuungskreis vertreten werden; denn die Ebene schneidet die von der endlich geöffneten Austrittspupille ausgehenden bildseitigen Strahlenkegel entweder nach oder vor ihrer Vereinigung im Bildpunkt. Mithin besteht die Darstellung auf der Mattscheibe nicht mehr aus den Durchstoßpunkten der Hauptstrahlen, wie sie bei der vorigen Stufe der Perspektive auftraten, sondern sie ist

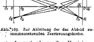


Abb. 169. Zur Ableitung der das Abbild zusammensetzenden Zerstreuungskreise.

[1]) Selbst wenn wie in Ziff. 94 die Eintrittspupille P als behaftet mit Kugelabweichung anzunehmen wäre, würden diese winzigen Abweichungen ohne wirkliche Einbuße an Strenge gegen die Dingweiten zu vernachlässigen sein, da diese bei der Aufnahmelinse von einer ganz anderen Größenordnung sind.

aus Punkten und Zerstreuungskreisen zusammengesetzt. An den Größenverhältnissen des dargestellten Raumgebildes ändert sich übrigens nichts, da sich um den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls für einen Punkt vor oder hinter der Einstellebene der Zerstreuungskreis eben um ihn als seinen Mittelpunkt herumlagert, denn die Ebene der Austrittspupille und die der Mattscheibe sind zueinander parallel. Mithin wird ein jeder aus der Austrittspupille als seiner Grundfläche tretende schiefe Kreiskegel mit dem Hauptstrahl als Kegelachse von der zur Grundfläche parallelen Mattscheibenebene in aller Strenge in einer Kreisspur geschnitten, die um den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls als ihren Mittelpunkt gelagert ist. Da man nun die Kegelachse als die Schwerlinie des Kegels auffassen kann, so verlegt man ganz von selber den durch einen solchen Zerstreuungskreis vertretenen Dingpunkt bei der Betrachtung des Entwurfs auf der Mattscheibe eben in die Richtung auf den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls hin, mindestens solange man ihn überhaupt noch als einen Punkt auffaßt.

Fragt man nunmehr, ähnlich wie bei der Behandlung der einfacheren Aufgabe der früheren Stufe mit enger Abblendung nach dem auf der Dingseite diesem Entwurf entsprechenden Gebilde, so ist es von vornherein klar, daß man es ebenfalls in der Einstellebene zu suchen hat. Da auf der Bildseite nun die endlichen Öffnungskegel die Schnittspuren für den Entwurf auf der Mattscheibe liefern, so muß man sich ganz entsprechenderweise jetzt die endlichen Öffnungsbündel auf der Dingseite vorstellen, um auf der Einstellebene ihre Schnittspuren aufzusuchen. Die so auf der Einstellebene entstehende Darstellung, in der man jeden nicht bereits in ihr liegenden, von der Eintrittspupille sichtbaren Dingpunkt mittels eines endlich geöffneten schiefen Kreiskegels mit der Eintrittspupille als Grundfläche in dieser ausgewählten Dingebene entwirft, ist eben der ebene (zwar nicht wirkliche, aber in der mathematischen Vorstellung bestehende) Aufnahmegegenstand, der von einer vollkommenen Aufnahmelinse in N-facher Verkleinerung als Entwurf auf der Mattscheibe wiedergegeben wird. Im nachfolgenden werden wir von ihm als dem **Abbild** sprechen, das durch die einmal gesetzte Eintrittspupille von endlichem Durchmesser auf der irgendwie gewählten achsensenkrechten Einstellebene mittels bloßer geometrischer Mittel bestimmt wird. Die Aufgabe der Aufnahmelinse besteht allein darin, diesen aus Punkten und Zerstreuungskreisen bestehenden Entwurf auf der Mattscheibe in N-facher Verkleinerung wiederzugeben, und diese Wiedergabe wird, wo man sie zu verwenden hat, als **Abbildsbild** bezeichnet werden. Auf diese Weise ist die im Anfang dieses Abschnittes gestellte Aufgabe erledigt und die Leistung deutlich bezeichnet, die von der Aufnahmelinse bei der Darstellung des Abbildsbildes auf der Mattscheibe zustande gebracht wird, soweit die geometrische Optik in Frage kommt.

Zu dieser Darstellung müssen noch zwei zusätzliche Bemerkungen gemacht werden, um jegliches Bedenken zu zerstreuen, das sich auf dieser Betrachtungsstufe etwa einstellen könnte.

98. Die Mißzeichnung von Aufnahmelinsen mit riesenhaften Eintrittspupillen. In früherer Zeit, ganz bestimmt gegen das Ende der 50er Jahre des vorigen Jahrhunderts, verwandte man für Bildnisaufnahmen Linsenfolgen mit ungemein großen Linsendurchmessern von 12, 15, ja 21 cm Ausdehnung. Wenn man auch wohl annehmen kann, daß diese übergroßen Öffnungen beim tatsächlichen Gebrauch zu einem guten Teile abgeblendet wurden, so wird immerhin die Eintrittspupille noch eine sehr bemerkenswerte Größe gehabt haben. Stellt man sich nun weiter vor, daß bei einer Bildnisaufnahme der Kopf des Aufzunehmenden in keiner besonders großen Entfernung von der Eintrittspupille seinen Ort hatte, so wird man leicht gewisse unerwünschte Folgen verstehen.

Da zu dem Entwurf des Abbilds die ganze Kreisfläche der gerade wirkenden Eintrittspupille heranzuziehen ist, so werden der äußersten (rechten oder linken) Seite dieser scheinbaren Öffnung unter Umständen Gesichtsteile des Aufzunehmenden (der rechten Seite mehr von der ihr gegenüberstehenden Wangenhälfte und links entsprechend) ausgesetzt sein, die für die Linsenmitte durch andere Gesichtsteile verdeckt sind. Da unsere Augenpupille nur einen kleinen Durchmesser hat und auch beim Blicken nach allen Richtungen allein Strahlenbündel zuläßt, die gleichsam auf eine sehr kleine Blendenöffnung hin gerichtet sind, so wird eine derartige Darstellung durch eine Riesenlinse unter Umständen merklich unnatürlich wirken können.

Diese Eigentümlichkeit der riesenhaften Aufnahmelinsen hat man ungefähr zu jener Zeit als ihr „Hintenherumsehen" gekennzeichnet; wir werden heute von ihrer Mißzeichnung reden.

99. Die Abschattung der Eintrittspupille nach dem Rande. Sodann muß darauf hingedeutet werden, daß bei den gewöhnlichen Aufnahmelinsen zwar nur eine einzige Eintrittspupille, aber daneben noch eine Eintrittsluke vorhanden ist, wenn nicht ihrer zwei.

Im allgemeinen Fall wird die Nebenwirkung dieser Luken auf die Öffnung der von den Seitenteilen des dingseitigen Feldes eintretenden Bündel bereits an einer früheren Stelle geschildert worden sein. Hier sei noch besonders darauf hingewiesen, daß durch diese Nebenwirkung der Luke oder der Luken nicht mehr die ganze Eintrittspupille wirksam ist, sondern nur ein lichtes Kreiszweieck oder Kreisviereck. Man nennt das die abschattende (vignettierende) Wirkung der Luken. Es sei darauf hingewiesen, daß namentlich mit einer zur Spur des Hauptstrahls unsymmetrischen Begrenzung der Pupillenöffnung die Sicherheit wegfällt, den Bildpunkt an den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls zu verlegen, so daß also durch die Abschattungswirkung der Luken an der Auffassung der Perspektive unerwünschte Abweichungen entstehen können. Man wird daher gut tun, die obigen, ziemlich allgemeinen Überlegungen für vollkommene Aufnahmelinsen vornehmlich auf das Gebiet ohne Abschattung zu beschränken. Bei der Aufnahme selbst hilft man sich damit, daß man durch eine stärkere Abblendung der Eintrittspupille das abschattungsfreie Gesichtsfeld erweitert.

Die Strahlungsvermittlung auf der lichtempfindlichen Schicht.

100. Bemerkungen zur absoluten Lichtstärke. (Die physikalischen Wirkungsbedingungen. Legt man mit E. ABBE einem von irgendeiner Lichtquelle ausgesandten Strahl die natürliche Leuchtkraft (spezifische Intensität, heute meistens Flächenhelle) I bei, so wird diese beim Durchgang durch Linsen auf eine doppelte Weise verringert.

1. Der Spiegelungs- oder Reflexionsverlust. Beim Auffall auf eine Fläche, die ein Mittel von der Brechzahl 1 von einem anderen von der Brechzahl n trennt, wird I zerlegt in

$$I = I_0 + I_1,$$

wo nur I_1 weitergeführt, dagegen I_0 in das erste Mittel zurückgeworfen wird. Beschränkt man sich zunächst auf den GAUSSischen Bildraum, so ist

$$I_0 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 I; \qquad I_1 = \frac{4n}{(n+1)^2} I.$$

Setzt man bei ganz leichtem Kronglas $n = 1\frac{1}{2}$, so wird

$$I_0 = I/25; \qquad I_1 = 24\, I/25.$$

Handelt es sich um eine Glaslinse aus diesem Werkstoff, so ist fur die zweite Flache an Stelle von n nunmehr $1/n$ zu setzen, was, wie man einsieht, für die Formeln nichts ausmacht, und man erhalt fur die Leuchtkraft I_2 des die Linse verlassenden Lichtes

$$I_2 = \frac{4n}{(n+1)^2} I_1 = \left\{\frac{4n}{(n+1)^2}\right\}^2 I,$$

das ist fur $n = 1\frac{1}{2}$

$$I_2 = (0{,}96)^2 I \text{ abg.} = 0{,}92\, I.$$

Fallt also der Achse entlang auf eine dunne Linse mit $n = 1\frac{1}{2}$ ein Lichtstrahl auf, so werden von seiner naturlichen Leuchtkraft etwa 8% zuruckgeworfen und nur etwa 92% hindurchgelassen

Stellt man sich, diese Uberlegung weiterfuhrend,

2, 3, 4 solcher Linsen in Luft vor, so tragen sie

nur 85, 78, 72% zu dem durch Brechung entstandenen Hauptbilde bei die Ausnutzung der auf die Linse entfallenden naturlichen Leuchtkraft wird also immer geringer.

Berucksichtigt man nun auch andere Brechzahlen, etwa n_1 und n_2; $n = n_2/n_1$, so läßt sich zeigen, daß der Spiegelungsverlust an einer Kittflache selbst bei so großen Brechzahlverschiedenheiten, wie sie bei optischen Rechnungen selten vorkommen, verschwindend ist.

Setzt man z. B. $n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}65$, $n = n_2/n_1 = 1{,}1$, so wird

$$\frac{4n}{(n+1)^2} = \frac{440}{441} = \text{abg} \;\; 0{,}998$$

Tabelle 6

Spiegelungsreste der auftreffenden Leuchtkraft

Zahl der Linsen	Zahl der Flächen gegen Luft	Mittlere Brechzahlen n 1,55	1,57	1,58
1	2	0,9091	0,9066	0,9041
2	4	0,8265	0,8219	0,8173
3	6	0,7514	0,7451	0,7380
4	8	0,6831	0,6755	0,6680

Man kann also nach H. Erfles sogleich folgender Zusammenstellung bei der Kenntnis der Anlage einer Aufnahmelinse durch einen einfachen Überschlag auf die Prozentzahl kommen, die von der längs der Achse auffallenden Leuchtkraft trotz den Spiegelungsverlusten ausgenutzt wird

Läßt man die Beschränkung auf den achsennahen Raum fallen, so muß man nach den Fresnelschen Formeln die Einfalls- und die Brechungswinkel heranziehen, um den Spiegelungsrest bei schiefem Durchschnitt zu ermitteln.

Das nebenstehende Schaubild 170 wird aber auf den ersten Blick erkennen lassen, daß bei den drei genauer untersuchten Anlagen (einer Einzellinse, einer symmetrischen Verbindung von zwei solchen und der Petzvalschen Bildnislinse) bei nicht übertriebenen Neigungsschiefen die durchgelassene Leuchtkraft nur ganz unbedeutend von ihrem für die Achse geltenden Wert abweicht. Für Überschlagsrechnungen wird man also mit der Erfleschen Tafel auskommen.

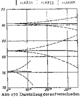


Abb 170 Darstellung der auf verschieden geneigten Hauptstrahlen geltenden vermittelten Leuchtkraft des auffallenden natürlichen Lichts ($0 \leq w \leq 34°$). Von oben hinabgehend sind Anlagen mit 2, 4 und 6 Flächen gegen Luft untersucht werden

Da der Spiegelungsverlust nur von π (oder von den Winkeln) abhängt, so ist er von dem Ausführungsmaßstab einer gegebenen Anlage unabhängig.

Die Störung durch Nebenbilder. Indessen muß an dieser Stelle, bevor der nächste Abschnitt eingeschaltet werden kann, eine Erscheinung behandelt werden, die, auf die Spiegelungsverluste zurückgehend, für die Aufnahmelinse von ziemlicher Bedeutung ist.

Ganz im allgemeinen gesprochen wird nur das an der ersten Linsenfläche zurückgeworfene Licht ohne weiteren Schaden für das Haupt- oder Brechungsbild verlorengehen. Von der zweiten oder jeder späteren Fläche — man braucht nach dem Vorhergegangenen nur die Flächen gegen Luft zu berücksichtigen —



Abb 171. R. Schuttaufs Darstellung der 6 Nebenbilder an einem symmetrischen Objektiv älterer Anlage. Das Hauptbild liegt bei ×. Die hellen Flecke sind die Zerstreuungsscheiben der Nebenbilder auf der Mattscheibe. Für drei Nebenbilder wirkt die Linsenfassung als Luke, abschattend, so daß die Nebenbilder nicht kreisförmig sind, d. h. durch ihre eigene Austrittspupille begrenzt werden, sondern infolge der Lukenwirkung als Kreiszweiecke oder ein Kreisviereck erscheinen.

wird ein bestimmter Teil zwar auch zurückgeworfen, aber ein sehr geringer Bruchteil davon erhält durch die zweite Spiegelung an einer der voraufgehenden Flächen wiederum seine Richtung auf das Hauptbild zu. Von einem ursprünglichen Strahl mit der natürlichen Leuchtkraft I gelangt also ein zwiefach gespiegelter und 2λ-fach gebrochener Strahl mit der ungemein geringen vermittelten Leuchtkraft $I_{(2,\,2\lambda)}$ nach der Abb. 171 in den Bildraum der Aufnahmelinse und an die Plattenschicht. Man kann sich die Vorstellung dadurch erleichtern, daß man sagt, bei einer Aufnahmelinse gehört zu den beiden Spiegelungen und den 2λ-Brechungen eine ausgerichtete Folge zwiefach spiegelnd-brechender Flächen, der verständlicherweise eine bestimmte Brennweite $f'_{(2,\,2\lambda)}$ im Gaussischen Raum zugehört. Solcher Folgen mit zwiefacher Spiegelung gibt es bei einer Anlage aus ν Linsen oder verkitteten Linsengruppen mit 2ν Luftflächen im ganzen $v = 2\nu(2\nu-1)/1\cdot 2$, d. h. für ν: 1, 2, 3, 4 Linsen oder Linsengruppen, 2ν: 2, 4, 6, 8 Flächen gegen Luft v: 1, 6, 15, 28 zwiefach spiegelnd-brechende Folgen.

Unter Benutzung dieser Bezeichnung wird in diesen Fällen die oben eingeführte Größe λ den Ungleichungen genügen

$$\nu \leqq \lambda \leqq 3\nu - 2$$

Man erkennt leicht, daß von einem jeden Dingstückchen um $O_\varkappa$ eine jede dieser ν Folgen ein bestimmtes Bildstückchen entwirft, dessen Ort und Größe im Bildraum in erster Linie von $f'_{(\mathfrak{z},\, 2\lambda)}$ abhängt.

Fängt man das Haupt- oder Brechungsabbild auf der Mattscheibe auf, so entstehen auf dieser Ebene gleichzeitig ν sehr lichtschwache Nebenbilder, und sie überdecken das hauptsächliche in einer Weise, zu der sich keine allgemeine Aussage machen läßt. Jedenfalls kann dieselbe Stelle der Mattscheibe im Hauptbilde einem Schattenteile des Raumdinges zugeordnet sein, während sie für eines oder mehrere der zwiefach spiegelnd-brechenden Folgen einem hellleuchtenden Gebiete des Dingraumes entspricht. In einem solchen Falle kann sich auch die an sich sehr geringe vermittelte Leuchtkraft $I_{(\mathfrak{z},\, 2\lambda)}$ als schädlich erweisen, wenn nämlich der Bildpunkt eben dieser zwiefach spiegelnd-brechenden Verbindung unglücklicherweise nahe an dem Orte der Mattscheibe liegt. In einem solchen Falle spricht man von einem auf der Platte erscheinenden **Nebenbild** (es wird in der Regel ein **Nebenabbild** sein), und man kann dem Rechenmeister die Aufgabe stellen, die einzelnen Flächen der Linsenfolge so gegeneinander abzustimmen, daß die Nebenbildpunkte möglichst alle weit von dem Mattscheibenorte des Hauptbildes entfernt sind.

Auch könnte für eine oder mehrere der zwiefach spiegelnd-brechenden Folgen die Austrittspupille $P'_{(\mathfrak{z},\, 2\lambda)}$ in oder ganz nahe an dem Mattscheibenorte des Hauptbildes liegen; alsdann würde sich bei einigermaßen großer Verschiedenheit der Leuchtkraftverteilung auf dem Aufnahmegegenstand in der Plattenmitte immer ein verhältnismäßig heller Fleck (ein **Blendenfleck**) zeigen, was ebenfalls zu vermeiden ist.

Man erkennt jedenfalls, daß diese sehr unerwünschten Nebenwirkungen ziemlich bald der Vermehrung der Zahl von Flächen gegen Luft eine Grenze setzen.

2. **Der Dämpfungs- oder Absorptionsverlust.** Strahlen verschiedener Wellenlänge werden mehr oder minder zurückgehalten, **gedämpft** oder **absorbiert**, genauer nimmt dieser **Dämpfungsverlust** bei den gebräuchlichen Glasarten mit abnehmender Wellenlänge zwar um so größere Beträge an, doch bleibt es für die Teile des Spektrums, die bei dem gewöhnlichen photographischen Verfahren von größerer Bedeutung sind, bei erträglichen Dämpfungsverlusten, wenn man die heutigen Glasarten von befriedigender Durchlässigkeit voraussetzt und ferner beachtet, daß die neuzeitigen Aufnahmelinsen keine besonders großen Dicken haben. Kennt man die Weglängen, so vermag man mit einer Formel, die die Weglänge im Exponenten enthält, mit Hilfe der auf die Längeneinheit (hier meistens das Zentimeter) bezogenen **Absorptionskonstanten (Dämpfungszahlen)** den **Dämpfungsrest** ziffernmäßig zu bestimmen. Es sei zur Bildung richtiger Vorstellungen daran erinnert, daß die Linsendicken bei Sammellinsen gegen den Rand ab-, bei Zerstreuungslinsen zunehmen.

Tabelle 7. **Dämpfungsreste der Leuchtkraft.**

Weglänge in Glas in mm	Glasarten a	Glasarten b
20	0,9898	0,9792
40	0,9797	0,9587
60	0,9697	0,9387
80	0,9598	0,9192
100	0,9500	0,9000

Unter der obigen Voraussetzung verhältnismäßig geringer Linsendicken bei den üblichen Handkammerlinsen sind die Dämpfungsverluste kleiner als die Spiegelungsverluste. Auch hier

wird eine auf H. Erfle zuruckgehende Tafel zu einem leichten Überschlag verhelfen.

Wie man aus den Zahlen erkennt, sind die Glasarten *a* und *b* so gewählt, daß für 10 cm Glasweg *a* die Leuchtkraft auf den Rest von 95%, *b* die Leuchtkraft auf den Rest von 90% dämpft.

Auf diese Weise sind die Grundlagen gegeben, wie man (durch Multiplikation der entsprechenden Spiegelungs- und Dämpfungsreste) aus der auffreffenden natürlichen Leuchtkraft I die vermittelte Leuchtkraft I_v berechnen kann.

Es bleibt nun noch übrig, nach Abbes Vorgänge die zweite Gruppe von Wirkungsbedingungen zu behandeln, die durch die Menge der durchgelassenen Strahlen gegeben sind. Sie hängen von der Lage des leuchtenden Flächenstücks zum beleuchteten ab, sind also im Gegensatz zu den ersten geometrischer Art.

101. Bemerkungen zur relativen Lichtstärke. (Die geometrischen Wirkungsbedingungen.) Für den Anfang soll die Lichtwirkung bei der Einstrahlung behandelt werden. Zunächst sei freie Strahlung vorausgesetzt, darunter ist also bei den Aufnahmelinsen der Fall verstanden, wo die Eintrittspupille in keiner Weise durch die Luke abgeschattet wird.

Die Abnahme der Beleuchtung nach dem Rande (Abb. 172). Bezeichnet man mit dL_0 die Lichtmenge, die bei ziemlich enger Abblendung von einem ziemlich fernen ($a = Pp_0$) achsennahen Flächenstückchen dq in die Eintrittspupille dQ geschickt wird, so kann man mit Hilfe des Lambertschen Gesetzes zeigen, welche Lichtmenge dL_w nach dQ von dem gleichen Flächenstücke dq gelangt, wenn man es auf der achsensenkrechten Einstellebene in der Nähe eines Randpunkts p annimmt. Da einmal die mit w wachsende Entfernung Pp gegeben ist als

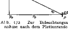


Abb. 172. Zur Beleuchtungsabnahme nach dem Plattenrande.

$$Pp = Pp_0/\cos w = a/\cos w,$$

und ferner sowohl dq als auch dQ gegen den Hauptstrahl Pp unter w geneigt sind (mit anderen Worten sowohl die Pupille dQ von p aus als auch das strahlende Stückchen dq von P aus verkürzt erscheint), so ergibt sich eben nach dem Lambertschen Gesetze

$$dL_w = dL_0 \cos^4 w,$$

wenn es sich, wie bei den üblichen Kammern fast immer, um eine achsensenkrechte Einstellebene handelt.

Bei einigermaßen großen Feldwinkeln w nimmt also die Beleuchtung von der Mitte nach dem Rande ganz ungemein stark ab. Man hat versucht, die Beleuchtung gleichmäßiger zu gestalten, kann das aber leider häufig nur dadurch erreichen, daß man die Beleuchtung der mittennäheren Teile vermindert. Unter den dafür vorgeschlagenen Mitteln seien hier angeführt:

1. Ausgleich durch Dämpfung. Da Sammellinsen in der Mitte wesentlich dicker sind als am Rande, so hat man in England schon seit den 60er Jahren vorgeschlagen, etwa eine Sammellinse aus entsprechend lichtdämpfendem Glas zu machen. Später sind auch besondere Ausgleichsgeräte solcher Anlage vorgeschlagen worden, haben sich aber schwerlich eingeführt.

2. Ausgleich durch Abschattung. Stellt man eine undurchsichtige Blendung von zweckmäßiger Gestalt etwas vor oder hinter die Eintrittspupille, so wird (Abb. 173) ein sehr großer Teil für gerade und wenig geneigte Strahlen abgeschattet, bei größerer Schiefe aber mehr und mehr freigegeben. Auch dieser

Vorschlag ist namentlich in dem Zeitraum der glänzenden englischen Gemeinschaftsforschung bearbeitet worden.

3. Ausgleich durch Belichtungsdauer. Hier läßt man durch eine besondere (zur Vermeidung deutlicher Belichtungsgrenzen meist rasch umlaufende) Blendung vor der Eintrittspupille die Seitenteile des Feldes länger unter der Wirkung des Lichtes stehen als die mittennahen. Von dieser Art ist auch die Ausgleichsvorkehrung an dem GOERZischen Hypergon-Doppelanastigmat.

Wurde dagegen — was nebenbei zu der Behandlung der üblichen achsensenkrechten Mattscheiben hinzugefügt sei — als Einstellfläche eine zu P konzentrische Kugelfläche durch O gewählt werden, so wäre überall

$$Pp = Pp_0 = a$$

und die Neigung von dq wäre an jeder Stelle gleich Null, so daß sich ergäbe

$$\{dL_w\}_{\text{kugl. Einstellfl.}} = dL_0 \cos w\,,$$

was selbstverständlich eine sehr viel geringere Ungleichmäßigkeit der eintretenden Strahlung bedeuten würde.



Abb 173 Achsenschnitt durch die SLIGHT-BOWsche Anordnung.
a Blende, b Blendscheibe. Während das gerade Bündel c stark vermindert wird, gilt das für die geneigten Bündel f und g in viel geringerem Grade

Die bei endlicher Pupille aufgenommene Lichtmenge. Wendet man sich nach dieser Einschaltung wieder zu den gewöhnlichen Kammern mit ihrer achsensenkrechten Einstellebene zurück, so kann man auch die Lichtmenge $\overline{dL}_0$ angeben, die

$$\overline{dL}_0 = \pi I\, dq_0 \sin^2 u$$

ein achsensenkrechtes Flächenstückchen dq_0 auf eine endlich geöffnete Eintrittspupille in P sendet. Während man früher dieses Ergebnis aus einer Integration erhielt, hat A. KÖHLER das Verdienst, es 1924 auch auf ganz elementarem Wege abgeleitet zu haben. Man erkennt hier den Einfluß der Abblendung, der Verminderung von u, auf die Größe der eingelassenen Lichtmenge.

Für ein abschattungsfreies Feld von der Hauptstrahlneigung w kann man sich, wenn man die Anforderungen an die Genauigkeit nicht überspannt, mit der recht weitgehenden Annäherung begnügen:

$$\overline{dL}_w = \overline{dL}_0 \cos^4 w\,.$$

Die Anwendung des letzten ABBEschen Strahlungssatzes. Sind auf diese Weise einige bestimmte Begriffe auch über die geometrischen Verhältnisse bei der Einstrahlung gebildet worden, so kann man mit ABBE nun auf den Bildraum eingehen.

Beachtet man, daß es sich bei der üblichen Darstellung auf der lichtempfindlichen Schicht um eine Abbildung der (in der Regel aber mit vermittelter Leuchtkraft strahlenden) Lichtquellen handelt, so läßt sich der zweite ABBEsche Strahlungssatz sinngemäß abgeändert in der folgenden Weise aussprechen:

„Die Lichtwirkung auf der photographischen Platte entspricht stets einer Lichtstrahlung aus der wirksamen Fläche der Austrittspupille, wenn man dieser die vermittelte Leuchtkraft des zugehörigen Dingflächenstückes beilegt."

Genau so wie man vorher das Flächenstückchen dq der Einstellebene auf die kleine oder endliche Pupille um P strahlen ließ, kann man nun auf Grund dieses ABBEschen Strahlungssatzes die Strahlung von der kleinen oder endlichen Austrittspupille um P' ausgehen und auf die Flächenstückchen dq' der Matt-

scheibenebene antreffen lassen. Natürlich ist dann überall an Stelle von w eben w' zu schreiben — wenn es sich nicht wie häufig um ganz oder nahezu symmetrische Anlagen handelt — und für I muß die vermittelte (also durch Spiegelungs- oder Dämpfungsverluste geminderte) Leuchtkraft I' eingeführt werden.

Der bei endlichem Halbmesser p' der Austrittspupille auftretende Winkel u' (besser sein doppelter Betrag $2u'$) heißt Öffnungswinkel der Linsenfolge, und da man ihn leicht aus p' und a' berechnen kann, so führt man die Größe

$$2p'/f' = 1:\varkappa;\ \varkappa = f'/2p'$$

als Öffnungsverhältnis oder relative Lichtstärke ein. Dabei ist f' als der Wert von a' anzusehen, der $a = \infty$ entspricht, einer Dingentfernung, die bei Landschaftsaufnahmen ja eine besondere Bedeutung hat.

Man hat sich nun daran gewöhnt, diesen Öffnungswinkel $2u'$, der in der Tat auch für die Geschwindigkeit der Wirkung auf die Platte von grundsätzlicher Bedeutung ist, als maßgebend für die Lichtstärke der Linsenfolge anzusehen. Offenbar kann man aber so nur Anlagen mit der gleichen Zahl von Flächen gegen Luft und ähnlichen Dicken im Hinblick auf ihre Lichtstärke miteinander vergleichen; sollen ganz verschieden gebaute Aufnahmelinsen in gegenseitige Beziehung gesetzt werden, so muß man auf die absolute Lichtstärke zurückgreifen und die Spiegelungs- und Dämpfungsverluste mindestens überschläglich in Rechnung stellen.

Schließlich besteht noch — wenigstens angenähert — der wohl bekannte Zusammenhang: das Quadrat des Öffnungsverhältnisses × Beleuchtungszeit ergibt ein Maß für die Schwärzung der Platte.

Daraus folgt unmittelbar die seit langer Zeit befolgte Regel für die Blendenbezifferung, daß eine Blende $\bar{p}$ die doppelte Belichtungszeit (für die gleiche Schwärzung) erfordert wie eine andere p, wenn

$$\bar{p} = p/\sqrt{2}$$

gilt.

c) Die Betrachtung des Bildes.

Erinnern wir uns, daß das Abbildsbild, soweit man eine erträgliche Abbildungstiefe voraussetzen konnte, anzusehen war als eine richtige Perspektive des Aufnahmegegenstandes, so ist ganz klar, daß es, wie eine von Künstlerhand



Abb. 174. Zur Ableitung des richtigen Betrachtungsabstandes $x = \mathfrak{G}P$.

entworfene Perspektive, nur von einem bestimmten Punkte aus betrachtet, den richtigen Eindruck des auf ihm dargestellten Raumdinges hervorzurufen vermag.

Man braucht ja nur daran zu denken, daß man in Abb. 174 das bei verzeichnungsfreien Aufnahmelinsen streng ähnliche Abbildsbild in dem ding-

seitigen Kegel des Hauptstrahlenbundels nur an einer Stelle Θ so einschalten kann, daß ein jeder Bildpunkt (oder Mittelpunkt eines Zerstreuungskreises) von dem zugehörigen Hauptstrahl durchstoßen wird. Diese Stelle Θ ist jetzt zu ermitteln. Es handelt sich also hier nur um die Feststellung des Abstandes

$$x = \Theta P$$

senkrecht vor dem Achsenorte der Aufnahme (meistens ihrer Mitte). In diesen Punkt P muß man bei der Betrachtung den Drehpunkt eines Einzelauges bringen, um sich bei der gewöhnlichen Betrachtung die richtigen Blickwinkel zu sichern.

Man kann leicht nachweisen, daß auch für unsymmetrische Aufnahmelinsen mit einem Tangentenverhältnis in den Pupillen von

$$\operatorname{tg} w' / \operatorname{tg} w = 1/Q$$

und für den Abbildungsmaßstab

$$y'/y = N$$

gilt

$$x = f'(1 + N/Q).$$

Aus dieser allgemeinen Formel kann man nun leicht zwei Vereinfachungen gewinnen, die von besonderer Bedeutung sind.

1. Der Fall der üblichen (ganz oder nahezu symmetrischen) Aufnahmelinsen. Setzt man $Q = 1$, so folgt $w' = w$ oder, wie man sie auch ausdrücken kann, es fallen die Pupillen mit den Hauptpunkten zusammen. Mithin wird die Formel zu

$$x_{Q=1} = f'(1 + N)$$

Wie man aus (3) ersieht, ist dann der Betrachtungsabstand gleich dem Kammerauszuge, beide von den zugehörigen Hauptpunkten gemessen.

2. Der Fall der Landschaftsaufnahmen. Setzt man die unendlich ferne Ebene als Einstellebene an, also $N = 0$, so wird

$$x_{N=0} = f'.$$

Also für die Betrachtung von Aufnahmelinsen beliebiger Blendenstellung ist der Betrachtungsabstand immer gleich der Aufnahmebrennweite.

Man sieht ein, daß es sich hier um den weitaus wichtigsten Fall der Verwendung der Aufnahmelinse handelt.

Man hat in früheren Zeiten, etwa dem 18. Jahrhundert, wo die Kenntnis der perspektivischen Gesetze bei einer größeren Zahl von Kennern vorausgesetzt werden konnte, für die damals weitverbreiteten Kupferstiche wohl an die Beobachtung einer solchen Regel denken können. Und die damaligen Kupferstiche von Landschaften mit ihrem in der Regel großen Format, etwa von 26:40 cm, erlaubten auch eine richtige Betrachtung, da bei ihnen in der Regel ein größerer Betrachtungsabstand, genauer ein solcher von über 30 cm, vorausgesetzt war.

Auch noch in den ersten Jahrzehnten der Ausübung photographischer Kunstfertigkeit hat man in England, wo sich die gute Überlieferung kunstverständiger Zeiten erfreulicherweise noch manche Jahre erhalten hatte, Aufnahmebrennweiten von 30 cm und darüber verlangt. Ferner hat die lange lebenskräftig gebliebene Übung, verhältnismäßig große Aufnahmebrennweiten anzuwenden, die richtige Betrachtung der photographischen Abzüge immerhin vielen Beschauern ermöglicht, sobald sie noch nicht alterssichtig geworden waren.

In neuerer Zeit aber hat sich eine Aufnahmekammer entwickelt, bei der man besonderen Wert auf geringes Gewicht, geringe Ausmaße und verhältnismäßig niedrigen Preis der neuzeitigen Aufnahmelinse legte. Das hatte zur Folge, daß man sehr viel kürzere Brennweiten f' zuließ und ihnen einen viel größeren

Winkel $2w$ auf der Platte zumutete, als das in der ersten photographischen Zeit geschehen war, wo die Bildgüte keine besonders starken Abweichungen von dem mäßigen, bei Gemälden auftretenden Bildwinkel zuließ. Gerade des größeren Bildwinkels $2w$ halber sollte freilich der richtige Betrachtungsabstand mit um so größerer Strenge eingehalten werden, aber leider verlangen die neuzeitigen Handkammern einen so geringen Betrachtungsabstand f', daß ihn nicht einmal Betrachter mit kurzsichtigen Augen einzuhalten vermögen, von rechtsichtigen Beschauern mittleren Alters ganz und gar abgesehen.

Betrachtet der Beschauer aber ein solches Bild mit kurzer Aufnahmebrennweite aus seinem viel zu großen Arbeitsabstand, so tritt als Folge der Eindruck ein, den man in den Kreisen der Photographen als Weitwinkelperspektive zu bezeichnen gewohnt ist. Man kann nur sagen, daß hier die richtige Feststellung eines unerwünschten Eindrucks eine unrichtige Erklärung gefunden hat, denn ein verzeichnungsfreier Weitwinkel liefert nach den vorausgegangenen Überlegungen ein im Hinblick auf die Perspektive untadliges Abbildsbild. Also liegt der unerwünschte Eindruck nicht am Weitwinkel, sondern allein an dem Beschauer, der nicht für einen gehörigen Abstand gesorgt hat.

Die Steigerung des Betrachtungsabstandes kann nun allein durch eine entsprechende Vergrößerung des dem Auge dargebotenen Bildes ermöglicht werden, und somit gibt es hauptsächlich zwei Möglichkeiten, Lichtbilder naturgetreu wirken zu lassen:

102. Die Schirmvorführung vor einer Anzahl von Zuschauern. Hier wird ein Glasbild (Diapositiv) mit einem Bildwerfer in n-facher Vergrößerung auf einem (meist undurchlässigen und zerstreut zurückwerfenden) Schirm entworfen. Wünschenswert ist eine einigermaßen große Schirmentfernung, so daß man die Punkte des Schirmbildes als fern gelten lassen kann. Eine wohlverwertbare Grenze nach unten mag die Übung der Augenärzte liefern, bei der Augenuntersuchung die Prüftafeln in 5 oder 6 m Entfernung aufzustellen, um die Betätigung der Akkommodation brillenbewaffneter Augen in einer ausreichenden Weise auszuschalten. Handelte es sich um Landschaftsaufnahmen und hatte die Aufnahmelinse die Brennweite f', so ist nunmehr der richtige Betrachtungsabstand gerade vor der Mitte des lotrechtstehenden Schirmbildes $= nf'$. Bringt man an diese Stelle den Drehpunkt eines rechtsichtigen Einzelauges, so wird es das Schirmbild unter den richtigen Augendrehwinkeln erblicken. Übertrifft das Gesichtsfeld der Aufnahme das Blickfeld des Einzelauges, so müßte man jenen richtigen Ort des Kopfes durch eine Stirnstütze oder eine andere Vorkehrung kenntlich machen, so daß man für die Seitenteile des Bildes die nötige Kopfdrehung in der richtigen Weise vornehmen könnte. Kleine Ungenauigkeiten der Haltung des Auges schaden verständlicherweise um so weniger, je weiter der Bildschirm vom Beschauer absteht.

Von dieser Breite der zulässigen Fehler hat man von jeher einen doppelten, aber mit irgendwelcher Strenge nicht zu rechtfertigenden Gebrauch gemacht: man hat eine ganze Anzahl neben- und hintereinander angeordneter Beobachter zugelassen und hat diesen ferner gestattet, beidäugig zu beobachten. Zu der ersten Freiheit sei bemerkt, daß damit Seiten- oder Tiefen-, oder Seiten- und Tiefenfehler des Augenorts eingeführt werden. Damit ergibt sich eine bestimmte Abweichung der Betrachtungswinkel von den richtigen Winkeln, die sehr wohl auch zum Bewußtsein kommen kann. Ein wissenschaftliches Lehrbuch der Perspektive, wie beispielsweise das alte von J. H. Lambert 1772 verfaßte, kann darüber nähere Auskunft geben. Was die beidäugige Beobachtung angeht, so muß sie bei den doch immerhin nur mäßigen Schirmentfernungen die Wahrnehmung der Tatsache befördern, daß die Punkte des Schirmbildes alle in einer

und derselben Ebene liegen. Sie wird also der für das Einzelauge sehr wirksamen Tiefenvorstellung entgegenwirken und die erwünschte Täuschung zu mindern geeignet sein.

Damit sei zugleich an dieser Stelle genügend darauf hingewiesen, daß man ungepaarte perspektivische Abbildsbilder, wie sie in den je mit einer einzelnen Linsenfolge versehenen Hand- oder Standkammern entstehen, auch nur mit einem Einzelauge betrachten sollte. Man entzieht sich sonst viel von dem verstandesmäßigen Genuß, der sich bei einäugiger Betrachtung sehr leicht einstellt.

Weitere Überlegungen zur Hebung der Bildfehler in den Bildwerferlinsen sind nicht anzustellen, da man so gut wie stets dafür Aufnahmelinsen — verständlicherweise aber in umgekehrtem Strahlengange: Stirnfläche nach dem Schirmbilde — verwendet.

103. Die Guckkastenvorführung für den einzelnen Beschauer. Dem soeben beschriebenen Vorgehen stellt sich die Betrachtung des von einer Sammellinse in weiter Ferne entworfenen, unzugänglichen (virtuellen) Bildes an die Seite. Sie ist an sich auf einen einzelnen Beschauer beschränkt und führt seit langer Zeit im Deutschen die Bezeichnung der Vorführung im Guckkasten. Besitzt die Schaulinse einen ziemlich großen Durchmesser, so wird jenes ferne Bild von dem blickenden Auge aufgenommen, oder mit anderen Worten, die Guckkastenlinse wird von selbst mit den Hauptstrahlen, d. h. den Blicklinien des von ihr unterstützten Auges, benutzt, deren Kreuzungspunkt bei richtiger Kopfhaltung $2^1/_2$ cm oder weiter hinter der augennahen Linsenfläche liegt. Das war auch bei den alten Guckkastenlinsen früherer Jahrhunderte so, obwohl weder Verfertiger noch Benutzer sich in so weit zurückliegenden Zeiten diesen Strahlengang vergegenwärtigt haben. Da stärkere Linsen der alten beidseitig erhabenen Form einen solchen schiefen Strahlengang durch eine schlechte Beschaffenheit des fernen Bildes rächten, so hat man in früher Zeit für den Guckkasten sehr schwache Sammellinsen verwandt, und man führte sie bald mit so großen Durchmessern aus, daß eine beidäugige Benutzung möglich wurde. Das ist hier noch weniger zu billigen als im obigen Falle, denn einmal sollte grundsätzlich die von einem Einzelobjektiv entworfene Perspektive auch von einem Einzelauge betrachtet werden, ferner aber können die bei einem solchen Gebrauch unvermeidlichen Abweichungen von der Verzeichnungsfreiheit auf Höhenfehler und Tiefenfälschungen führen, die den Eindruck der einfachen Perspektive und damit die erwünschte Täuschung zu stören vermögen.

In Übereinstimmung mit dem oben in Ziff. 81 gesagten soll die unter Berücksichtigung der Anforderungen des bewegten Auges gebaute Guckkastenlinse für ein endlich ausgedehntes Blickfeld keine merkliche Farbenfehler erkennen lassen und für einen 25 mm hinter der augennahen Fläche gelegenen Hauptstrahlenkreuzungspunkt in bezug auf Astigmatismus schiefer Bündel und auf Verzeichnung verbessert sein. Auf eine Hebung der Kugelabweichung kommt es weniger an, weil die Guckkastenlinse bei den kleinen Pupillenöffnungen von 2 bis 4 mm nur mit einem sehr kleinen Öffnungsverhältnis beansprucht wird (Abb. 175).

Führt man in neuerer Zeit Abb. 175—176 Guckkasten-(Verant-)Linsen mit den oben geforderten Verbesserungen aus und gibt ihnen so kurze Brennweiten, daß sie denen der für die Aufnahmen verwandten neuzeitigen Handkammerlinsen völlig oder doch nahezu gleichkommen, und daß man (S. 447) also wirklich in der Betrachtung eben die für die Aufnahme geltenden Winkel w wiederherstellt, so wird der Guckkasten leicht und kann bequem bewegt werden. Auf diese Weise kann man auch Aufnahmen von nicht wagrechter Achsenrichtung (Neigungsbilder) mit ganz naturgetreuer Wirkung betrachten, man muß nur die Hauptblickrichtung

wenigstens einigermaßen genau mit der Achsenrichtung bei der Aufnahme zusammenfallen lassen. Mit anderen Worten muß man für die Betrachtung von Aufnahmen mit hinaufgerichteter Achse den Kopf in den Nacken werfen, alsdann deutet man das ferner Guckkastenbild genau so richtig, wie man hohe Gebäude bei der Beschauung mit zurückgebogenem Kopfe senkrecht begrenzt auffaßt: das „Stürzen der Linien" auf den Lichtbildern, das bei senkrechter oder gar gesenkter Kopfhaltung sehr störend wirkt, verschwindet bei der soeben empfohlenen Betrachtungsart vollständig, und man ist von der Naturtreue solcher, auf den Ungeschulten abstoßend oder zerrbildartig wirkenden Aufnahmen überrascht. Das Entsprechende kann bei talab gerichteten Aufnahmen gelegentlich beobachtet werden, nur daß solche Fälle seltener vorkommen. Diese richtige Betrachtung von Neigungsbildern läßt sich mit dem Bildwerfer weniger leicht erreichen. Ferner ist es auch möglich, bei Landschaftsaufnahmen, die in kleinem Maßstabe (z. B. $f' = 7$ cm) bereits hergestellt sind oder durch nachträgliche Verkleinerung auf einen solchen gebracht wurden, jedem der beiden Augen gleich-



Abb. 175. Ein Achsenschnitt durch eine zur Betrachtung einer Aufnahme dienende Verantlinse (schematisch). Hinter der Verantlinse ist ein Auge in hinaufgerichteter Stellung dargestellt.



Abb. 176. Der Verant — ein richtig angelegter Guckkasten — im Gebrauch. Der Beschauer benutzt das rechte Auge; das linke wird selbsttätig verdeckt.

zeitig einen besonderen Abzug derselben Platte darzubieten und auf diese Weise das in weiter Ferne entstehende Guckkastenbild beiden Augen zugleich in streng richtiger Lage vorzuführen. Dieser Wunsch liegt dunkel ja auch der Schirmvorführung zugrunde, läßt sich aber eben wegen der stets endlichen — und gar nicht einmal besonders großen — Schirmentfernung nicht rein verwirklichen, wie bereits oben bemerkt wurde.

Ehe solche neueren Formen auf dem Markt waren, hat man wohl versucht, kleine Bilder durch das Aufnahmeobjektiv hindurch betrachten zu lassen. Die Bedingungen, unter denen die Beobachtung alsdann vor sich geht, sind einigermaßen verwickelt. Ganz gewiß würde unter diesen Umständen vollständiger Umkehrung des Strahlenganges ein Objektiv mit anastigmatischer Bildfeldebnung — meistens wird es sich um ein Doppelobjektiv handeln — ein deutliches und verzeichnungsfreies Bild unter den richtigen Winkeln so auf einer unendlich entfernten Schirmebene entstehen lassen; aber da die Pupillen einer solchen Doppellinse unzugänglich sind, so gibt es kein einfaches Mittel, den Augendrehpunkt des Beschauers in die Austrittspupille des als Schaulinse benutzten Doppelobjektivs zu bringen. Führt der Beschauer seinen Drehpunkt Z' so nahe als

möglich an die ihm entgegenstehende Austrittspupille, so kann er wohl einen gewissen Teil des fernen Bildes mit bewegtem Auge betrachten, doch ist es nicht sicher, daß unter einem solchen, von dem rechnungsmäßigen abweichenden Strahlengange die Verzeichnungsfreiheit erhalten bleibt, und für die übrigen Teile des fernen Bildes muß nun wieder die Schlüssellochbetrachtung durch die Austrittspupille der Schaulinse zu Hilfe herangezogen werden. Dabei sind die Kopfbewegungen recht beträchtlich, weil ja der Abstand zwischen dem Drehpunkt Z' und der Mitte P' jener Austrittspupille P' die Bedingung erfüllen muß:

$$Z'P' > 25 \text{ mm}.$$

Zu einem wesentlich günstigeren Ergebnis kommt man, wie zuerst L. E. W. VAN ALBADA an gelungenen Ausführungen gezeigt hat, wenn man eine starke Schaulinse mit großem Gesichtsfelde für eine Hinterblende in einem 25 mm nicht erreichenden Abstande von der letzten Linsenfläche berechnet. Dann kann man den Augendrehpunkt zwar auch nicht in, aber doch nahe an die Mitte der Austrittspupille bringen und sichert sich dadurch etwa den gleichen Vorteil kleiner, wenig störender Kopfbewegungen, der bei den älteren zusammengesetzten Geräten mit zugänglicher Austrittspupille vorhanden ist. Dabei dient zur Leitung der Kopf- und Blickbewegung die Deutlichkeit der so erreichten Abbildung seitlicher Teile.

Jedenfalls erkennt man aus dieser Gegenüberstellung von strenger Forderung und von Möglichkeiten für ihre Erfüllung, daß erst die Kenntnis des Sehvorganges im blickenden Auge die Mittel bot, eine Guckkastenlinse mit bestimmt angebbaren Eigenheiten zu bauen, was weiter unten bei der geschichtlichen Darstellung noch klarer erkannt werden wird.

Will man den Inhalt des vorstehenden Abschnittes kurz zusammenfassen, so kann man die Aufnahmelinse hinstellen als ein Fernrohrobjektiv[1]), dessen Wirkung aber räumlich und zeitlich von der Okularwirkung oder Betrachtung getrennt ist, und das deshalb ein greifbares Zwischen- oder Abbildsbild auf der lichtempfindlichen Schicht entwerfen muß. In der Ausdrucksweise der Jenaer Schule handelt es sich also um ein Fernrohr mit unterbrochener Abbildung.

Einen getreuen Eindruck kann die Perspektive des Abbildsbildes ihrem Wesen nach nur machen, wenn sie unter den Aufnahmewinkeln betrachtet oder, wie auf S. 447 gesagt, richtig in den von P ausgehenden Hauptstrahlenkegel eingeschaltet wird. Im allgemeinen wird man dazu die Aufnahme — meistens mit Hilfe des Bildwerfers — vergrößern müssen, wenn man sie ohne besondere Hilfsmittel oder gleichzeitig durch eine ganze Zahl von Beobachtern betrachten lassen will. Der einzige an der richtigen Stelle vor dem Bilde oder dem Schirm stehende (wenn nötig mit seiner Fernbrille bewaffnete) Beobachter sieht dann das Abbildsbild entweder mit einer merklichen Akkommodationsanspannung oder, wenn die Schirmentfernung 5 m überschreitet, mit einer unmerklichen. Das (gegebenenfalls brillenbewaffnete) Auge spielt dann die Rolle des Okulars. Auf die bedenklichen Folgen einer gleichzeitigen Betrachtung durch mehrere oder gar viele wurde schon hingewiesen; sie entstehen dadurch, daß man das allseitig strahlende Abbildsbild von einem anderen als dem allein richtigen Augenort betrachtet. Man kann — nebenbei bemerkt — am Schirm sogar leicht die Wirkung eines verkleinernden oder vergrößernden Fernrohrs auf die Tiefenvorstellung vorführen.

In der Guckkastenlinse, die dem Beobachter in der Tat ein unendlich fernes Abbildsbild vorführen sollte, kann man im Rahmen dieser Vorstellung ein Okular

[1]) Hiermit bekommt die ursprünglich durchaus gedankenlos gewählte Bezeichnung der Aufnahmelinse als Objektiv eine gewisse nachträgliche Berechtigung.

sehen. Da dafur ein allseitig strahlendes Zwischenbild vorauszusetzen ist, kommt man ohne Feldlinse aus. Mit dieser Auffassung erkennt man leicht, daß man nur dann die gewünschte Fernrohrvergrößerung = 1 erreicht, wenn man der Guckkastenlinse die Brennweite der Aufnahmelinse verleiht. Die erste Anregung zu einer richtig gebauten Guckkastenlinse ist von A. GULLSTRAND ausgegangen, der 1902 auch schon zwei Möglichkeiten ihrer Verwirklichung angedeutet hat.

Einzelne Hilfsgeräte.

104. Der Sucher. Schon oben, als in Ziff. 96 das Ikonometer erwähnt wurde, handelte es sich um eine Vorkehrung, im Dingraum leicht und bequem die Ausdehnung des auf der Mattscheibenebene dargestellten Gebietes anzugeben. Solche Vorkehrungen von verschiedener Anlage sind bei kleinen, fur Augenblicksaufnahmen eingerichteten Handkammern sehr beliebt und führen den Sammelnamen Sucher.

Man kann sie mit K. MARTIN[1]) in Aufsicht- und Durchsichtsucher einteilen, wobei der zunächst ganz einfach gebaute, in gewöhnlicher Augenhöhe gehaltene Durchsichtsucher dem Bilde eine gewohntere Perspektive sichert als der ebenfalls einfach geplante Aufsichtsucher, bei dem man die Handkammer vor den Leib hält und auf das Bildchen — häufig ein Mattscheibenbild — hinabschaut. Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß hier haufig die Aufgabe zu lösen ist, durch Spiegelung ein seitenrichtiges Bild zu erhalten. Namentlich K. MARTIN hat dies durch die sehr glückliche Einfuhrung einer Sattelfläche zu leisten vermocht.

In späteren Jahren hat man größere Mittel in den Dienst dieser Aufgabe gestellt und Anlagen geschaffen, die einem umgekehrten Fernrohr ähnlich sehen. Hier ist namentlich auf L. E. W. VAN ALBADA[2]) zu verweisen, der die hier vorliegenden Aufgaben in knapper, aber sehr inhaltsreicher Form behandelt. Einzelheiten zu diesem Hilfsgerät lassen sich bei der hier notwendigen Raumbeschrankung nicht bringen.

105. Der Spiegel und das Spiegelprisma. Soweit die Aufnahmelinse in den Dienst der Druckverfahren gestellt wird, ist es häufig notwendig, eine spiegelverkehrte Darstellung zu entwerfen, um mit ihr einen beim Abzug das richtige Bild erzeugenden Druckstock vorzubereiten.

Entsprechende Aufgaben waren im 18. Jahrhundert schon der Zeichenhilfe der dunklen Kammer gestellt worden, und man bedurfte der so entwickelten Hilfsmittel namentlich bei der Daguerreotypie, wenn man die aufgenommene Persönlichkeit frei von einer Spiegelverkehrung wiedergeben wollte.

Dieser Hilfsmittel gab es zwei, die sich bis in unsere Zeit fortgeerbt haben, nämlich den unbedeckten Spiegel und das Spiegelprisma.

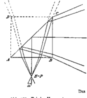
Wendet man sich zum unbedeckten, also Licht an der Oberfläche zurückwerfenden Spiegel Abb. 179, so ist in optischer Hinsicht kaum ein Fehler an ihm zu finden, wenn die Fläche wirklich eben ist. Dagegen muß er sorgfältig vor Verkratzung und auch vor dem Blindwerden durch chemische Einwirkungen geschützt werden. Daß das beim Gewerbe eines Bildnisphotographen einigermaßen schwer war, mag man glauben, doch scheinen solche Schwierigkeiten auch noch in den Anstalten zu photographischer Wiedergabe empfunden zu werden, denn auch diese bevorzugen vielfach das zweite Hilfsmittel, nämlich das Spiegel- oder Umkehrprisma Abb. 177.

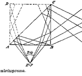
---

[1]) K. MARTIN, Die photographischen Sucher. Photogr. Korresp. Bd. 44, S. 580. 15+ 1907.

[2]) L. E. W. VAN ALBADA, A wide angle stereoscope and a wide angle viewfinder. (Verl. 12. VI. 24.) Trans. Opt. Soc. Bd. 25, S. 249. 14+ 1923/24.

Hier ist, wie man nach der ganzen Entstehung annehmen kann, der Schutz der spiegelnden Schicht (es ist das die Hypotenusenfläche eines rechtwinklig-gleichschenkligen Prismas) sehr vollkommen erreicht. Dagegen hat man optische Mißstände in den Kauf nehmen müssen, die nicht ganz leicht wiegen. Einmal handelt es sich um innere Spiegelungen in dem Hauptstrahlenbündel wie in den





Das Umkehrprisma.

Abb. 177. Bei der Verwendung verwertbare Spiegelwinkel $w \lesssim \bar{\omega}$.

Abb. 178. Störende Spiegelungen im Hauptstrahlenbündel für Neigungsachsen $w > \bar{\omega}$.

Öffnungsbündeln, die ohne jede Frage das Gesichtsfeld einer solchen Vorkehrung verkleinern Abb. 178; man wird dafür nicht mehr als 40° ansetzen können.

Ferner aber ist die Einschaltung einer dicken Glasplatte, und wie eine solche wirkt ein Spiegelprisma bei einem endlichen Dingabstande, ganz abgesehen von der Verkürzung des Luftweges (s. Ziff. 40, Kap. 1) nicht ohne Einwirkung auf den Verlauf der Hauptstrahlen. Denn wie schon die Zeichnung erkennen läßt, bleibt zwar die Richtung der zu einer Neigung w gehörigen farbig zerlegten Hauptstrahlen ungeändert, doch durchstoßen sie die in endlichem Abstande gelegene Vorlage ebene mit einer Ortsverschiedenheit, die mit wachsendem w-Winkel zunimmt. Auch das beschränkt natürlich den verwertbaren Winkel dieses Hilfsgeräts. Bei der Verwendung im Gewerbsleben wird dieser Farbenfehler auch durch die Unempfindlichkeit der Aufnahmeplatten für das längerwellige Strahlenbereich weniger schädlich gemacht.

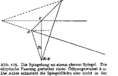


Abb. 179. Die Spiegelung an einem ebenen Spiegel. Die elliptische Fassung gestattet einen Öffnungswinkel 2ω. Die Achse schneidet die Spiegelfläche also nicht in der Mitte, sondern in C.

F. Beleuchtungsvorrichtungen und Bildwerfer.

Von

H. Boegehold, Jena.

a) Beleuchtungsapparate.

Beleuchtungslinsen und -spiegel. Scheinwerfer.

106. Vorbemerkung. Es sollen hier nur solche Vorrichtungen behandelt werden, die nicht in Verbindung mit einem andern optischen Instrumente stehen, die anderen sollen bei dem Instrumente ihre Stelle finden, zu dem sie gehören.

Die Scheinwerfer und Signalgeräte geben ein Bild einer Lichtquelle in weiter Ferne, also möglichst parallele Lichtbündel. Die Lichtquelle ist am Brennpunkte, da sie aber kein Punkt ist, so werden auch die Strahlen nicht nur in einer Richtung verlaufen. Die optische Vorrichtung kann eine Linse oder Linsenfolge sein, doch sind Hohlspiegel gebräuchlicher[1]).

107. Die Helligkeit der Beleuchtung. Die Helligkeit der Beleuchtung kann nach den Abbeschen Sätzen (vgl. Kap. 1 C, e) bestimmt werden, d. h. nach dem Verfahren, die wirkliche Lichtverteilung durch eine fingierte auf einer Hilfsfläche zu ersetzen, die nach beliebig vielen Spiegelungen und Brechungen im letzten Mittel liegen kann.

a) Man wähle als Hilfsfläche das Bild der Lichtquelle (es wird als scharf angenommen, andernfalls wären kleine Änderungen der Darstellung nötig, siehe H. Erfle bei Czapski-Eppenstein S. 512). Jedes Flächenstück des Bildes erhält die Helligkeit des entsprechenden Stücks der Lichtquelle, multipliziert mit n'^2/n^2, dem Quadrate des Verhältnisses der beiden Brechzahlen in Bild- und Dingraum. Das Verfahren versagt in der Nähe des Bildes selbst.

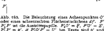


Abb. 180. Die Beleuchtung eines Achsenpunktes O' oder eines achsenrechten Flächenstückchens df'. $P'P_0'P'$ ist die Austrittspupille. $P_0'O' = \xi'$, $P'O' = S'$, $P_0'P' = p'$, $\sphericalangle P_0'O'P' = U'$ (im Texte sind p' und S' auch für Punkte P' gebraucht, die nicht am Rande der Austrittspupille liegen, der zugehörige Winkel ist aber dann u' genannt).

b) Die Hilfsfläche sei die Austrittspupille. Dann ist die Ersatzlichtverteilung für jedes Flächenelement df' des Bildraums (Abb. 180) besonders zu bestimmen. Man ziehe von df' aus rückwärts Strahlen nach der Austrittspupille und weiter nach dem Brechungs-(Spiegelungs-)Gesetz in den Dingraum zur Lichtquelle und gebe jedem Flächenstückchen der Austrittspupille dieselbe Lichtstärke, die das Stückchen der Lichtquelle hat, auf das man stößt, wieder multipliziert mit n'^2/n^2.

Bei den Abbeschen Regeln sind Verluste durch Verschluckung und Nebenbilder außer Acht gelassen.

Es sei nun die Intensität der Lichtquelle überall dieselbe, ε, so hat die fingierte Lichtverteilung auf der Austrittspupille überall denselben Wert, voraus-

[1]) Siehe Czapski-Eppenstein S. 510/9; A. Sonnefeld, Die Hohlspiegel. Berlin: Union 1926.

gesetzt, daß die nach der Vorschrift b) gezogenen Strahlen, soweit sie die Austrittspupille treffen, auch auf die Lichtquelle stoßen. Wenn $n' = n$ ist, erhält man für die ein Flächenstückchen df' treffende Lichtmenge:

$$L = e\,df' \int \cos u'\, d\omega\,. \tag{1}$$

Hier ist $d\omega$ die scheinbare Größe eines Stückchens dP' der Austrittspupille, von df' aus gesehen, u' der Winkel, den der zugehörige Strahl von dP' nach df' mit der Normalen auf df' bildet.

Die Beleuchtungsstärke, die sich auf die Flächeneinheit bezieht, ist also gegeben durch:

$$E = e \int \cos u'\, d\omega\,. \tag{1a}$$

Wenn df' weit von der Austrittspupille entfernt ist, kann man $\cos u'$ konstant setzen; besonders wichtig ist der Fall, daß $u' = 0$ gesetzt werden kann, was bei einer Umdrehungsfolge in weit entfernten Punkten der Achse der Fall ist, hier wird

$$E = e\omega = e P'/\xi'^2\,, \tag{2}$$

wo P' die Oberfläche der Austrittspupille ist, ξ' der senkrechte Abstand des betrachteten Ortes (des Flächenstückchens df' oder eines Punktes O') von der Austrittspupille. Die Gleichung gilt nur, wenn P' klein gegen ξ'^2 ist. Sie entspricht dem zuerst von A. MANGIN aufgestellten Satze[1]), bei einem Scheinwerferspiegel kann man die Fläche der Austrittspupille durch die des Spiegels ersetzen.

Ist P' nicht klein gegen ξ'^2, so kommt man wieder zum Sinusgesetz.

Man zerlege die Fläche P' in lauter schmale Kreisringe dP', so wird für jeden solchen u' fest, und man hat:

$$d\omega = dP' \cos u'/\Xi'^2\,,$$

wo Ξ' der Abstand von dP' nach df' ist. Es ist aber

$$\Xi' = \xi'/\cos u'\,,$$

also nach (1a):

$$E = \frac{e}{\xi'^2} \int \cos^4 u'\, dP'\,. \tag{3}$$

Ist p der zum Kreisringe dP' gehörende Radius, so wird

$$dP' = 2\pi p\, dp\,,$$

$$E = \frac{2\pi e}{\xi'^2} \int_0^p p \cos^4 u'\, dp\,.$$

Weiter ist $p = \xi' \operatorname{tg} u'$, $dp = \xi' du'/\cos^2 u'$:

$$E = \pi e \int_0^{U'} \sin 2u'\, du' = \tfrac{1}{2}\pi e\,(1 - \cos 2u') = \pi e \sin^2 U'\,, \tag{4}$$

wo U' der Öffnungswinkel auf der Bildseite ist.

Weiter kann man, wenn Ξ' jetzt der Abstand des Randes der Austrittspupille von df' ist, setzen:

$$\sin U' = p'/\Xi'\,; \qquad \sin^2 U' = p'^2/\Xi'^2 = P'/\pi\,\Xi'^2\,,$$

also:

$$E = e P'/\Xi'^2\,, \tag{5}$$

die allgemeine Form des MANGINschen Satzes.

[1]) A. SONNEFELD (s. Fußnote S. 454), S. 135.

Nach (2) und (5) ist die Beleuchtungsstärke sowohl von der Ausdehnung der Lichtquelle wie auch von der Brennweite des Scheinwerfers unabhängig.

108. Einschränkungen für die Gültigkeit der bisherigen Ergebnisse. Die Gleichungen (2) und (5) gelten nur dann, wenn die untersuchte Stelle (df', O') durch jeden Punkt der Austrittspupille Licht erhält. Nun bildet im Bildraume ein Strahl, der O' vom Rande der Austrittspupille aus trifft, mit der Achse den Winkel U', der bestimmt wird durch

$$\operatorname{tg} U' = p'/\xi' \qquad \text{oder} \qquad \sin U' = p'/\Xi'.$$

Je nachdem man nun annimmt, daß die Regeln der GAUSSischen Abbildung gelten, oder daß die Sinusbedingung erfüllt ist, würde dem Winkel U' auf der Dingseite eine Entfernung $\mathfrak{y}$ von der Achse entsprechen, die gegeben ist durch

$$\mathfrak{y} = f \operatorname{tg} U' = f' \operatorname{tg} U' = f' p'/\xi' \tag{6}$$

oder

$$\mathfrak{y} = f \sin U' = f' \sin U' = f' p'/\Xi'. \tag{6a}$$

(Das Vorzeichen ist ohne Bedeutung.)

Ist die Lichtquelle beispielsweise eine achsensenkrechte Fläche vom Durchmesser $2\mathfrak{Y}$, so wird die Bedingung dafür, daß man sich der Gleichungen (2) oder (5) bedienen darf:

$$\mathfrak{Y} \geqq \mathfrak{y}, \tag{7}$$

also

$$\mathfrak{Y} \geqq f' p'/\xi', \quad \xi' \geqq f' p'/\mathfrak{Y} \tag{7a}$$

oder

$$\mathfrak{Y} \geqq f' p'/\Xi', \quad \Xi' \geqq f' p'/\mathfrak{Y}. \tag{7b}$$

Die Entfernung

$$\mathfrak{X} = f' p'/\mathfrak{Y}, \tag{7c}$$

von der ab man sich der Gleichungen (2) oder (5) bedienen darf, heißt die photometrische Grenzentfernung; aus der Ableitung folgt indessen, daß (7c) nur einen Anhalt, nicht einen genauen Wert für diese Entfernung gibt.

109. Die axiale (maximale) und die durchschnittliche Lichtstärke. Setzt man:

$$J = e P' = \pi e p'^2, \tag{8}$$

so ist nach (2) oder (5)

$$E = J/\xi'^2 \tag{9}$$

oder

$$E = J/\Xi'^2 \tag{9a}$$

(nur in der Nähe der Achse). Da ein Lichtpunkt von der Intensität J die gleiche Wirkung hätte, die Gleichung (9) angibt, so wird J die axiale Lichtstärke genannt; da ferner die Wirkung in allen andern Richtungen schwächer zu sein pflegt, heißt $J = J_{max}$ auch die maximale Lichtstärke des Scheinwerfers. Nennt man den gesamten vom Scheinwerfer ausgehenden Lichtstrom Φ, so ist die durchschnittliche Lichtstärke:

$$J_0 = \Phi/4\pi, \tag{10}$$

das Verhältnis von $J = J_{max}$ zu J_0 heißt die Verstärkungszahl v:

$$v = J_{max}/J_0 = 4\pi J_{max}/\Phi. \tag{11}$$

110. Die Scheinwerferspiegel. Bei einem Scheinwerferspiegel wirkt entweder eine einzige spiegelnde Fläche oder eine Spiegellinse, d. h. eine Linse, in der Regel ein Meniskus, deren (erhabene) Hinterfläche durch einen Metallbelag

(gewöhnlich Versilberung) spiegelnd gemacht ist, während die (hohle) Vorderfläche das Licht beim Eintritt und Austritt bricht.

Eine einzelne spiegelnde Fläche haben Metallspiegel[1]) und Glasspiegel, die auf der hohlen Vorderfläche versilbert sind (diese sind weit genauer herzustellen als die Metallspiegel). Die Spiegellinsen haben den Vorteil, daß bei ihnen die Versilberung durch einen Überzug geschützt werden kann und daher haltbarer ist, sie sind daher gebräuchlicher, trotz den Nachteilen, daß die zweimalige Brechung eine Quelle für optische Fehler ist und daß durch die Verschluckung im Glase eine Lichtschwächung eintritt, die etwa 10 bis 15% betragen mag (SONNEFELD a. a. O. S. 113).

Die Lichtquelle oder vielmehr ihr Achsenpunkt befindet sich im Brennpunkte des Spiegels und sendet ein Lichtbündel aus, das nach der Spiegelung zur Achse parallel verläuft. Ist der Spiegel nicht frei von sphärischer Abweichung, so wird der Parallelismus nicht vollständig sein, diese Abirrung wird als Streuung bezeichnet. Die Streuung wird weiter dadurch vergrößert, daß die Lichtquelle nicht punktförmig ist, und die Fehler des Spiegels für Punkte außer der Achse hinzukommen. Außer den theoretischen Fehlern kommen die Ausführungsfehler der Spiegel in Frage, die bei den großen Öffnungen nicht vernachlässigt werden können. A. SONNEFELD gibt sowohl für die erstgenannten Fehler Ergebnisse nach ausführlichen Rechnungen, wie für die letztgenannten die Prüfmethoden und ihre Erfolge an. Nach seinem Buche soll ein Überblick über die verschiedenen Formen der Spiegel gegeben werden.

111. Spiegel ohne brechende Fläche. (Eine Spiegelfläche; ideale Hohlspiegel nach SONNEFELDS Bezeichnung).

a) Bei Kugelflächen sind die sphärische Abweichung und die Koma nur im Mittelpunkt gehoben. Ein Parallelstrahlenbündel erhält man aber, wenn die Lichtquelle im Brennpunkte steht. Es sind nur kleine Öffnungen zulässig, da sonst die Fehler zu groß werden.

b) Ein streng paralleles Strahlenbündel entsteht, wenn man einen leuchtenden Punkt in den Brennpunkt eines parabolischen Spiegels (Umdrehungsparaboloids) bringt; ferner geben hyperbolische Spiegel, wenn die Lichtquelle sich in einem Brennpunkte befindet, divergente Strahlen, elliptische im gleichen Falle konvergente Strahlen, die in beiden Fällen aber streng durch einen Punkt gehen; hyperbolische Spiegel können daher für Beleuchtungszwecke, elliptische für Scheinwerfer Verwendung finden. Da die Fehler für Punkte außer der Achse nicht gehoben sind, wird die Streuung merklich werden, so wie die Lichtquelle eine merkliche Größe hat. Beispielsweise gilt für die parabolische Fläche, wenn p der Parameter der Meridiankurve, u der Winkel eines vom Brennpunkte ausgehenden Strahles mit der Achse ist, h' die Höhe, in der er nach der Spiegelung verläuft, die aus der Polargleichung der Parabel abzuleitende Gleichung:

$$h' = p \cdot \operatorname{tg} u/2 \qquad \text{oder} \qquad h'/\operatorname{tg} u/2 = \text{konst.},$$

während die Hebung der Koma verlangen würde:

$$h'/\sin u = \text{konst.}$$

112. Spiegellinsen. Bei diesen kommen zu den eigentlichen optischen Fehlern noch die verschiedenen Nebenbilder (Reflexe) hinzu.

α) Äußere Spiegelung an der Vorderfläche.

β) Brechung durch die Vorderfläche, Spiegelung an der versilberten Hinterfläche, Brechung an der Vorderfläche.

---

[1]) Über Metallersatzspiegel vgl. A. SONNEFELD, a. a. O. S. 54/6 u. 97.

γ) Brechung durch die Vorderfläche, Spiegelung an der Hinterfläche, (innere) Spiegelung an der Vorderfläche, nochmalige Spiegelung an der Hinterfläche, Brechung an der Vorderfläche.

δ) usf. mehrmalige innere Spiegelungen.

Der unter β genannte Reflex ist das Hauptbild, doch nehmen die unter α und γ genannten je etwa 4% der Lichtmenge fort. Die mehrfachen Spiegelungen geben schwächere Bilder. Wenn also auch die (punktförmige) Lichtquelle sich für das Hauptbild im Brennpunkte befindet, nicht aber gleichzeitig für die Nebenbilder, so muß hierdurch eine weitere Streuung eintreten.

113. Verschiedene Arten von Spiegellinsen. a) Der konzentrische Kugelspiegel ist nicht als Scheinwerferspiegel, außer für kleine Öffnungen und Lichtquellen $< {}^2/_{10} f'$ zu brauchen, wohl ist er für die Vergrößerung 1 : 1 oder wenig abweichende Vergrößerungen verwandt worden.

b) Nichtkonzentrische Kugelspiegel. A. Mangin gab 1876 die Vorschrift, die Flächen so zu wählen, daß der Brennpunkt des Spiegels (d. h. des Hauptbildes) in den Mittelpunkt der Vorderfläche fiel. Der Vorderreflex (α) fiel dann mit der Lichtquelle zusammen und konnte außer Betracht bleiben, wenn diese undurchsichtig war. Nach Sonnefeld wird gleichzeitig die sphärische Abweichung verringert und zwar für kleine Öffnungen fast auf Null, für das Öffnungsverhältnis $^1/_5$ etwa auf den neunten Teil, für das Öffnungsverhältnis $^3/_2$ auf die Hälfte des Wertes beim konzentrischen Spiegel. Die Koma ist gleichfalls auf weniger als die Hälfte zurückgegangen. Für größere Öffnungen ist es aber nachteilig, daß die Dicke nach dem Rande stark zunimmt.

Man könnte auch konzentrische Kugelspiegel anfertigen, bei denen Hauptbild und Vorderreflex zusammenfielen.

c) Spiegel mit einer sphärischen, einer asphärischen (deformierten) Fläche. Die Deformation (Auftragung) wird meist an der Vorderfläche vorgenommen, und zwar ist es am üblichsten, einen konzentrischen Spiegel so zu ändern, daß die sphärische Abweichung gehoben ist. Man ist zu Öffnungen von 2 : 1 gekommen, die Nebenbilder können stören.

d) Spiegel mit zwei parabolischen Flächen. Der Brennpunkt der Vorderfläche gibt einen abweichungsfreien Vorderreflex, nicht aber Hauptreflex, dagegen kann man die Meridiankurven so wählen, daß Vorder- und Hauptreflex für achsennahe Strahlen zusammenfallen. Die sphärische Abweichung des Hauptbildes ist aber für mäßige Öffnungen $^1/_5$ der beim Manginschen Spiegel auftretenden, dagegen ist die Koma doppelt so groß. Diese Art Scheinwerfer ist für Öffnungen bis 2 : 1 unter allen Umständen gut, häufig bis 4 : 1 brauchbar.

e) Spiegel mit einer parabolischen, einer parabelähnlichen Fläche. Die Hinterfläche kann bei dem zuletzt genannten Spiegel mit zusammenfallendem Haupt- und Vorderreflex so deformiert werden, daß auch der Hauptreflex abweichungsfrei ist. Wie R. Straubel bewiesen hat[1]), fallen dann alle Reflexe zusammen und sind abweichungsfrei. Die Koma behält hingegen etwa ihren Wert, auch ist die Vergrößerung (Brennweite) nicht für alle Reflexe dieselbe. Mit diesem Spiegel hat man Öffnungsverhältnisse bis 5 : 1 erreicht.

114. Zusätze. Die riesigen Öffnungsverhältnisse sind bei Scheinwerferspiegeln nur deshalb möglich, weil sie nicht zur Erzielung von Bildern, sondern nur zu Verbreitung von Licht dienen und daher kleine Fehler in der Ausführung der Zonen nicht so schädlich sind wie bei Spiegelfernrohren.

[1]) R. Straubel, Reflecting system. U. S. P. 1151975 v. 31. VIII. 15, appl. fil. 20. I. 15; A. Sonnefeld, a. a. O. S. 21.

Die Streuung, die nach dem Vorstehenden unter allen Umständen eintritt, ist zuweilen erwünscht und wird selbst künstlich vergrößert. So will man beim Automobilscheinwerfer vor allem die Straße vor sich hell beleuchten, aber auch eine geringe Beleuchtung seitwärts und aufwärts haben. Dies wird durch Riefelung des Abschlußglases erreicht. Ähnliche Grundsätze gelten für Spiegel, die im eigentlichen Sinne zur Beleuchtung dienen (Spiegellampen, Stufenspiegel).

Mit Linsen lassen sich die erwähnten Öffnungen nicht erreichen, wenn man nicht starke Farbenabweichungen zulassen will. Während daher Beleuchtungslinsen als Hilfsvorrichtungen bei andern optischen Werkzeugen an vielen Orten erwähnt sind, kommen sie für die Zwecke dieses Kapitels weniger in Frage.

Es sei auf die von A. FRESNEL 1820 angegebenen Ringlinsen[1]) hingewiesen. Um die gewünschte Öffnung ohne gar zu große Mitteldicke zu erlangen, ist die Hauptlinse mit ringförmigen Ausschnitten aus Linsen von größerer Öffnung umgeben. Bei späterer Ausführung, wie sie die Abb. 181 zeigt, ist die Ringlinse noch von Prismenringen umgeben, bei denen das Licht nicht durch Brechung, sondern durch Totalreflexion den gewünschten Gang erhält. Die FRESNELsche Vorrichtung ist besonders für Leuchttürme verwandt worden.

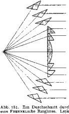


Abb. 181. Ein Durchschnitt durch eine FRESNELsche Ringlinse. Links die Lichtquelle. Die Lichtstrahlen werden teils durch Brechung, teils durch zweimalige Spiegelung achsenparallel gemacht.

Natürliche Lichtquellen (Sonne, Sterne) liefern uns paralleles Licht. Bei ihrer Verwendung zu Signalen usf. sind also nur ebene Spiegel notwendig, wohl aber besondere Vorrichtungen, die gestatten, den Lichtstrom stets in die gewünschte Richtung zu schicken und diese, unbeschadet der Bewegung des Gestirnes, festzuhalten. Diese Vorrichtungen werden Heliostate, Siderostate genannt.

b) Die Bildwerfer.

α) Die Bildwerfer für durchfallendes Licht (diaskopische Projektion).

115. Der Bildwerfer — Projektionsapparat. Einfache, oft recht unvollkommene Formen, die schon seit über 250 Jahren bekannt sind, werden wohl als Lucerna magica oder Laterna magica, Zauberlaterne, bezeichnet. Ein Schema eines Bildwerfers ist in Abb. 182[2]) angegeben. Er besteht aus der Lichtquelle L, dem Kondensor (der Beleuchtungslinse) C, der Bildwerferlinse L' und dem Bildschirm, der weit rechts

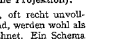


Abb. 182. Ein Übersichtsbild für einen Bildwerfer mit einem Kondensor einfachster Art (nach M. v. ROHR).

L die Lichtquelle, L' ihr vom Kondensor C in der Eintrittspupille der Bildwerferlinse entworfenes Bild. DD Glasbild. Auch das durch einen Randpunkt gehende Lichtbündel trifft die Bildwerferlinse. Der Bildschirm ist rechts zu denken.

[1]) A. FRESNEL, Projet d'un phare à feux tournants dans lequel les réflecteurs seraient remplacé par des lentilles. Oeuvres compl. III. S. 73—89. Paris: Imprim. impér. 1870; zur Zeichnung nach Pl. XIII s. a. die Bemerkung des Herausgebers S. 296/97.

[2]) Nach M. v. ROHR, Die optischen Instrumente (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 88). 3. Aufl., S. 123. Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner 1918.

zu denken ist. Bei DD befindet sich das Glasbild (Diapositiv), das im durchfallenden Lichte, vergrößert abgebildet werden soll.

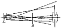


Abb. 183. Ein Beispiel für die unzweckmäßige Beleuchtung des Glasbildes (nach M. v. ROHR).

L die Lichtquelle, P die Eintrittspupille der Bildwerferlinse, D das Glasbild. Das nach einem Randpunkte des beleuchteten Gegenstandes gehende Licht geht seitlich an der Bildwerferlinse vorbei.

Daß für den Bildwerfer fast immer künstliches Licht in Frage kommt, liegt mehr an äußeren Umständen, in früheren Zeiten hat man zur Mikroprojektion oft Sonnenlicht verwandt. Es sind fast alle Lichtarten benutzt worden; für wissenschaftliche Zwecke, wie für Vorführungen vor einem größeren Zuschauerkreis ist jetzt das elektrische Bogenlicht das gebräuchlichste. Die künstliche Lichtquelle nötigt auch zur Anwendung der Beleuchtungslinsen. Wollte man die Lichtquelle ohne eine solche Linse hinter das Glasbild stellen, so würde das Licht, das auf seitliche Punkte fiele, gar nicht in die Bildlinse (oder deren Eintrittspupille) gelangen, s. Abb. 183[1]). Durch Ablenkung (oder Beugung) käme freilich eine lichtschwache Abbildung zustande (s. NEUHAUSS a. a. O.), die aber gegen die helle Mitte vollkommen abfiele. Nur wenn die Lichtquelle eine große Flächenausdehnung hätte, oder sehr nahe an der Glasplatte stünde, wäre es möglich, alle Teile des Bildes gleichmäßig zu beleuchten; das erste wäre bei künstlichen Lichtquellen schwierig oder kostspielig, das zweite brächte die Glasplatte in Gefahr, durch die Erhitzung zu springen. Dies wäre auch zu befürchten, wenn man etwa ein Bild der Lichtquelle auf der Glasplatte entwerfen würde, wobei außerdem Ungleichmäßigkeiten in der Helligkeit der Lichtquelle mit in Erscheinung treten würden. Der Kondensor bildet deshalb die Lichtquelle L (Abb. 182) in die Eintrittspupille der Bildwerferlinse ab. Wenn die Öffnung der Eintrittspupille ganz ausgenutzt werden soll, so muß das Bild L' mindestens so groß sein wie die

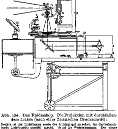


Abb. 184. Das Epidiaskop. Die Projektion mit durchfallendem Lichte (nach einer Zeissischen Druckschrift):

Rechts ist der Lichtbogen sowie der Hohlspiegel zu sehen, der das beleuchtende Lichtbündel parallel macht. 10 ist die Wasserkammer. Der ebene Spiegel 2 wirft das Licht aufwärts. Bei 7, 8 ist die Kondensorlinse und das darüberliegende Glasbild zu sehen, 7 ist ein Aufsatz, der die Fassung der Linse und den Rahmen (8) trägt. Dieser nimmt die Glasbilder (in einer Vorrichtung zum Wechseln) auf. 12 ist die Bildwerferlinse. Der Spiegel 13 macht das Licht wieder wagerecht und wirft das Bild auf den Projektionsschirm, die Neigung des Spiegels kann durch eine Schraube 14 geändert werden. Die Bildwerferlinse und der Spiegel sind durch einen Arm 11 an dem Aufbau 9 befestigt. Die übrigen Teile der Abbildung dienen teils der Einstellung und dem Aufbau, teils sind sie wie das Mikroskop und der Spiegel 15 außer Gebrauch.

[1]) M. v. ROHR, Die optischen Instrumente. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 88.) 3. Aufl., S. 123. 1918; s. auch R. NEUHAUSS, Lehrbuch der Projektion. 2. Aufl., S. 8. Halle: W. Krapp 1908.

Eintrittspupille. Auf eine besondere Güte der Abbildung durch den Kondensor kommt es nicht an, da er nur dafur zu sorgen hat, daß alle Punkte des Glasbildes gleichmäßig beleuchtet sind. Doch wird dies bei besserer Fehlerhebung mit einer kleineren Lichtquelle zu erreichen sein.

116. Die Ausführung des Kondensors. Man verzichtet meist auf die Hebung des Farbenfehlers, spaltet aber die einfache in Abb. 182 gegebene Linse, um die sphärischen Abweichungen herabzudrucken. Beispiele der Ausfuhrung sind zwei Plankonvexlinsen, die einander ihre erhabenen Flächen zukehren und die Verbesserung, die darin besteht, daß vor die erste Linse noch ein (genau oder nahezu) aplanatischer Meniskus gesetzt wird. Der erste (bei der letztgenannten Form zweilinsige) Teil entwirft ein Bild der Lichtquelle in weiter Ferne, das durch den zweiten in der Eintrittspupille der Bildwerferlinse abgebildet wird. In den nahezu parallelen Strahlengang zwischen beiden Hälften wird häufig eine Wasserkammer eingeschaltet, die die Warmestrahlen von den folgenden Teilen der Vorrichtung abhält. Weitere Verbesserungen der Kondensoren siehe Czapski-Eppenstein S. 520. Anstatt des ersten, ein Bild in weiter Ferne entwerfenden Teiles kann auch ein Hohlspiegel treten.

117. Die Bildwerferlinse. Die Bildwerferlinsen sind photographische Objektive in umgekehrter Benutzung. Farbenfehler und sphärische Fehler sind je nach der Größe der Öffnung zu heben. In besseren Vorrichtungen werden 3 teilige oder 4 teilige Objektive nach Art der Triplets, Petzvalobjektive, Tessare verwandt.

118. Beispiele von Bildwerfern. Eine verhältnismäßig einfache Ausführung eines Bildwerfers gibt Abb. 185, einen Begriff von einer mehr Hilfsmittel brauchenden Form, die aber sehr verschiedenen Zwecken dienen kann, mag Abb. 184 liefern[1]). Dort ist das Epidiaskop der Firma Zeiss in der Benutzung für durchfallendes Licht gezeigt, die der Verwendung fur auffallendes Licht dienenden Teile sind außer Gebrauch, ebenso das der Mikroprojektion dienende Mikroskop.

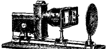


Abb. 185. Ein kleiner Projektionsapparat (nach einer Zeissischen Druckschrift). Die Vorrichtung ist auf einer optischen Bank angebracht. Als Lichtquelle dient eine Bogenlampe von 5 Amp. Am Kondensorsystem ist der Schieber zum Anbringen des Glasbildes. Die Bildwerferlinse hat 15 cm Brennweite, der Bildschirm ist $4-4^1/_2$ m entfernt. Die Größe der benutzten Glasbilder ist 9:12 cm, die Schirmgröße $2-2^1/_2$ m. Durch Linsen von größerer Brennweite kann eine größere Schirmentfernung erreicht werden.

Die Lichtquelle ist eine Bogenlampe, das Licht wird durch den Scheinwerferspiegel (rechts), parallel gemacht; ein ebener, unter 45° geneigter, Spiegel wirft es senkrecht in die Höhe auf den zweiten Teil des Kondensors, eine plankonvexe Linse und auf das Glasbild (unmittelbar darüber). In senkrechter Richtung geht das Licht durch die Bildwerferlinse, und ein zweiter ebener Spiegel wirft das Bild auf den Projektionsschirm. Es ist auch eine Vorrichtung vorhanden, Glasbilder in senkrechter Lage zu projizieren.

[1]) Siehe die Zeissischen Druckschriften Mikro 94, 239, 255, 319, 337, 379, 380, 387. Es sei weiter auf die Abhandlungen von O. Heimstädt über Reichertsche Bildwerfer hingewiesen: Neuer großer Projektionsapparat der Firma C. Reichert in Wien, ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 24, S. 370—381. 1907. Neuer Universal-Projektionsapparat der Firma C. Reichert in Wien, ebenda Bd. 28, S. 161—174. 1911.

Beim Epidiaskop wird gewöhnlich ein Objektiv von etwa 250 mm Brennweite benutzt, für eine etwas andere Einrichtung ein solches von der doppelten Brennweite. Die Glasbilder haben verschiedene Größen, die kleinsten sind etwa 8×8 cm, die größten 13×18 cm, für das Hineinschieben der Bilder sind bei allen besseren Bildwerfern besondere Vorrichtungen vorhanden.

119. Die Strahlenbegrenzung. Die wirksame Öffnung wird durch die Eintrittspupille der Bildwerferlinse oder das Bild der Lichtquelle bestimmt und zwar durch die kleinere der beiden Größen. Ist die scheinbare Größe des fraglichen Durchmessers, vom Glasbild aus gesehen, $2u_2$, so gibt die Sinusbedingung für den entsprechenden Winkel u_2' auf der Bildseite:

$$\sin u_2' = \sin u_2/\beta ,$$

die Helligkeit ist bestimmt durch

$$J = \pi e \sin^2 u_2' \text{ [wie in Gleichung (4)]}$$

und nimmt also mit dem Quadrate der Vergrößerung ab, die zulaßige Vergrößerung ist von der Helligkeit der Lichtquelle und dem Durchmesser der Öffnung abhängig. Das Gesichtsfeld wird durch den bildseitigen Öffnungswinkel des Kondensors u_1' bestimmt, falls nicht der Gesichtsfeldwinkel w der Bildwerferlinse kleiner ist. Es besteht also eine eigentümliche Wechselbeziehung zwischen den beiden Linsengruppen.

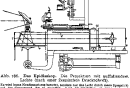


Abb. 186. Das Epidiaskop. Die Projektion mit auffallendem Lichte (nach einer Zeissischen Druckschrift).

Es wird keine Kondensorlinse benutzt, sondern nur das Licht durch einen Spiegel (1) auf den Gegenstand (bei 3) geworfen. 3 ist ein Tischchen, es kann auf- und abwärts gekurbelt werden, dadurch wird die Einstellung geregelt. Durch 4 wird eine Blende angedeutet, die zur Begrenzung des Sehfeldes dient. Das Licht, vom Gegenstande unregelmäßig zurückgeworfen, geht durch die Bildwerferlinse und wird durch einen zweiten Spiegel auf den Schirm geworfen. Auch hier sind einige gezeichnete Teile außer Benutzung, beispielsweise der in die Höhe geklappte Spiegel 2.

120. Verschiedene Anwendungen des Bildwerfers. Über die Verbindung des Bildwerfers mit einer Zeichenvorrichtung vergleiche man beispielsweise die Anwendung des GREILschen Zeichenapparates (Ziff. 217) für große Präparate[1]).

Über die kinematographische Projektion, deren Besonderheiten weniger auf optischem als auf mechanischem Gebiete liegen, vergleiche man die Sonderwerke[2]).

Um einen stereoskopischen Eindruck zu erzielen, muß man beiden Augen verschiedene Bilder darbieten. Eine Zusammenstellung der mannigfachen

[1]) E. WYCHGRAM, ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 30, S. 340. 1913. Der Projektionszeichenapparat nach GREIL, Zeissische Druckschr. Mikro 255. S. 4/5.

[2]) Eine zusammenfassende Darstellung gibt H. LEHMANN, Die Kinematographie und ihre Anwendungen. (Aus Natur und Geistesw. Bd. 358.) 2. Aufl. (W. MERTÉ). Berlin und Leipzig: B. G. Teubner 1919.

zu diesem Zwecke angewandten Mittel gibt M. v. ROHR[1]), der an andrer Stelle[2]) auch die meisten Vorrichtungen kurz bespricht.

β) Die Bildwerfer für auffallendes Licht (episkopische Projektion).

121. Das Epidiaskop. Das Epidiaskop kann auch (Abb. 186) dazu benutzt werden, undurchsichtige Gegenstände vergrößert abzubilden. Da hier jeder Punkt durch unregelmäßige Zurückwerfung wirkt, so findet keine Abbildung der Lichtquelle in der Eintrittspupille statt. Es wird nur durch den Scheinwerferspiegel möglichst helles Licht auf den Gegenstand geworfen. Wegen der geringen Albedo der meisten Körper, weil ferner nur ein kleiner Teil des Strahlenbündels durch die Bildwerferlinse hindurchgeht und endlich durch die Vergrößerung noch eine weitere Lichtschwächung eintritt, ist das Verfahren nur für Gegenstände mit starken Kontrasten geeignet, und die Vergrößerung wird im Durchschnitt geringer sein müssen als bei durchfallendem Lichte.

G. Die Lupe, das zusammengesetzte Mikroskop.

Von

H. BOEGEHOLD, Jena.

a) Die geometrische Theorie.

122. Mikroskop und Fernrohr. Die scheinbare Größe w eines Gegenstandes, von der die Größe des Netzhautbildes abhängt, ist (Abb. 187) gegeben durch:

$$\operatorname{tg} w = -\mathfrak{y}/a, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{y}$ die lineare Größe, a die Entfernung des Gegenstandes ist; für ein wirkliches Ding ist a negativ. Ist $\mathfrak{y}$ die Größe einer kleinen Einzelheit, die man betrachten will, so kann man schreiben:

$$w = -\mathfrak{y}/a. \tag{1a}$$

Damit man die Einzelheit beobachten kann — nicht etwa bloß sehen, was bei einem hellen Punkte auch für verschwindendes w möglich ist —, muß w einen gewissen Mindestbetrag erreichen. Dieser Wert ist bei verschiedenen Personen verschieden, auch hängt er von der Beleuchtung und der Natur des Gegenstandes ab; im Durchschnitt wird $1/2$ bis $1'$ allenfalls genügen, für bequeme Beobachtung sind 2 bis $4'$ erwünscht. Der gewünschte Winkelwert für w sei ε genannt.

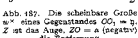


Abb. 187. Die scheinbare Größe $w^\times$ eines Gegenstandes $OO_1 = \mathfrak{y}$. Z ist das Auge, $ZO = a$ (negativ) die Entfernung

Solange nun für die fragliche Einzelheit $w < \varepsilon$ ist, wird man eine Vergrößerung von w herbeizuführen suchen; das nächstliegende Mittel ist die Verkleinerung von a, wo diese nicht durchführbar ist, kommen optische Hilfsmittel in Frage.

Ein solcher Fall liegt offenbar vor, wenn die Entfernung a so groß ist, daß die zeitweilig mögliche Annäherung gar nicht gegen sie in Betracht kommt (entfernte irdische Gegenstände) oder auch eine Annäherung wie in der Astronomie überhaupt nicht möglich ist. Das optische Instrument, das hier hilft, ist das Fernrohr.

Es kann aber auch der Gegenstand dem Beobachter zur Hand sein, so daß er ihn an und für sich dem Auge nähern könnte, wobei aber sein Akkommodations-

[1]) M. v. ROHR, Die optischen Instrumente. (Aus Natur und Geistesw. Bd. 88). 3. Aufl., S. 126/27. 1918.

[2]) M. v. ROHR, Die binokularen Instrumente. 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1920. Die meisten in Betracht kommenden Abhandlungen sind aus der Zusammenstellung S. 268, links unten, zu ermitteln.

vermögen nicht ausreicht, wenn er a so weit verkleinert, daß $w = \varepsilon$ wird. Da dies einen kleinen Wert der linearen Größe $\mathfrak{y}$ voraussetzt, führt die optische Vorrichtung zur Abhilfe den Namen Mikroskop (μικρος klein, σκοπεω beschauen); weil die Gegenstände sich anders als beim Fernrohr in unsrer Nähe befinden, ist auch der Ausdruck Engyskop (ἐγγυς nahe) gebildet worden, der mit Nahrohr gut zu übersetzen wäre. Eine einfachere Form — häufig eine einzelne Linse —, die für mäßige Vergrößerungen verwandt wird, führt den Namen Lupe, der im Anfange des 19. Jahrhunderts aus dem Französischen (la loupe) eingeführt wurde und sich inzwischen eingebürgert hat.

Für starke Vergrößerungen ist gegenwärtig fast nur noch die Form des zusammengesetzten Mikroskops in Gebrauch. Diese hat mit dem Fernrohr außer der Eigenschaft als verdeutlichendes Instrument auch das gemein, daß sie wenigstens beim subjektiven Gebrauch aus zwei voneinander räumlich getrennten Folgen, Objektiv und Okular, besteht (über die Mikroprojektion und Mikrophotographie soll später gesprochen werden). Durch die Nähe des betrachteten Gegenstandes ist sie grundsätzlich scharf vom Fernrohr unterschieden, während es sich zeigen wird, daß ein Teil des Mikroskops mit dem Fernrohr als Ganzem eine überraschende Ähnlichkeit hat.

Allerdings gibt es auch Fälle, die man als eine Art Zwischenstufe zwischen Fernrohr und Mikroskop ansehen kann. Zuweilen ist in eine verwickelte Vorrichtung eine Teilung eingebaut, der man sich nur bis zu einer gewissen nicht ganz geringen Entfernung nähern kann. Die Ableseeinrichtungen haben hier bald mehr die Einrichtung des Fernrohrs, bald des Mikroskops.

123. Vorbemerkungen. Lupe und Mikroskop werden benutzt zu Ablesungen, Messungen, zur Untersuchung des Aufbaus anorganischer sowie organischer Körper (Metallmikroskopie, Mikrobiologie). Je nach dem Zwecke werden sie mit Hilfsvorrichtungen verschiedenster Art ausgerüstet. Von den Gegenständen der mikroskopischen Beobachtung sind viele teilweise durchsichtig und werden im durchfallenden Lichte betrachtet, wobei die Einzelheiten sich durch verschiedene Verschluckung des Lichtes und durch ihr abweichendes Brechungsverhältnis voneinander abheben. Andre werden mit auffallendem Lichte beleuchtet und wie die Mehrzahl der mit unbewaffnetem Auge sichtbaren Gegenstände durch ihre unregelmäßige Zurückwerfung erkannt. Selbstleuchtende Körper hat man wohl nur zur Aufklärung der Theorie des Mikroskops in neuester Zeit mit diesem beobachtet.

124. Lupe und Brille. Kehren wir nun zu der Gleichung (1) oder (1a) zurück. Mit zunehmendem Alter wird der kleinste Wert von a, für den man akkommodieren kann, beständig wachsen, also auch die Größe $\mathfrak{y}$, für die der Betreffende die Bedingung

$$w = -\mathfrak{y}/a > \varepsilon$$

erfüllen und die er daher durch bloße Annäherung ohne optisches Hilfsmittel erkennen kann.

Es tritt schließlich bei einem Rechtsichtigen ein Zeitpunkt ein, wo ihm dies schon im gewöhnlichen Leben hinderlich wird, er z. B. nicht mehr imstande ist, kleinere Druckschrift so nahe deutlich zu sehen, daß er sie lesen kann. Dies ist etwa dann der Fall, wenn er nicht auf 4 dptr, einen Abstand von 250 mm, akkommodieren kann. Er wird sich dann zweckmäßig einer Sehhilfe bedienen, die sich in feste Verbindung mit dem Auge bringen läßt, d. h. einer Brille; wegen der Ähnlichkeit der Wirkung mit der einer Lupe hat M. v. ROHR die Brillen für Alterssichtige als Lupenbrillen bezeichnet.

Eine Brille, und zwar eine Fernrohrbrille ist auch für das schwachsichtige Auge zu empfehlen, bei dem die zur Beobachtung notwendige Mindestgröße ε

ungewöhnlich groß ist, so daß es im alltäglichen Leben nicht die gewünschten Wahrnehmungen machen kann. Freilich ist bei hochgradiger Sehschwäche die feste Verbindung mit dem Auge nicht immer aufrechtzuerhalten. Aber auch sonst bedienen sich Schwachsichtige, wenn sie nahezu rechtsichtig sind, häufig einer Lupe, besonders der als Leseglas bezeichneten Form.

Angebracht ist die getrennt vom Auge, in der Hand oder am Ständer festgehaltene Vorrichtung jedenfalls dann, wenn die gewünschte Beobachtung auch von einer Person mittleren Alters (etwa 45 Jahre) mit rechtsichtigem Auge und normaler Sehschärfe wegen zu kleiner Dinggröße nicht ohne optisches Hilfsmittel ausgeführt werden kann, mag auch ein junger Mensch oder ein Kurzsichtiger noch das Mittel größerer Annäherung des Gegenstandes haben.

125. Die Lupenvergrößerung. Es soll nun näher auf das Wesen der Lupenvergrößerung eingegangen werden.

Folgende Darstellung ist lange Jahre hindurch allgemein üblich gewesen. Ohne Lupe würde das Auge den Gegenstand höchstens unter dem Winkel w sehen können, wobei w bestimmt ist durch

$$\operatorname{tg} w = \mathfrak{y}/l \tag{1}$$

oder

$$w = \mathfrak{y}/l; \tag{1a}$$

hier ist l die geringste Entfernung, auf die das Auge einstellen kann, seine „deutliche Sehweite" ($l = -a_{\min}$).

Man beobachte mit einer Flächenfolge, deren hintere Brennweite f' sei, nimmt man an, der Gegenstand befinde sich im vorderen Brennpunkte, so wird das Bild im Unendlichen liegen, die scheinbare Größe ist unabhängig vom Beobachtungsorte (der Austrittspupille) gegeben durch.

$$\operatorname{tg} w' = \mathfrak{y}/f' \qquad \text{oder} \qquad w' = \mathfrak{y}/f'.$$

Bildet man nun den Quotienten $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{N} = \operatorname{tg} w'/\operatorname{tg} w \;(= w'/w) = l/f', \tag{2}$$

so gibt $\mathfrak{N}$ die Vergrößerung an, die das Auge mit der benutzten Vorrichtung erhält, wenn man annimmt, daß es bei ihrem Gebrauch auf unendliche Entfernung eingestellt ist, während man zum Vergleich den günstigsten Erfolg heranzieht, den es ohne künstliches Hilfsmittel haben könnte.

Da l aber mit dem Alter und dem Scheitelbrechwert des Auges wechselt, nimmt man aus den angegebenen Gründen einen Wert von 250 mm als Bezugsentfernung an.

Die Vergrößerungszahl $\mathfrak{N}$ ist 250, geteilt durch die hintere Brennweite in Millimetern, oder auch: sie ist die Stärke der Lupe in dptr, geteilt durch 4. Diese Definition der Lupenvergrößerung ist in den letzten Jahrzehnten Gegenstand vieler Erörterungen gewesen, auf die auch in dieser Darstellung eingegangen werden muß[1]). Abgesehen von der Willkür, die in der Annahme $l = 250$ mm liegt, ist gerügt worden, daß sie nur für ein rechtsichtiges Auge mit erschlaffter Akkommodation abgeleitet ist. Nun ist die vorherrschende Ansicht, daß das

[1]) Es sei verwiesen auf: E. ABBE, Bemerkungen über die richtige Definition der Vergrößerung einer Linse oder eines Linsensystems. Übersetzung einer Abhandlung im Journ. Roy. Mikr. Soc. (2) Bd. 4, S. 348—351. 1884; Ges. Abh. Bd. 1, S. 445—449; A. GULLSTRAND in den Zusätzen zur 3. Aufl. von H. HELMHOLTZ, Physiologische Optik Bd. 1, S. 309 bis 312. Hamburg u. Leipzig: L. Voß 1909; M. v. ROHR, Die Brille als optisches Instrument. 3. Aufl. §§ 53/54. Berlin: Julius Springer 1921; H. ERFLE, Lupenvergrößerung, Fernrohrvergrößerung und Vergrößerung. D. Opt. Wochenschr. Bd. 7, S. 345—349. 1921; E. WEISS, In welchem Sinne wirken Lupengläser, Lupenbrillen und Linsen vergrößernd auf das Auge? Ebenda Bd. 7, S. 119—121 u. 143—145. 1921.

bewaffnete Auge nicht akkommodieren soll; für fehlsichtige Augen, die ohne Brille beobachten, muß aber jedenfalls eine allgemeinere Definition gefunden werden. Über weitere Schwierigkeiten wird die folgende Auseinandersetzung Auskunft geben.

126. Das Vergrößerungsvermögen. Zwischen der linearen Größe, der scheinbaren Größe und der Entfernung besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg} w/\mathfrak{y} = -1/a \tag{1}$$

oder

$$w/\mathfrak{y} = -1/a. \tag{1a}$$

Dieses Verhältnis zwischen scheinbarer und wahrer Größe ist es, das bei der Lupe oder dem Mikroskop vergrößert wird. Man habe bei dessen Benutzung für das Verhältnis des bildseitigen Winkels zur Dinggröße

$$\operatorname{tg} w'/\mathfrak{y} = V, \tag{3}$$

wo die Spitze des Winkels w' in der Austrittspupille des Instruments oder der Folge Instrument + Auge liegt, so heiße V nach dem Vorgange von E. Abbe das Vergrößerungsvermögen oder auch die vergrößernde Kraft. Offenbar ist es seiner Dimension nach der Kehrwert einer Länge und wird für die Beobachtung mit bloßem Auge durch den Kehrwert des Beobachtungsabstandes vertreten. Es kann in einen vom Auge — der Austrittspupille — unabhängigen Teil und in ein von der Augeneinstellung abhängiges Verbesserungsglied zerlegt werden.



Abb. 188. Die vergrößernde Kraft eines optischen Instruments, das durch eine einfache Linse angedeutet ist. $\mathfrak{F}$, F' sind die Brennpunkte. Bei O, O' sind Gegenstand ($\mathfrak{y}$) und Bild ($\mathfrak{y}'$), bei P' das Auge; in der Zeichnung ist die Bildentfernung $P'O' = \xi'$ positiv, wie bei einem Übersichtigen. $F'O' = \mathfrak{x}'$, $F'P' = X'$. $\operatorname{tg} w'/\mathfrak{y}$ ist die vergrößernde Kraft.

Ist nämlich ξ' der Abstand der Bildebene von der Austrittspupille, $\mathfrak{y}'$ die Bildgröße, so hat man (Abb. 188)

$$\operatorname{tg} w' = -\mathfrak{y}'/\xi',$$

also nimmt (3) die Form an:

$$V = -\mathfrak{y}'/\mathfrak{y}\,\xi' = -\beta/\xi'. \tag{4}$$

Nun ist weiter nach der Newtonschen Vergrößerungsformel:

$$\beta = -\mathfrak{x}'/f' = -(X' + \xi')/f',$$

wo X' der Abstand der Austrittspupille von der hintern Brennebene ist. Danach wird

$$V = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right). \tag{5}$$

Bei erschlaffter Akkommodation ist für ein rechtsichtiges oder für ein mit Fernbrille bewaffnetes fehlsichtiges Auge $\xi' = \infty$. Ferner ist beim zusammengesetzten Mikroskop, wie noch auseinandergesetzt werden wird, meist (mindestens nahezu) $X' = 0$. Ist auch nur eine von diesen Gleichungen erfüllt, so wird

$$V_\infty = 1/f', \tag{5a}$$

die vergrößernde Kraft gleich dem Kehrwerte der Brennweite.

127. Die Netzhautbildgröße. Die Netzhautbildgröße beim ruhenden Auge ist durch den Hauptpunktswinkel bestimmt. Man erhält für sie also einen maßgebenden Wert, wenn man statt von der Austrittspupille vom (vordern) Hauptpunkte des Auges ausgeht. Man setze also:

$$X' = \delta - f',$$

wo δ der Abstand zwischen dem hintern Hauptpunkte der Lupe und dem vordern des Auges ist. Weiter ist hier $1/\mathfrak{x}' = A$ der Hauptpunktsbrechwert des Auges bei der vorliegenden Beobachtung. So wird aus der ABBEschen Formel (5) die GULLSTRANDsche Formel:

$$V = D - A\,(1 - \delta D)\,, \tag{6}$$

wo D den Dioptrienwert der Lupe bezeichnet. δ ist selbstverständlich in Metern zu messen. Beobachtet das Auge bei erschlaffter Akkommodation, so ist A ein Maß für seine Fehlsichtigkeit. Für ein rechtsichtiges Auge ist $A = 0$, also:

$$V_\infty = D\,, \tag{6a}$$

übereinstimmend mit (5a). Diese Formel gilt auch für $\delta = 1/D$, d. h. wenn der vordere Augenhauptpunkt mit dem hintern Brennpunkte der Lupe zusammenfällt.

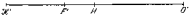


Abb. 189. Die Lupe (das Mikroskop) in Verbindung mit dem Auge. $\mathfrak{H}'$ und F' sind der hintere Hauptpunkt und der hintere Brennpunkt der Lupe, bei O' ist das Bild. H ist der vordere Hauptpunkt des Auges. $\mathfrak{H}'F' = f'$, $F'H = X'$, $\mathfrak{H}'O' = 1/D$, $HO' = \mathfrak{x}'$. Die Abbildung gilt auch für die Ableitungen in Ziff 134, wo H jedoch die Austrittspupille ist.

Der Unterschied der Formeln (5) und (6) besteht darin, daß einmal X' von der Austrittspupille, das andre Mal vom Augenhauptpunkte aus gerechnet ist. Für das Verhältnis von scheinbarem zu wahrem (augenseitigem zu dingseitigem) Gesichtsfeld ist offenbar das erste, für die Netzhautbildgröße das zweite richtig. Glücklicherweise ist der Unterschied nicht sehr erheblich, da er nur das Verbesserungsglied betrifft. Im ersten Falle können bei großem Gesichtsfeld die Formeln durch die Verzeichnung ungenau werden.

128. Vergrößerungsvermögen und Lupenvergrößerung. Um anstatt des Kehrwerts einer Länge eine dimensionslose Zahl für die Vergrößerung zu erhalten, vergleicht man V mit einem andern Abstandskehrwert, den man zu 1/(250 mm) annimmt; natürlicher wäre es (A. GULLSTRAND), für jedes Auge die Einstellung auf die stärkste Akkommodation anzunehmen, wobei jedoch für jede Person und jedes Alter verschiedene Werte herauskämen. Diese Definition gibt

$$\mathfrak{N} = V : 1/l = V\,l = w'/w = 250\,V\,, \tag{7}$$

wenn V in 1/mm, oder $\mathfrak{N} = V/4$, wenn V in dptr ausgedrückt ist.

Bei diesem Vergleiche ist allerdings der Einfluß vernachlässigt, den der verschiedene Akkommodationszustand des Auges auf die Netzhautbildgröße hat, der bei der geringen Verschiebung der Augenhauptpunkte höchstens 2% ausmacht, was nicht von Bedeutung ist, da der Begriff „Vergrößerung" nur einen Überblick über die Leistung des Mikroskops (der Lupe) gibt.

Man kann die Größe $\mathfrak{N}$ nach E. ABBE auch so deuten: Das Bild, einerlei, wo es nach der GAUSSischen Theorie entsteht, sei in die sog. deutliche Sehweite ($l = -a_{\min} = 250$ mm) projiziert gedacht, so wird $\mathfrak{N}$ das Verhältnis zwischen dieser Projektion $\mathfrak{y}_1'$ und der Gegenstandsgröße:

$$\mathfrak{y}_1' = l\,w'\,; \qquad \mathfrak{y}_1'/\mathfrak{y} = l\,w'/\mathfrak{y} = l \cdot V = 250 \cdot V = \mathfrak{N}\,. \tag{8}$$

129. Das Zusatzglied. Der Vergleich von (5) und (5a) oder auch von (6) und (6a) zeigt, daß das Vergrößerungsvermögen V und entsprechend auch $\mathfrak{N}$ aus dem Hauptgliede $V_\infty = 1/f'$ und einem Zusatzgliede besteht. Dessen Größe soll durch einige Beispiele geprüft werden.

130. Beispiele. Man habe $f' = 125$ mm, also $V_\infty = \frac{1}{125}$ mm $= 8$ dptr, $\mathfrak{N}_\infty = 2$ (daher zweifache Lupe). Für das beobachtende (kurzsichtige) Auge sei

$A = -4$ dptr, ferner setze man in der GULLSTRANDschen Formel (6) den Betrag $\delta = 15$ mm, was bei der Benutzung der Lupe eintreten kann. Es wird dann

$$V = [8 + 4(1 - 0{,}015 \cdot 8)]\,\text{dptr} = 11{,}52\,\text{dptr}$$

oder

$$\mathfrak{N} = 11{,}52/4 = 2{,}88\,.$$

Nimmt man hingegen an, es werde durch die Lupe hindurch mit bewegtem Auge beobachtet, so wird zwar die Größe der Austrittspupille durch die Augenpupille bestimmt, für die Länge ξ' kommt es aber auf den Kreuzpunkt der Hauptstrahlen an, und diesen muß man im Augendrehpunkt annehmen. Dieser liegt 12 mm hinter dem vorderen Hauptpunkte, man hat also $\delta = (15 + 12)$ mm $= 27$ mm, $X' = \delta - f' = (27 - 125)$ mm $= -98$ mm, $\xi' = (-250 - 12)$ mm $= -262$ mm. Gleichung (5) gibt dann:

$$V = \frac{1}{125}\left(1 + \frac{-98}{-262}\right)\frac{1}{\text{mm}} = 0{,}01099/\text{mm} = 10{,}99\,\text{dptr},$$

$$\mathfrak{N} = 2{,}75\,,$$

das Zusatzglied ist hier etwa 40% des Hauptgliedes, während die ABBEsche und die GULLSTRANDsche Formel nur um wenige Prozent voneinander abweichen.

Für eine stärkere, 20fache Lupe ($f' = 12{,}5$ mm, $V_\infty = 80$ dptr, $\mathfrak{N}_\infty = 20$) hat man hingegen bei der nämlichen Annahme für A und δ wie zuerst:

$$V = [80 + 4(1 - 0{,}015 \cdot 80)]\,\text{dptr} = 79{,}2\,\text{dptr},$$

$$\mathfrak{N} = 19{,}8\,.$$

Hier müßte man annehmen, daß die Austrittspupille nahezu mit dem Hauptpunkte der Lupe zusammenfiele (s. Ziff. 132). Dann wäre $X' = -12{,}5$, $\xi' = -235$ mm (bei unveränderter Haltung der Lupe)

$$V = \frac{1}{12{,}5}\left(1 + \frac{-12{,}5}{-235}\right)\frac{1}{\text{mm}} = 0{,}0843/\text{mm} = 84{,}3\,\text{dptr},$$

$$\mathfrak{N} = 21{,}1\,.$$

Das Zusatzglied hat bei beiden Rechnungen das entgegengesetzte Vorzeichen, ist aber nicht mehr als 5% des Hauptglieds.

Beim zusammengesetzten Mikroskop ist (s. Ziff. 142) die Brennweite negativ und, wie schon bemerkt, fällt die Austrittspupille nahezu in den hintern Brennpunkt. Um den Einfluß einer Abweichung festzustellen, nehme man sie beispielsweise 10 mm dahinter an, $X' = 10$. Hier kann man voraussetzen, daß das Auge in die Austrittspupille gebracht wird, dann ergibt $A = -4$ dptr den Wert $\xi' = -250$ mm. Eine mittlere Vergrößerung ist gegeben durch die Werte $f' = -1$ mm, $V_\infty = -1/\text{mm} = -1000$ dptr, $\mathfrak{N}_\infty = -250$. Für diesen Fall hat man:

$$V = [-1(1 - 10/250)]\,1/\text{mm} = -0{,}960/\text{mm} = -960\,\text{dptr},$$

$$\mathfrak{N} = -240\,.$$

Das Zusatzglied ist hier 4% des Hauptglieds, man kann also im allgemeinen sagen, daß seine Bedeutung bei stärkeren Vergrößerungen gering ist. Bei kleiner Vergrößerung kann die „individuelle Vergrößerungszahl" V (GULLSTRAND) nahezu doppelt so groß sein als die „absolute" V_∞ (der Kehrwert der Brennweite), und zwar beispielsweise dann, wenn bei starker Kurzsichtigkeit eine schwache Lupe nahe vors Auge gehalten wird, in (5) sind dann X', der Abstand der Austrittspupille von der hintern Brennebene der Lupe, und ξ', der Abstand der (mit der Einstellebene des Auges zusammenfallenden) Bildebene von der Austrittspupille, negativ und von gleicher Größenordnung.

Bei einem Leseglase hingegen[1]), das, weit vom Auge entfernt, in die Nähe der Schrift gehalten wird, kann die Austrittspupille weit hinter die hintere Brennebene der Lupe fallen, so daß hier für kurzsichtige Augen $V < V_\infty$, für übersichtige $V > V_\infty$ ist.

131. Die Ablesevergrößerung. Schon bei den Leseglasern ist statt der Angabe der Vergrößerung $\mathfrak{N}$, der Lupenvergrößerung, empfohlen worden, die scheinbare Größe vielmehr mit der zu vergleichen, die bei Beobachtung mit bloßem Auge entsteht, wenn man das Glas einfach beiseite legt. Dies ist aber besonders für die im letzten Absatz von Ziff. 122 erwähnten Grenzfälle bei Ablesung einer Teilung angebracht. Der Quotient wird von H. ERFLE als Vergrößerung, von O. EPPENSTEIN im CZAPSKIschen Lehrbuch als Ablesevergrößerung $\mathfrak{N}_A$ bezeichnet. Nennt man den Abstand, positiv gerechnet, c, so gibt die Beobachtung mit bloßem Auge

$$\operatorname{tg} w_a = \mathfrak{y}/c. \tag{1}$$

Es tritt also $1/c$ an die Stelle von $1/l$:

$$\mathfrak{N}_A = V \cdot c = \mathfrak{N} c/l. \tag{9}$$

132. Die Lupe und die Grenzen ihrer Anwendung. Kehren wir nun zu den Formeln für V [(5) bis (6a)] zurück. Das Hauptglied, das nur von der Lupe (dem Mikroskop), nicht vom Benutzer abhängt, für stärkere Vergrößerungen allein maßgebend, ist der Kehrwert der Brennweite, und diese geht bis unter 1 mm herunter; zwar sind die früher wohl üblichen, übertriebenen Vergrößerungen außer Gebrauch gekommen, seit E. ABBE ihre Zwecklosigkeit festgestellt hatte, doch kommen Werte von $\mathfrak{N} = 1500$, also $V = 6000$ dptr, $f' = 1/V = 0{,}17$ mm auch jetzt vor. Nun ist beispielsweise bei einer Plankonvexlinse vom Radius r für $n = 1{,}60$

$$f' = r/0{,}6 = 1{,}667\, r,$$

die Linse könnte also höchstens einen Durchmesser von

$$2p = 2r = 1{,}2\, f'$$

haben. Das Verhältnis $2p/f'$ wird auch bei Bikonvexlinsen nicht viel größer, weil bei ihnen die Dicke die Brennweite verlängert.

Bei Linsen, deren Durchmesser 1 bis 2 mm oder weniger ist, bildet ihre Öffnung die Austrittspupille, bei ruhendem Auge dient die Augenpupille als Austrittsluke. Um ein einigermaßen ausreichendes Gesichtsfeld zu erhalten, muß man das Auge möglichst in die Nähe der Lupe bringen, zum deutlichen Sehen den Kopf bewegen, ohne daß Auge und Austrittspupille zusammenfielen. Diese Art der Beobachtung ist nicht sonderlich bequem. Weiter ist die kleine Öffnung der Linse nicht nur wegen der Lichtschwäche ein schwerer Nachteil. Die Größe p/f', die Apertur, deren Bedeutung später zu besprechen ist, wird im angegebenen Beispiel höchstens 0,6 betragen, worauf es zwecklos wäre (Ziff. 137) mit f' unter 0,4 bis 0,5 mm hinunter-, mit $\mathfrak{N}$ über 600 hinauszugehen. Tatsächlich muß man aber die Öffnung der Linse schon wegen der sphärischen Abweichungen, die bei einer Einzellinse beträchtlich sind, noch mehr beschränken. Durch Teilung der Linse in 2 oder 3 (Zwillings- oder Drillingslinsen) hat man die Radien flacher gemacht und die sphärische Abweichung verringert oder gehoben. Freilich ist man mit allen diesen Mitteln wohl nur selten zu einer Brennweite von weniger als 1 mm ($V = 1000$ dptr, $\mathfrak{N} = 250$) gelangt. Die Erkenntnis der Wichtigkeit der großen Apertur bei starken Vergrößerungen und der Unmöglichkeit, diese durch einzelne

[1]) Über Lesegläser vgl. man die beiden Aufsätze von A. SONNEFELD, Einlinsige Lupen. ZS. f. ophthalm. Opt. Bd. 8, S. 106—108. 1920. Vom Abbildungsbereich der Lesegläser. Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 43—45. 1922.

oder mehrere nah aneinanderliegende Linsen mit gleichzeitiger ausreichender Hebung der Fehler in und außer der Achse zu erreichen, hat dahin geführt, daß die starken Lupen — gewöhnlich als einfache Mikroskope bezeichnet — mehr und mehr außer Gebrauch gekommen sind. Gegenwärtig benutzt man die Lupe bis etwa zur 40fachen Vergrößerung in verschiedenen Formen.

133. Verschiedene Formen von Lupen. Die einfachste Ausführung ist die einzelne Sammellinse. Für schwache Vergrößerungen kann sie mit verhältnismäßig weiter Öffnung benutzt werden. Bei ruhendem Auge dient dann die Eintrittspupille des Auges als Austrittspupille, die Linsenöffnung als Austrittsluke.

Tatsächlich wird aber, worauf A. GULLSTRAND bei der Einführung des Veranten aufmerksam machte, mit bewegtem Auge beobachtet[1]). Danach ist das scheinbare Gesichtsfeld gegeben durch:

$$\operatorname{tg} w' = p/x'. \tag{10}$$

Hier ist x' der Abstand des Augendrehpunktes von der Austrittsöffnung der Lupe, $2p$ der Durchmesser dieser Öffnung.

Das dingseitige Gesichtsfeld der Lupe ist, abgesehen von der Verzeichnung, gegeben durch:

$$2\mathfrak{y} = 2\operatorname{tg} w'/V = 500 \operatorname{tg} w'/\mathfrak{N} \tag{11}$$

(hier ist $\mathfrak{y}$ und V in mm und 1/mm angegeben); für ein rechtsichtiges nicht akkommodierendes Auge:

$$2\mathfrak{y} = 2\operatorname{tg} w'/V_\infty = 2f' \operatorname{tg} w' = 500 \operatorname{tg} w'/\mathfrak{N}_\infty. \tag{11a}$$

Die Apertur ist natürlich gegeben durch

$$a = \mathfrak{p}/f', \text{ (Öffnungsverhältnis } 2\mathfrak{p}/f), \tag{12}$$

wo $2\mathfrak{p}$ der Durchmesser der Eintrittspupille des Auges ist.

Bei der geringen Größe der Pupille ist von vornherein zu erwarten, daß für schwache Lupen, wo $\mathfrak{p}/f'$ klein ist (für $2\mathfrak{p} = 4$ mm, $f' = 50$ mm, $\mathfrak{N}_\infty = 5$ ist $a = 0{,}04$), die Abweichungen für Achsenpunkte nicht von besonderer Bedeutung sein werden, es wird vielmehr auf die Fehler des Gesichtsfelds (Astigmatismus, Bildfeldwölbung, Verzeichnung und Farbenunterschied der Vergrößerung) ankommen.

134. Der Farbenunterschied der Vergrößerung. Um den Farbenunterschied der Vergrößerung zu bestimmen, muß man beachten, daß die Bildebene für verschiedene Farben zwar verschieden ist, aber alles auf dieselbe Einstellebene projiziert wird, fest ist einerseits die Austrittspupille, andrerseits die Dingebene.

Setzt man in Gleichung (5) wieder:

$$X' = \delta - f',$$

wo δ jetzt der Abstand der Austrittspupille oder vielmehr des Kreuzpunktes der Hauptstrahlen (also des Augendrehpunktes) vom hintern Hauptpunkte der Lupe ist (man kann meist sagen von der Lupe, indem man diese als dünn annimmt), ferner

$$\xi' = a' - \delta,$$

wo a' die Bildweite ist, so hat man:

$$V = \frac{1}{f'}\left\{1 + \frac{\delta - f'}{a' - \delta}\right\} = \frac{1}{f'} \cdot \frac{a' - f'}{a' - \delta} = \left\{\frac{1}{f'} - \frac{1}{a'}\right\} \frac{a'}{a' - \delta}.$$

---

[1]) M. v. ROHR, The verant, a new instrument for viewing photographs from the correct standpoint. Photogr. Journ. Bd. 43, S. 279—290. 1903; Brit. Journ. of Photogr. Bd. 51, S. 28—33. 1904.

Auch wenn nicht gerade $a' = \infty$ ist, wie bei V_∞, wird es doch erheblich größer sein als δ, man kann also entwickeln:

$$V = \left\{\frac{1}{f'} - \frac{1}{a'}\right\}\left\{1 + \frac{\delta}{a'} + \frac{\delta^2}{a'^2} + \cdots\right\}.$$

Will man ΔV, die Änderung dieser Größe mit der Farbe bestimmen, so kann man jedenfalls die Hauptpunkte für alle Farben zusammenfallend annehmen. Es ist dann $1/a' - 1/f' = 1/a$, der Kehrwert der Dingweite, für alle Farben derselbe;

$$\Delta\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{f'}\right) = 0; \qquad \Delta\frac{1}{a'} = \Delta\frac{1}{f'},$$

also

$$\Delta V \sim -\frac{1}{a}\left\{\delta\Delta\frac{1}{f'} + \frac{2\delta^2}{a'}\Delta\frac{1}{f'} + \cdots\right\} = -\frac{\delta}{a}\Delta\frac{1}{f'}\left\{1 + \frac{2\delta}{a'} + \cdots\right\}. \tag{13}$$

Will man beispielsweise den Farbenunterschied für C und F bestimmen, so kann man setzen:

$$\Delta\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'\nu} = \frac{V_\infty}{\nu},$$

wo V_∞ auf der rechten Seite für die Heliumlinie d gerechnet ist (nach früherer Bestimmung für die Natriumlinie D, was nichts ausmacht):

$$\Delta V = -\frac{\delta V_\infty}{a \cdot \nu}\left\{1 + \frac{2\delta}{a'} + \cdots\right\}. \tag{13a}$$

Will man nun die Farbenabweichung für ein rechtsichtiges Auge bei entspannter Akkommodation untersuchen, so hat man $1/a' = 0$, $1/a = -1/f' = -V_\infty$.

$$\Delta V_\infty = \delta V_\infty^2/\nu. \tag{13b}$$

Es ist aber weiter zu setzen:

$$\Delta \operatorname{tg} w' = \mathfrak{y}\,\Delta V \qquad \text{oder} \qquad \Delta \operatorname{tg} w' = \mathfrak{y}\,\Delta V_\infty, \tag{14}$$

bei kleinem Winkel mit ausreichender Näherung:

$$\Delta w' = \mathfrak{y}\,\Delta V \qquad \text{oder} \qquad \Delta w' = \mathfrak{y}\,\Delta V_\infty \tag{14a}$$

Man kann auch wieder einführen $w' = \mathfrak{y}\,V_\infty$ und hat dann — es sei nur die einfachste Formel hingeschrieben —:

$$\Delta w' = \frac{w' \cdot \Delta V_\infty}{V_\infty} = \frac{w' \cdot \delta \cdot V_\infty}{\nu}. \tag{15}$$

Für eine sog. 5fache Lupe ist $V_\infty = 20$ dptr, $f' = 50$ mm. Man kann setzen $\delta = 20$ mm $= 0{,}020$ m. Ferner habe man ein Kronglas ($\nu = 60$ oder noch etwas größer). Dann entspricht einem scheinbaren Gesichtsfelde von $20°$ ($w' = 10°$)

$$\Delta w' = 0{,}020 \cdot 20 \cdot 10' = 4'.$$

Ein solcher Unterschied am Rande stört nicht. Das wahre Gesichtsfeld ist

$$2\mathfrak{y} = \left(\frac{2}{20}\operatorname{tg} 10^0\right)\mathrm{m} = 17{,}6\,\mathrm{mm}.$$

Es muß aber darauf aufmerksam gemacht werden, daß bei Lesegläsern δ und daher auch der Farbenfehler merklich größer sein kann.

135. Der Astigmatismus, die Bildfeldwölbung und die Verzeichnung. Diese Fehler sind von der Durchbiegung der Linse abhängig. Die einfachsten Formen — gleichseitige Bikonvexlinse und Plankonvexlinse — sind häufig befriedigend, bei der zweiten ist es aber nicht gleichgültig, ob man die ebene Fläche dem Auge oder dem Gegenstande zukehrt.

Beobachtet ein rechtsichtiges Auge bei entspannter Akkommodation durch eine 5fache Lupe (Brechungsverhältnis 1,525, Dicke 1 mm, Augendrehpunkt 20 mm hinter der augennahen Fläche), so ist in der Mitte des Gesichtsfeldes die bildseitige Schnittweite $s' = \infty$, $1/s' = 0$ dptr, für den Rand eines bildseitigen Gesichtsfeldes von 20° ($w' = 10°$) gibt eine trigonometrische Durchrechnung folgende Abweichungen:

	Bildfeldfehler und Astigm. in dptr			Verzeichnung in %
	sagittal $\left(\frac{1}{f'}\right)$,	tangential $\left(\frac{1}{t'}\right)$,	Ast. $\frac{1}{t'} - \frac{1}{f'}$	
Plankonvex, ebene Fläche augenseitig	+0,21	+0,25	+0,04	+1,0%
Bikonvex, gleichseitig	+0,39	+0,69	+0,30	+1,6%
Plankonvex, ebene Fläche dingseitig	+0,73	+1,82	+1,09	+2,8%

Die Plankonvexlinse, deren ebene Fläche dem Auge zugekehrt ist, reicht jedenfalls für ein noch merklich größeres Gesichtsfeld aus. Dasselbe gilt bei noch schwächeren Lupen. Man kann aber auch den Astigmatismus durch Umbiegung ganz heben und kommt dann auf Menisken, deren Hohlfläche dem Auge zugekehrt ist. Wie bei den Lupenbrillen, sind zwei verschieden stark durchgebogene Formen mit gehobenem Astigmatismus vorhanden. Nimmt man statt des rechtsichtigen Auges ein fehlsichtiges oder für den Abstand des Augendrehpunktes einen andern Wert an, so ändern sich die Formen der astigmatismusfreien Lupen.

Für die Werte $\delta = 20$ mm, $a' = \infty$ kann man nach A. SONNEFELD[1]) den Astigmatismus nicht mehr heben, wenn $V_\infty > 18,6$ dptr, $\mathfrak{N} > 4,6$ wird, man kommt dann auf imaginäre Durchbiegungen. Es gibt eine günstigste Durchbiegung, die im allgemeinen bikonvex ist, oft nach A. SONNEFELD nahezu gleichseitig. Für eine 10fache Lupe ($f' = 25$ mm) erhält man unter den gleichen Annahmen wie vorhin, doch bei Beschränkung auf ein Gesichtsfeld von 14° ($w' = 7°$):

Plankonvex, ebene Fläche augenseitig:

$$1/f' = +0,80 \text{ dptr}, \quad 1/t' = +2,03 \text{ dptr}, \quad 1/t' - 1/f' = 1,23 \text{ dptr}, \quad \text{Verz. } +1,2\%,$$

Bikonvex, gleichseitig:

$$1/f' = +0,50 \text{ dptr}, \quad 1/t' = +1,14 \text{ dptr}, \quad 1/t' - 1/f' = +0,64 \text{ dptr}, \quad \text{Verz. } +1,6\%.$$

Trotzdem hier das bildseitige Gesichtsfeld verringert ist, bleibt also ein merklicher Astigmatismus übrig. Bei einer Einschränkung von w' auf etwa 5° wird er noch etwa die Hälfte sein. Dem entspricht auf der Dingseite:

$$2 \cdot 25 \text{ mm tg } 5° = 4,4 \text{ mm}.$$

Soweit der Astigmatismus ganz oder beinahe gehoben ist, wird der Bildfeldfehler meist nicht stören, auch die Verzeichnung hat keine hohen Beträge.

136. Die Lesegläser. Bisher ist angenommen, daß die Lupe dem Auge möglichst nahe gehalten wird. Bei dem entgegengesetzten Falle der Lesegläser ist nach A. SONNEFELD[2]) eine Hebung des Astigmatismus nur dann möglich, wenn das Auge akkommodiert, damit wird $V < V_\infty$ (s. Ziff. 130). Man erhält zwei bikonvexe Formen, deren schwächere Fläche dem Gegenstande zugekehrt ist, nahezu dasselbe leistet die Plankonvexlinse in der entsprechenden Lage.

137. Stärkere Lupen. Bei stärkeren Lupen wird, auch bei der Abblendung durch die Augenpupille, die sphärische Abweichung und die Farbenabweichung in der Achse merklich. Nimmt man wieder die Plankonvexlinse mit augennaher

[1]) A. SONNEFELD, Einlinsige Lupen. ZS. f. ophthalm. Optik. Bd. 8, S. 106—108. 1920.
[2]) A. SONNEFELD, Vom Abbildungsbereich der Lesegläser. Central-Zeitung f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 43—45. 1922.

Planfläche an und eine Pupillenöffnung von 4 mm, so wird bei einer 10fachen Lupe die sphärische Abweichung schon stören können[1]), in der umgekehrten Stellung ist eine etwas stärkere Vergrößerung zulässig, da der Astigmatismus ungünstiger ist, muß man das Gesichtsfeld noch weiter einschränken. Etwa von derselben Vergrößerung ab stört auch die Farbenabweichung in der Achse merklich; sie ist natürlich durch kein Durchbiegen zu verringern. Man kann durch eine Verkleinerung der Öffnung oder durch eine besondere Blende die Wirkung der beiden Abweichungen beschränken, damit rückt dann die Austrittspupille der Lupe in diese kleinere Öffnung. Diese Abblendung hat aber ihre Grenze in der Ziff. 132 erwähnten Beziehung zwischen Apertur und Vergrößerung. Es ist dort schon nach der Regel[2]) vorgegangen worden, daß eine Vergrößerungszahl $\mathfrak{N}$, die über das 1000fache der Apertur hinausgeht, zwecklos ist. Man hat also die Forderung:

$$\mathfrak{N} \leq 1000\, a\,, \qquad \mathfrak{N} = 250/f'\,, \qquad a = p/f'\,, \qquad p \geqq 0{,}25\ \text{mm}\,.$$

Eine Beschränkung der Öffnung auf weniger als 0,5 mm würde also die angewandte Vergrößerung zwecklos machen. Andrerseits folgt aus den bei Czapski-Eppenstein a. a. O. mitgeteilten Formeln, daß für eine solche Öffnung jedenfalls bei $f' < 1$ mm keine befriedigende Abbildung mehr einträte.

Diese starken Lupen oder einfachen Mikroskope hat man wohl auch nicht als dünne Linsen, sondern mit einer im Verhältnis zur Brennweite beträchtlichen Dicke ausgeführt. Es sei namentlich auf die Verwendung der Vollkugel verwiesen[3]). Wenn die Lupenöffnung nicht schon von vornherein kleiner ist als die Eintrittspupille des Auges, so wird nach W. H. Wollaston und D. Brewster ein Einschliff in der Mitte angebracht, so daß jedenfalls die Kugelöffnung als Austrittspupille dient. Es gehen dann die Hauptstrahlen durch den Mittelpunkt der Kugel, so daß die Fehler außer der Achse mit Ausnahme der Bildfeldwölbung verschwinden. Bei den Zylinderlupen wird ein dicker und schmaler Körper, der oft noch einen Einschliff in der Mitte hat, von zwei Kugelflächen gleicher oder auch verschiedener Krümmung begrenzt.

138. Besondere Formen von Lupen. Aus dicken, aber nicht einfachen Linsen bestehen die aplanatischen Lupen nach A. Steinheil[4]), symmetrische Folgen von drei miteinander verkitteten Linsen. Sie werden meist für mäßige Vergrößerungen (6- bis 15fach) ausgeführt, bei ihnen ist der Farbenunterschied der Vergrößerung gänzlich zu heben.

Zusammengesetzte Lupen mit genauerer Hebung der Fehler außer der Achse (Veranten) dienen zur Betrachtung photographischer Aufnahmen, sie sind deshalb an einer andern Stelle des Buches behandelt (Ziff. 103).

Auch bei stärkeren Lupen hat man die Fehler — hier wesentlich die in der Achse — durch Zusammensetzung aus mehreren Linsen zu heben gesucht, die man nicht verkitten konnte, sondern unmittelbar hintereinanderschaltete (Zwillings- oder Drillingslinsen); auf Hebung der Farbenabweichung ist hierbei meist verzichtet worden. Man könnte Lupen verschiedener Stärke angeben, indem man die Form eines Fernrohr- oder eines photographischen Objektives benutzt. Hierbei muß jedoch beachtet werden, daß die längere Schnittweite bei der Lupe auf der Bildseite ist, man muß also dem Gegenstande die Seite zukehren, die beim Fernrohrobjektiv nach dem Okular, beim photographischen Objektiv nach der Platte zu läge. Durch kleine Änderungen kann man noch etwas

---

[1]) Czapski-Eppenstein, S. 462—463.
[2]) Nach E. Abbe, s. Ziff. 177, in Zeissischen Katalogen als praktische Regel angeführt.
[3]) Siehe die bei Czapski-Eppenstein, S. 464—466, angeführten Abhandlungen.
[4]) A. Steinheil, s. Czapski-Eppenstein, S. 467.

bessere Ergebnisse erhalten, z. B. indem man die photographische Farbenhebung durch die visuelle ersetzt. Bedenkt man aber, daß photographische Objektive höchstens ein Öffnungsverhältnis von 1 : 2,5, d. h. eine Apertur von 0.2 geben würden, so sieht man, daß auch dies Verfahren seine Grenzen hat, um so mehr, wenn gleichzeitig ein nicht zu kleines Gesichtsfeld verlangt wird.

Die Lupen können, wenn Astigmatismus und Bildfeldwölbung einigermaßen gehoben sind, auch für schwächere Vergrößerungen zur objektiven Darstellung benutzt werden, ähnlich wie die zusammengesetzten Mikroskope für stärkere Vergrößerungen. Diese objektive Benutzung ist wohl nur bei durchsichtigen Gegenständen (mikroskopischen Präparaten) verwandt worden. In früherer Zeit ist durchweg mit Sonnenlicht beleuchtet worden, weshalb die betreffenden Vorrichtungen Sonnenmikroskope hießen. In neuerer Zeit ist auch künstliche Beleuchtung und eine besondere Beleuchtungsvorrichtung angewandt worden.

Eine Zusammenstellung der gegenwärtig üblichen Lupenformen geben die Verzeichnisse der optischen Firmen[1]).

139. Allgemeines über zusammengesetzte Mikroskope. Das zusammengesetzte Mikroskop besteht wie das Fernrohr aus zwei getrennten Linsenfolgen. Auch ist die erste (das Objektiv) immer, die zweite (das Okular) in der Regel sammelnd. Äußerlich unterscheidet sich das Mikroskop vom Fernrohr dadurch, daß das Okular meist schwächer ist als das Objektiv und daß der vordere Brennpunkt des Okulars nicht mit dem hintern des Objektivs zusammenfällt, daher die Gesamtfolge nicht brennpunktlos ist. Vielmehr ist die Größe Δ positiv und meist erheblich größer als die Brennweiten der Teilfolgen. Sind diese (hinteren) Brennweiten f_1' und f_2', so ist die Brennweite des gesamten Mikroskops gegeben durch:

$$f' = -f_1' f_2' / \Delta . \tag{16}$$

140. Das Mikroskop mit zerstreuendem Okular. Ist zunächst f_2' negativ, f_1' und Δ positiv, so wird f' positiv. Daher sind auch [(5a), (7)] V_∞ und $\mathfrak{R}_\infty$ und wegen der verhältnismäßigen Kleinheit des Zusatzgliedes V und $\mathfrak{R}$ positive Größen. Wie durch eine Lupe sieht man durch eine solche Vorrichtung die Gegenstände aufrecht, sie wird daher zuweilen auch als Lupe bezeichnet, um so mehr, als sie auch für starke Vergrößerungen nicht gut anwendbar ist.

Vorrichtungen der geschilderten Art sind wohl die ersten, von G. GALILEI und in Holland am Anfang des 17. Jahrhunderts benutzten Mikroskope gewesen; im 19. Jahrhundert wurden sie von CH. CHEVALIER 1839 und E. BRÜCKE 1851 vorgeschlagen.

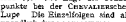


Abb. 190. Die Lage der Grundpunkte bei der CHEVALIERschen Lupe. Die Einzelfolgen sind als unendlich dünn angenommen, was natürlich nicht zulässig ist, wenn sie wie das Objektiv in den Beispielen von Ziff. 141 aus mehreren getrennten Teilen bestehen. $F_1'\mathfrak{F}_2 = \Delta$, $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F} = \sigma$.

Für den Fall, daß das Bild im Unendlichen liegt, muß der Gegenstand in den vorderen Brennpunkt der gesamten Vorrichtung gebracht werden. Dieser liegt um

$$\sigma = f_1 f_1' / \Delta \tag{17}$$

vom vorderen Brennpunkt $\mathfrak{F}_1$ des Objektivs, da f_1' und Δ positiv, f_1 negativ ist, so liegt $\mathfrak{F}$ weiter von der ersten Fläche des Objektivs entfernt als dessen vorderer Brennpunkt $\mathfrak{F}_1$. Da nun für $\Delta > -f_2'$ jedenfalls $f' < f_1'$ ist, so würde eine einfache Lupe von gleicher Vergrößerung erst recht den Gegenstand näher an der ersten Fläche haben. Der Vorteil, mit größerem Dingabstande

[1]) S. z. B. die Zeissischen Druckschriften: Neue Lupen, Mikro 168. 1908; Präpariersysteme, Lupen, Lupenstative, Mikro 188.

arbeiten zu können, ist der Hauptgrund zur Benutzung solcher Mikroskope an Stelle einfacher Lupen.

Das negative Okular entwirft von der Öffnung des Objektivs ein nicht auffangbares Bild zwischen beiden Teilfolgen. Dessen Entfernung vom Auge ist also notwendigerweise noch etwas größer als die des Okulars. Bei schwachen Vergrößerungen wird jedenfalls der Kreuzpunkt der Hauptstrahlen wieder im Augendrehpunkt liegen, bei stärkeren kann die Öffnung oder vielmehr ihr Bild kleiner sein als die Eintrittspupille des Auges und daher zur Austrittspupille werden. Die Bedeutung dieses Unterschiedes für die Farbenhebung wird unter Ziff. 211 auseinandergesetzt werden.

Über verschiedene Formen, die man den Teilfolgen gegeben hat, vgl. man Czapski-Eppenstein S. 468.

141. Präpariermikroskope. Diese Art des Mikroskops findet noch häufig Verwendung bei Herstellung von Präparaten. Ein Beispiel einer solchen Präparierlupe sei nach einer älteren Zeissischen Druckschrift[1]) angegeben (Abb. 191 links). Ein Rohr von 30 mm Länge hat unten ein Gewinde zum Anschrauben des Objektivs, das aus 3 einzeln abschraubbaren achromatischen Sammellinsen besteht, so daß man mit der obersten, den beiden oberen oder auch mit allen dreien beobachten kann. In jedem Falle kann das zerstreuende Okular oben hineingesetzt werden oder nicht, so daß man 6 verschiedene Vergrößerungen zur Verfügung hat — Beispielsweise bildet die Zusammensetzung aller drei Sammellinsen eine 30fache Lupe, es ist also $\mathfrak{N}_1 = 30$, $f_1' = 250\,\text{mm}/30 = 8{,}33\,\text{mm}$. Die Brennweite des Okulars ist etwa -9 mm. Bei der Lage der Brennpunkte (Abb. 190) ist $\varDelta$ nahezu $(30 - 8{,}33 + 9)$ mm oder etwa 30 mm. Man hat also $f' = -[8{,}33\,(-9)/30]\,\text{mm} = 2{,}5\,\text{mm}$. $\mathfrak{N} = 100$. Gleichzeitig wird der vordere Brennpunkt der Folge um $-\sigma = (8{,}33)^2/30)\,\text{mm} = 2{,}3\,\text{mm}$ vor dem des Objektivs liegen, der freie Dingabstand ist also um diesen Betrag vergrößert, während die Lupenvergrößerung den 3,3fachen Wert hat.

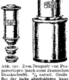


Abb. 191. Zwei Beispiele von Präparierlupen (nach einer Zeissischen Druckschrift). $^2/_3$ natürl. Größe Bei der links abgebildeten kann man eine, zwei oder alle drei Linsen des Objektivs mit oder ohne (zerstreuendes) Okular benutzen und dadurch Vergrößerungen von der 11fachen bis zur 100fachen erhalten. Bei der rechten kann die Vergrößerung durch Verschieben des Okulars zwischen 5facher und 10facher geändert werden.

Da das vom Objektiv entworfene Bild im Punkte $\mathfrak{F}_2$ entstehen würde, kommt es nicht wirklich zustande, sondern wird vom Okular abgefangen.

Ein Beispiel einer schwächeren Lupe, bei der der Kreuzpunkt der Hauptstrahlen im Augendrehpunkt liegt, gibt Abb. 191 rechts nach der nämlichen Druckschrift. Die Vergrößerung kann hier durch Verschieben der Negativlinse verändert werden; aus Gleichung (16) geht hervor, daß bei größerem Linsenabstande f' kleiner, V und $\mathfrak{N}$ also größer wird. In der abgebildeten Form liegt die Vergrößerung zwischen 5 und 10, natürlich ist sie allgemein dadurch beschränkt, daß die Fehlerhebung nicht bei beliebiger Verschiebung befriedigend bleibt. Nach (17) wird bei größerem $\varDelta$ der freie Dingabstand und infolge der stärkeren Vergrößerung selbstverständlich auch das dingseitige Gesichtsfeld geringer.

[1]) Druckschrift Mikro 188. 1913, S. 2—3.

142. Das Mikroskop mit sammelndem Okular. Bei Zusammensetzung eines Mikroskops aus zwei sammelnden Teilfolgen gibt die Gleichung (17) ebenfalls einen größeren Dingabstand als für die entsprechende Lupe. Aus (16) folgt, daß f' negativ werden wird, V und $\mathfrak{N}$ negativ sind; das Bild des Gegenstandes wird auf dem Kopfe stehen. Da σ negativ ist, der Dingpunkt also außerhalb des vorderen Objektivbrennpunktes liegt, so entwirft das Objektiv ein auffangbares Bild des Gegenstandes. Für rechtsichtige Augen muß die vordere Brennebene des Okulars mit der Bildebene zusammenfallen, für fehlsichtige kann die Entfernung wenigstens nicht groß sein, das Zwischenbild kommt also für ein dünnes sammelndes Okular wirklich zustande und kann mit einer dort angebrachten Meßvorrichtung verglichen werden.

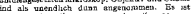


Abb. 192. Die Lage der Grundpunkte beim zusammengesetzten Mikroskop. Objektiv und Okular sind als unendlich dünn angenommen. Es ist gesetzt $-f_1 = f_1' = 20$ mm, $-f_2 = f_2' = 50$ mm, $\Delta = 180$ mm. Dies ergibt für die Brennweite und die Lage der Brennweite:

$$f' = -\frac{20\times 50}{180}\,\text{mm} = -(50/9)\,\text{mm} = -5{,}56\,\text{mm},$$

$$\sigma = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F} = \frac{-20\times 20}{180}\,\text{mm} = -2{,}22\,\text{mm},$$

$$\sigma' = F_1'F' = -\frac{-50\times 50}{180}\,\text{mm} = 13{,}89\,\text{mm}.$$

$$V_\infty = 1/f' = -180\,\text{dptr},\ \mathfrak{N} = -45.$$

Für ein rechtsichtiges Auge muß der Gegenstand sich im vordern Brennpunkt des Mikroskops, in $\mathfrak{F}$ befinden, das auffangbare Zwischenbild in $\mathfrak{F}_2$. Für telezentrischen Strahlengang ist F_1' die Austrittspupille des Objektivs, F' die des ganzen Mikroskops.

Das Zwischenbild ist im Verhältnis

$$\beta = V_1 = -\chi'/f_1' \tag{18}$$

vergrößert, im Falle des rechtsichtigen Auges, der im folgenden vorausgesetzt werden soll,

$$V_1 = -\Delta/f_1'.$$

Setzt man für die Wirkung des ganzen Mikroskops

$$\left.\begin{aligned} V_\infty &= 1/f' = \{-\Delta/f_1'\}\cdot 1/f_2',\\ \mathfrak{N}_\infty &= l/f' = \{-\Delta/f_1'\}\{l/f_2'\},\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

so ist $1/f_2'$ oder l/f_2' die Wirkung des Okulars. Man kann danach das Okular als eine Lupe ansehen, mit der das vom Objektiv entworfene Zwischenbild betrachtet wird.

Da $\Delta > -f_2$ ist, so wird der hintere Brennpunkt F_1' des Objekivs vom Okular reell abgebildet, der Bildpunkt ist der hintere Brennpunkt des ganzen Mikroskops F'. Bei stärkeren Objektiven fällt F_1' in das aus mehreren Linsen bestehende Objektiv hinein und in die Nähe der letzten Linsen. Richtet man es also so ein, daß diese Linsen die Apertur begrenzen, so kann man ohne großen Fehler sagen, daß die Austrittspupille des Objektivs mit F_1', die des ganzen Mikroskops mit F' zusammenfalle, auf der Dingseite also der Strahlengang telezentrisch sei. Dasselbe gilt auch noch näherungsweise von mittelstarken Objektiven, wo F_1' zwischen Objektiv und Okular liegt, der Abstand von der letzten Linsenöffnung aber klein gegen Δ ist. Zuweilen muß, wie noch bemerkt werden wird, der telezentrische Strahlengang auf der Dingseite durch eine Blende in der hinteren Brennebene des Objektivs herbeigeführt werden.

Die Austrittspupille (Ramsdenscher Kreis) ist oberhalb des Okulars sichtbar, man bringt das Auge an sie heran. Wenn die Eintrittspupille des Auges kleiner ist als der Ramsdensche Kreis, wird sie einen Teil des Lichtes abblenden.

Die Begrenzung des Gesichtsfeldes erfolgt im Okular. Da der Ort des Zwischenbildes zugänglich ist, kann durch eine Gesichtsfeldblende eine scharfe Begrenzung hergestellt werden.

143. Der Tubus, das Stativ und Nebenteile. Bevor die theoretischen Betrachtungen weiter fortgesetzt werden, soll einiges über die äußere Form des Mikroskops gesagt werden.

Objektiv und Okular werden an den beiden Enden eines Rohrs (Tubus) angebracht, das bei der üblichsten Einrichtung senkrecht steht, häufig gekippt werden kann. Das Objektiv muß (unten) festgeschraubt werden, wogegen das Okular am obern Ende einfach hineingesteckt wird.

Häufig ist am Rohre eine Einrichtung angebracht, es durch Herausziehen und Hineinschieben eines Stücks zu verlängern oder zu verkürzen. Doch hat sich, wo nicht ein besonderer Zweck eine ungewöhnliche Länge verlangt, die Übung herausgebildet, das Rohr auf einer festen Länge zu halten (in Deutschland 160 mm, in England 240 mm), man nennt sie mechanische Tubuslänge T, die Größe Δ dagegen optische Tubuslänge. Dies Verfahren hat den Vorteil, daß man verhältnismäßig schnell Objektive und Okulare mit andern vertauschen, d. h. die Vergrößerung ändern kann; da bei den Objektiven das Aus- und Einschrauben immerhin einige Zeit in Anspruch nimmt, hat man besondere Vorrichtungen getroffen (Revolver, Schlittenwechsler), die das Wechseln mehrerer an Zwischenstücken angeschraubter Objektive durch einen einzigen Handgriff ermöglichen.

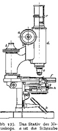


Abb. 193. Das Stativ des Mikroskops. *a* ist die Schraube der groben, *b* die der feinen Einstellung, *c* das Okular, *d* der Tubus, *e* das Objektiv, *f* der Objekttisch, *g* der Kondensor, *h* der Griff der Irisblende, *k* der Spiegel zur Regelung der Beleuchtung (nach M. v. Rohr).

Es sei zunächst angenommen, daß die Teile des Gegenstandes mehr oder minder durchsichtig sind und daß im durchfallenden Lichte beobachtet wird. Der Gegenstand — etwa ein Teil oder Schnitt eines Pflanzen- oder Tierkörpers; häufig bedarf er einer besonderen Vorbereitung (Praparation) und wird dann mikroskopisches Präparat genannt — befindet sich gewöhnlich zwischen zwei Glasplatten, dem Tragglas (Objektträger) und dem Deckglas; das erstgenannte ist etwa 1 bis 3 mm, das zweite nur 0,1 bis 0,2 mm dick. Der Gegenstand ist oft in einer Flüssigkeit oder auch in einem nach der Vorbereitung erstarrenden Harz, wie Kanadabalsam, eingebettet. Das Tragglas liegt auf einem Tischchen unterhalb des Rohrs; in der Mitte ist das Tischchen durchbohrt, um das Licht zur Beleuchtung durchzulassen. Zwischen dem Deckglase und der untersten Linse des Objektivs befindet sich häufig eine Flüssigkeit (Wasser, Öl usf.).

Das Licht zur Beleuchtung wird von einer künstlichen oder natürlichen Lichtquelle (Wolke) auf einen Spiegel geworfen, der sich etwa 60 mm unterhalb des Tischchens befindet, so daß sich noch Blenden oder besondere Vorrichtungen zwischen beiden anbringen lassen. Der Spiegel hat zwei Gelenke, so daß er in jede beliebige Lage gebracht werden kann; er ist oft auf beiden Seiten mit spiegelnden Flächen versehen, und zwar einer ebenen und einer hohlen.

Es ist notwendig, auf die Gegenstände scharf einzustellen. Die Objektive sind verschieden lang, und der „freie Dingabstand", die Entfernung von der Vorderlinse, für die der Gegenstand in der vorderen Brennebene des Okulars abgebildet wird, ist verschieden. Doch kann man eine Reihe von Objektiven so abstimmen, daß für die bei jedem verlangte Vergrößerung die Gesamtentfernung vom Gegenstande zum Bilde einen festen oder doch nahezu festen Wert

hat. Beispielsweise ist diese Entfernung bei allen starken und mittelstarken Objektiven der Firma Zeiss (seit 1920) 180 bis 181 mm. Ebenso kann man eine Reihe Okulare von verschiedenen Brennweiten so anfertigen, daß bei allen, wenn man sie in den Tubus hineinsteckt, der vordere Brennpunkt an den nämlichen Platz fällt (bei Zeiss 13 mm unterhalb des Tubusrandes). Bei genauer Innehaltung beider Bedingungen ist in Gleichung (19) sowohl $-\Delta/f_1 = \beta_1$ für jedes Objektiv als auch $l/f_2' = \mathfrak{N}_2$ für jedes Okular bestimmt, und aus

$$\mathfrak{N}_\infty = \beta_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \tag{19a}$$

erhält man die Vergrößerungszahl für jede Paarung.

Nach einmal erfolgter Einstellung für einen Gegenstand kann man Objektive und Okulare wechseln, ohne die Einstellung zu ändern. Dagegen muß eine solche Änderung stattfinden, wenn unter Beibehaltung von Objektiv und Okular ein andrer Beobachter mit anderem Scheitelbrechwert (kurzsichtig oder übersichtig) eintritt.

Anders als beim Fernrohr pflegt man nicht das Okular gegen das Objektiv zu verschieben, sondern den ganzen Tubus auf- und abwärts zu bewegen, dabei sind gewöhnlich zwei besondere Einrichtungen für die grobe und für die feine Einstellung vorhanden.

Rohr, Tischchen, Spiegelgelenk und Nebenteile sind durch einen Ständer (Stativ) miteinander verbunden.

Die optische Tubuslänge Δ geht vom hintern (oberen) Brennpunkte des Objektivs (dessen Austrittspupille) bis zum vordern (untern) Brennpunkte des Okulars. Der zweite Punkt ist nach dem obigen festzulegen. Der erste Punkt liegt bei stärkeren Objektiven zwischen den obersten Linsen, also erheblich unter der Anschraubfläche. Ist der Abstand e mm, so kann man setzen:

$$\Delta = (T - 13 + e)\ \mathrm{mm} = (147 + e)\ \mathrm{mm}\,,$$

bei den starken Objektiven ist Δ bis 180 mm, bei schwachen viel kleiner.

144. Die Beleuchtung beim Mikroskop. Indem wir nun dem Gange des Lichtes folgen, sollen zunächst die Fragen der Beleuchtung, die für sie geschaffenen Vorrichtungen, die Helligkeit usf. betrachtet werden. Geschichtlich sei bemerkt, daß über diesen Gegenstand sehr wirre Vorstellungen bestanden haben. Die erste einwandfreie Darstellung wurde 1865 bei C. NÄGELI und S. SCHWENDENER[1]) gegeben und dann von E. ABBE in verschiedenen Abhandlungen weiter ausgeführt und praktisch angewandt.

Um die Beleuchtung eines Punktes des Gegenstandes, zunächst seines Achsenpunktes, zu ermitteln, zeichne man von ihm ausgehend rückwärts den Strahlenkegel (Abb. 194 Ziff. 146), der nach Spiegelung am Beleuchtungsspiegel, Durchgang durch etwa noch vorhandene Linsen auf die Lichtquelle trifft. Unterwegs werden Teile des Kegels durch die Spiegel- und Linsenöffnungen sowie durch etwa vorhandene Blenden abgeschnitten. Was nun vom Reste die Lichtquelle trifft, wird zur Beleuchtung des Gegenstandspunktes beitragen. Diesem im Dingpunkte zusammenlaufenden Lichtkegel entspricht zwischen Gegenstand und Objektiv ein divergenter Kegel, im allgemeinsten Falle von beliebiger Mantelfläche. Das Objektiv faßt aber nur einen Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel $2u_2$; u_2 ist der Winkel, den die äußersten Strahlen am Dingpunkte mit der Achse bilden. Offenbar wird die Helligkeit von den Strahlen abhängen, die beiden Kegeln gemein sind. Nimmt man beispielsweise an, auch der Beleuchtungskegel sei ein

[1]) C. NÄGELI u. S. SCHWENDENER, Das Mikroskop. Theorie und Anwendung desselben, S. 85ff., 1867; 2. Aufl., S. 92ff., 1877. Leipzig: W. Engelmann. Der erste Teil der 1. Aufl. ist schon 1865 erschienen.

Kreiskegel um die Achse, was bei genügend ausgedehnter Lichtquelle durch achsensymmetrische Blenden zu erreichen ist, und habe den Öffnungswinkel $2u_1$, so wird ein Beleuchtungskegel mit der Öffnung $2u$ wirksam sein, wo u der kleinere der Winkel u_1 und u_2 ist. Beim Durchgang durch das Okular findet keine weitere Abblendung statt, möglich wäre es hingegen, daß die Augenpupille kleiner ist als die Austrittspupille des Mikroskops. Wir schließen diesen Fall zunächst aus.

Die Helligkeit auf der Bildseite ist wie Ziff. 109 abhängig vom Durchmesser der Austrittspupille $2p'$ und dessen Quadrat proportional. Wir denken uns die Flächenfolge des Mikroskops in umgekehrter Richtung durchlaufen, so daß das Mikroskop eine unendlich ferne Lichtquelle in der Dingebene abbildet. Auf der Dingseite ist dann das Licht auf eine dem Quadrate der Brennweite proportionale Fläche ausgebreitet, d. h. man hat für die Helligkeit des Dingpunktes — gleichmäßige Leuchtkraft der Lichtquelle vorausgesetzt —:

$$H = k\, p'^2 / f'^2, \tag{20}$$

wobei k von der Lichtquelle sowie von den Verlusten durch Spiegelung und Verschluckung abhängt; p' beschränkt sich auf den beleuchteten Teil der Austrittspupille.

Nun hängt p' von u ab. Ist u' der Öffnungswinkel nach dem Durchgange durch das Objektiv, so muß die Gleichung gelten:

$$n \sin u = \beta \sin u'. \tag{21}$$

Hier ist n das Brechungsverhältnis des Mittels vor dem Objektiv, hinter ihm ist es jederzeit 1. Die Sinusbedingung muß beim Mikroskopobjektiv wegen der großen Öffnung gut erfüllt sein. Auf der Bildseite des Objektivs ist u' aber schon eine kleine Größe, daher kann man $\sin u' = u' = \operatorname{tg} u'$ setzen. u' ist aber weiter der Winkel, mit dem der Strahlenkegel ins Okular eintritt, und nach der Theorie der Gaussischen Abbildung hat man:

$$p' = f_2 \operatorname{tg} u' = -f_2' \sin u' = -n \sin u \cdot f_2' / \beta,$$

oder nach (18) und (19)

$$p' = -n \sin u / V'_\infty,$$

$$p'/f' = -n \sin u = -a. \tag{22}$$

a heißt nach Abbe die (numerische) Apertur, und zwar kommt die Apertur der Beleuchtung $a_1 = n \sin u_1$ und die des Mikroskops $a_2 = n \sin u_2$ in Frage; für die Helligkeit ist maßgebend

$$H = k\, a^2, \tag{20a}$$

wo a die kleinere der Größen a_1 und a_2 ist.

In dem Falle, daß die beleuchtete Austrittspupille des Mikroskops $2p'$ größer ist als die Augenpupille $2\mathfrak{p}$, tritt $2\mathfrak{p}$ an die Stelle von $2p'$; man kann diesen Fall nur dadurch berücksichtigen, daß man $a = -\mathfrak{p}/f'$ setzt oder daß man u_2 durch $\mathfrak{p}/f' = -n \sin u_2$ definiert, also den von der Augenpupille abgeschnittenen Teil wegläßt.

Die Gleichungen (20) und (20a) geben die wirksame Beleuchtung auf der Dingseite, auf der Bildseite ist die Helligkeit offenbar von der kleineren der Größen $2p'$ und $2\mathfrak{p}$ abhängig; nach einem bekannten photometrischen Grundsatze kann sie nie größer sein als bei Beobachtung mit bloßem Auge, diesen Wert erreicht sie für $p' \geqq \mathfrak{p}$; für $p' < \mathfrak{p}$ wird sie im Verhältnis $(p'/\mathfrak{p})^2$ geringer sein.

145. Die Bedeutung der Apertur. Wenn die Apertur der Beleuchtung und des Mikroskops nur für die Beleuchtungsstärke von Bedeutung wäre, so müßte man das nämliche wie durch größere Apertur auch durch größere Lichtstärke erreichen können, und es wäre außerdem nicht abzusehen, welchen Zweck es haben könnte, die Apertur des Mikroskops größer zu machen als die der Beleuchtung. Doch war es schon seit den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts bekannt, daß eine um so größere Öffnung des Mikroskops nötig ist, je feinere Einzelheiten man beobachten will; daß diese Apertur durch keine Verstärkung der Lichtquelle ersetzt werden kann, daß ihre Wirkung auch durchaus verschieden von der einer besseren Fehlerhebung im Objektiv ist, deren Bedeutung darin liegt, daß die erkennbaren Einzelheiten schärfer sind. Auch fand man schon, daß die größere Öffnung des Mikroskopobjektivs auch dann von Vorteil war, wenn die Beleuchtungsvorrichtung nur ein enges Bündel durchließ, wobei es aber günstiger wirkte, wenn dies Bündel nicht symmetrisch um die Achse des Objektivs, sondern schief zu ihr lag.

Die Aufklärung zu diesen Erscheinungen wurde 1873 von E. ABBE[1]) gegeben. Sie liegt nicht oder wenigstens nicht zum wesentlichen Teile auf dem Gebiete der geometrischen Optik und soll daher in einem besonderen Abschnitte theoretisch besprochen werden. Doch kann schon so viel zur Erläuterung gesagt sein: An den Teilen des Gegenstandes werden die auffallenden Lichtstrahlen gebrochen und können schon dadurch einen größeren Winkelraum einnehmen als das beleuchtende Bündel, namentlich aber findet an den verschiedenen brechenden und verschluckenden Teilen des Gegenstandes eine Beugung statt, die aus dem einfallenden Bündel, selbst wenn dieses nur eng ist, ein solches von großer Ausdehnung und unregelmäßiger Lichtverteilung macht. Nicht auf geometrischem Wege, sondern durch physikalisches Zusammenwirken der Lichtstrahlen entsteht das mikroskopische Bild, das aber um so mehr vom Urbild abweicht, je mehr durch die Begrenzung der Öffnungsblende abgeschnitten wird. Je kleiner die in Frage kommenden Einzelheiten des Gegenstandes sind, um so weiter muß das durchgehende Bündel sein, um sie wiederzugeben. Der Vorteil der schiefen Beleuchtung erklärt sich dadurch, daß bei ihr ein weiter von der Achse des Bündels entfernter Teil, wenn auch nur einseitig, mit benutzt wird.

ABBE drückt die Sache auch so aus: In Gleichung (20) oder (20a) spielt die Größe h, die von der Helligkeit der Lichtquelle usf. abhängt, nicht dieselbe Rolle wie die Größe a, die sich auf die Menge der Strahlen bezieht. Bei Vergrößerung von a wirken Strahlen mit, die bei kleinerem a fortfallen und durch keine Verstärkung der übrigbleibenden ersetzt werden können. Dies gilt nicht nur, wenn a durch größeres u, sondern auch wenn es durch größeres n zunimmt. Freilich ist hier genau zu beachten, welcher Wert von n in Frage kommt. Es sei der Gegenstand in einem Mittel vom Brechungsverhältnis $n^{(1)}$ eingebettet. Das Licht geht von ihm aus durch mehrere ebene Flächen (Grenzflächen des Deckglases und häufig die erste Fläche der Frontlinse), die verschiedene Mittel mit den Brechungsverhältnissen $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)} \ldots$ voneinander trennen mögen. Es ist dann in leicht verständlicher Bezeichnung

$$n^{(1)} \sin i^{(1)} = n^{(2)} \sin i^{(2)} = n^{(3)} \sin i^{(3)} = \cdots,$$

aber für ebene Flächen wird $i = -u$, also

$$n^{(1)} \sin u^{(1)} = n^{(2)} \sin u^{(2)} = n^{(3)} \sin u^{(3)} = \cdots a.$$

[1]) E. ABBE, Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung. Schultzes Arch. f. mikr. Anat. Bd. 9, S. 413–468. 1873; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 45–100.

Man kann also u an und für sich in jedem der durch ebene Flächen voneinander getrennten Mittel angeben und muß zur Bestimmung mit dem zugehörigen n multiplizieren. Niemals aber kann ein u größer als 90° werden: Sollte beispielsweise einer der n-Werte kleiner als $n^{(1)}$ sein, so wird ein Teil des Bündels durch Totalreflexion abgeblendet. Ist zwischen Deckglas und Frontlinse Luft, wie bei allen Trockensystemen, so kann a höchstens 1 und sonst höchstens n_0 sein, wo n_0 der kleinste der Werte $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ ... usf. ist; natürlich ist auch bei Abblendung durch die Objektivöffnung (oder die Augenpupille) ein kleinerer Wert möglich.

Aus den letzten Auseinandersetzungen ist klar, daß nur für die Helligkeit der kleinere der Aperturwerte a_1 und a_2, für die physikalische Wirkung des Mikroskops bloß a_2, die Apertur des Mikroskops, in Frage kommt, die um so größer sein muß, je feinere Einzelheiten man beobachten will, d. h. eine je stärkere Vergrößerung man anwendet; es sei hier nochmals auf die Regel verwiesen, daß die Apertur $^1/_{1000}$ bis $^1/_{500}$ der Vergrößerungszahl $\mathfrak{N}$ sein muß.

Endlich ist noch die Frage zu beantworten, ob eine Apertur der Beleuchtung (a_1), die die des Mikroskops (a_2) wenigstens erreicht, wo nicht notwendig, doch wünschenswert sei; ABBE hat sich nach Theorie und Erfahrung dafür ausgesprochen, daß es nur dann zu empfehlen sei, wenn die Teile des Gegenstandes sich durch verschiedene Verschluckung des Lichts, nicht wenn sie sich durch verschiedene Brechbarkeit unterscheiden (vgl. aber Ziff. 179).

146. Die Anforderungen an die Beleuchtungsvorrichtung. Die bisherigen Auseinandersetzungen geben nun die Möglichkeit, festzustellen, was für Anforderungen an die verschiedenen optischen Teile, die Beleuchtungsvorrichtung, das Objektiv und das Okular zu stellen sind.

Es ist wünschenswert, daß der Gegenstand gleichmäßig beleuchtet wird; dies wird der Fall sein, wenn die Apertur a_1 außerhalb der Achse denselben Wert hat wie in der Achse, d. h. wenn die Austrittspupille der Beleuchtungsvorrichtung im Unendlichen liegt. Ferner ist es wichtig, daß die Apertur der Beleuchtung geändert werden kann, und daß eine schiefe Beleuchtung ebensowohl möglich ist wie eine senkrechte. Endlich wird gewünscht, daß nur der Gegenstand, nicht auch die Umgebung beleuchtet ist[1]). Dagegen kann keine Beleuchtungsvorrichtung die Wirkung haben, eine hellere Beleuchtung zu liefern, als auch eine Lichtquelle gleicher Stärke bei genügender Annäherung gäbe (ABBE).

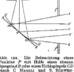


Abb. 194. Die Beleuchtung eines Punktes P mit Hilfe eines ebenen Spiegels AB oder eines Hohlspiegels CD (nach C. NÄGELI und S. SCHWENDENER). ab ist die Blende, bei ff ist die Lichtquelle. Die Blende wird beim ebenen Spiegel durch das Bündel srt, beim Hohlspiegel durch das Bündel $s'rt'$ ausgeleuchtet; hierin besteht der Vorteil des Hohlspiegels bei begrenzter Lichtquelle.

Daher ist, was die bloße Helligkeit der Beleuchtung anbelangt, der einfache Spiegel vollkommen ausreichend. Den Unterschied zwischen dem ebenen und dem hohlen Spiegel erkennt man[2]) aus Abb. 194, wenn man die Strahlen rückwärts zur Lichtquelle verfolgt. Dem Bündel abp entspricht in der Lichtquelle beim ebenen Spiegel der Teil st, beim Hohlspiegel der viel klei-

[1]) A. KÖHLER, Ein neues Beleuchtungsverfahren für mikrophotographische Zwecke. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 10, S. 433–440. 1893.

[2]) C. NÄGELI und S. SCHWENDENER, Das Mikroskop. Theorie und Anwendung desselben. S. 94, 2. Aufl. 1877. Leipzig, W. Engelmann.

nere $s'\,t'$; ist also die Lichtquelle nicht von der Ausdehnung $s\,t$, so kann sie mit dem ebenen Spiegel verbunden nicht die Öffnung $a\,p\,b$ mit Licht erfüllen, wohl aber möglicherweise mit dem Hohlspiegel. Zur Regelung der Helligkeit und der Öffnung des Beleuchtungsbündels sind mannigfache Mittel angewandt. Außer der senkrechten Verschiebung des Beleuchtungsspiegels benutzt man besondere Blenden, die zwischen dem Spiegel und dem Tischchen des Mikroskops angebracht werden. Die Zylinderblende (Abb. 195) wird ebenfalls in senkrechter Richtung verschoben; ihre scheinbare Größe, vom Gegenstand aus gesehen, bestimmt die Apertur der Beleuchtung. Ist die Blende freilich unmittelbar unterhalb des Gegenstandes, so kann die scheinbare Größe die des Beleuchtungsspiegels übertreffen; dann wird die Blende nicht als Aperturblende, sondern nur als Begrenzung des beleuchteten Sehfeldes wirken können.

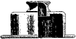


Abb. 195. Eine Zylinderblende, natürliche Größe (nach einer Zeissischen Druckschrift).

147. Der Abbesche Beleuchtungsapparat. Eine vollkommenere Regelung gibt der Abbesche Beleuchtungsapparat[1]) (Abb. 196). Er beruht darauf, daß in der Dingebene oder in deren Nähe durch eine Linsenfolge (den Kondensor, dieser schon früher übliche Name für der Beleuchtung dienende Linsen ist von Abbe vergeblich bekampft worden) ein Bild der Lichtquelle mit sehr großer bildseitiger Öffnung entworfen wird, so daß durch jeden Dingpunkt ein weit geöffnetes Bündel hindurchgehen kann, das sich aber durch eine passend angebrachte Blende einschranken läßt. Die Blende kann nicht nur beliebig geschlossen oder geöffnet werden — gegenwärtig wird durchweg eine Irisblende (Abb. 197) verwendet —, sondern man kann sie auch aus der Achse hinausbringen und auf diese Weise Licht von beliebiger Schiefe auf den Gegenstand fallen lassen. Der Blendenträger ist auch um die Achse drehbar, was bei der Prüfung von Objektiven und bei Anwendung polarisierten Lichtes von Wichtigkeit ist. Der Kondensor kann aus der Hülse herausgenommen oder beiseite geklappt werden.



Abb. 196. Der Abbesche Beleuchtungsapparat mit einem zweilinsigen Kondensor (Apertur 1.20). p ist der Stift der Irisblende, r eine Klemmschraube zum Festhalten des Kondensors, s ein Trieb zum Auf- und Abwärtsschieben der Vorrichtung mit Hilfe einer Zahnstange, a der Spiegel. Natürliche Größe.



Abb. 197. Eine Irisblende.

Es ist im allgemeinen nicht notwendig, daß das Bild der Lichtquelle genau in die Dingebene fällt, oder daß die Bildfehler besonders gut gehoben wären, wenn nur jeder Punkt des Gegenstandes Licht von großem Öffnungswinkel erhält, wozu bei genügend großer Ausdehnung der Lichtquelle eine mäßige Hebung

[1]) E. Abbe, Über einen neuen Beleuchtungsapparat am Mikroskop. Schultzes Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. 9, S. 469—480. 1873. Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 101—112. — Gebrauchsanweisung für den Abbeschen Beleuchtungsapparat: Zeissische Druckschr. Mikro 15.

der Fehler ausreicht. Man verzichtet daher gewöhnlich auf Hebung des Farbenfehlers und läßt auch eine geringe sphärische Abweichung zu. Die älteste Form von Abbe besteht aus zwei, eine neuere aus drei Linsen (Abb. 198). Indem man Öl zwischen die letzte Linse des Kondensors und das Tragglas bringt, kann man die Apertur der Beleuchtung auf über 1 steigern, bei der Ausführung des zweilinsigen Kondensors auf 1,2, bei der des dreilinsigen auf 1,4; bei der Anwendung schneidet die Blende, wie schon bemerkt, ein engeres oder weiteres Bündel aus.


Abb. 198. Ein dreilinsiger Kondensor. Natürliche Größe.

Bei Lichtquellen von geringerer Ausdehnung kann eine Abbildung von größerer Güte notwendig sein, weil sonst nicht Strahlen aller Öffnungen die Dingpunkte treffen. Man benutzt Kondensoren mit asphärischen Flächen, bei denen die sphärische Abweichung besser gehoben sein kann, auch achromatische Kondensoren (Abb. 199). Endlich kann man in die Beleuchtungsvorrichtung auch ein Mikroskopobjektiv einschrauben, dessen Frontlinse oben liegt und das in der Gegenstandsebene ein stark verkleinertes

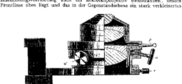


Abb. 199. Ein achromatischer Kondensor, links das obere Ende des Abbeschen Beleuchtungsapparates, in dem der Kondensor mit der Klemmschraube r festgehalten wird. u, u' sind Schrauben zum Ausrichten (Zentrieren), p regelt die Öffnung der Irisblende. Natürliche Größe. Kronglaslinsen sind von links oben nach rechts unten, Flintglaslinsen von rechts oben nach links unten gestrichelt.

Bild der Lichtquelle entwirft. — Die besondern Anforderungen, die die Dunkelfeldbeleuchtung an den Kondensor stellt, sollen an der gegebenen Stelle besprochen werden.

Bei dem zweilinsigen Abbeschen Kondensor und vielen andern Beleuchtungslinsen befindet sich die Blende in der vorderen Brennebene; die Austrittspupille des Kondensors liegt also im Unendlichen und fällt nach Ziff. 142 mit der Eintrittspupille des Mikroskops zusammen, wenn ein starkes oder mittelstarkes Objektiv verwandt wird. Wenn also die Lichtquelle gleichmäßig hell ist, so wird auch das Gesichtsfeld gleichmäßig beleuchtet sein. Indessen ist diese Lage der beiden Pupillen nicht notwendig, sie findet auch bei einem Teile der Kondensoren, bei der bloßen Benutzung des Beleuchtungsspiegels, der Zylinderblende nicht statt. Bei kleinem Gesichtsfelde und bei verhältnismäßig weit ent-

fernten Pupillen wird (Abb. 200a) die Abschattung nur gering sein. Für schwache Vergrößerung ist jedoch das Gesichtsfeld größer, gleichzeitig liegt die Eintrittspupille des Objektivs in verhältnismäßig geringer Entfernung, so daß eine starke Abschattung eintritt (Abb. 200b). In diesem Falle kann man nicht die starken

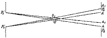


Abb. 200a. Die geringe Abschattung bei kleinem Sehfelde und großem Abstande der Eintrittspupille (starker Vergrößerung)

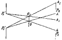


Abb. 200b. Die starke Abschattung bei großem Sehfelde und kleinem Abstande der Eintrittspupille (geringe Vergrößerung)

$P_1'P_2'$ ist die Austrittspupille der Beleuchtungsvorrichtung, P_2P_2 die Eintrittspupille des Objektivs, $P_1'OP_2' = AOA$ das zu einem Achsenpunkte O, $P_2'O_1P_1' = A_1O_1A_1$ das zu einem seitlichen Dingpunkte O_1 gehörende Strahlenbündel, der Teil A_1P_2 wird abgeschattet.

Mikroskopkondensoren verwenden. Man benutzt hier[1]) die Brillenglaskondensoren, Bikonvexlinsen, die in die Fassung des Beleuchtungsapparats eingeschraubt werden können. Sie bilden die Austrittspupille der Beleuchtungsvorrichtung, beispielsweise die Spiegelöffnung oder beim KÖHLERschen Beleuchtungsverfahren (siehe Ziff. 148) die Lichtquelle in die Eintrittspupille des Objektivs ab.

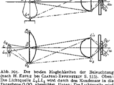


Abb. 201. Die beiden Möglichkeiten der Beleuchtung (nach H. ERFLE bei CZAPSKI-EPPENSTEIN S. 533). Oben: Die Lichtquelle L_1LL_2 wird durch den Kondensor in die Dingebene O_1OO_2 abgebildet. Unten: Die Lichtquelle wird durch den Kollektor $\bar{O}_1\bar{O}\bar{O}_2$ in den Kondensor $L_1'L_2'$ oder dessen Blende abgebildet, die Öffnung oder Blende des Kollektors durch den Kondensor in die Dingebene.

148. Das KÖHLERsche Beleuchtungsverfahren. Das Verfahren, die Lichtquelle in die Dingebene abzubilden, hat bei künstlichen Lichtquellen den Nachteil, daß Ungleichmäßigkeiten der Lichtquelle Ungleichmäßigkeiten der Beleuchtung hervorrufen, was besonders in der Mikrophotographie schädlich ist. Man vermeidet dies, wenn man die Lichtquelle durch den Kondensor in die Eintrittspupille des Mikroskops abbildet, so daß sie selbst zur Eintrittspupille der ganzen Vorrichtung wird. Es ist dann aber keine Regelung der Apertur möglich. Dieser Mangel wird durch das Beleuchtungsverfahren von A. KÖHLER[2]) gehoben. Hier wird von der Lichtquelle zuerst durch eine

[1]) Gebrauchsanweisung für die Brillenglaskondensoren: Zeissische Druckschr. Mikro 279.

[2]) A. KÖHLER, Ein neues Beleuchtungsverfahren für mikrophotographische Zwecke. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 10, S. 433–440. 1893.

Linse (Kollektor) ein Bild in der Eintrittspupille des Kondensors entworfen, beim ABBEschen Kondensor in dessen vorderer Brennebene, wo sich die Irisblende befindet, durch die die Apertur geregelt werden kann. Ferner wird dafür gesorgt, daß die Öffnung des Kollektors oder auch eine besondere für ihn angebrachte Öffnungsblende in der Dingebene abgebildet wird. Im letzten Fall kann man durch Änderung dieser Blendenöffnung die Beleuchtung auf den Teil des Gesichtsfelds beschränken, der beobachtet werden soll. In Abb. 201 sind das ABBEsche und das KÖHLERsche Beleuchtungsverfahren schematisch dargestellt.

149. Die Beleuchtung mit einfarbigem Licht. In manchen Fällen ist die Beleuchtung mit einfarbigem Lichte erwünscht. Bei vielen Präparaten wechselt die Verschluckung gerade für eine Farbe von Stelle zu Stelle besonders stark, so daß sich die einzelnen Teile besonders gut abheben, wenn man Licht dieser Farbe zur Beleuchtung verwendet. Beruhen die Unterschiede hauptsächlich auf dem Brechungsverhältnisse, so wird stark brechbares Licht erwünscht sein.

Es ist hier ein doppeltes Verfahren möglich.

a) Man schließt durch passende Filter das nicht gewünschte Licht aus. Dies ist bei weißem Lichte freilich nur unvollkommen möglich, läßt sich aber erreichen, indem man als Lichtquelle beispielsweise eine Quecksilberlampe verwendet[1]), deren Spektrum im wesentlichen aus einer Anzahl gelber, grüner, blauer und violetter Linien besteht. Läßt man das Licht durch passende Filter hindurchgehen, so bleibt nur Licht von einer oder von zwei oder drei benachbarten Linien übrig.

b) Man zerlegt das Licht spektral und sondert durch geeignete Blenden die gewünschte Farbe aus. Eine Vorrichtung beschreibt A. KÖHLER[2]), der auch Vorgänger erwähnt. Vgl. ferner Ziff. 214.

150. Die Beleuchtung undurchsichtiger Gegenstände. Undurchsichtige Gegenstände müssen mit auffallendem Lichte beleuchtet werden. Man hat besondre an das untere Ende des Mikroskops angeschraubte durchbohrte Hohlspiegel benutzt, die geschichtlich unrichtig als LIEBERKÜHNsche Spiegel bezeichnet werden.

Ein neueres Verfahren, bei dem das Objektiv des Mikroskops die Rolle des Kondensors übernimmt, hat vor dem älteren den Vorteil, daß es keinen größern Dingabstand verlangt und daher auch bei den stärksten Vergrößerungen angewandt werden kann. Als Beispiel sei der Vertikalilluminator (Abb. 202) in den beiden Formen nach BECK und nach NACHET angeführt[3]).

Ist 1 die Lichtquelle, 2 die Aperturblende (Eintrittspupille), so fällt das Licht bei der BECKschen Anordnung auf einen halbdurchsichtigen Spiegel oberhalb des Objektivs, der um 45° gegen die Achse geneigt ist. Ein Teil des Lichtes geht hindurch und tritt durch ein Fenster wieder aus, der andere wird zurückgeworfen und beleuchtet den Gegenstand; das Objektiv entwirft ein Bild der Lichtquelle in der Dingebene, ein Bild der Öffnungsblende in weiter Entfernung. Das vom Gegenstande unregelmäßig zurückgeworfene Licht wird vom Spiegel teils in der Richtung nach der Lichtquelle gespiegelt, teils geht es hindurch und liefert das Bild. — Bei der Vorrichtung nach NACHET (Abb. 202) ist der Spiegel undurchsichtig (etwa ein totalreflektierendes Prisma) und darf daher nur einen Teil — etwa die Hälfte — der Öffnung einnehmen. Da bei dieser Vorrichtung die

---

[1]) Hageh-Mikroskopierlampe. Zeissische Druckschr. Mikro 271.

[2]) A. KÖHLER, Beleuchtungsapparat für gleichmäßige Beleuchtung mikroskopischer Objekte mit beliebigem einfarbigem Licht. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 16, S. 1—28. 1899.

[3]) Gebrauchsanweisung für den Vertikalilluminator: Zeissische Druckschr. Mikro 89.

Apertur verringert wird, ist für stärkere Vergrößerungen die BECKsche Form zu wählen, für schwächere die NACHETsche wegen größerer Helligkeit vorzuziehen. Der Gegenstand ist bei der Beobachtung im auffallenden Licht nicht mit einem Deckglas bedeckt, da das an der Oberfläche eines solchen Glases zurückgeworfene Licht stören würde.

Auch beim Vertikalilluminator läßt sich durch Hinzufügen eines Kollektors und entsprechende Einstellung das KÖHLERsche Beleuchtungsverfahren anwenden.

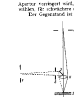


Abb. 202. Der Strahlengang im Vertikalilluminator nach NACHET.

1 Leuchtfeldblende, 2 Fenster mit Aperturblende, 3 Spiegelchen, 4 Objektiv, 5 Gegenstand, 6 Okularblende. Es ist angenommen, daß diese vor den Okularlinsen liegt, wie bei den starken Kompensationsokularen. (Nach einer Zeissschen Druckschrift.)

151. Die ABBEsche Zerlegung des Abbildungsvorganges im Mikroskop. Nach Gleichung (19) kann eine gewünschte Vergrößerung auf verschiedene Weise erreicht werden, da drei Längen f_1', f_2', Δ zur Verfügung stehen (bei gegebener Tubuslänge immerhin noch zwei Größen). Eine 200fache Vergrößerung kann man beispielsweise für $\Delta = 180$ mm mit einem Objektiv von 18 mm und einem Okular von 12,5 mm, ebensowohl aber mit einem Objektiv von 4,5 mm und einem Okular von 50 mm Brennweite erreichen. Welche Zusammenstellung günstiger ist, hängt von den Fehlern der beiden Linsenfolgen ab. Zur Erkenntnis ihrer Bedeutung ist eine gedankliche Zerlegung des Mikroskops von Vorteil, die E. ABBE 1873 eingeführt hat[1]) und die von der rein räumlichen in Objektiv und Okular zu unterscheiden ist.

Da das Objektiv den Gegenstand in einer (im Verhältnis zur Brennweite) großen Entfernung abbildet, leistet es etwas mehr, als ob es das Bild ins Unendliche würfe. Man denke es sich gespalten in einen Hauptteil, der ein unendlich fernes Bild erzeugt, und einen schwachen Nebenteil, der von diesem ein Bild in endlicher Entfernung entwirft. Mit dem Okular zusammen bildet dieser zweite Teil einen unendlich fernen Gegenstand (das vom Hauptteil entworfene Bild) wieder im Unendlichen ab, und wirkt also als Fernrohr, bei der CHEVALIERschen Lupe als holländisches, beim Mikroskop mit sammelndem Okular als KEPLERsches Fernrohr. In der Tat kann man ein Mikroskop auch so herstellen, daß man eine Lupe vor ein Fernrohr setzt. Statt das Objektiv in Gedanken zu teilen, kann man auch in seine hintere Brennebene eine unendlich dünne Platte gebracht denken, die nichts am Abbildungsvorgang ändert; diese denkt man sich sodann in eine Zerstreuungslinse und eine Sammellinse zerlegt, von denen die erste das Objektivbild ins Unendliche wirft. Da es tatsächlich in der Entfernung Δ entsteht, so muß die Brennweite der gedachten Zerstreuungslinse $-\Delta$, die der sie zu einer Platte ergänzenden Sammellinse $+\Delta$ sein. Dann hat die Folge Objektiv + Zerstreuungslinse die Brennweite

$$f_1'' = -f_1' \cdot (-\Delta)/\Delta = f_1',$$

weil Δ der Abstand der beiden inneren Brennpunkte ist. Diese Folge wirkt also wie eine Lupe vom Vergrößerungsvermögen:

$$V_{1\infty} = 1/f_1'. \qquad (23)$$

[1]) E. ABBE, Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung. Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 45–100.

Sie ist zusammengesetzt mit einem Fernrohr, dessen Objektiv die Brennweite Δ, dessen Okular die Brennweite f_2' hat, dies hat die Vergrößerung

$$V_2 = \gamma_2 = -\Delta/f_2', \tag{24}$$

und das Vergrößerungsvermögen des Mikroskops setzt sich zusammen:

$$V_\infty = V_{1\infty} \cdot V_2 = 1/f_1' (-\Delta/f_2'), \tag{25}$$

oder auch die Vergrößerungszahl durch:

$$\mathfrak{N}_\infty = \mathfrak{N}_{1\infty} \cdot V_2. \tag{25a}$$

In den Gleichungen (25) und (25a) erscheint der Abstand Δ nicht wie in (19) und (19a) mit dem Objektiv, sondern mit dem Okular verknüpft. Dies hat darin seine Berechtigung, daß es für die Hebung der Fehler des Objektivs und dessen Aussehen grundsätzlich wenig ausmacht, ob das Bild in unendlicher Entfernung oder in der Entfernung Δ entstehen soll, während es sich andrerseits als gleichgültig erweisen wird, ob bei festem $V_{1\infty}$ ($\mathfrak{N}_{1\infty}$) ein noch nötiger Betrag von V_2 durch längeres Δ oder kürzeres f_2' erreicht wird. $V_2 = \Delta/f_2'$ heißt wohl die Übervergrößerung oder Okularvergrößerung, ist für die Stärke des einzelnen Okulars aber nur dann kennzeichnend, wenn Δ gegeben ist, was nach Ziff. 143 nicht mit der Festlegung einer mechanischen Tubuslänge T zusammenfällt. Daher ist die Abbesche Zerlegung auch weniger in die Praxis eingedrungen, als sie Bedeutung für theoretische Erwägungen erlangt hat.

152. Die zweckmäßige Herstellung einer bestimmten Vergrößerung. Von ihr ausgehend soll nun auch die unter Ziff. 151 aufgeworfene Frage geprüft werden, d. h. es soll untersucht werden, wie am zweckmäßigsten bei einer gewünschten Vergrößerung V_∞ ($\mathfrak{N}_\infty$) die Wirkung auf die beiden Faktoren $V_{1\infty}$ ($\mathfrak{N}_{1\infty}$) und V_2 verteilt[1] wird.

Das Objektiv — genau genommen in der Zusammensetzung mit der gedachten Zerstreuungslinse — liefert vom Gegenstande ein Bild mit gewissen sphärischen und Farbenabweichungen. Auf der Dingseite ist der Abstand endlich, auf der Bildseite unendlich groß. Denkt man sich das Objektiv nun beispielsweise in allen Teilen auf das Doppelte vergrößert, so wird das gleiche von den linearen Abweichungen gelten, also auch für die Zerstreuungskreise in der Bildebene, solange diese in endlicher Entfernung liegt. Die scheinbare Größe des Zerstreuungskreises von der Austrittspupille des Objektivs aus gesehen (seine Winkelgröße) ändert sich aber nicht, weil der Abstand zwischen Austrittspupille und Bildebene ebenfalls verdoppelt wird. Diese Unveränderlichkeit der Winkelgröße des Zerstreuungskreises besteht bei beliebig großer, also auch bei unendlicher Entfernung der Bildebene. Bei dieser Vergrößerung bleibt aber auch die Apertur $a = f'/p'$ ungeändert, d. h. der Winkeldurchmesser des Zerstreuungskreises ist nur von der Form — dem Typus — und der Apertur des Mikroskops abhängig, ändert sich aber nicht, wenn die Brennweite verändert wird.

Nun soll die Gesamtvergrößerung ungeändert bleiben; da in (25) $V_{1\infty} = 1/f_1'$ halb so groß ist, muß Δ/f_2', die Übervergrößerung, den doppelten Wert haben. Das Okular oder das gedachte Fernrohr muß doppelt so stark vergrößern. Nun kann ein Fernrohr von 180 mm Länge und etwa 5 bis 8 mm Öffnung — dies ist der Betrag $2p' = 2af'$ — keinen merklichen Fehler in der Achse haben, also auch den Zerstreuungskreis durch keinen eigenen Fehler beeinflussen, wohl

[1] Siehe E. Abbe, Die Beziehungen zwischen Apertur und Vergrößerung beim Mikroskop. Übersetzung einer Abhandlung im Journ. Roy. Mikr. Soc. (2) Bd. 2, S. 300—309 u. 460 bis 473. 1882; Bd. 3, S. 790—812. 1883. Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 375—435 (der letzte Abschnitt kommt in Frage); Czapski-Eppenstein, S. 489—491.

aber wird im Bilde der Kreis im Verhältnis V_2 vergrößert erscheinen, also bei doppelter Übervergrößerung den doppelten Betrag erreichen. Danach erscheint es, daß für die Fehler eines Achsenpunktes bei gleichem Typus des Objektivs $V_{1\infty}$ möglichst groß, V_2 möglichst klein zu machen wäre, wobei es gleichgültig ist, ob in $V_2 = -\Delta/f_2'$ Zähler und Nenner gleichmäßig vergrößert oder verkleinert werden. Freilich gibt es jedenfalls eine gewisse Größe des Zerstreuungskreises, die unschädlich ist; hat man sie erreicht, so ist eine weitere Verkleinerung von V_2 zwecklos.

Die Fehler außer der Achse würden bei Verdoppelung der Brennweite des Objektivs für das doppelte dingseitige Gesichtsfeld den doppelten linearen, bei unendlicher Entfernung des Zwischenbildes den nämlichen Winkelbetrag haben. Nun wächst beispielsweise die Zerstreuungsfigur des Astigmatismus mit dem Quadrat des Gesichtsfeldes, also ist für das nämliche dingseitige Gesichtsfeld bei Verdoppelung der Brennweite der Fehler des vom Objektiv + gedachter Zerstreuungslinse entworfenen Bildes nur $^1/_4$ so groß. Zur Erreichung der gleichen Vergrößerung muß wieder die Fernrohrwirkung $V_2 = -\Delta/f_2$ doppelt so groß sein, d. h. alles in allem hat die Zerstreuungsfigur die halbe Größe. — Wegen einiger andrer optischen Fehler (Zonenglieder der Koma) kann sie sogar noch stärker abnehmen.

Gegen die letzte Betrachtung könnte eingewandt werden, daß die Fehler des Objektivs außer der Achse durch entgegengesetzt gleiche im Okular gehoben werden könnten. Dies ist jedoch nur mit starken Einschränkungen richtig, namentlich könnte ein schwaches Okular die Abweichungen eines Objektivs nicht mehr heben, wenn das Verhältnis des Gesichtsfelds zur Objektivbrennweite zu groß ist.

Bemerkt mag sofort werden, daß gleichzeitige Hebung des Astigmatismus und der Bildfeldwölbung wenigstens bei sammelndem Okular ganz unmöglich ist, da die Petzvalsche Bedingung schon im Objektiv auch nicht annähernd erfüllt ist, und keine starken Zonen auftreten. In der Regel ist der Astigmatismus im Objektiv gering, im Okular kann er leicht gehoben werden. Die Bildfeldwölbung muß dann berücksichtigt werden, indem man beim Übergang von der Mitte zum Rande des Gesichtsfeldes die Einstellung verschiebt.

153. Vergleiche mit den Folgerungen der Beugungstheorie. Die vorhergehenden Betrachtungen beruhen auf Überlegungen der geometrischen Optik; eine Prüfung mit Hilfe der Beugungstheorie zeigt, daß sie nicht zahlenmäßig (quantitativ), aber wohl grundsätzlich (qualitativ) richtige Ergebnisse liefern: Bei stärkern Vergrößerungen zwingen die größere Apertur und die dadurch für einen Achsenpunkt entstehenden Fehler zur Wahl stärkerer Objektive, die Rücksicht auf das Gesichtsfeld setzt diesem Verfahren eine Grenze und zwingt durch Änderung der Form, des Typus der Objektive die Fehler zu verkleinern, wodurch wieder eine ausreichende Übervergrößerung möglich ist.

Wollte man hingegen aus trigonometrischen oder aus Vorrechnungen die Zerstreuungsfiguren ausrechnen und dann aus deren Größe Schlußfolgerungen auf die Brauchbarkeit gewisser Zusammensetzungen von Objektiven und Okularen ziehen, so würden diese mit der Erfahrung kaum in Einklang zu bringen sein, da Zerstreuungsfiguren von 10′ und mehr in manchen Fällen kaum stören, in manchen unerträglich sind. Es kommt wesentlich auf die Lichtverteilung an, theoretisch gibt die Beugung überhaupt unendlich große Zerstreuungsfiguren, bei denen nur der Lichtabfall sehr stark ist.

154. Erfahrungen mit Übervergrößerungen. Die schwächsten Objektive. E. Abbe hat nicht durch die Theorie, sondern durch Versuche zu bestimmen gesucht, welche Übervergrößerung Δ/f' ein gewisser Objektivtypus bei

der üblichen Apertur ausnahte. Die Versuche sind später auf neu angefertigte Formen ausgedehnt worden. Sie haben aber, da einige Typen verbessert worden sind, jetzt nur noch die Bedeutung eines Überblicks.

Für die geringsten Vergrößerungen, bis vielleicht 50fach, reicht die Apertur von 0,10 aus. Hier kann man zweiteilige verkittete Objektive aus gewöhnlichem Kron- und Flintglas benutzen, es muß indessen beachtet werden, daß auf der Dingseite die kürzere Schnittweite ist, und daß deshalb ein Fernrohrobjektiv nur dann leidlich wirken könnte, wenn es umgekehrt benutzt wurde als im Fernrohr.

Bei der geringen Apertur halten diese Objektive eine 10fache Übervergrößerung (bis $f_1' = 18$ mm) aus. Bei Erhöhung der Apertur werden die Fehler des Objektivs mehr und mehr sichtbar. Die Schwierigkeit besteht nicht darin, ein Farbenpaar zu vereinigen oder sphärisch einen Randstrahl mit dem Achsenstrahl zusammenzubringen. Vielmehr sind es die Fehler höherer Ordnung (Zonen), das sekundäre Spektrum und der Farbenunterschied der sphärischen Abweichung, die mehr und mehr in Erscheinung treten. Endlich ist die Erfüllung der Sinusbedingung oder noch genauer die Hebung der Koma beim Mikroskopobjektiv von besonderer Bedeutung. Da diese (niedrigsten) Komaglieder in der Apertur von zweiter, im Gesichtsfeld von der ersten Ordnung sind, so geben sie bei großer Apertur Abweichungen von der Größenordnung des Gesichtsfeldes, d. h. es könnte ohne Verbesserung der Koma nur ein Achsenpunkt, aber auch nicht ein noch so kleines Gesichtsfeld abgebildet werden.

155. Andere Formen von Objektiven. Um wenigstens die Zonen zu verringern und die Sinusbedingung möglichst zu erfüllen, ist man bei höheren Aperturen zu andern Formen der Objektive übergegangen. Man hat zunächst zwei Linsenpaare hintereinandergesetzt. Das ursprüngliche Verfahren war, ein solches Paar für sich als Objektiv von geringerer Vergrößerung benutzbar zu machen und nach Bedarf das zweite hinzuzufügen. Doch hat es sich — abgesehen von Sonderzwecken — als vorteilhafter erwiesen, auf die Hebung der Fehler in den Teilfolgen zu verzichten und sie nur in der Gesamtfolge auszugleichen. — Bei weiterer Erhöhung der Apertur hat man noch mehr Linsen nötig gehabt. Gebräuchlich ist seit G. B. Amici die Frontlinse, eine einfache — also nicht achromatische — Linse, meistens von plankonvexer Form. Die Hinterfläche dieser Linse ist nahezu so, daß der Gegenstand oder vielmehr der von den vorhergehenden Flächen (Deckglas, Vorderfläche der Frontlinse) entworfene Bild in einen aplanatischen Punkt fällt, so daß diese Linse eine Vergrößerung herbeiführt, ohne — abgesehen von der Wirkung der Vorderfläche — eine erhebliche sphärische Abweichung hervorzubringen. Die Farbenabweichung, die von der Frontlinse herbeigeführt wird, muß durch Überbesserung im Rest der Folge — etwa wieder zwei verkitteten Linsen — ausgeglichen werden. Bei den stärksten Mikroskopobjektiven dieser Art sind nicht eine, sondern zwei einfache Linsen von verschiedener Umbiegung im Gebrauch.

Objektive von dieser Art (Achromate) sind bis zu hohen Aperturen (0,90) ausgeführt worden (s. Abb. 207, Ziff. 163). Es ist aber nicht zulässig, sie mit der gleichen Übervergrößerung zu benutzen wie schwächere Objektive, da die sphärischen Zonen und die Farbenreste (sekundäres Spektrum, Farbenunterschied der sphärischen Abweichung) stören.

156. Die Immersionssysteme. Viel günstiger als bei den Trockensystemen, wo sich Luft zwischen dem Deckglas und der Frontlinse befindet, liegt die Sache bei Immersionssystemen, wo dort eine dünne Schicht einer Flüssigkeit ist. Bei den sog. homogenen Immersionen, wo die Flüssigkeit (Öl) nahezu dasselbe Brechungsverhältnis hat wie Deckglas und Frontlinse, kommen an der

oberen Fläche des Deckglases und der untern der Frontlinse so gut wie keine sphärischen Abweichungen vor; bei den Wasserimmersionen sind sie geringer als bei Trockensystemen. Gerade die genannten Flächen werden aber bei höhern Aperturen, da die erste immer, die zweite meist eben ist, unter großen Winkeln getroffen; die an ihnen entstehenden sphärischen Abweichungen haben große Beträge und starke Zonen, die an den spätern Flächen nicht mehr auszugleichen sind. Daher ertragen die Immersionssysteme bei gleicher Apertur eine stärkere Übervergrößerung, können nach Ziff. 152 mit größerer Brennweite die gleiche Gesamtvergrößerung liefern und daher auch ein größeres Gesichtsfeld. Dagegen sind die Farbenreste bei einem Immersionssystem nicht geringer als bei einem nach gleichen Grundsätzen angefertigten Trockensystem.

157. Die Beseitigung des sekundären Spektrums. Um eine bessere Hebung der Farbenfehler zu erreichen, hat man besondere Glasarten mit günstigerem Verlauf der (Teil-) Zerstreuung im Spektrum wie auch den Flußspat verwandt. Führt man diesen in Objektive von der Gestalt der Achromaten ein und hebt die Farbenabweichung für ein ausgewähltes Wellenlängenpaar, so ist die Abweichung der andern Farben (das sekundäre Spektrum) bedeutend verringert. Diese Objektivform wird als die der Fluoritsysteme, Semiapochromate oder Halbapochromate bezeichnet; sie ist in neuerer Zeit sehr beliebt geworden.



Abb. 203. Ein Durchschnitt durch einen starken Apochromaten.

Eine praktisch vollkommene Hebung des sekundären Spektrums wird jedoch auf diese Weise nicht erreicht, dagegen durch besondere Formen der Objektive, von der ein Beispiel (ein starkes Objektiv) in Abb. 203 wiedergegeben ist. Während bei allen andern Objektiven nur die Schnittweiten je zweier Farben (Wellenlängen), etwa C und F, gleichgemacht sind, für eine gewisse mittlere Wellenlänge, etwa 550 $\mu\mu$, die Schnittweite am kürzesten ist und nach beiden Seiten des Spektrums zunimmt, allerdings bei den „Halbapochromaten" langsamer, gelingt es bei der Sonderform, der Schnittweite im Gebiete des sichtbaren Spektrums ein Maximum und ein Minimum zu geben, also die Bildpunkte für je drei Farben oder vielmehr praktisch für alle Farben zusammenzulegen. Diese Form der „Apochromate", in der gleichfalls Flußspat und außerdem Glas von besonders günstiger Farbenzerstreuung benutzt ist, wurde zuerst in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts von E. Abbe angegeben und von der Zeissischen Werkstätte in den Handel gebracht. Bei den Apochromaten ist auch der Farbenunterschied der sphärischen Abweichung mit schon einige Jahre früher von Abbe angegebenen Mitteln wirksam bekämpft worden. Setzt man das Objektiv aus zwei Teilfolgen zusammen, von denen die vordere (untere) sphärisch sowohl wie auf Farbenabweichung unter-, die hintere überbessert ist, so können diese Fehler — abgesehen von einem Zonenrest — gehoben werden. Dabei wird nun aber

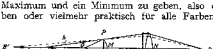


Abb. 204. Die Hebung des Farbenunterschiedes der sphärischen Abweichung (nach E. Abbe, Ges. Abhandl. Bd. I, S. 204). O ist der Dingpunkt, M das Unterteil, N das Oberteil des Mikroskopobjektivs. Das unterbessernde Unterteil verwandelt das Bündel POP für rotes Licht in das Bündel $PR'P$ (r, ausgezogen), für blaues Licht in das Bündel $PB'P$ (b, gestrichelt). Das überbessernde Oberteil wird von den roten Strahlen in größerer Entfernung von der Achse geschnitten und hat deshalb stärkeren Einfluß auf diese.

die zweite Hälfte (Abb. 204) von den Strahlen größerer Wellenlänge weiter von der Achse geschnitten, so daß die Überbesserung starker ist und den gewohnlichen Unterschied ausgleichen kann. Verringert wird der Unterschied auch bei den Achromaten dadurch, daß auch hier die Vorderfläche der Frontlinse unterbessert.

158. Der Farbenunterschied der Vergrößerung. Die Zusammensetzung aus einem unterbesserten Unter- und einem überbesserten Oberteil führt bei den starken Achromaten wie bei den Apochromaten einen Farbenunterschied der Vergrößerung ein. Stellt man sich der Einfachheit halber beide Teile als dünne Linsen vor, so ist die Objektivvergrößerung gegeben durch:

$$\beta = n \frac{s_1'}{s_1} \cdot \frac{s_2'}{s_2}.$$

Hier ist s_1 die Schnittweite auf der Dingseite, s_1' die Schnittweite nach der ersten Teilfolge, s_2 die vor der zweiten Teilfolge, s_2' die bildseitige Schnittweite. Hat man zwei verschiedene Farben C und F, so ist $s_{1C} = s_{1F}$ und für gehobene Farbenabweichung auch $s_{2C}' = s_{2F}'$. Ist nun der erste Teil unterbessert, so besagt dies:

$$s_{1C}' > s_{1F}' \qquad \text{oder} \qquad -s_{1C}' < -s_{1F}'.$$

Nun ist $s_2 = s_1 - d$ (d der Abstand zwischen beiden Teilfolgen), daraus ergibt sich

$$s_{1F}'/s_{2F} > s_{1C}'/s_{2C}.$$

Für Trockensysteme ist $n_F = n_C$, für Immersionen $n_F > n_C$, jedenfalls also

$$\beta_F > \beta_C.$$

Da die Teilfolgen endliche Dicke haben, außerdem aber für ein endliches Gesichtsfeld und große Apertur statt β ein etwas andrer Wert in Frage kommt, so ist die Ableitung nicht ganz streng, doch bleibt das Ergebnis richtig.

Dieser Fehler — ein Fehler des Gesichtsfeldes, nicht ein Fehler in der Achse — kann durch das Okular gehoben werden, wie noch erklärt werden soll.

159. Der Einfluß des Deckglases. Bei starken Trockensystemen ist noch eine weitere Schwierigkeit zu überwinden: Die gelieferten Deckgläser sind nicht von fester Dicke. Die obere Grenzfläche Deckglas—Luft (in geringerem Grade auch eine Fläche Deckglas—Wasser) wirkt überbessernd, und zwar um so mehr, je größer die Dicke des Glases ist. Es ist üblich, diese Abweichung dadurch auszugleichen, daß man das Oberteil des Objektivs gegen das Unterteil verschiebbar macht und so den Abstand zwischen beiden ändert. Die Wirkung dieses Verfahrens zeigt Abb. 205[1]. Ober- und Unterteil sind durch einfache Linsen angedeutet. Man stelle sich vor, das Licht verlaufe in umgekehrter Richtung (vom Bilde aus). Eine Vergrößerung des Abstandes beider Teile ändert die Bildentfernung um einen Betrag, der gegen sie nicht in Frage kommt, daher ist er auch auf die Abweichung im Oberteil nicht von merklichem Einfluß. Da aber die Frontlinse (Abb. links) von den Randstrahlen näher an der Achse getroffen wird als bei kleinerem Abstande beider Teile, so wirkt

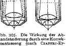


Abb. 205. Die Wirkung der Abstandsänderung durch eine Korrektionsfassung (nach CZAPSKI-EPPENSTEIN). Bei größerem Abstande des Oberteils wird das Unterteil von den Randstrahlen näher an der Achse geschnitten, also die Unterbesserung verringert, die Abstandsänderung wirkt also überbessernd, einer zu geringen Deckglasdicke entgegen.

[1] CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 497.

die Frontlinse in geringerem Grade unterbessernd: das Objektiv ist durch die Abstandsvergrößerung überbessert, und eine zu geringe Deckglasdicke kann ausgeglichen werden. Die Vorrichtung wird als Korrektionsfassung bezeichnet.

160. Formen der Okulare. Das Objektiv entwirft nun in der Nähe des obern Tubusrandes ein auffangbares Bild, das durch das Okular, in dessen vorderm Brennpunkt man es bei einem rechtsichtigen Auge annehmen kann, wie durch eine Lupe beobachtet wird.

Eine einfache Lupe (eine Linse) kann den Dienst des Okulars versehen, es ist aber namentlich bei den schwachen Okularen eine Teilung in zwei getrennte Flächenfolgen üblich. Bei einer einfachen Linse muß das Zwischenbild um den Betrag der Brennweite, bis etwa 60 mm vor ihr liegen. Da aber die Austrittspupille des Objektivs etwa 130 mm vor dem Bilde liegt, würde der Hauptstrahl für einen seitlichen Dingpunkt zwischen Bild und Okular sich noch weiter von der Achse entfernen, und das Okular müßte zur Erreichung eines ausreichenden Gesichtsfeldes unbequem groß sein, auch würden am Rande die Einfallswinkel und daher leicht auch die Fehler (Astigmatismus usf.) gesteigert.

Man bringt in die Nähe des Zwischenbildes eine besondere Linse (Feldlinse, Kollektiv); diese ändert den Ort und die Größe des Bildes nur wenig, entwirft aber ein auffangbares Bild der Austrittspupille des Objektivs, so daß die Hauptstrahlen nach dem Durchgang durch die Feldlinse nicht mehr auseinander-, sondern zusammenlaufen und daher die zweite Linse (Augenlinse) in mäßigem Abstand von der Achse schneiden.

161. Das RAMSDENsche Okular. Bei der RAMSDENschen Form des Okulars sind Feld- und Augenlinse von gleicher Stärke, die erstgenannte befindet sich (praktisch meist nicht genau) an der Stelle des Zwischenbildes. Die Entfernung (der als unendlich dünn zu betrachtenden Linsen) ist gleich der Brennweite.

In der Formel

$$f_3' = -\mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_2'/\delta\,,$$

wo $\mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{f}_2'$ die Brennweiten der Einzellinsen, δ der Brennpunktsabstand ist, hat man zu setzen:

$$\mathfrak{f}_1' = \mathfrak{f}_2'\,, \qquad \delta = \mathfrak{f}_1' - \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2' = -\mathfrak{f}_1'\,.$$

Danach ist $f_3' = \mathfrak{f}_1' = \mathfrak{f}_2'$.

Genau gilt dies nur für eine Farbe. Setzt man indessen für eine andre Farbe, unter der Annahme, daß beide Linsen aus derselben Glasart bestehen,

$$\mathfrak{f}_1'^{\times} = \mathfrak{f}_2'^{\times} = \mathfrak{f}_1' + d\mathfrak{f}_1'\,,$$

so wird

$$\delta^{\times} = \mathfrak{f}_1' - \mathfrak{f}_1^{\times} - \mathfrak{f}_2'^{\times} = -(\mathfrak{f}_1' + 2\,d\,\mathfrak{f}_1')$$

und daher

$$f_2'^{\times} = (\mathfrak{f}_1' + d\,\mathfrak{f}_1')^2/(\mathfrak{f}_1' + 2\,d\,\mathfrak{f}_1') = \mathfrak{f}_1' + (d\,\mathfrak{f}_1')^2/\mathfrak{f}_1' \ldots,$$

da aber $d\mathfrak{f}_1'$ klein gegen $\mathfrak{f}_1'$ ist, kann man $(d\mathfrak{f}_1')^2$ vernachlässigen und hat $f_2'^{\times} = f_2'$. Wenn man die Eintrittspupille des Okulars (in roher Annäherung) als weit entfernt annimmt, so wird kein Farbenunterschied der Vergrößerung durch das Okular hervorgebracht.

162. Das HUYGENSische Okular. Die RAMSDENschen Okulare sind indessen bei Mikroskopen weit seltener in Gebrauch als die der HUYGENSischen Form (Abb. 206).

Stellt man allgemein die Forderung fest, daß die Brennweiten für zwei im Spektrum nahe benachbarte Farben einander gleich sein sollen, so gilt die Bedingung:

$$d f_3' = -d\{\mathfrak{f}_1' \cdot \mathfrak{f}_2'/\delta\} = 0 \tag{26}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{f}_2'}{\delta}\,d\,\mathfrak{f}_1' + \frac{\mathfrak{f}_1'}{\delta}\,d\,\mathfrak{f}_2' - \frac{\mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_2'}{\delta^2}\,d\,\delta = 0\,.$$

Ist nun $\mathfrak{d}$ der Abstand der Hauptpunkte von Feld- und Augenlinse, die man einzeln als unendlich dünn annimmt, so wird:

$$\delta = \mathfrak{d} - \mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{d} - \mathfrak{f}_1' - \mathfrak{f}_2', \quad (27)$$

$$d\,\mathfrak{d} = 0,$$

also

$$d\,\delta = -d\,\mathfrak{f}_1' - d\,\mathfrak{f}_2',$$

sonach wird die Bedingung

$$\frac{\mathfrak{f}_2'}{\delta^2}\{\delta + \mathfrak{f}_1'\}\,d\,\mathfrak{f}_1' + \frac{\mathfrak{f}_1'}{\delta^2}\{\delta + \mathfrak{f}_2'\}\,d\,\mathfrak{f}_2' = 0$$

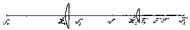


Abb. 206. Ein Übersichtsbild des Huygensschen Okulars. Feldlinse und Augenlinse sind als unendlich dünn zu denken. H_1, $\mathfrak{F}_1$, F_1' beziehen sich auf die Feldlinse, H_2, $\mathfrak{F}_2$, F_2' auf die Augenlinse, $\mathfrak{F}$, F' auf das Okular als Ganzes. Der hintere Brennpunkt (die Austrittspupille) des ganzen Mikroskops ist hier P' genannt

oder, wenn man mit $\frac{\mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_2'}{\delta^2}$ dividiert und $\delta + \mathfrak{f}_1' = \mathfrak{d} - \mathfrak{f}_2'$, $\delta + \mathfrak{f}_2' = \mathfrak{d} - \mathfrak{f}_1'$ aus (27) einführt:

$$\frac{d\,\mathfrak{f}_1'}{\mathfrak{f}_1'}\{\mathfrak{d} - \mathfrak{f}_2'\} + \frac{d\,\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{f}_2}\{\mathfrak{d} - \mathfrak{f}_1'\} = 0. \quad (28)$$

Sind Augenlinse und Feldlinse aus der nämlichen Glasart, so ist $\frac{d\,\mathfrak{f}_1'}{\mathfrak{f}_1'} = \frac{d\,\mathfrak{f}_2'}{\mathfrak{f}_2'}$, und die Gleichung wird:

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2')/2. \quad (29)$$

Das Ramsdensche Okular ist der Sonderfall $\mathfrak{f}_1' = \mathfrak{f}_2' = \mathfrak{d}$, doch sind offenbar durch die Bedingung (29) und durch die geforderte Brennweite

$$f_2' = -\mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_2'/\delta = -\mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_2'/(\mathfrak{d} - \mathfrak{f}_1' - \mathfrak{f}_2') \quad (29a)$$

nur zwei Forderungen für die drei Größen $\mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{f}_2'$ und $\mathfrak{d}$ gegeben. Gewisse Regeln folgen indessen aus der Forderung, daß man das Auge an die Austrittspupille des Mikroskops heranbringen kann. Diese ist in der Regel das Bild des hintern Brennpunktes des Objektivs, sie liegt also um den Betrag

$$\sigma' = -f_2 f_2'/\Delta = +f_2'^2/\Delta \quad (30)$$

hinter dem Brennpunkte des Okulars, σ' ist eine positive, für einigermaßen starke Okulare aber nicht sehr große Strecke; für $f_2' = 30$ mm und $\Delta = 180$ mm hat man $\sigma' = 5$ mm. Es ist also wünschenswert, daß schon der hintere Brennpunkt des Okulars einige Millimeter hinter die letzte Fläche der Augenlinse fällt.

Setzt man das Verhältnis der beiden Brennweiten:

$$\mathfrak{f}_1'/\mathfrak{f}_2' = \eta,$$

so geben die Bedingungen

$$\mathfrak{f}_1' = \eta \cdot \mathfrak{f}_2', \qquad \mathfrak{d} = \frac{1+\eta}{2}\mathfrak{f}_2', \qquad \delta = -\frac{1+\eta}{2}\mathfrak{f}_2' = -\mathfrak{d}, \qquad f_2' = \frac{2\eta}{1+\eta}\mathfrak{f}_2'. \quad (31)$$

Nun wird die Brennweite des Okulars, das verlangt wird, (f_2') gegeben sein, man hat also zu setzen:

$$\mathfrak{f}_2' = \frac{1+\eta}{2\eta}f_2', \qquad \mathfrak{f}_1' = \frac{1+\eta}{2}f_2', \qquad \mathfrak{d} = -\delta = \frac{(1+\eta)^2}{4\eta}f_2'.$$

Hieraus folgt zunächst, daß $\mathfrak{d}$ für negatives η und positives f_2' negativ würde. Soll die Bedingung „der Achromasie der Brennweiten" erfüllt werden, so müssen $\mathfrak{f}_1'$ und $\mathfrak{f}_2'$ beide positiv sein. Für den Abstand des hintern Brennpunktes des Okulars vom hintern Brennpunkte der Augenlinse hat man:

$$\tau' = -\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_2'/\delta = \mathfrak{f}_2'^2/\delta = -f_2'/\eta. \quad (32)$$

Dies gibt nun folgende Zusammenstellung für verschiedene Werte von η; wenn man $f_2' = 1$ setzt.

η	$\mathfrak{f}_1'$	$\mathfrak{f}_2'$	$\mathfrak{b} = -\delta$	r'	$r' + \mathfrak{f}_2'$	τ	$\tau - \mathfrak{f}_1'$
0,5	0,75	1,50	1,125	−2	−0,5	0,5	−0,25
1,0	1,0	1,0	1,0	−1	0	1	0
1,5	1,25	0,833	1,042	−0,67	+0,16	1,5	0,25
2,0	1,5	0,75	1,125	−0,5	+0,25	2,0	0,5
2,5	1,75	0,70	1,225	−0,4	+0,3	2,5	0,75
3,0	2,0	0,667	1,333	−0,33	+0,34	3,0	1,0

$r' + \mathfrak{f}_2'$ ist der Abstand des hintern Brennpunkts des Okulars vom (hintern) Hauptpunkte der Augenlinse, der Abstand von deren Hinterfläche hat nahezu denselben Wert (im allgemeinen einen etwas kleineren). Aus der Tafel zeigt sich, daß $\eta > 1$, $\mathfrak{f}_1' > \mathfrak{f}_2'$ sein muß, wenn der Brennpunkt außerhalb des Okulars liegen soll. Für $\eta = 2$ gibt $f_2' = 30$ mm den Wert $r' + \mathfrak{f}_2' = 7{,}5$ mm, für den Abstand der Austrittspupille $r' + \mathfrak{f}_2' + \sigma' = 12{,}5$ mm, was jedenfalls ausreicht; für stärkere Okulare müßte η noch größer sein. Die Urform ist $\eta = 3$. Ein gar zu großes η würde dahin führen, daß die Feldlinse zu schwach und daher der ganze Vorteil der Teilung des Okulars hinfällig wäre.

τ ist der Abstand des vordern Brennpunktes des Okulars vom vordern Brennpunkte der Feldlinse. Man hat

$$\tau = \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1'/\delta = -\mathfrak{f}_1'^2/\delta = \eta f_2'. \tag{33}$$

$\tau + \mathfrak{f}_1 = \tau - \mathfrak{f}_1'$ ist der Abstand des vordern Brennpunktes des Okulars vom (vordern) Hauptpunkte der Feldlinse. Der vordere Brennpunkt des Okulars ist der Ort, in dem das vom Objektiv entworfene Zwischenbild liegen muß, wenn das Mikroskopbild, wie überall angenommen, im Unendlichen liegt. Der positive Wert von $\tau - \mathfrak{f}_1'$ zeigt nun, daß dieses Bild beim Huygensischen Okular nicht wirklich zustande kommt, sondern von der Feldlinse abgefangen wird und ihr als nicht greifbarer Gegenstand dient. Von einem solchen entwirft eine Sammellinse ein verkleinertes, auffangbares Bild. Das Größenverhältnis ist im gegebenen Falle $\mathfrak{f}_1'/\tau$, die Verkleinerung ist also nicht erheblich, muß immerhin durch die größere Stärke der Augenlinse wieder ausgeglichen werden. Da ein auffangbares Bild doch zustande kommt, wird der Vorteil des sammelnden Okulars (Ziff. 142, erster Abs.) nicht aufgehoben.

164. Die Bildfehler beim Okular und ihre Hebung. Die innerhalb gewisser Grenzen veränderliche Stärke der beiden Teile des Okulars gibt ein Mittel, auf Hebung von Astigmatismus und Verzeichnung hinzuarbeiten. Eine weitere Hilfe gewährt die Umbiegung der beiden Linsen; indessen wird davon nicht viel Gebrauch gemacht, in der Regel sind beim Huygensischen Okular beide Linsen plankonvex und kehren dem Auge die ebene Fläche zu, Abb. 207 (die Ramsdensche Form wird gewöhnlich ebenfalls aus plankonvexen Linsen hergestellt, die jedoch einander die Kugelfläche zukehren).

Benutzt wird auch wohl die weitere Möglichkeit, die in Gleichung (28) liegt: Feld- und Augenlinse aus verschiedenem Glase zu machen. Setzt man die Differenz der Kehrwerte der Radien einer Linse $\varkappa$, so ist:

$$\varphi = 1/f' = (n-1)\varkappa,$$

$$df' = -d\varphi/\varphi^2 = -\varkappa \cdot dn/\varphi^2 = -dn/(n-1)\varphi = -f'\,dn/(n-1). \tag{34}$$

Man kann also $d\mathfrak{f}_1'/\mathfrak{f}_1'$ und $d\mathfrak{f}_2'/\mathfrak{f}_2'$ nahezu proportional zu $1/\nu_1$ und $1/\nu_2$ annehmen, hat demnach aus Gleichung (28)

$$(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}_2')\nu_2 + (\mathfrak{b} - \mathfrak{f}_1')\nu_1 = 0 \tag{34a}$$

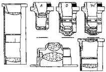
oder:

$$\mathfrak{b} = (\nu_1 \mathfrak{f}'_1 + \nu_2 \mathfrak{f}'_2) : (\nu_1 + \nu_2), \quad (34\,\mathrm{b})$$

woraus sich etwas allgemeinere Beziehungen zwischen Feld- und Augenlinse ableiten lassen; es darf freilich nicht vergessen werden, daß für einfache Linsen aus haltbarem Glase ν_1/ν_2 etwa zwischen 1/2 und 2 liegt.

164. Die Kompensationsokulare. Wie schon bemerkt, ist bei Apochromaten ein Okular, das keinen Farbenunterschied der Vergrößerung hat, nicht zu gebrauchen; es muß vielmehr verlangt werden, daß es den Fehler des Objektivs hebt, das für brechbarere Strahlen stärker vergrößert. Dazu muß das Okular für minder brechbare Strahlen stärker werden (d. h. f'_2 muß für solche einen kleineren positiven Wert haben).

Nun kann man erhalten, indem man die Ableitung der Gleichungen (26) bis (28) wiederholt:



Huygenssches Okular 5× — Kondensor Apert. 1,2 — Huygenssches Okular 10×

Abb. 207. Ein Durchschnitt der Teile einer häufig benutzten optischen Ausrüstung des Mikroskops, etwa natürliche Größe (nach einer Zeissschen Druckschrift).

1. Ein Kondensor, Apertur 1,2.

2. Drei Objektive, durchweg Achromate. Die Bezeichnungen A, D, $^1/_{12}$″ sind alt, neuerdings werden die Objektive durch ihre Vergrößerung V_1 (Ziff. 142) und durch ihre Apertur gekennzeichnet. Das Objektiv (90, 1,25) ist eine Ölimmersion, die beiden andern sind Trockensysteme. Bei den beiden stärkeren Objektiven sind oberhalb der Linsen Federn zum Festhalten der Fassung zu erkennen.

3. Zwei Huygensche Okulare von 5facher und 10facher Lupenvergrößerung l/f'_2 (Ziff. 142). Die Gesichtsfeldblende (Ziff. 166) ist an der Stelle zu erkennen, wo das Zwischenbild von der Feldlinse abgebildet wird.

Bei allen Teilen sind die Kronglaslinsen von rechts oben nach links unten, die Flintglaslinsen von links oben nach rechts unten gestrichelt.

$$\left.\begin{aligned} d f'_2 &= -d\{\mathfrak{f}'_1 \cdot \mathfrak{f}'_2/\delta\} = -\frac{\mathfrak{f}'_1 \mathfrak{f}'_2}{\delta^2}\left\{\frac{d\mathfrak{f}'_1}{\mathfrak{f}'_1}(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_2) + \frac{d\mathfrak{f}'_2}{\mathfrak{f}'_2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_1)\right\} \\ &= \frac{f'_2}{\delta}\left\{\frac{d\mathfrak{f}'_1}{\mathfrak{f}'_1}(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_2) + \frac{d\mathfrak{f}'_2}{\mathfrak{f}'_2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_1)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Man kann aber näherungsweise setzen

$dn/(n-1) = -A\,d\lambda/\nu$ (hier ist λ die Wellenlänge, A eine positive Konstante), also liefert die Gleichung (34):

$$d\mathfrak{f}'_1 = A\,\mathfrak{f}'_1\,d\lambda/\nu_1, \qquad d\mathfrak{f}'_2 = A\,\mathfrak{f}'_2\,d\lambda/\nu_2, \quad (36)$$

und setzt man dies in (35) ein, so hat man:

$$d f'_2 = \frac{A\,f'_2}{\delta\,\nu_1\nu_2}\{\nu_1(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_1) + \nu_2(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_2)\} \cdot d\lambda. \quad (37)$$

Der geforderte Vergrößerungsunterschied tritt ein, wenn für $d\lambda > 0$ (zunehmende Wellenlänge) $d f'_2 < 0$ ist. Führt man eine zu ν_1 und ν_2 entsprechende Größe ein, setzt also

$$d f'_2 = A\,f'_2\,d\lambda/N, \quad (37\,\mathrm{a})$$

so muß N negativ sein. Dies ergibt nun:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\delta\,\nu_1\nu_2}\{\nu_1(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_1) + \nu_2(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}'_2)\}. \quad (38)$$

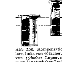


Abb. 208. Kompensationsokulare, links von 10facher, rechts von 15facher Lupenvergrößerung $^1/_2$ natürlicher Größe (nach einer Zeissischen Druckschrift). Die gestrichelte wagerechte Linie gibt die untere Brennebene des Okulares an, 13 mm unter dem Tubusrand (siehe Ziff. 143).

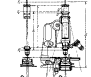


Abb. 209. Der Strahlengang im Mikroskop $^1/_4$ natürliche Größe. (Nach einer Zeissischen Druckschrift). I stellt die Abbildung eines in der vorderen Brennebene des ganzen Mikroskops liegenden Dingpunktes dar, II den Strahlengang für die durch die Mitte der Kondensorblende gehenden Hauptstrahlen, also die Begrenzung des Sehfeldes. Es bedeutet

- F_1' die hintere Brennebene des Objektivs.
- F_2 die vordere Brennebene des Okulars.
- F' die hintere Brennebene des ganzen Mikroskops.
- O den Gegenstand.
- O^* das vom Objektiv entworfene Zwischenbild.
- O^{**} das durch die Feldlinse entworfene Bild von O^*.
- O^{***} die Projektion des vom gesamten Mikroskop entworfenen Bildes auf die Ebene des deutlichen Sehens.
- S die sog. deutliche Sehweite (250 mm).
- T die mechanische Tubuslänge (160 mm).
- Δ die optische Tubuslänge.

Es hat sich nun gezeigt, daß die äußere Form des HUYGENSischen Okulars, wie sie die Tafel in Ziff. 162 ergibt, günstige Bedingungen für die Hebung der noch übrigen Fehler (Astigmatismus, Verzeichnung) bietet. Es liegt also nahe, diese Form auch beizubehalten, d. h. trotz der andern Farbenforderung wenigstens nahezu:

$$\mathfrak{b} - \mathfrak{f}_1' = -(\mathfrak{b} - \mathfrak{f}_2), \qquad \delta = -\mathfrak{b}$$

zu setzen, wo dann $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} - \mathfrak{f}_2'$ positive Werte haben. So ist:

$$\frac{1}{N} = \frac{\mathfrak{b} - \mathfrak{f}_2'}{\mathfrak{b}}\left(\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1}\right).$$

N wird also für $\nu_2 > \nu_1$ einen negativen Wert erhalten; um ihm die — von der Form des Objektivs abhängige — ausreichende Größe zu geben, wird man die Feldlinse (ν_1) aus stark zerstreuendem Glase machen, für die Augenlinse wird man häufig keine einfache, sondern eine verkittete Linse nehmen müssen, damit ν_2 einen sehr großen oder gar einen negativen Wert erhält (Abb. 208 links).

165. Starke Okulare. Bei den stärksten Okularen ist, wie schon bemerkt, die scharfe Trennung in Feld- und Augenlinse nicht nötig, andrerseits ist eine größere Zahl von Mitteln nötig, um den Astigmatismus usf. zu heben. Es ist hier die Form des orthoskopischen Okulars üblich. Es besteht aus einer dreifach verkitteten symmetrischen Linse — zwei bikonvexe Sammellinsen schließen eine Flintlinse ein — und einer unmittelbar darauf folgenden plankonvexen Linse (s. Abb. 208 rechts). Dies Okular kann sowohl so angefertigt werden, daß der Farbenunterschied der Vergrößerung gehoben ist, wie auch als Kompensationsokular, im letzten Falle ist die verkittete Linse zu überbessern.

166. Die Gesichtsfeldblende. Da ein auffangbares Bild zustande kommt, besteht die Möglichkeit, durch eine mit dem Okular in Verbindung stehende Gesichtsfeldblende das Feld scharf abzugrenzen. Wenn das scheinbare Gesichtsfeld $2w'$ sein soll, so hat man für die entsprechende Größe des vom Objektiv entworfenen Zwischenbildes

$$2\mathfrak{y}_1' = 2\mathfrak{y}_2 = 2\mathfrak{f}_2\,\mathrm{tg}\,w'.$$

Beim RAMSDENschen und orthoskopischen Okular, wo dieses Zwischenbild wirklich zustande kommt, ist $2\mathfrak{y}_1'$ auch der geo-

metrische Durchmesser der Blende, beim HUYGENSischen Okular ist dieser hingegen nach Ziff. 166 im Verhältnis f_1/f verkleinert; die Blende ist im ersten Falle im vorderen Brennpunkte des gesamten Okulars, im zweiten im vorderen (unteren) Brennpunkte der Augenlinse anzubringen, da dorthin das Zwischenbild für ein rechtsichtiges Auge fällt.

$2\eta'_1$ heißt die Sehfeldzahl des betreffenden Okulars. Das dingseitige Gesichtsfeld einer Zusammenstellung Objektiv + Okular erhält man, indem man die Sehfeldzahl des Okulars durch die Vergrößerung β des Objektivs dividiert.

Ein Gesamtbild des Strahlenganges im Mikroskop gibt Abb. 209 nach einer Zeissschen Druckschrift.

b) Die physikalische Entstehung des Bildes beim Mikroskop.

167. Das Auflösungsvermögen; Geschichtliches. In den dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts wurde zuerst von einigen englischen Mikroskopikern eine auffallende Beobachtung gemacht: Die feinsten Einzelheiten, die man mit einer starken Vergrößerung erkennen konnte, waren nur bei großem Öffnungswinkel des Mikroskops zu erkennen. Weiter zeigte es sich, daß dies auch dann bestehen blieb, wenn die Öffnung des beleuchtenden Bündels kleiner war als die des Mikroskops, wobei jedoch ein deutlicher Vorteil für die Auflösung kleiner Einzelheiten zu bemerken war, wenn ein schmales Bündel nicht in der Achse des Mikroskops, sondern schief einfiel. Die Abb. 210 gibt eine alte Beobachtung der Schuppen des Schmetterlings Morpho menelaus von C. R. GORING[1]) bei verschiedener Öffnung wieder.

Die linke Abbildung zeigt die Schuppe beobachtet mit einem Objektiv aus drei Linsen von 0,2 (englischen) Zoll Brennweite und 0,1 Zoll (linearer) Öffnung, also etwa 0,25 Apertur (GORING gibt einen Winkel $2U = 27,5°$, also $a = 0,238$, es wird die lineare Öffnung der ersten Fläche gegeben sein). Die Brennweite ist 5,08 mm, GORING wird das Objektiv als einfaches Mikroskop benutzt haben, also $\mathfrak{N} = 50$.

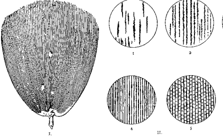
Die fünf Kreise geben das Aussehen eines kreisförmigen Stückchens der Schuppe. Beobachtet wurde stets mit einem Objektiv von 0,9 Zoll = 22,86 mm und einem Okular von $^1/_4$ Zoll = 6,35 mm Brennweite. Nimmt man eine optische Tubuslänge $\Delta = 200$ mm an, was beim englischen Rohr nahezu stimmen mag, so erhält man $\mathfrak{N} = 345$. Das Objektiv, ebenfalls aus drei Linsen zusammengesetzt, hatte eine Öffnung von 0,5 Zoll, die aber durch verschiedene Blenden verringert wurde. Die Beleuchtung erfolgte schief, in der durch *II* und *III* angedeuteten Weise.

Bei wachsender Öffnung kommt dann folgendes Aussehen zustande:

Öffn.	0,2	Zoll	$a = 0,11$	Abb. 210 II,	1
,,	0,3	,,	$a = 0,17$	,,	2
,,	0,4	,,	$a = 0,22$	,,	3
,,	0,5	,,	$a = 0,28$	,,	4

Es wurde nun bei Innehaltung der vollen Öffnung der Gegenstand um 90° gedreht, so daß die Beleuchtung für die Querstreifen schief war, dann waren auch die Querstreifen zu erkennen: Abb. 210 II, 5.

[1]) C. R. GORING u. A. PRITCHARD, Micrographia containing practical essays on reflecting, solar, oxy-hydrogengas microscopes; micrometers; eye-pieces etc. etc. London: Whittaker & Co. 1837. — Über die weitere Geschichte der Apertur vgl. man CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 495 u. 500—502; sowie H. BOEGEHOLD, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 45, S. 141 bis 142. 1924.



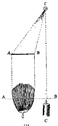


Abb. 210. Das mikroskopische Bild einer Schmetterlingsschuppe nach C. R. GORING (um 1835).

I. Ein Gesamtbild der Schuppe mit einem einfachen Mikroskop beobachtet.

II. 1—3 gibt das Bild eines kleinen Teils der Schuppe, beobachtet mit einem zusammengesetzten Mikroskop, bei schiefer Beleuchtung und wachsender Apertur (Einzelheiten s. im Text). Die beiden Goringschen Bilder mit den geringsten Aperturen zeigen nichts und sind daher fortgelassen worden. 4 und 5 sind beide mit der größtmöglichen Apertur (0,28) beobachtet, doch ist der Gegenstand um 90° gedreht worden, so daß bei 4 das Licht in einer zu den Querstreifen, bei 5 in einer zu den Längsstreifen parallelen Ebene einfiel.

Es ist hinzuzufügen, daß die Bilder in Wirklichkeit sehr viel dunkler waren; Goring hat dies durch eine senkrechte Strichelung angedeutet, die hier wegen des störenden Eindrucks fortgelassen ist. Auf 5 ist nach Goring die Querstreifung deutlicher gezeichnet, als sie erscheint.

III. gibt oben einen wagerechten, unten einen senkrechten Durchschnitt durch die Beleuchtungsvorrichtung. Der Gegenstand steht senkrecht, das Mikroskop also wagerecht. AB ist der Schnitt einer wagerechten Ebene durch die Achse des Mikroskops, die Kerze C dient als Lichtquelle.

Mit gerader Beleuchtung waren die Erscheinungen nicht festzustellen. Die erste Beobachtung (Abb. 210 links) war bei einer mittleren Stellung des Gegenstandes zur Lichtquelle gemacht, man sieht, daß trotz der geringeren Vergrößerung die Längsstreifen erkennbar und die Querstreifen angedeutet sind.

168. Weitere Geschichte. Testobjekte. Vielfache Beobachtungen in den nächsten Jahrzehnten lehrten die Gesetze genauer kennen und an einer großen Menge der verschiedenartigsten Beobachtungsgegenstände bestätigen, zu den Schmetterlingsschuppen, Haaren verschiedener Tiere kamen nach der Mitte des Jahrhunderts die Streifungen der Diatomeen. F. A. Nobert fertigte[1]) seit 1846 einen künstlichen Prüfgegenstand an: Es gelang ihm, eine Teilmaschine herzustellen, mit der er in eine Glasplatte Gruppen von Parallellinien von außerordentlicher Regelmäßigkeit und verschiedener Feinheit einritzen konnte. Diese Gitter hatten anfangs einen Strichabstand von 2,256 μ bis herunter zu 0,564 μ; 20 Jahre später bis zu 0,226 μ. An diesen Prüfgegenständen stellte man fest, daß eine größere Öffnung (Apertur) weder durch stärkere Beleuchtung ersetzt werden konnte, noch daß ihre Wirkung mit der einer besseren Hebung der optischen Fehler verglichen werden konnte; eine solche ließ die auflösbaren Einzelheiten mit größerer Schärfe erkennen, ohne aber das Auflösungsvermögen zu erhöhen. Weiter entdeckte man im Laufe der Jahre den Vorteil der Immersionssysteme, auch den der Photographie (s. Ziff. 178 und 213).

Da es gelang, die Apertur beständig zu steigern, so kam man dazu, die feinsten Nobertschen Gitter mit Wasserimmersionen und mit Hilfe der Photographie aufzulösen, während dies Nobert 1846 nur bei Gittern bis zum Abstande von 0,658 μ herunter gelang.

169. Abbe und Helmholtz. Die Helmholtzsche Theorie. Für die Wirkung der Apertur suchte man nach Erklärungen, doch fand man keine befriedigende, bis 1874 E. Abbe und H. Helmholtz sich fast gleichzeitig mit der Aufgabe beschäftigten[2]). Beide führen die erwähnten Erscheinungen auf die Beugung zurück. Helmholtz betrachtet die von der Öffnung des Mikroskops entworfene Beugungserscheinung, womit er im Grunde genommen den Gegenstand wie einen selbstleuchtenden Körper behandelt. Nimmt man das Mikroskop als fehlerfrei an, so kann man, statt die Beugungswirkung der Mikroskopöffnung auf den Gegenstand zu betrachten, die Annahme machen, es werde unmittelbar das dem Gegenstande ähnliche und vergrößerte Bild (unendlich entfernt) durch die Austrittspupille des Mikroskops betrachtet. Ein leuchtender Punkt erscheint bei dieser Fraunhoferschen Beugungserscheinung nun beispielsweise als kleiner Kreis, von verschiedenen dunkeln und hellen Ringen umgeben, von denen die letztgenannten aber lichtschwach sind und nach außen hin immer mehr an Helligkeit abnehmen. Der scheinbare Halbmesser des innersten Lichtflecks oder des ersten dunkeln Rings (die Beugungserscheinung befindet sich wie schon bemerkt im Unendlichen) wird nach F. M. Schwerd[3]) gegeben durch:

$$\gamma = \frac{1{,}22\,\lambda}{2\,p'}\,,$$

wo λ die Wellenlänge des Lichtes, $2p'$ der Durchmesser der Öffnung, im vorliegenden Falle der der Austrittspupille ist. Da der Fleck nach dem Rande zu

[1]) F. A. Nobert, Über die Prüfung und Vollkommenheit unserer jetzigen Mikroskope, Pogg. Ann. Bd. 67, S. 173—185. 1846.

[2]) Von den Abbeschen Gesammelten Abhandlungen (1903) kommen die in Bd. I mit III, VI, XIV bezeichneten hauptsächlich in Frage. Die Helmholtzsche Arbeit steht Pogg. Ann. 1874. Jubelb. S. 557—584. Wissensch. Abhandlgn. Bd. 2, S 185—212. 1883.

[3]) F. M. Schwerd, Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt. S. 70. Mannheim, Schwan & Goetz. 1835.

schon stark an Helligkeit abnimmt, so wird man zwei Lichtpunkte noch voneinander unterscheiden können, wenn jeder in den ersten dunkeln Ring des andern hineinfallt und selbst bei etwas geringerem Abstande. Hat man statt des Abstandes zweier Lichtpunkte Einzelheiten von andrer Form (Spalte, Gitter), so werden die „Beugungsfransen" eine etwas andre Ausdehnung haben, man kann aber im Durchschnitt annehmen, daß die Ungleichung

$$w' \geqq \lambda/2p' \tag{39}$$

gilt, wenn eine Einzelheit von der scheinbaren Größe w' nicht durch die Beugungserscheinung verdeckt werden soll. Die Bedingung (39) gilt fur die Betrachtung mit freiem Auge ($p' = p$) und durch jedes Instrument. Im Falle des Mikroskops gilt aber nach Ziff. 144 als Folge der Erfullung der Sinusbedingung im Objektiv (wenn der gesamte Öffnungswinkel $2U$ ist),

$$p'/f' = -n \sin U \qquad \text{oder} \qquad p' = -a/V. \tag{22}$$

Setzt man nun weiter:

$$w' = V \cdot \mathfrak{y}, \tag{3}$$

so bleibt, da das negative Vorzeichen hier ohne Bedeutung ist, die auf die Dingseite bezogene Grenze:

$$\mathfrak{y} \geqq \lambda/2a \tag{39a}$$

fur die Auflösbarkeit einer Einzelheit. λ ist auf der Bildseite, also in Luft, zu messen, fur die Beobachtung mit Tageslicht kann man einen Durchschnittswert, etwa $\lambda = 0{,}55\,\mu$, setzen.

170. Die Abbesche Theorie in Abbes eigenen Worten. Die etwas früher erschienene Abbesche Arbeit stellt sich hingegen auf den Standpunkt, daß die Entstehung des mikroskopischen Bildes eines nicht selbstleuchtenden Körpers eine ganz andere Erklärung erfordere, als sie die geometrische Optik gibt. Diese Auffassung ist in voller Schärfe freilich erst in den spätern Aufsätzen vorhanden, sie sei hier mit Abbes eigenen Worten angeführt[1]):

„Diejenige Auffassung des Abbildungsvorgangs nun, zu welcher schon das rein experimentelle Studium dieser Erscheinungen nach meiner Ansicht unbedingt zwingt, auf welche aber zugleich die Theorie des Lichts als auf eine unabweisbare Consequenz der Undulationslehre hinweist, giebt einen gänzlich anderen Begriff vom mikroskopischen — und allgemein vom optischen — Bild. Ihr zufolge wird von Objecten, die mittels durchfallender oder reflectirter Strahlen leuchten, überhaupt kein Bild durch die blosse Wiedervereinigung der von den einzelnen Punkten ausgehenden Strahlenkegel erzeugt, was auch das wirksame optische System sein mag. Eine solche directe Abbildung wird verhindert durch die unvermeidliche Diffraction der durchfallenden oder reflectirten Strahlen im oder am Objecte selbst. Die Unterbrechung der Wellenzüge durch die Structur der Objecte, sei es beim Hindurchtritt, sei es bei der Reflexion an der Oberfläche, hebt jede geradlinige Fortpflanzung der sogenannten Lichtstrahlen grundsätzlich auf und widerlegt kraft dessen die Voraussetzung, auf welche die gewöhnliche Vorstellung von der Entstehung optischer Bilder stillschweigend basirt ist. Dagegen enthält andererseits diese Diffraction in den Objecten in sich selbst wieder die zureichenden Bedingungen für die gesetzmässige Entstehung eines in der dioptrischen Bildfläche .... localisirten Lichteffects, einer bestimmten räumlichen Vertheilung der Lichtwirkung innerhalb dieser Bildfläche, welche in regelmässigem Zusammenhange steht mit der Structur und der son-

[1]) Die optischen Hulfsmittel der Mikroskopie. Aus dem Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung 1876. S. 383—420. Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 119—164. Die angeführte Stelle steht auf S. 137—141.

stigen Beschaffenheit des Objects und deshalb als ein secundär erzeugtes Abbild desselben erscheint, obwohl es diesem im Allgemeinen keineswegs conform (d. h. geometrisch ähnlich) zu sein braucht.

Der Vorgang, welcher diese secundären Abbildungen durch optische Systeme vermittelt, ist die Interferenz der vielen verschiedenen Strahlen, welche die Diffractionswirkung des Objectes ausserhalb des Systems aus jedem einfallenden Strahl — so zu sagen — aussondert. In der anschaulichen Redeweise der Strahlungshypothese ausgedrückt, löst sich jeder einzelne Lichtstrahl beim Durchgang durch eine körperliche Structur, wie bei der Reflexion an einer solchen, in einen Strahlenbüschel auf, innerhalb dessen von der Richtung des geradlinig fortgesetzt gedachten (ungebeugten) Strahles bis zu den Grenzen des halbkugelförmigen Winkelraumes die Lichtintensität auf die mannigfachste Weise sich abstufen kann, je nach den Maassen und der inneren Gliederung des beugenden Gebildes. Sämmtliche Strahlenbüschel aber, welche sich in dieser Art ableiten aus je einer Gruppe einfallender Strahlen, die von irgend einem gemeinsamen Ausgangspunkt aus die nebeneinander liegenden Stellen des Objectes passirten, sind, wenn das Licht jeder Farbe für sich betrachtet wird, in bestimmter Weise cohärent, d. h. die Oscillationsbewegungen auf den homologen Strahlen der verschiedenen Büschel stehen in ihren gleichzeitigen Phasen in regelmässiger und unveränderlicher Verknüpfung. Zufolge dieser Cohärenz müssen denn diese durch die Diffraction erzeugten Strahlensysteme in ihrem weiteren Verlauf durch den vorausgesetzten optischen Apparat interferiren, und ihr Zusammentreffen muss ein localisirtes Interferenzphänomen, eine stehende Summation und Vernichtung der Lichtbewegung in nebeneinanderliegenden Raumstellen, herbeiführen, sobald die Strahlen eine Ebene erreichen, in welcher die äusseren Wegunterschiede sich regelmässig compensiren. Letztere Bedingung ist nun bei jedem optischen System nach bekannten Lehrsätzen der Optik für diejenige Ebene erfüllt, welche dem Object dioptrisch conjugirt ist. Dieses Interferenzphänomen im conjugirten Focus, nichts Anderes als dieses, ist es, was als Abbildung des Objectes sich darstellt, und beim Mikroskop wie bei den anderen optischen Apparaten, die unter entsprechenden Verhältnissen wirksam sind."

„Der hier in seinen Grundzügen skizzirte neue Begriff vom optischen Bild, welcher der bisherigen Theorie des Mikroskops völlig fremd geblieben ist, hat als nächste und wichtigste Consequenz die grundsätzliche Widerlegung einer Annahme, welche bis jetzt die unbestrittene Voraussetzung bei allem Gebrauch des Instruments gewesen ist: dass ein correctes mikroskopisches Bild in allen Fällen die wahre körperliche Beschaffenheit des abgebildeten Objectes in einer flächenhaften Projection darstelle und dass es deshalb nur darauf ankomme, eine immer grössere Schärfe der Abbildung und eine immer weiter gehende Vergrösserung herbeizuführen, um immer mehr von der Beschaffenheit der Objecte wahrnehmen zu können. Wenn das mikroskopische Bild überhaupt nicht nach Art einer directen Projection sich aus dem Object ableitet, wenn es erzeugt wird durch einen Vorgang, in welchem das Object selbst unmittelbar gar nicht mehr wirksam und maassgebend ist, so wird der schliessliche Zusammenhang zwischen Bild und Object zunächst völlig problematisch. Die Beschaffenheit des Bildes ist alsdann direct gar nicht von derjenigen des Objectes, vielmehr direct nur von der räumlichen Vertheilung und Intensitätsabstufung der interferirenden Strahlensysteme abhängig, welche in das Mikroskop eintreten; und nur in soweit überhaupt hat das Object Einfluss auf das Resultat jenes Prozesses, als seine Structur und sonstige Beschaffenheit ihrerseits in dem vorausgehenden Diffractionsvorgang diese interferirenden Strahlensysteme in ihrer besonderen Beschaffenheit und Anordnung hervorgerufen hat. Es muss aber zunächst eine

offene Frage bleiben, wie sich der so hergestellte mittelbare Zusammenhang zwischen Object und Interferenzbild gesetzmässig bestimmen mag; vor ihrer Entscheidung kann nichts Anderes mit Sicherheit behauptet werden, als dass das mikroskopische Bild eine gesetzmässige Abhängigkeit zeigen muss von demjenigen Theil des Beugungsphänomens, welcher zum Mikroskop Zutritt findet."

„Auf jene Frage lässt sich jedoch eine vollkommen bündige Antwort geben, welche allen vorliegenden Erfahrungsthatsachen gerecht wird und als der Schlussstein dieser Theorie des Mikroskops erscheint. – Wenn alle Strahlen, in welche die Diffractionswirkung des Objectes ausserhalb des Linsensystems das einfallende Licht zerlegt hat, von dem Linsensystem sämmtlich aufgenommen und wieder gesammelt werden, wenn also die Oeffnung des letzteren die durch Beugung entstandene Strahlengruppe in solchem Umfange aufzunehmen gestattet, dass kein Theil von merklicher Intensität verloren geht, so wird das Interferenzbild pure identisch mit einer Flächenprojektion des Objectes. Das Detail der körperlichen Structur wird alsdann, nach Maassgabe der dioptrischen Wirkung des Linsensystems vergrössert, in allen Stücken nach seinen wirklichen Maass- und Formverhältnissen reproducirt. Wenn dagegen von der ausserhalb des Mikroskops durch die Diffraction erzeugten Strahlengruppe nur ein Theil in das Linsensystem Zutritt findet, so ist das mikroskopische Bild dem Gegenstande stets mehr oder minder inconform. Die Interferenz der zur Wirkung gelangenden Strahlengruppe erzeugt in diesem Falle im conjugirten Focus nicht ein Abbild des vorausgesetzten Objectes, sondern sie erzeugt das vergrösserte Bild derjenigen körperlichen Structur, bei deren Vorhandensein jene in das Objectiv wirklich eingetretene Strahlengruppe den ganzen, vollständigen Beugungseffect ausmachen würde" . . . .

„Je grösser die Theile eines körperlichen Gebildes im Verhältniss zur Länge der Lichtwellen sind, in einem desto engeren Winkelraum verlaufen die durch die Beugung erzeugten Strahlen; je kleiner diese Theile, in desto breitere Lichtbüschel löst die Diffraction die einfallenden Strahlen auf. Solange demnach eine Structur, was immer auch ihre Form und Gliederung sein mögen, in den Dimensionen ihrer Theile noch ansehnliche Vielfache der Wellenlänge umfasst, bleibt alles gebeugte Licht von merklichem Intensitätsantheil in einem kleinen Winkelraum um die Richtung des directen (ungebeugten) Strahles zusammengedrängt. In diesem Falle reicht ein kleiner Oeffnungswinkel des optischen Systems aus, um das gesammte Licht zur Wirkung zu bringen; solchen Objecten gegenüber ist also die obige Bedingung einer conformen Abbildung leicht erfüllt. Hierauf beruht es, dass von Gegenständen, deren Theile nur auf die Zehntel des Millimeters herabgehen, schon das freie Auge bei einem Oeffnungswinkel von nur $^1/_2$ bis 1 Grad vollständige, d. h. geometrisch ähnliche Bilder auf der Netzhaut entwirft, und dass bei den gröberen Objecten des mikroskopischen Studiums, deren Theile sich noch in den Hundertsteln des Millimeters bewegen, das Mikroskop, auch bei mässigem Oeffnungswinkel des Objectivs, unbedingte Aehnlichkeit des Bildes mit dem Gegenstand gewährleistet. Je mehr aber die Theile eines Gebildes auf kleine Multipla der Wellenlänge oder gar unter deren einfachen Betrag herabgehen, desto weiter entfernen sich abgebeugte Strahlen von noch merklicher Intensität aus der Richtung des directen Strahles; und zwar umfasst bei sehr kleinen Dimensionen der Theile selbst der volle Winkelraum der Halbkugel noch nicht das gesammte, der Structur charakteristische Beugungsphänomen, wofern nicht zugleich das umgebende Medium durch einen hohen Brechungsindex eine Verkürzung der Wellenlänge selbst herbeiführt". . . . (Je kleiner die Einzelheiten werden, um so mehr kann nur der mittlere Teil der Beugungs-

erscheinung wirken.) „Dieser dem Mikroskop allein zugängliche centrale Theil ist aber nothwendiger Weise identisch für ganz verschiedene Gebilde, welche in den entfernteren Zonen des Diffractionsbüschels sehr ungleichartige Vertheilung des abgebeugten Lichtes ergeben würden. Alles, was man z. B. an den feineren Diatomeenschalen sieht, deren Detail unter ein paar Tausendstel des Millimeters herabgeht, ... gehört ausnahmslos in diese Classe der typischen Bilder, welche . . . . nichts Anderes als grobe Schemate von der Structur dieser Objecte liefern und in ihrem Detail keinerlei Aehnlichkeit mit deren wirklicher Beschaffenheit zu haben brauchen."

Während HELMHOLTZ also die Beugung an der Öffnung als Fehlerquelle einführt, weist ABBE darauf hin, daß das Bild eines nicht selbstleuchtenden Körpers überhaupt erst durch die an ihm entstehende Beugungserscheinung zustande komme. Die Öffnung wirke nur insofern, als sie aus dem Beugungsspektrum der Lichtquelle Teile wegblende; eine Beugungswirkung der Öffnung lehnt ABBE in seinen spätern Arbeiten völlig ab. Auf diese Auffassung sei ausdrücklich hingewiesen, da sie neuerdings der Gegenstand von Zweifeln geworden ist.

171. Die Durchführung der Theorie in Sonderfällen. Die ABBEsche Theorie ist in mathematischer Form zunächst nur für den Sonderfall einer regelmäßigen Zeichnung des Gegenstandes veröffentlicht worden[1]), auch ABBE hat in allen Veröffentlichungen diese Beispiele vorwiegend behandelt, und sie sind von spätern Bearbeitern in erster Linie besprochen worden. Solche regelmäßigen Gestalten liefern, außer künstlich hergestellten Gittern, auch organische Körper, wie die Diatomeen.

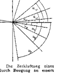


Abb. 211. Die Zerklüftung eines Strahles durch Beugung an einem Gegenstande von regelmäßigem Gefuge (einem Gitter, dessen Stäbe senkrecht zur Zeichenebene stehen) $\varkappa_0$ der Winkel des einfallenden Strahles mit Senkrechten zur Gitterebene.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, sei eine zunächst punktförmige Lichtquelle angenommen, und der Gegenstand sei ein einfaches Gitter, etwa senkrechte Linien (Ritze in einer Glasplatte). Die verschiedenen Teile des Gegenstandes unterscheiden sich durch verschiedene Durchsichtigkeit, dabei kehrt nach einer bestimmten Strecke ε derselbe Wert wieder. Diese Strecke heißt die Gitterkonstante.

Abb. 211 gebe einen Durchschnitt des Gitters durch eine zu seinen Stäben und Zwischenräumen senkrechte Ebene. Es sei angenommen, daß das Licht in einer solchen Ebene einfalle und mit der Senkrechten auf der Gitterebene den Winkel $\varkappa_0$ bilde. Läge die einfallende Lichtrichtung nicht in der zu den Stäben senkrechten Ebene, so müßte man sie auf diese projizieren.

Nach dem Durchgange durch das Gitter wird infolge der Beugung Licht auch in andern Richtungen verlaufen; bei einer einigermaßen großen Zahl der Stäbe und Öffnungen sind aber die Richtungen $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_{-1}, \varkappa_{-2}$ von allein in Betracht kommender Lichtstärke, die J. FRAUNHOFER als Maxima zweiter Ordnung bezeichnet hat. Für $\varkappa_1$ usf. kommt nur der Abstand ε, nicht die Breite

[1]) Bei L. DIPPEL, Das Mikroskop und seine Anwendung, 2. Aufl., S. 89–161. Braunschweig: F. Vieweg. 1882.

der Stäbe und Lücken in Betracht, und zwar gilt für die Wellenlänge λ das Gesetz[1]):

$$\sin u_{-1} - \sin u_{-2} = \sin u_0 - \sin u_{-1} = \sin u_1 - \sin u_0 = \sin u_2 - \sin u_1 = \cdots C, \quad (40)$$

wo $C = \lambda/e$ ist. Blickt man nun durch das Gitter, so sieht man Licht nicht nur in der Richtung u_0, sondern auch noch in den Richtungen u_1 usf. (FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung). Da aber C von λ abhängig ist, werden die Richtungen u_1 usf. von der Farbe abhängig sein, so daß man bei Beleuchtung mit weißem Lichte auf beiden Seiten der hellen Richtung u_0 eine Anzahl Spektren erkennt. Das Mikroskopobjektiv bildet diese Spektren in der hinteren Brennebene ab. Dabei besteht für die Entfernung eines Punktes von der Achse die Gleichung

$$h = f \sin u = f' \cdot n \sin u, \quad (22)$$

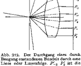


Abb. 212. Der Durchgang eines durch Beugung entstandenen Bündels durch eine Linse oder Linsenfolge. P'_{-2} P'_2 ist die Brennebene.

$$P'_{-2}P'_{-1} = P'_{-2}P'_{-1} = P'_{-1}P'_0 = P'_0 P'_1 = P'_1 P'_2 = \eta.$$

also gilt in der Brennebene für den Abstand zweier heller Punkte oder vielmehr zur Zeichenebene in Abb. 212 senkrechter Linien:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= h_{-1} - h_{-2} = h_0 - h_{-1} \\ &= h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = \cdots \\ &= -f' n C = -f' n \lambda/e. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Nun ist λ hier die Wellenlänge im Mittel auf der Dingseite, setzt man die Wellenlänge in Luft λ_0, so ist $\lambda = \lambda_0/n$, also:

$$\eta = -f' \lambda_0/e. \quad (41\,a)$$

In der hintern Brennebene des Mikroskopobjektivs (genau genommen in einer gekrümmten Bildfläche) entsteht also ein auffangbares Bild der FRAUNHOFERschen Beugungserscheinung, die der Gegenstand (im angenommenen Falle das Gitter) erzeugt. Man kann dieses Bild beobachten, indem man nach Entfernung des Okulars in den Tubus hineinsieht; bei starken Objektiven ist die Erscheinung freilich so wenig ausgedehnt, daß man eine Lupe oder ein Hilfsmikroskop zur ihrer Beobachtung nötig hat.

Bei senkrechter (axialer) Beleuchtung (man kann natürlich nicht durch einen einzigen Lichtstrahl, sondern nur durch ein dünnes, achsensymmetrisches Bündel beleuchten) sieht man die helle Mitte (das Hauptmaximum) und zu beiden Seiten bei einfarbigem Licht eine Anzahl schwächerer Maxima von abnehmender Stärke, bei weißem Licht an deren Stelle Spektren, bei denen das rote Ende nach außen liegt. Die Spektren sind um so weiter voneinander entfernt, je kleiner die Gitterkonstante e ist (die Entfernung zweier Gitterstäbe), dagegen ist von der Breite der undurchsichtigeren Teile (der Gitterstäbe) und der durchsichtigeren (der Lücken) und von den Unterschieden der Durchsichtigkeit nur die Helligkeit, nicht die Entfernung der Spektren abhängig. Beleuchtet man schief, macht also $u_0 \gtrless 0°$, so verschiebt sich die Erscheinung, so daß das Hauptmaximum nicht mehr in der Mitte ist, sie bleibt aber im übrigen nach (41 a) in ihrer Ausdehnung und Gestalt ganz ungeändert.

[1]) J. FRAUNHOFER, Kurzer Bericht von den Resultaten neuerer Versuche über die Gesetze des Lichts, und die Theorie derselben. Gilb. Ann. Bd. 74, S. 337—378. 1823. Ges. Schriften S. 117—143.

Es sei nun $2U$ der Öffnungswinkel, also $n \sin U$ die Apertur, so können nur die Maxima erscheinen, für die $u_k < U$ ist; bei senkrechtem Einfall ($u_0 = 0$) wird außer dem Hauptmaximum nur dann wenigstens je ein Maximum auf beiden Seiten mit zu sehen sein, wenn

$$-\sin u_{-1} = \sin u_1 \leqq \sin U \quad \text{oder} \quad C \leqq \sin U \tag{42}$$

ist. Dies kann man schreiben:

$$\lambda/e \leqq \sin U\,, \tag{42a}$$

oder

$$e \geqq \lambda/\sin U = \lambda_0/n \sin U = \lambda_0/a\,. \tag{42b}$$

Läßt man hingegen das beleuchtende Lichtbündel so schief einfallen, daß es gerade noch hindurchgehen kann ($u_0 = U$), so wird auch dann noch ein zweites Maximum (u_{-1}) eingelassen werden, wenn

$$-\sin u_{-1} \leqq \sin U\,, \quad \text{wegen} \quad u_0 = U \quad \text{und (40)} \tag{43}$$

$$C \leqq 2 \sin U\,, \tag{43a}$$

$$e \geqq \lambda/2 \sin U = \lambda_0/2n \sin U = \lambda_0/2a\,. \tag{43b}$$

Ferner sieht man, daß nur eine endliche Anzahl Maxima überhaupt zustande kommt, da bei $\sin u_k > 1$ für u_k ein imaginärer Wert erhalten wird. Damit für senkrechten Einfall überhaupt außer dem Hauptmaximum noch je ein Nebenmaximum auf jeder Seite entsteht, muß

$$-\sin u_{-1} = \sin u_1 \leqq 1 \tag{42c}$$

sein, woraus

$$e \geqq \lambda = \lambda_0/n \tag{42d}$$

folgt. (42d) ist ein Sonderfall von (42b) für den Fall, daß die Öffnung des Mikroskopobjektives einen Winkel von 180° hat ($\sin U = 1$). Ebenso ergibt sich ein Sonderfall von (43b)

$$e \geqq \lambda/2 = \lambda_0/2n\,; \tag{43c}$$

bei streifendem Einfall kommt nur unter dieser Bedingung ein Nebenmaximum auf einer Seite zustande und bedarf eines Öffnungswinkels von 180°, um eingelassen zu werden.

Sind die Bedingungen (42b) oder (43b) nicht erfüllt, so kommt entweder kein Nebenmaximum zustande, oder es wird doch keins in die Öffnung des Objektivs eingelassen, man sieht in der Brennebene nur das Hauptmaximum.

172. Die sekundäre Abbildung. Diese Erscheinung in der hintern Brennebene des Objektivs verursacht nun in der Bildebene die Lichtverteilung, die durch das Okular beobachtet wird. Da die verschiedenen Spektren der FRAUNHOFERschen Beugungserscheinung von derselben Lichtquelle herrühren und daher kohärente Schwingungen liefern, so handelt es sich in der Bildebene um eine Interferenzerscheinung, und es ist die Frage, ob diese Erscheinung als Wiedergabe des Gegenstandes angesehen werden kann. Dazu muß sie im vorausgesetzten Falle wieder ein Gitter bilden, das aber gegen den Gegenstand mit $\beta = -\mathfrak{x}'/f'$ vergrößert sein muß.

Die Beugungserscheinung in der Brennebene $P'_{-2}, \cdots P'_2$ bringe im Punkte O'_0 der Bildebene (Abb. 213); beispielsweise ein Maximum hervor, in einem

naheliegenden Punkte O'_I wird jedenfalls die gleiche Lichtwirkung entstehen, wenn die Unterschiede der Lichtwege

$$P'_{-2}O'_I - P'_{-1}O'_I, \quad P'_{-1}O'_I - P'_0O'_I, \quad P'_0O'_I - P'_1O'_I, \quad P'_1O'_I - P'_2O'_I$$

sich von den entsprechenden

$$P'_{-2}O'_0 - P'_{-1}O'_0, \quad P'_{-1}O'_0 - P'_0O'_0, \quad P'_0O'_0 - P'_1O'_0, \quad P'_1O'_0 - P'_2O'_0$$

um eine Wellenlänge oder um ganze Vielfache der Wellenlänge λ_0 unterscheiden.

Nun kann man setzen:

$$P'_0O_0'^2 = L_0O_0'^2 + L_0P_0'^2 = \mathfrak{z}'^2 + d^2$$

(d Abkürzung).

Eine Entwicklung gibt:

$$P'_0O'_0 = \mathfrak{z}' + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{\mathfrak{z}'} - \frac{1}{8}\cdot\frac{d^4}{\mathfrak{z}'^3} + \cdots$$

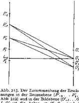


Abb. 213. Der Zusammenhang der Erscheinungen in der Brennebene ($P'_{-2} \ldots P'_2$, s. Abb. 212) und in der Bildebene ($O'_{-I} \ldots O'_I$). $L_0O'_0$ ist die Achse, in O'_I, O'_{-I} sind die Phasendifferenzen für zwei aufeinanderfolgende Maxima P'_0, P'_{-1} von denen in O'_0 um λ_0, in Q'_0 um $\lambda_0/2$ verschieden.

Nun ist $\mathfrak{z}'$ der Abstand von Bild- und Brennebene, etwa 160 mm, d kann höchstens (wenn O'_0 und P'_0 auf entgegengesetzten Seiten lägen) gleich der Summe der Halbmesser von Bild und Blende sein. In den üblichen Mikroskopen ist der eine höchstens 10 mm, der andere vielleicht 4 mm. Setzt man diese Werte ein, so erkennt man, daß das dritte Glied etwa von der Größenordnung der Wellenlänge ist, die höheren Glieder gegen diese vernachlässigt werden können.

Ebenso wird:

$$P'_{-1}O_0'^2 = L_0O_0'^2 + L_0P_{-1}'^2 = \mathfrak{z}'^2 + (d+\eta)^2 \text{ [}\eta \text{ siehe Gleichung (41) und (41a)]},$$

$$P'_{-1}O'_0 = \mathfrak{z}' + \frac{1}{2}\frac{(d+\eta)^2}{\mathfrak{z}'} - \frac{1}{8}\frac{(d+\eta)^4}{\mathfrak{z}'^3},$$

$$P'_{-1}O'_0 - P'_0O'_0 = \frac{d\eta}{\mathfrak{z}'} + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\mathfrak{z}'} - \frac{1}{8}\Delta^{(3)},$$

wo $\Delta^{(3)}$ zur Abkürzung des dritten Gliedes dient.

Die entsprechenden Werte für P'_1 erhält man, wenn man d durch $d + e'$ ersetzt, wo $e' = O'_0O'_1$; e' ist aber als kleine Größe vorausgesetzt (praktisch: Bild eines Gitterteils). Alsdann kann man aber annehmen, daß das dritte Glied ungeändert bleibt, und man hat:

$$P'_{-1}O'_I - P'_0O'_I = \frac{d+e'}{\mathfrak{z}'}\eta + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\mathfrak{z}'} - \frac{1}{8}\Delta^{(3)}.$$

Der Unterschied dieser beiden Größen ist also $e'\eta/\mathfrak{z}'$; den gleichen Wert erhält man für den Unterschied zwischen $P'_0O'_I - P'_1O'_I$ und $P'_0O'_0 - P'_1O'_0$ usf., ist also:

$$e'\eta/\mathfrak{z}' = \lambda_0, \tag{44}$$

so muß in O'_I dieselbe Helligkeit erscheinen wie in O'_0. Setzt man hier aus (41a) den Wert für η ein, so erhält man:

$$e' = \lambda_0\mathfrak{z}'/\eta = -e\mathfrak{z}'/f' = \beta e, \tag{45}$$

d. h. in der Bildebene kehrt die Lichtverteilung der Dingebene βfach vergrößert, wenigstens in großen Zügen, wieder, d. h. insofern eine periodische Lichtverteilung besteht; damit ist nicht gesagt, daß sie auch im einzelnen übereinstimmen müßten, etwa in bezug auf die Breite der hellen (durchsichtigen) und dunkeln (undurchsichtigen) Stäbe, in bezug auf die Stärke der Helligkeits- (Durchsichtigkeits-) Unterschiede usf.

173. Das Auflösungsvermögen. Eine solche rohe Wiedergabe wird aber auch offenbar noch erzielt, wenn nur zwei der Maxima P mitwirken, weitere überhaupt nicht entstehen oder durch die Öffnung abgeblendet werden. In diesem Falle liegt in der Mitte zwischen zwei Maximis ein Minimum; für $O_0' Q_0' = e'/2$ wird der Phasenunterschied um $\lambda_0/2$ anders als für O_0'.

Wirkt dagegen nur das sog. Hauptmaximum, das ungebeugte Licht, so kann kein Wechsel zwischen Helligkeit und Dunkelheit im Gesichtsfelde der Bildebene entstehen, und daraus ergibt sich für die Auflösbarkeit des Gitters bei senkrechter Beleuchtung:

$$e \geqq \lambda_0/\alpha; \qquad (42b)$$

bei möglichst schiefer Beleuchtung hingegen:

$$e \geqq \lambda_0/2\alpha. \qquad (43b)$$

174. Die Wirkung weißen Lichtes. In Wirklichkeit wird nicht einfarbiges, sondern in der Regel weißes Licht verwandt Aus (45) geht hervor, daß die Abstände e' unabhängig von der Wellenlänge sind, falls kein Farbenunterschied der Vergrößerung besteht. Ebenso kann die Lichtquelle, statt ein unendlich ferner Punkt zu sein, eine große Ausdehnung haben; man kann sie sich dann aus vielen Lichtquellen von kleiner Ausdehnung zusammengesetzt denken. Jeder dieser Teillichtquellen ruft in der Ebene $P_{-2}' \ldots P_2'$ ein Hauptmaximum P_0' und eine Anzahl Seitenmaxima P_1' usf. hervor, dabei liegt für jede Teillichtquelle P_0' an einem andern Orte, aber nach (41a) sind die Abstände $P_0' P_1'$ usf. dieselben. Die verschiedenen Teillichtquellen wie die verschiedenen Farben sind nach den Grundsätzen der physikalischen Optik inkohärent und addieren sich daher einfach zueinander, so daß jedenfalls die Gittergestalt roh erhalten bleibt.

175. Eine andere Darstellung nach ABBE. Genauer läßt sich der Hergang der Abbildung noch durch eine andere ABBEsche Darstellung erkennen[1]). Beschränkt man sich zunächst auf die Dingseite, so kann man bei einem Lichtpunkte die Wirkung des Gefüges des Gegenstandes sich so dargestellt denken, daß man im Unendlichen statt einer Lichtquelle die durch die Gleichung (40) dargestellten kohärenten Lichtquellen setzt. Diese wirken nach Fortnahme des Gegenstandes im hintern Raume ebenso wie der Lichtpunkt mit dem Gegenstande, und dies bleibt auch bestehen, wenn das Licht durch eine Linsenfolge hindurchgeht. Nun ist an den Stellen $O_0, O_1 \ldots$ größter Durchsichtigkeit ein Maximum der Helligkeit, die fingierten Lichtquellen müssen dies



Abb. 214. Die Erklärung der Abbildung im Mikroskop (mit Hilfe der fingierten Lichtverteilung $P_1 P_0 P_{-1}$ (in weiter Entfernung anzunehmen). Nach L. DIPPEL.

OO ist die Dingebene, $O_1 O_0 O_{-1}$ der Gegenstand, $P_{-1}' P_1'$ die Brennebene, $O_{-1}' O_1'$ das Bild.

[1]) L. DIPPEL (s. Fußnote S. 503), S. 134.

also ebenfalls hervorbringen; von O_0 zum Bildpunkte O' sind bei gehobenen Abweichungen die Lichtwege aller Strahlen gleich, also ist das Zusammenwirken dort in gleicher Weise ein Maximum wie in O_0. Dasselbe gilt von O'_1 usf. Werden nun die äußeren „Lichtquellen" durch die Linsenfolge abgeblendet und bleiben etwa noch die nächsten am Hauptmaximum übrig, so können nur diese noch interferieren, es wird nur noch ein rohes Übereinstimmen vorliegen, das aber unabhängig von der Lage der Lichtquelle P_0 ist; hat man infolgedessen eine ausgedehnte Lichtquelle, so werden sich eine Anzahl gleicher Bilder übereinanderlagern, ohne zu interferieren. Inwieweit sich die Folgerungen ändern, wenn die optischen Fehler des Objektivs nicht völlig gehoben sind, soll noch besprochen werden.

176. Versuche ABBES zur Prüfung der Theorie. Daß in der Tat diese Auffassung von der Entstehung des Bildes eines nicht selbstleuchtenden Körpers die richtige sei, hat ABBE durch Versuche zu bestätigen gesucht.



Abb. 215. Der Versuch zur Bestätigung der ABBEschen Theorie der Bilderzeugung im Mikroskop. (Nach M. v. ROHR.)

a und c sind zwei Gitter, von denen das zweite doppelt so fein ist wie das erste. Läßt man durch a Licht auf ein Mikroskopobjektiv fallen, so tritt in der Brennebene die Beugungserscheinung b auf, entsprechend gehört zu c die Erscheinung d. Im Mikroskop sieht man die Beugungsbilder, die den Gegenständen a und b mehr oder weniger konform sind. Blendet man unten im ersten Falle die beiden Spektren I in der Brennebene ab, so daß eine Erscheinung e, wie d übrig bleibt, so sieht man ein Gitter f von doppelter Feinheit, von c nicht zu unterscheiden.

Man beleuchte wieder durch ein enges Lichtbündel in der Richtung der Achse, das Gitter sei gröber als (42b) verlangt, etwa so, daß $e = 2\lambda_0/\alpha$ oder etwas größer ist. Es sind dann in der hintern Brennebene des Objektivs außer dem Hauptmaximum auf jeder Seite zwei Beugungsspektren zu sehen (Abb. 215) (P'_{-2}, P'_{-1}, P'_0, P'_1, P'_2); die Abstände von der Mitte sind nach (41a)

$$f'\lambda_0/e = f'\alpha/2 \text{ für } P'_{-1} \text{ und } P'_1,$$
$$2f'\lambda_0/e = f'\alpha \text{ für } P'_{-2} \text{ und } P'_2.$$

Blendet man nun durch einen Ring die beiden Spektren P'_{-1} und P'_1 ab, so wirken P'_{-2} P'_0 P'_2 allein, und es entsteht daher in der Bildebene eine Erscheinung, wie sie einem Gefüge des Gegenstandes entspricht, das nur diese drei Maxima hervorbringen würde. Das wäre aber nach (41a) ein Gitter, dessen Abstände $e = \lambda_0/\alpha$ wären. In dieser Weise kann man in der Tat ein doppelt so feines Gitter erscheinen lassen, als tatsächlich vorliegt. — Dasselbe könnte man erreichen, wenn man das Gitter so eng nimmt (oder die Apertur so klein), daß nur die Maxima P'_{-1} P'_0 P'_1 in der Brennebene zu sehen sind, und dann P'_0 abblendet.



Abb. 216. Die Beugungserscheinung durch ein Kreuzgitter (nach CZAPSKI-EPPENSTEIN).

Noch in einem Falle hat ABBE gezeigt, daß bei geeigneter Abblendung Zeichnungen gesehen werden können, die im Gegenstande nicht vorhanden sind. Man habe ein Doppelgitter, etwa quadratisch, aus senkrechten und wagerechten hellen Linien. Die FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung hat, bei Beschränkung auf die ersten Maxima, etwa das Aussehen von Abb. 216. Blendet man alles, bis auf das Hauptmaximum und die acht nächstliegenden Spektren, ab, so erhält man noch ein nahezu richtiges Bild des Gegenstandes. Läßt man

aber nur die in der wagerechten Linie liegenden Spektren übrig, so sieht man nur die senkrechten Gitterstäbe und entsprechend. Man kann aber auch alle Maxima bis auf die in einer Diagonale liegenden abblenden, dann sieht man ein einfaches Gitter, dessen Stäbe in der dazu senkrechten Diagonale verlaufen; da der Abstand der Maxima in der Diagonale $\sqrt{2}$mal so groß ist als in der wagerechten und senkrechten Richtung, so ist das scheinbare Gitter $\sqrt{2}$mal so eng[1]).

Teilt man eine dünne Platte so in eine obere und untere Hälfte, daß beide Gitter von gleicher Feinheit tragen, das Verhältnis der durchsichtigen zu den undurchsichtigen Teilen aber reziprok, etwa oben 3 : 1, unten 1 : 3 ist, so geben diese Gitter Beugungsspektren, die sich nur durch das „ungebeugte Licht" unterscheiden, während alle seitlichen Spektren völlig übereinstimmen. Blendet man nun in der Brennebene das Hauptmaximum ab, so ist die Erscheinung in der Bildebene für beide Hälften so übereinstimmend, daß man bei sorgfältiger Ausführung des Versuchs die Grenzlinie nicht mehr erkennen kann[2]).

Über die Änderung des Aussehens kleiner Einzelheiten bei verschiedener Abblendung vergleiche man die Darstellung und die Abbildungen von H. SIEDENTOPF[3]).

177. Andere Beispiele für die Beugungstheorie ABBES. Die nutzbare Vergrößerung. Außer den Gittern sind — beispielsweise von Lord RAYLEIGH in den Ziff. 182 angeführten Abhandlungen — andre Anordnungen, wie zwei einzelne Spalte, Punktepaare, theoretisch untersucht worden, und man ist stets zu einer ähnlichen Grenze gelangt, wie Gleichung (43b) angibt — nicht etwa in allen Fällen zum nämlichen Betrage, aber stets zu einem nicht sehr verschiedenen. Daß auch bei unregelmäßigem Gefüge Einzelheiten bis zu der nämlichen Größe herunter erkennbar sein werden (nicht etwa nur sichtbar, s. Ultramikroskopie), hat ABBE oft betont. Man kann also die Regel aufstellen: Bei einem Objektiv von der Apertur a kann man höchstens Einzelheiten von der Größe $\lambda_0/2a$ erkennen, wie stark man auch die Vergrößerung nehmen mag; es hat also keinen Zweck, sie mehr zu steigern, als bis Strecken von dieser Größe deutlich erkennbar sind oder bis die scheinbare Größe — nach Gleichung (3)

$$\mathfrak{y} \cdot V = \lambda_0 V/2a$$

einen gewissen Wert s erreicht. Obgleich man nun für $s = 1'$ die Strecke sieht, ist eine Größe von $2'$ zum deutlichen Erkennen nötig, eine von $4'$ noch vorteilhaft, darüber hinauszugehen, hat keinen Zweck. Man kann also sagen, daß man

$$2' < \lambda_0 V/2a < 4'$$

machen soll, oder auch, wenn man $\lambda_0 = 0{,}00055$ mm (Durchschnitt des Tageslichts), $V = \mathfrak{N}/(250\text{ mm})$ setzt,

$$2' < 11 \cdot 10^{-7}\,\mathfrak{N}/a < 4'.$$

Hier ist das mittlere Glied in Bogenmaß (Teilen des Halbmessers) ausgedrückt; will man Bogenminuten haben, so muß man mit 3437,75 multiplizieren und hat dann

$$2 < 3{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathfrak{N}/a < 4,$$

---

[1]) S. auch die Wiederholung der ABBEschen Versuche ohne Mikroskop durch A. WINKELMANN, Zur Demonstration der ABBEschen Theorie des Mikroskopes. Ann. d. Phys. (4) Bd. 19, S. 416—420. 1906; vgl. CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 482—483.

[2]) L. DIPPEL (s. Fußnote S. 503), S. 156.

[3]) H. SIEDENTOPF, Über das Auflösungsvermögen der Mikroskope bei Hellfeld- und Dunkelfeldbeleuchtung. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 32, S. 1—42. 1915. (Der erste Abschnitt kommt in Frage.) Vgl. CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 483—484.

wofur man, da es sich nur um eine Schatzung handelt, setzen kann:

$$500\,a < \mathfrak{N} < 1000\,a. \tag{46}$$

Die Vergrößerung über das 1000fache der Apertur zu steigern, hat keinen Zweck, eine solche „leere" Vergrößerung zeigt nichts Neues. Andrerseits braucht man bei einer vorgeschriebenen Vergrößerung die Apertur nicht über $\mathfrak{N}/500$ zu steigern, höchstens kann es fur die Helligkeit von Vorteil, für die Fehlerhebung, den Dingabstand von Nachteil sein[1]).

178. Zusammenfassung. Aus den vorhergehenden Betrachtungen erkennt man:

1. Den Vorteil des größern Öffnungswinkels oder vielmehr der größern Apertur $n \sin U$;

2. den Vorteil der schiefen Beleuchtung [vgl. (42b) und (43b)];

3. den Vorteil der Immersion. Mit Trockensystemen kann $a = n \sin U$ höchstens bis nahezu 1, mit Wasserimmersionen ($n = 1{,}33$) etwa 1,2, mit Zedernholzöl ($n = 1{,}52$) bis etwa 1,4, mit Monobromnaphthalin ($n = 1{,}66$) bis etwa 1,6 sein. Im umgekehrten Verhältnis nimmt die Größe der auflösbaren Einzelheiten ab, bei Anwendung von Tageslicht hat man aus 43b):

$$\begin{aligned} a &= {}^1/_2 \quad e \geqq 550\,\mu\mu \\ a &= 1 \quad\; e \geqq 275\,\mu\mu \\ a &= 1.4\; e \geqq 196\,\mu\mu \\ a &= 1.6\; e \geqq 172\,\mu\mu \end{aligned}$$

4. den Vorteil ultravioletten Lichtes. Infolge der kleineren Wellenlange kann man bis auf die Halfte heruntergelangen, freilich nicht durch Beobachtung mit dem Auge, sondern nur durch die Mikrophotographie s. Ziff. 213;

5. die Grenzen der mikroskopischen Wahrnehmung überhaupt und die Zwecklosigkeit ubermaßiger Vergroßerungen.

179. Andere Arten von Gegenständen. Es ist bisher angenommen worden, daß die verschiedenen Teile des Gegenstandes sich nur durch verschiedene Durchlässigkeit unterscheiden. Es ist indessen auch denkbar, daß ihr Brechungsverhaltnis verschieden ist. Dies wird dahin führen, daß beim Durchgang durch die, wenn auch dünne Schicht, Phasenunterschiede auftreten, die die FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung und das Interferenzbild auch beeinflussen. Es sind auch diese Unterschiede im Mikroskop erkennbar. Doch hat ABBE darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Unterschied auf Beleuchtungsbündel verschiedener Neigung ganz verschieden wirken musse und daher bei Beleuchtung mit weitem Bündel verschwinden werde. Infolgedessen empfiehlt ABBE eine solche Beleuchtung nur in Sonderfällen und rät für die Regel zu engen Bündeln; entgegengesetzte Meinungen gründen sich auf die in Ziff. 182 angeführten Untersuchungen.

180. Gegenstände von unregelmäßigem Gefüge. Endlich hat ABBE auch auf den Unterschied zwischen regelmäßiger und unregelmäßiger Gestaltung des Gegenstandes hingewiesen. Bei der ersten ist das Licht nach dem Durchgange in deutlich voneinander getrennte Bündel gespalten, bei denen man eins als das „ungebeugte Licht" von den übrigen unterscheiden kann. Daher kann, auch bei mangelhafter Fehlerhebung, eine einigermaßen gute Darstellung des Gegenstandes entstehen, wenn nur die in Betracht kommenden Bündel so liegen, daß sie zusammenwirken; und ein solches Zusammenwirken kann sogar nicht nur in der Bildebene, sondern auch in andern Ebenen erfolgen (s. Ziff. 184). Da dies aber stets nur Sonderfälle sind, kann von der Forderung guter Hebung der Fehler nichts abgelassen werden.

[1]) Siehe E. ABBE, Bd. I, S. 400—406; CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 487—489.

181. Die allgemeine Theorie ABBES. Ihre weitere Entwicklung. Das Vorstehende ist etwa die von ABBE zu seinen Lebzeiten verbreitete Darstellung. Es soll nun angeführt werden, welche Ergänzungen und Einwendungen im Laufe der Zeit zu ihr gemacht worden sind.

Die allgemeine Theorie der Abbildung nicht selbstleuchtender Körper hat ABBE in seinen Vorlesungen vorgetragen, die in bearbeiteter Form nach seinem Tode herausgegeben worden sind[1]). Durch die Beugung am Gegenstande wird das beleuchtende Bündel „zerklüftet", und diese Wirkung kann man wie folgt darstellen: Man ersetze die Lichtquelle und den Gegenstand (der als flächenhaft vorzustellen ist) durch eine andere Lichtquelle, die für sich allein in der Gegenstandsfläche die nämliche Wirkung nach Phase und Amplitude hervorbringt, die in ihr tatsächlich vorhanden ist. Durch die Gegenstandsfläche ist die Wirkung im hinter ihr liegenden Raume völlig bestimmt, d. h. die gedachte Lichtquelle bringt überall dieselbe Wirkung hervor wie der tatsächliche Gegenstand. Dies ändert sich auch nicht, wenn durch eine Linsenfolge eine Abbildung erzeugt wird — und bei fehlerfreier Abbildung muß die im Gegenstand vorhandene Lichtverteilung in der Bildebene wiedergegeben werden.

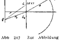


Abb. 217. Zur Abbildung eines nichtselbstleuchtenden Gegenstandes von beliebigem Gefüge. LL_0 ist die Dingebene, der Dingpunkt L hat die Koordinaten XY. Q ist die Lichtquelle, ihr Zusammenwirken mit dem Gegenstande wird durch eine fingierte Lichtverteilung auf der Hilfskugelfläche (rechts) ersetzt.

Mathematisch stellt sich die Sache wie folgt dar[2]):

Es sei der Punkt Q die Lichtquelle (Abb. 217), $L_0 L$ der Gegenstand, der als eben angenommen sei und nur einen verhältnismäßig kleinen Bezirk einnehme. Die Ersatzlichtquelle befinde sich auf einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Achsenpunkt des Gegenstandes L_0, deren Halbmesser e sei; ist e hinreichend groß, so kann man die Entfernung von der Kugelfläche für die Punkte des Gegenstandes als fest annehmen.

Die Kugelfläche (Zwischenfläche) ist hinter der Dingebene gezeichnet und also gewissermaßen eine Rückwärtswirkung angenommen, was mathematisch zulässig ist; man kann sie ebensogut wie früher durch den Lichtpunkt gehen lassen.

Die Koordinaten eines Punktes der Dingebene seien X, Y; die eines Punktes der Zwischenfläche ξ, η. Die Lichtbewegung in einem Punkte der Dingfläche kann allgemein ausgedrückt werden durch:

$$F(X, Y) = K \cdot \varphi(X, Y) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(X, Y)\right]^{3)}. \tag{47}$$

Hier drückt $\varphi(X, Y)$ die Wirkung der Lichtverschluckung des Gegenstandes aus; $\psi(X, Y)$, der Phasenunterschied, ist einmal von der Verzögerung der Wellen durch das verschiedene Brechungsverhältnis, aber auch von der Verschiedenheit der Strecken $QL_0 = r_0$ und $QL = r$ abhängig [wenn r nicht groß ist, würde das nämliche von $\varphi(X, Y)$ gelten].

Die für einen Punkt der Zwischenfläche anzunehmende Lichtverteilung ist von jedem Punkte des Gegenstandes abhängig. Sie muß also durch eine

[1]) Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop von ERNST ABBE. Bearbeitet und herausgegeben von OTTO LUMMER und FRITZ REICHE. Braunschweig: F. Vieweg 1910.

[2]) O. LUMMER u. F. REICHE, a. a. O. § 25.

[3]) Vgl. hierzu wie zu den folgenden Formeln außer dem Buche von O. LUMMER und F. REICHE auch den Abschnitt über Beugung im XX. Bande dieses Handbuchs.

Summierung oder bei stetiger Änderung im Gegenstand durch eine Integration über die Gegenstandsfläche (doppeltes Integral) dargestellt werden. Man setze $\xi/e = \xi'$, $\eta/e = \eta'$ und bilde:

$$f(\xi', \eta') = \frac{K}{\lambda^2} \iint\limits_{\text{Gegenst.}} dX\,dY\,\varphi(X, Y) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(X, Y) + \frac{\xi' X}{\lambda} + \frac{\eta' Y}{\lambda}\right], \tag{48}$$

so läßt sich zeigen, daß durch eine Lichtbewegung, wie sie diese Funktion auf der Zwischenfläche angibt, in einem Punkte der Dingebene x, y eine Lichtbewegung hergestellt wird, die durch das vierfache Integral zu kennzeichnen ist:

$$g(x, y) = \frac{K}{\lambda^2} \int_{-1}^{+1}\!\!\int d\xi'\,d\eta' \iint\limits_{\text{Gegenst.}} dX\,dY\,\varphi(X, Y) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(X, Y) - \frac{\xi'(x - X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y - Y)}{\lambda}\right], \tag{49}$$

da ξ', η' zwischen -1 und $+1$ liegen. Damit nun die Bewegung auf der Dingebene tatsächlich wiedergegeben ist, müßte

$$g(x, y) = F(x, y) \quad [\text{s. } (47)] \tag{50}$$

sein. Außerhalb des Gegenstandes aber

$$g(x, y) = 0. \tag{50a}$$

Mit Hilfe des FOURIERschen Lehrsatzes ist zu beweisen, daß beides der Fall wäre, wenn man die Grenzen für ξ', η' ins Unendliche ausdehnte, was jedoch unmöglichen Werten von ξ, η entspräche. Die Gleichungen (50) und (50a) sind also nur dann gültig, wenn die Funktion $f(\xi', \eta')$ für $\xi' > 1$ oder $\eta' > 1$ nur sehr kleine Werte annimmt. Dies ist der Fall, wenn $\varphi(X, Y)$, $\psi(X, Y)$ für verhältnismäßig, d. h. gegen λ, große Schwankungen von X, Y sich nicht stark ändern, also wenn die zu beobachtenden Einzelheiten grob sind. — Denkt man sich nun noch eine Blende hinzugefügt, so ist die Integration über ξ', η' noch weiter beschränkt, und jede Linsenfolge wird eine entsprechend gefälschte Abbildung liefern, so auch das Mikroskopobjektiv. — Bei den ABBEschen Versuchen, wo einzelne Zonen der Öffnung herausgeblendet sind, wären die Integrationsintervalle für ξ' und η' in mehrere getrennte Gebiete zerspalten. Die früher betrachteten Fälle von Gittern usf. lassen sich als Sonderfälle der Formeln (47) bis (49) behandeln.

182. Vergleich der Theorie für selbstleuchtende und für nicht selbstleuchtende Gegenstände. Bei der ABBEschen Lehre ist ein scharfer Unterschied zwischen selbstleuchtenden und nicht selbstleuchtenden Gegenständen gemacht worden; die schließliche Übereinstimmung, die doch zwischen der HELMHOLTZischen und der ABBEschen Grenze für das Auflösungsvermögen (s. Ziff. 169 und 171) besteht, erscheint als reiner Zufall. Als tiefgreifender Unterschied sind lange Zeit hindurch die unter Ziff. 176 angeführten Versuche angesehen worden; bei einem selbstleuchtenden Körper, meinte man[1]), könnten bei zu geringer Apertur Einzelheiten zwar verschwinden, nicht aber falsche Bilder vorgetäuscht werden.

Lord RAYLEIGH machte 1896[2]) darauf aufmerksam, daß beim ABBEschen Beleuchtungsverfahren, wenn die Linsenfolge ein vollkommenes Bild gäbe, jedem Punkte der Lichtquelle ein Punkt des Gegenstandes entsprechen und daher die Abbildung des Gegenstandes denselben Gesetzen folgen müßte, wie die

[1]) O. LUMMER u. F. REICHE (s. Fußnote 1, S. 511). S. 2.

[2]) Lord RAYLEIGH, On the theory of optical images, with special reference to the microscope. Phil. Mag. (5) Bd. 42, S. 167—195. 1896; Scient. Pap. by J. W. Strutt, Baron Rayleigh Bd. 4, S. 235—260.

eines Selbstleuchters. (Dagegen würde das KÖHLERsche Beleuchtungsverfahren den andern Fall ergeben.) Da freilich der Kondensor kein scharfes Bild gebe, verteile sich das Licht eines Punktes auf ein kleines Gebiet des Gegenstandes, so daß also das Nachbarpunkte beleuchtende Licht teilweise kohärent sei, ein eigentümlicher Zwischenfall. Ebenso nähere man sich auch dem Falle eines Selbstleuchters, wenn man mit einer weiten Öffnung beleuchte. Lord RAYLEIGH gab nun eine neue mathematische Darstellung beider Fälle[1]: Nach dem von HELMHOLTZ benutzten Verfahren (s. Ziff. 169) kann man für einen Dingpunkt und eine gegebene Linsenfolge mit gegebener Apertur für jeden Punkt x', y' der Bildebene nicht allein die Beleuchtungsstärke, sondern auch die Phase bestimmen; die Lichterregung ist in jedem Augenblick gekennzeichnet durch

$$\varphi = A(x', y') \cos 2\pi \left[t/T - f(x', y')\right], \tag{51}$$

die Beleuchtung ist dem Quadrat der Amplitude A proportional

$$J(x', y') = A^2. \tag{52}$$

Hat man nun mehrere selbstleuchtende Punkte, so werden diese unabhängig voneinander leuchten, und dabei addieren sich bekanntlich die Intensitäten, die jeder einzelne hervorbringt, man kann setzen

$$J(x', y') = \sum A^2; \tag{53}$$

ist der Gegenstand ein selbstleuchtender Körper, wo die Lichtstärke sich stetig ändert, so tritt an die Stelle der Summe ein Integral:

$$J(x', y') = \iint dx\, dy\, A^2(x, y;\ x', y'), \tag{53a}$$

wo x, y die Koordinaten im Gegenstande sind.

Ist dagegen der Gegenstand von einer Lichtquelle beleuchtet, so werden sich die Lichterregungen addieren und daher die Intensitäten sich in höherem Maße verstärken oder selbst gegenseitig vernichten können:

$$\varphi = \sum A(x', y') \cos 2\pi \left[t/T - f(x, y;\ x', y')\right], \tag{54}$$

oder

$$\varphi = \iint dx\, dy\, A(x, y;\ x', y') \cos 2\pi \left(t/T - f(x, y;\ x', y'\right); \tag{54a}$$

φ ist sodann in die Form zu bringen:

$$\varphi = A \sin\alpha + B \cos\alpha, \tag{55}$$

wo α von t, x', y' abhängt, und dann hat man:

$$J(x', y') = A^2 + B^2. \tag{55a}$$

RAYLEIGH und seine Nachfolger haben eine Anzahl Sonderfälle nach diesen Grundsätzen behandelt.

Nun ist aber der Phasenunterschied, wenn die Beleuchtung nur in einer Richtung auffällt, für alle Punkte x', y' der Bildebene derselbe[2]), und zwar bei senkrechtem Einfalle Null. Fällt die Beleuchtung unter dem Winkel u_1 und parallel zur XZ-Ebene ein (die Achse der Linsenfolge als Z-Achse angenommen), so ist die

[1]) Lord RAYLEIGH, Zum Teil im Anschlusse an frühere eigene Arbeiten: Investigations in optics, with special reference to the spectroscope. Phil. Mag. (5) Bd. 8, S. 261–274, 403 bis 411 u. 477–486. 1879; Scient. Pap. by J. W. Strutt, Baron Rayleigh Bd. 1, S. 415–459; Wave Theory. Encycl. Brit. XXIV, 1888; Scient. Pap. by J. W. Strutt, Baron Rayleigh Bd. 3, S. 47–189.

[2]) L. MANDELSTAM, Zur ABBEschen Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung. Ann. d. Phys. (4) Bd. 35, S. 881–897. 1911.

Phasenverzögerung gegenüber dem Koordinatenanfang $mx = 2\pi x \sin u_1/\lambda$. Man hat dann für die Lichterregung, die ein Dingpunkt x_i, y_i hervorruft:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A(x_i, y_i; x', y') \cos(\alpha - m x_i) \\ &= A(x_i, y_i; x', y') \cos\alpha \cos m x_i + A(x_i, y_i; x', y') \sin\alpha \sin m x_i \end{aligned}\right\}, \tag{56}$$

und wenn eine Anzahl Punkte zusammenwirken:

$$\varphi = \sum A(x', y') \cos\alpha \cos m x_i + \sum A(x', y') \sin\alpha \sin m x_i. \tag{56a}$$

Hier ist α für alle x derselbe Wert. Die Intensität folgt daraus zu

$$J_{u_1} = [\sum A(x', y') \cos m x_i]^2 + [\sum A(x', y') \sin m x_i]^2. \tag{56b}$$

Denkt man sich nun ein Beleuchtungsbündel mit allen möglichen Winkeln u_1, von $-U$ bis $+U$, d. h. eine ausgedehnte Lichtquelle, deren einzelne Punkte natürlich nicht kohärent sind, so muß man nach dem LAMBERTschen Gesetze setzen

$$J = \int J_{u_1} \cos u_1 \, d u_1. \tag{56c}$$

Es ist aber dm = konst. $\cos u_1 \, d u_1$, also

$$J = \int J_m \, dm. \tag{56d}$$

Man kann aber (56b) auch so schreiben:

$$J_{u_1} = \sum A^2 (x' y') + 2 \sum A(x_i, y_i; x', y') A(x_k, y_k; x', y') \cos m (x_i - x_k).$$

Bei der Integration wird nun das letzte Glied verschwinden, wenn $m(x_i - x_k) = 2\pi(x_i - x_k) \sin U/\lambda$ eine große Zahl ist, da alsdann der Kosinus im Integrationsgebiet oft das Zeichen wechselt. Unter dieser Voraussetzung wird der Wert für den beleuchteten Gegenstand gleich dem für den Selbstleuchter (53). Die Bedingung ist also, daß die Beleuchtung aus allen möglichen Richtungen erfolgt; MANDELSTAM verallgemeinert diesen Satz auch für stetig veränderliches Gefüge des Gegenstandes. Mit engem Beleuchtungsbündel kann man eine scheinbare Verdoppelung eines Gitters erzielen, indem man in der Brennebene jedes zweiten Spektrums abblendet. Wählt man die Blende so, daß die Breite der Öffnungen kleiner ist als die der undurchsichtigen Streifen, so wird bei jeder Neigung u_1 entweder alles Licht oder jedes zweite Spektrum abgeblendet; es muß also für ein weites Beleuchtungsbündel $-U$ bis $+U$ die Verdoppelung eintreten, weil sie für jede überhaupt mitwirkende Beleuchtungsrichtung eintritt. Da bei weitem Lichtbündel der Selbstleuchter ebenso wirkt, so muß in diesem Falle ein Gitter glühender Drahte also auch die ABBEsche Erscheinung bieten. Diese seine Folgerung hat MANDELSTAM bestätigt, indem er mit der WINKELMANNschen Anordnung (Ziff. 176 Anm. 1) einen Glühstrumpf beobachtete, der beleuchtet oder zum Glühen gebracht wurde. die Verdoppelung konnte in beiden Fällen beobachtet werden, natürlich waren helle und dunkle Stellen miteinander vertauscht.

M. v. LAUE schloß in verschiedenen Arbeiten aus dem KIRCHHOFFschen Gesetz[1]), daß wenn der Körper allseitig beleuchtet wird und gleichzeitig selbst leuchtet, er bei Temperaturstrahlung gänzlich verschwinden muß, wie sich auch beobachten läßt. Die beiden Bilder sind also komplementär zueinander wie im MANDELSTAMschen Versuche.

[1]) M. v. LAUE, Zur Theorie der optischen Abbildung. Ann. d. Phys. (4) Bd. 43, S. 165 bis 168. 1914. Über optische Abbildung, Naturwissensch. Bd. 2, S. 757—760. 1914. Wellenoptik, Enzykl. der math. Wissensch. Bd. V, 3. 24, erschienen 1915, bes. S. 445—450.

Immerhin ist diese Beziehung nur in Grenzfallen richtig, die Meinung M. BEREKS, daß der Unterschied zwischen den Fällen des Selbstleuchters und des Nichtselbstleuchters praktisch wenig bedeute, ist noch strittig[1]).

183. Weitere Ableitungen von LORD RAYLEIGH. Lord Rayleigh hat die analytische Form für die Werte $A(x', y')$ angegeben. Nimmt man zunächst an, daß die Öffnung nicht kreisförmig, sondern rechteckig sei, und der Gegenstand eine helle etwa in der Y-Achse verlaufende Linie, so hat man

$$A_0(x') = C \cdot \frac{\sin 2\pi a x'/\lambda}{2\pi a x'/\lambda} = C \frac{\sin u}{u}, \qquad J_0(x') = A^2,$$

wo a die Apertur ist. Für den Fall eines leuchtenden Punktes in $y = 0$ gilt dasselbe wenigstens für die Punkte der X-Achse.

Wenn eine zweite Linie im Abstande x_1 von der Y-Achse mitwirkt, so ist für sie

$$A_1(x') = C \sin \frac{2\pi a (x' - x_1')/\lambda}{2\pi a x'/\lambda}, \qquad J_1(x') = A_1^2. \tag{57}$$

Fur zwei selbstleuchtende Linien hat man einfach

$$J = J_0 + J_1 = C \left[\frac{\sin^2 u}{u^2} + \frac{\sin^2 (u - u_1)}{(u - u_1)^2}\right], \tag{57a}$$

wahrend im Falle nicht selbstleuchtender Linien die Wirkung verschieden sein kann; bei senkrechter Beleuchtung ist $A = A_0 + A_1$, $J = A_0^2 + 2 A_1 A_0 + A_1^2$, wogegen bei bestimmter Schiefe $A = A_0 - A_1$ sein kann. Bei Gittern sind nicht zwei, sondern viele Lichterregungen zu addieren, RAYLEIGH stellt das Ergebnis als FOURIERsche Reihe dar.

Fur die kreisformige Öffnung tritt an die Stelle der trigonometrischen Funktion eine BESSELsche Funktion. Lord RAYLEIGH hat gezeigt, wie die ABBEsche Theorie der Auflosbarkeit auch durch sein Rechenverfahren bestätigt wird. Die Verdoppelung des Gitters durch passende Wahl der Öffnungen läßt sich bei selbstleuchtenden ebenso wie nicht selbstleuchtenden Gegenstanden rechnerisch ableiten, was RAYLEIGH freilich nicht ausgeführt hat.

184. Der Einfluß der Einstellungs- und der Abbildungsfehler. Arbeiten von STREHL. Es ist bisher angenommen, daß die Abbildung im Sinne der geometrischen Optik ohne Fehler erfolgt, und daß das Okular genau auf das Zwischenbild eingestellt ist. Über die Änderung der Gesetze, die durch Nichterfullung dieser Bedingungen eintreten, mag man die Abhandlungen von K. STREHL[2]) vergleichen. Denkt man sich die Erscheinung nicht in der Ebene des Zwischenbildes, sondern in einer benachbarten aufgefangen (Okular und Auge falsch eingestellt), so können falsche, selbst entgegengesetzte Lichtverteilungen herauskommen. Für regelmäßiges Gefüge kehrt bei einfarbiger Beleuchtung, wenn man die Auffangebene verschiebt, periodisch dieselbe Erscheinung wieder. [Dies ließe sich aus der DIPPELschen Ableitung (Ziff. 175) folgern.] Bei Beleuchtung mit weißem oder sonst zusammengesetztem Lichte wird die Wiederholung undeutlich, da die Periode der Wellenlänge proportional ist. Nach M. WOLFKE[3]) stecken auch in

[1]) Man vergleiche die Abhandlungen von M. BEREK: Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 45, S. 143—144. 1924; ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 41, S. 1—15. 1924; verschiedene Aufsatze in der ZS. f. Phys. Bd. 36—40, 1926; sowie die Zusammenfassung: Entwicklung und gegenwärtiger Stand der Lehre von der Abbildung im Mikroskop. Marb. Sitzungsber. Bd. 61, S. 251—282. 1927.

[2]) Die in Betracht kommenden Abhandlungen sind angeführt: CZAPSKI-EPPENSTEIN S. 728—729, früher von STREHL selbst: Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 28, S. 40—41. 1907; ebenda Bd. 41, S. 409—410. 1920.

[3]) M. WOLFKE, Allgemeine Abbildungstheorie selbstleuchtender und nicht selbstleuchtender Objekte. Ann. d. Phys. (4) Bd. 39, S. 569—610. 1912.

der Ableitung noch Vernachlässigungen, so daß auch bei einfarbigem Lichte die Erscheinung sich nicht bloß verschieben oder beliebig wiederholen wird.

Für die Farbenabweichung, die sphärische Abweichung und die sonstigen Fehler gibt STREHL einige Ableitungen, die zeigen, wie durch die eintretenden Veränderungen der Wellenfläche der Ort der besten Einstellung verändert und die Lichtverteilung selbst beeinflußt wird. Die Wichtigkeit einer Hebung des Zonenfehlers, der Koma tritt hervor. Für den Zonenfehler gibt STREHL einen Maximalwert an, der ohne Verschlechterung des Bildes zulässig ist, und untersucht ein besonderes Mikroskopobjektiv genau auf seine Güte[1].

c) Mikroskope zu besonderen Zwecken.

α) Meßmikroskope.

185. Allgemeine Bedingungen für Meßmikroskope. Eine mannigfaltige Verwendung finden Lupen und Mikroskope bei Messungen. Der bekannteste Fall ist wohl die Ablesung von Teilungen, seien es Längen-, seien es Gradskalen. Häufig wird hier eine Lupe genügen; zusammengesetzte Einrichtungen, die zwischen Mikroskop und Fernrohr in der Mitte stehen, werden beispielsweise in dem Ziff. 122 erwähnten Falle benutzt, wo man sich der Teilung nicht beliebig nähern kann.

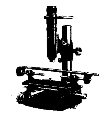


Abb. 218. Das Werkstattmeßmikroskop (nach O. EPPENSTEIN).

Bei Ausmessung kleiner Gegenstände unter dem Mikroskop vergleicht man die Dimensionen mit einem Mikrometer, das (für ein rechtsichtiges Auge) in der Brennebene des Okulars angebracht ist. Das Mikrometer kann in einer Teilung auf Glas bestehen, deren Striche etwa 0,1 mm oder 0,01 mm voneinander entfernt sind. Zur Messung muß man die lineare Vergrößerung des Objektivs kennen, man kann sie durch eine Vergleichung des Mikrometers mit einer durch das Mikroskop beobachteten Teilung bestimmen, wodurch auch eine etwaige Verzeichnung erkannt und unschädlich gemacht werden kann. Das Okular vergrößert den Gegenstand und die Mikrometerteilung in gleicher Weise.

Meist wird man die RAMSDENsche oder die ähnliche KELLNERsche Form des Okulars benutzen. Bei der HUYGENSschen Form gehört das Okularmikrometer in die Brennebene der Augenlinse, wo auch bei richtiger Einstellung für ein rechtsichtiges Auge die Folge Objektiv + Feldlinse das Bild des Gegenstandes entwirft, und die Vergrößerung dieser Folge kommt in Frage.

[1] K. STREHL, Untersuchung eines Mikroskopobjektives. ZS. f. Instrkde. Bd. 25, S. 3 bis 10. 1905.

Statt der Teilungen werden auch wohl Fadenmikrometer verwandt; die einfachste Form besteht aus zwei Fäden, die auf die Enden der zu messenden Strecke gebracht werden, mindestens einer ist durch eine Schraube einzustellen, an der die Verschiebung abgelesen werden kann.

Bei allen diesen Messungen sollte nach E. ABBE[1]) der Strahlengang auf der Dingseite streng telezentrisch sein, was notigenfalls durch eine Blende in der hintern Brennebene des Objektivs zu erreichen ist. Nur dann ist die Vergrößerung unabhängig davon, ob der Gegenstand genau eingestellt ist; wenn es nicht sein sollte, erscheint er von unendlicher Entfernung aus auf die Einstellungsebene projiziert.

An Stelle der Mikrometerteilung kann bei Vorrichtungen zur Prüfung von Geräten an der Stelle des Zwischenbildes die „Sollform" auf eine Strichplatte angebracht werden. Ein Beispiel bietet die Prüfung von Gewinden mit Hilfe des Werkstattmeßmikroskops[2]) (Abb. 218 u. 219). Hier hat die Strichplatte Zeichnungen der Profile der üblichen Gewinde. Ist das Gewinde fehlerfrei, so müssen bei richtiger Einspannung seine Flanken sich mit der Zeichnung decken.

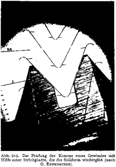


Abb. 219. Die Prüfung der Kimme eines Gewindes mit Hilfe einer Strichplatte, die die Sollform wiedergibt (nach O. EPPENSTEIN).

186. Die Beseitigung von Bildfehlern. Für Messungen ist bei etwas größerem Gesichtsfelde die Hebung der Bildfeldwölbung erwünscht. Diese läßt sich bei schwachen Mikroskopobjektiven durch Zusatz einer SMYTHschen Linse, einer in der Nähe der Bildebene angebrachten Zerstreuungslinse, erreichen. In vielen Fällen ist aber der Gegenstand eine Teilung, deren Striche einander parallel verlaufen. Das Gegebene ist in diesem Falle ein Objektiv besondrer Einrichtung, bei dem die tangentiale Bildfeldwölbung gehoben ist, ohne daß auf Hebung des Astigmatismus Wert gelegt zu werden braucht.

187. Die Messung größerer Gegenstände. Bei Messung größerer Gegenstände ist es nötig, entweder das Mikroskop oder den Gegenstand zu verschieben

[1]) E. ABBE, Über mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzungsber. d. Jenaer Ges. f. Med. u. Naturw. S. 11—17, Jahrg. 1878. Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 165—172.

[2]) SCHUCHARDT u. SCHÜTTE, Werkstatt-Meßmikroskope; O. EPPENSTEIN, Optische Messungen im Maschinen- und Gerätebau. — Wissenschaftl. Tagg. während der Kölner Messe. Meßgerät. Wissenschaftl. Vortr. am 30. Sept. und 1. Okt. 1925. Im Verlag des Messeamts Köln 1925, S. 45—59.

und die Verschiebung zu messen. Beim Werkstatt-Meßmikroskop kann das Gewinde zur Messung des Flankendurchmessers senkrecht, zur Messung der Steigung parallel zu seiner Achse verschoben werden. Beide Verschiebungen erfolgen durch Schrauben und können an ihnen abgelesen werden[1]).

In andern Fällen wird die Verschiebung des Gegenstandes oder des Mikroskops an einer Teilung bestimmt. Bei genauen Messungen ist grundsätzlich zu fordern[2]): „den Meßapparat stets so anzuordnen, daß die zu messende Strecke die geradlinige Fortsetzung der als Maßstab dienenden Teilung bildet" (Komparatorprinzip). Gehören beide Strecken verschiedenen Geraden an, so ist die Messung nur dann richtig, wenn die verschobenen Teile eine bloße Parallelverschiebung, keine Drehung ausführen, andernfalls ist sie um das Produkt aus dem Abstande der beiden Geraden und dem Drehungswinkel fehlerhaft. (Abb. 220). Die ersten diesen Grundsatz erfüllenden Vorrichtungen waren der Dickenmesser und der Komparator. Eine neue Einrichtung der Société Génevoise gibt Abb. 221[3]).

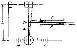


Abb. 220. Der Meßfehler bei Verletzung des Komparatorprinzips (nach O. EPPENSTEIN). Die zu messende Strecke ist in der oberen, die Teilung T in der unteren Ebene M. Der Abstand beider Ebenen ist L. $TrFF$ ist die Verschiebungsvorrichtung. Wird bei der Verschiebung um den Winkel w gekippt, so erhält man einen Meßfehler von $L \operatorname{tg} w$ oder, da w jedenfalls klein ist, von Lw.

Die Teilung s ist auf dem Schlitten C zu verschieben, das Ablesemikroskop M dagegen fest auf der Unterlage B. C wird zuerst so geschoben, daß die Flächen a_1 und a_2 sich berühren; dann wird der Gegenstand, beispielsweise ein Zylinder g, dessen Durchmesser bestimmt werden soll, hineingesetzt. Die Teilung wird beide Male mit dem Mikroskop abgelesen. Die Vorrichtung auf der rechten Seite hat den Zweck, dafür zu sorgen, daß der Druck, unter dem der Gegenstand bei den Messungen steht, immer derselbe ist. Die Maschine gestattet Messungen von einer Genauigkeit bis zu 0,0001 mm $= 0{,}1\,\mu$, die natürlich nur für Vergleichsstücke (Lehren) verlangt wird, mit denen Arbeitsstücke verglichen werden, was mit einfacheren Mitteln auszuführen ist.

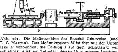


Abb. 221. Die Meßmaschine der Société Génevoise (nach L. C. MARTIN). Das Meßmikroskop M ist fest mit der Unterlage B verbunden, die Teilung s auf dem Schlitten C verschiebbar. g ist ein Zylinder, dessen Durchmesser bestimmt werden soll. Die Flächen a_1 und a_2 werden zunächst zur Berührung gebracht, und dann der Zylinder hineingesetzt. Die Teilung wird beide Male abgelesen. Die rechte Hälfte der Vorrichtung (A) dient zur Regelung des Drucks.

[1]) Über besondere Schwierigkeiten beim Messen von Gewinden vgl. man O. EPPENSTEIN, a. a. O. S. 51–52, sowie die frühere Arbeit desselben Verfassers: Über Fortschritte in der optischen Gewindemessung. ZS. f. Feinmech. Bd. 32, S. 115–117. 1924.

[2]) E. ABBE, Meßapparate für Physiker. ZS. f. Instrkde. Bd. 10, S. 446–448. 1890. Ges. Abhandlgn. Bd. II, S. 206–211; s. auch C. PULFRICH, Über einige von Prof. ABBE konstruierte Meßapparate für Physiker. ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 307–315. 1892.

[3]) L. C. MARTIN, Optical measuring instruments. Their construction, theory and use. S. 43. London: Blackie a. Son 1924.

188. Winkel- und Dickenmessungen. Zu Winkelmessungen, beispielsweise für Kristallographie, kann ein Mikroskop benutzt werden, dessen Tisch drehbar ist, indem man die Drehung an einer Teilung abliest[1]).

Dickenmessungen durchsichtiger Gegenstände sind mit Hilfe der Feinbewegung des Tubus möglich, indem man auf die Ober- und Unterseite einstellt und die zur Feinbewegung gehörende Teilung abliest; am zweckmäßigsten eicht man sie mit Hilfe bekannter Dicken[2]), es ist aber zu beachten, daß die Verschiebung vom Brechungsverhältnis des zu messenden Gegenstandes und von der Apertur abhängt. Die im folgenden Abschnitte besprochene Abbildungs- und Akkommodationstiefe können störend wirken, doch kann man die zweite dadurch unschädlich machen, daß man im Okular eine Marke (Mikrometer) anbringt und die Akkommodation darauf festhält.

β) Die Beobachtung von Gegenständen mit merklicher Tiefe. Das binokulare Mikroskop.

189. Die Akkommodationstiefe beim Mikroskop. Der Gegenstand ist bisher als flächenhaft angenommen. In Wirklichkeit hat er eine gewisse, wenn auch meist geringe Dicke, und es soll zunächst untersucht werden, inwieweit verschieden tief liegende Teile mit unveränderter Einstellung beobachtet werden können[3]).

Eine solche Beobachtung ist zunächst dadurch möglich, daß das Auge der Reihe nach auf verschiedene Entfernungen akkommodiert. Eine bestimmte Tiefe liege in der vorderen Brennebene des Mikroskops, so daß das rechtsichtige oder mit Fernbrille ausgerüstete Auge sie ohne Akkommodation scharf sieht. Der Nahpunkt des Auges habe die Entfernung von $-p$ mm, dann kann das Auge auch noch auf eine Tiefe $\mathfrak{x}$ akkommodieren, die in der Entfernung $-p$ abgebildet wird; es ist aber

$$-p = f f'/\mathfrak{x},$$

$$\mathfrak{x} = -f f'/p = n f'^2/p = n/p V'^2.$$

Führt man nun für V die Vergrößerungszahl $\mathfrak{N}$ ein: $V = \mathfrak{N}/250$, für p das Akkommodationsvermögen in dptr: $p = 1000/A$, so wird

$$\mathfrak{x} = 62{,}5\, n A/\mathfrak{N}^2. \qquad (58)$$

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß diese Formel auch dann gilt, wenn das Auge nicht rechtsichtig ist. Hiernach hat man für einen Gegenstand in Luft, falls man $A = 4$ dptr setzt:

$$\mathfrak{N} = 10 \qquad \mathfrak{x} = 2{,}5 \text{ mm},$$
$$= 100 \qquad \mathfrak{x} = 0{,}025 \text{ mm},$$
$$= 1000 \qquad \mathfrak{x} = 0{,}00025 \text{ mm} = 0{,}25\,\mu.$$

Die durch Akkommodation entstehende Tiefe nimmt mit dem Quadrate der Vergrößerung ab, wird aber noch kleiner sein als (58) angibt, da bei Objektiven von hoher Apertur der Gegenstand nur in einer Entfernung fehlerfrei

[1]) Siehe H. Rosenbusch, Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine. 5. Aufl., Bd. I. Die petrographisch wichtigen Mineralien. 1. Hälfte. Untersuchungsmethoden, bearbeitet von E. A. Wülfing. § 111–118. Stuttgart: E. Schweizerbart 1924.

[2]) S. Czapski, Die Bestimmung von Deckglasdicken an fertigen Präparaten. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 5, S. 482–484. 1888.

[3]) E. Abbe, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Oculars nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bedingungen mikrostereoskopischer Beobachtung. ZS. f. Mikrosk. Bd. 2, S. 207–234. 1880. Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 244–272. Hier kommt zunächst der Schlußabschnitt in Frage.

abgebildet wird. Es folgt dies aus der Unvereinbarkeit der HERSCHELschen mit der Sinusbedingung; ein größerer Dingabstand wirkt wohl stets unterbessernd.

190. Die Abbildungstiefe und ihr Zusammenwirken mit der Akkommodationstiefe. Ferner kann man auch deshalb verschieden tief liegende Gegenstände, und zwar gleichzeitig wahrnehmen, weil auch bei ungenauer Einstellung noch eine Wahrnehmung des Bildes zustande kommt; nach der Darstellung der geometrischen Optik darf nur der Zerstreuungskreis nicht zu groß werden. Ist ε die Winkelgröße dieses Kreises auf der Bildseite, so hat man bei Einstellung des Auges auf unendlich:

$$\varepsilon = 2U' = 2\sin U'.$$

Für den Einstellungsfehler $\mathfrak{x}_0$ ist dann bei Geltung der Sinusbedingung:

$$\varepsilon = 2n\,\mathfrak{x}_0 \sin U/f = 2\mathfrak{x}_0 \sin U/f' = 2\mathfrak{x}_0 V \sin U = 2\mathfrak{x}_0 \mathfrak{N} \sin U/250.$$

Nimmt man an, es sei ein gewisser Winkel $\varepsilon = \varepsilon_0$ zulässig, so ergibt dies auf der Dingseite einen zulässigen Einstellungsfehler:

$$\mathfrak{x}_0 = 125\,\varepsilon_0 \operatorname{cosec} U/\mathfrak{N}.$$

Drückt man ε_0 in Bogenminuten aus, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0'/3437{,}8$, so ist

$$\mathfrak{x}_0 = \varepsilon_0' \cdot \operatorname{cosec} U/27{,}50\,\mathfrak{N}.$$

Die Abbildungstiefe hat jedoch den doppelten Wert:

$$2\,\mathfrak{x}_0 = \varepsilon_0' \operatorname{cosec} U/13{,}75\,\mathfrak{N}. \tag{59}$$

Ist beispielsweise $U = 30°$ (Apertur für Trockensysteme $1/2$), und nimmt man einen Wert $\varepsilon_0' = 5'$ als allenfalls zulässig an, so erhält man folgende Beträge:

$\mathfrak{N} = 10$ $2\,\mathfrak{x}_0 = 0{,}073$ mm
$\mathfrak{N} = 100$ $2\,\mathfrak{x}_0 = 0{,}0073$ mm
$\mathfrak{N} = 1000$ $2\,\mathfrak{x}_0 = 0{,}00073\text{ mm} = 0{,}73\,\mu$.

Diese Abbildungstiefe nimmt mit der Vergrößerung ab, sie ist bei den schwachsten Vergrößerungen gegen die Akkommodationstiefe bedeutungslos, wogegen sie bei den starksten überwiegt. Mit zunehmendem U wird sie freilich stark abnehmen, sie hängt aber nicht von der Apertur, sondern von U ab, und dieser Winkel U ist nicht ganz derselbe, der bei der Bestimmung der Apertur $a = n \sin U$ vorkommt. Er ist nämlich offenbar nicht wie unter Ziff. 145 in einem Zwischenmittel, sondern am Gegenstande selbst zu messen. Bei einem Trockensystem von der Apertur 0,8 ist, wenn das Präparat in einem Mittel vom Brechungsverhältnis 1,52 eingebettet wird, der Winkel U nicht arc sin 0,8 $= 53{,}1°$, sondern arc sin $0{,}8/1{,}52 = 31{,}8°$, und die Abbildungstiefe entsprechend größer.

$\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ geben zusammen die dingseitige Tiefe des Mikroskops; der Betrag ist bei nicht ganz kleinen Vergrößerungen recht gering, und es rechtfertigt sich danach die Darstellung, daß man durch das Präparat gewissermaßen einen „optischen Querschnitt" lege[1]).

K. STREHL macht freilich[2]) hier wie sonst darauf aufmerksam, daß streng genommen die Wirkung der aufeinanderfolgenden Schichten auf die Welle beugungstheoretisch untersucht werden müßte.

191. Die Perspektive im Mikroskopbilde. Hat man nun einen Gegenstand von gewisser, geringer Tiefe und untersucht, ohne die Deutlichkeit der Abbildung

---

[1]) E. ABBE, a. a. O. S. 272.

[2]) K. STREHL, Theorie der allgemeinen mikroskopischen Abbildung. Dissert. Erlangen 1900, S. 21–24; vgl. übrigens den unter Ziff. 170 angeführten Abschnitt von ABBE.

zu betrachten, nur die Perspektive, so ist jeder Punkt von der Mitte der Eintrittspupille auf die Einstellfläche — für kleines Gesichtsfeld Einstellebene — zu projizieren. Bei schwachen Objektiven liegt die Eintrittspupille im Objektiv oder in einer besonderen Blende; bei stärkeren ist der Strahlengang auf der Dingseite telezentrisch oder doch nahezu telezentrisch, eine perspektivische Verkürzung tiefer liegender Teile des Gegenstandes kann nicht eintreten. Erfolgt die Abbildung durch achsensymmetrische Bündel, so fallen senkrecht übereinanderliegende Teile für den Beobachter zusammen. Verläuft aber das abbildende Bündel vom Gegenstande aus nach rechts, so wird ein tiefer liegender Punkt in der Einstellebene rechts von dem darüberliegenden entworfen, also abgesehen von der meist fehlenden Verkürzung wie für ein von rechts beobachtendes freies Auge. Dies gibt die Möglichkeit, den Tiefenunterschied durch beidäugige Beobachtung hervortreten zu lassen[1]).

192. Binokulare Mikroskope mit zwei Objektiven. Das erste Mikroskop für Beobachtung mit beiden Augen wurde 1677 von Chérubin d'Orléans hergestellt; es bestand aus zwei vollständigen, gegeneinander geneigten und an der Objektivseite miteinander verbundenen Mikroskopen. Da jedes ein auf dem Kopfe stehendes Bild gab, muß ein tiefenverkehrter Eindruck entstanden sein, wie beim Stereoskop, wenn man die Aufnahmen einzeln auf den Kopf stellt. Die Untersuchung der scheinbaren Augenorte zeigt dasselbe. Die Benutzung zweier getrennter Mikroskope führt bei der geringen Ausdehnung des Gegenstandes aus räumlichen Gründen zu Schwierigkeiten. Für schwache Vergrößerungen ist sie gleichwohl wieder angewandt worden: 1895 wurde in der Zeissischen Werkstätte auf Anregung von H. S. Greenough das Doppelmikroskop angefertigt[2]) (Abb. 222). Die beiden Rohre sind um 14° gegeneinander geneigt, die Bilder werden durch Porrosche Prismen aufgerichtet, und damit entsteht auch ein tiefenrichtiger Eindruck; außerdem gestattet dies



Abb. 222. Das binokulare Mikroskop nach Greenough in einer neueren Ausführung. Etwa $^1/_3$ natürliche Größe. (Nach einer Zeissischen Druckschrift.) Zwei vollständige Mikroskope mit bildaufrichtendem Prismenpaare sind unter einem Winkel von je etwa $7^1/_2{}^\circ$ vereinigt. Das Doppelmikroskop kann durch Zahn und Trieb eingestellt werden. Außerdem kann es mit einem Schlitten in einer Nute a verschoben werden. Durch eine (nicht sichtbare) Schraube ist der Schlitten festzustellen. So kann man dünne Deckglaspräparate und auch sehr hohe Gegenstände unter dem Mikroskop beobachten.

[1]) Über die Perspektive beim Mikroskop schreibt E. Abbe, Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 366—374 u. 436—444. — Bei der folgenden Behandlung binokularer Mikroskope ist namentlich das Werk von M. v. Rohr benutzt: Die binokularen Instrumente, 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1920.

[2]) S. Czapski u. W. Gebhardt, Das stereoskopische Mikroskop nach Greenough und seine Nebenapparate. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 14, S. 289—312. 1897.

Verfahren wie beim Doppelfernrohr die Einstellung auf den Augenabstand. Das Mikroskop brauchte auch nicht so viel verlängert zu werden, wie es sonst nötig gewesen wäre, die Austrittspupillen befanden sich 225 mm über dem Beobachtungstische. Es soll hier übrigens sofort vor dem schon von E. ABBE[1]) bekämpften Irrtum gewarnt werden, als müsse jedes binokulare Mikroskop, um einen tiefenrichtigen Eindruck zu ergeben, mit bildaufrichtenden Okularen ausgerüstet sein.

GREENOUGH wollte, daß nicht nur die Tiefenrichtigkeit, sondern auch die Raumgleichheit (Homoomorphie) erreicht werde. Dies ist aber, wie S. CZAPSKI zeigte, nur dann möglich, wenn die Winkel an den Pupillen auf Ding- und Bildseite dieselben sind, d. h. wenn Eintritts- und Austrittspupille in die Knotenpunkte des Mikroskops fallen. Es werde nun etwa eine nur 25 fache Vergrößerung verlangt, dann ist die Brennweite des Mikroskops (250/25) mm = 10 mm; um diesen Betrag befindet sich der vordere Knotenpunkt bei Trockensystemen vom vorderen Brennpunkte, d. h. vom durchschnittlichen Dingorte, entfernt, bei stärkerer Vergrößerung würde er noch näher liegen. Da die Eintrittspupille bei der gewöhnlichen Ausführung der Objektive nicht dort liegt, fügte CZAPSKI besondere Blenden hinzu. Unter diesem Zusatz litt jedoch die Bildgüte, und die Benutzer legten auf die Raumähnlichkeit so wenig Wert, daß man es vorzog, auf sie zu verzichten, obwohl an und für sich bei einer umständlicheren Anlage der Objektive Bildgüte und Raumgleichheit zu vereinigen gewesen wären.

Da für die Mikroskope zum beidäugigen Gebrauche die optische Tubuslänge größer ist als sonst (es ließe sich der Augenabstand andernfalls nur durch starke Neigung der Rohre erreichen), sind zur Erreichung einer geforderten Vergrößerung besondere, schwächere Objektive (Objektivpaare) im Gebrauch, die mit den gewöhnlichen HUYGENSischen oder orthoskopischen Okularen verwandt werden können. Die Zeissische Druckschrift 375 gibt außer Trockensystemen auch eine Wasserimmersion an. Die stärkste auf dem angegebenen Wege erreichte Vergrößerung ist etwa 300.

Eine Anwendung des GREENOUGHschen Mikroskops ist das DRUNERsche Präparier- und Horizontalmikroskop (1897), bei dem eine umständlichere Form des Stativs gestattet, das Rohrpaar zu neigen, zu verschieben. Es dient[2]) „hauptsächlich zur Untersuchung und zum Präparieren von großen, nicht mehr auf dem Objekttische .... unterzubringenden Objekten", auch „als Aquarienmikroskop, zur Beobachtung an



Abb. 223. Die Teilung des Lichtbündels beim ersten binokularen Mikroskop von J. L. RIDDELL (nach M. v. ROHR) durch zwei Ableseprismen. Bei gewöhnlichen Okularen tiefenverkehrende Wirkung.



Abb. 224. Das erste achromatische Prisma von F. H. WENHAM (nach M. v. ROHR). Tiefenverkehrende Wirkung.

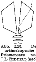


Abb. 225. Der orthoskopische Prismensatz von J. L. RIDDELL (nach M. v. ROHR). Tiefenrichtige Wirkung.

größeren Pflanzenteilen, Gesteinspartien" usf. Als andre Anwendung sei das Hornhautmikroskop[3]) erwähnt, wo die beiden Mikroskope wagerecht gestellt

[1]) E. ABBE, Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 315 u. 322.
[2]) Zum Teil wörtlich nach Zeissischen Druckschriften, z. B. Mikro 375.
[3]) Abbildung und Beschreibung siehe Zeissische Druckschr. Med 167.

werden. Druner hat auch 1900 eine Abänderung seiner Vorrichtung zur Herstellung stereoskopischer Photographien beschrieben.

193 Binokulare Mikroskope mit einem Objektiv. Eine andre Klasse beidäugiger Mikroskope hat nur ein Objektiv und zwei Okulare; hier muß innerhalb des Tubus eine Teilung der Strahlen erfolgen.

Man denke sich an der Austrittspupille des Objektivs eine Spiegelvorrichtung (Abb. 223, nach J. L. Riddell 1852) oder ein achromatisches Prisma der Form Abb. 224 (nach F. H. Wenham 1853), so wird die Austrittspupille geteilt, das Licht der rechten Hälfte kann in das rechte, das der linken ins linke Auge geführt werden; in gleicher Weise ist die Eintrittspupille als geteilt vorzustellen. Da das Okular in rückwärtiger Richtung ein verkehrtes Bild des Auges entwirft, so müssen diese Vorrichtungen einen tiefenverkehrten Eindruck machen. Man kann diesen Mangel beseitigen, indem man der Spiegelvorrichtung die Form eines Pseudoskops gibt (Abb. 225, J. L. Riddell 1853) oder die Strahlen so lenkt, daß die rechte Hälfte der Austrittspupille des Objektivs dem linken Auge entspricht (Spiegelvorrichtung nach A. Nachet 1853, Abb. 226; zweite Form des Wenhamschen Prismas 1860, Abb. 227). Am beliebtesten ist in England eine von Wenham 1860 angegebene Form mit spiegelndem Prisma geworden, bei der nur die eine Strahlengruppe abgelenkt wird (Abb. 228).

Bei dem eben besprochenen Verfahren muß die Trennungsvorrichtung in der

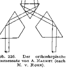


Abb. 226. Der orthoskopische Prismensatz von A. Nachet (nach M. v. Rohr).



Abb. 227. Das zweite achromatische Prisma von F. H. Wenham (nach M. v. Rohr). Tiefenrichtige Wirkung.

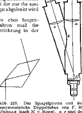


Abb. 228. Das Spiegelprisma und der unsymmetrische Doppeltubus von F. H. Wenham (nach M. v. Rohr). *a*, *c* sind die beiden Tuben, bei *d* ist eine Öffnung, die das Licht in den linken Tubus läßt. *e* ist das Spiegelprisma.

Austrittspupille des Objektivs stehen oder wenigstens in ihrer Nähe, da andernfalls die Strahlengruppen nicht rein getrennt sind und keins der beiden Gesichtsfelder eine gleichmäßige Helligkeit hat, ganz abgesehen von der Verschlechterung der Fehlerhebung. Bei einigermaßen starken Objektiven liegt aber die Austrittspupille innerhalb des Objektivs oder doch der letzten Fläche so nahe, daß die Anbringung ihre Schwierigkeiten hat. Hinzu kommt der Wunsch, die

Vorrichtung am Okularteil anzubringen, um sie leicht gegen ein gewöhnliches Okular für ein einzelnes Auge auswechseln zu können. Beim WENHAMschen Mikroskop (Abb. 228) kann man freilich zur Beobachtung mit einem Auge übergehen, indem man den das Prisma tragenden Schieber zurückzieht. Endlich ist es bei der Mehrzahl der erwähnten Zusammenstellungen schwierig, mit

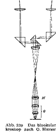


Abb. 229. Das binokulare Mikroskop nach O. HEIMSTÄDT. O ist das Objektiv, H eine Hilfslinse zur Verkürzung der Tubuslänge. Die nächste Linse bildet die Austrittspupille des Objektivs am Orte der beiden kleinen Spiegelprismen ab, diese bilden die Trennungsvorrichtung.

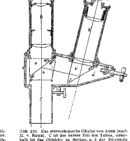


Abb. 230. Das stereoskopische Okular von ABBE (nach M. v. ROHR). C ist der untere Teil des Tubus, unterhalb ist das Objektiv zu denken, a, b der SWANsche Würfel, der das Strahlenbündel in einen durchgehenden und einen zurückgeworfenen Teil spaltet, der zweite wird bei A′ an der Hypotenusenfläche des Prismas b′ nach oben geworfen. B, B′ sind die beiden Okulare, B′ von besonderer Bauart. β ist eine Kappe (Abb. 232).

Hilfe des auf dem Festlande üblichen kürzeren Rohrs den Augenabstand zu erreichen. — R. B. TOLLES hat zuerst 1865 den Vorschlag gemacht, durch ein Umkehrsystem ein auffangbares Bild der Austrittspupille des Objektivs zu entwerfen und dort die Trennungsvorrichtung anzubringen. Eine auf demselben Grundgedanken beruhende neuere Einrichtung von O. HEIMSTÄDT zeigt Abb. 229[1]).

„Die Hilfslinse H (über dem Objektiv O) hat lediglich den Zweck, die (normale) Tubuslänge des Objektivs, die bei stärkeren Systemen streng eingehalten werden muß, auf ein geeignetes Maß herabzusetzen. — Das schematisch dargestellte Objektiv (des stereoskopischen Aufsatzes) ist in Wirklichkeit ein aus zwei Linsenpaaren bestehendes, für seine besondere Aufgabe korrigiertes System, ähnlich einem schwachen Mikroskopobjektiv, doch von großer absoluter Öffnung."

[1]) O. HEIMSTÄDT, Ein stereoskopischer Aufsatz für Mikroskope. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 38, S. 321—333. 1921.

194. Andere Methoden beidäugiger Beobachtung. Ein anderes Verfahren, die „physikalische" Teilung der Strahlengruppen, hat den Vorteil, daß die Trennungsvorrichtung an jeder beliebigen Stelle, auch am Okularende, angebracht werden kann; freilich liefert sie zunächst zwei übereinstimmende Bilder, also eine zweiäugige, nicht eine beidäugige Beobachtung; jedoch kann durch eine Hilfsvorrichtung leicht auch diese hergestellt werden. Für bloß zweiäugige Beobachtung wurde der Grundsatz der physikalischen Trennung 1866 von P. H. Lealand, im nämlichen Jahre unter Anwendung des gleich zu erwähnenden Swanschen Würfels von F. H. Wenham benutzt. Der letztgenannte hatte 1853 den Gedanken einer Teilabblendung zur Herbeiführung des stereoskopischen Eindrucks ausgesprochen, dürfte aber nicht zu einer Ausführung gelangt sein.

Das stereoskopische Okular nach E. Abbe 1881 (Abb. 230)[1] hat einen Swanschen Würfel (*a*, *b*), dessen beide Teile durch eine dünne Luftschicht voneinander getrennt sind und daher das Lichtbündel in einen durchgelassenen und einen zurückgeworfenen Teil spalten, die den beiden Okularen in der gezeichneten Weise zugeführt werden. Bei der Abbeschen Form ist infolge des ungleichen Lichtweges für das zurückgeworfene Licht ein Okular besonderer Bauart notwendig. Neuere Ausführungsformen weichen insofern ab, als die Lichtwege gleich lang gemacht worden sind und auch wohl die Luftschicht durch eine halbdurchlässige Silberschicht ersetzt wurde[2] (Abb. 231). Durch dies Verfahren werden die Bilder in den Okularen nahezu gleich hell, freilich ist der Helligkeitsunterschied kein besonderer Nachteil, ja nach Abbes Ansicht eher ein Vorteil.

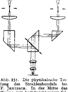


Abb. 231. Die physikalische Teilung des Strahlenbündels bei F. Jentzsch. In der Mitte das Prisma mit halbdurchlässiger Silberschicht.

Um aus der Beobachtung mit zwei Augen, die aus physiologischen Gründen an und für sich viele Vorteile bietet (s. den Aufsatz von Jentzsch), eine stereoskopische Beobachtung

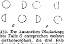


Abb. 232. Die Abbeschen Okularkappen. Die drei Fälle *o* entsprechen tiefenrichtiger (orthomorpher), die drei Fälle *p* tiefenverkehrter (pseudomorpher) Wirkung.

zu machen, setzt man seit Abbe auf die Okulare halbkreisförmige Kappen der Form in Abb. 232. Damit ein tiefenrichtiger Eindruck entsteht, müssen die

[1] E. Abbe, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Okulars nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bedingungen mikro-stereoskopischer Beobachtung. ZS. f. Mikrosk. Bd 2, S. 207—234. 1880; Ges. Abhandlgn. Bd. I, S 244—272. Über die Bedingungen der orthoskopischen und pseudoskopischen Wirkungen in dem binokularen Mikroskop. Übersetzung einer Abhandlung im Journ. Roy. Mikr. Soc. (2) Bd. 1, S. 203—211. 1881. Ges. Abhandl. Bd. 1, S. 313—324.

[2] F. Jentzsch, Das binokulare Mikroskop. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 30, S. 299—318. 1913. Eine andere Form s. C Zeiss, Mikroskoptubus für zwei Okulare. DRP 413162 v. 9. III. 1924, ausgeg. 6. V. 1925.

Kappen die Anordnung *O* (erste Reihe) haben. Abbe zeigt dies so, daß er einfach von dem etwa in 250 mm vom Auge entstandenen mikroskopischen Bilde ausgeht. Von dort nach rechts und links verlaufende Bündel müssen dieselben perspektivischen Verschiebungen gegeneinander zeigen, wie die beim freien Sehen in das rechte und linke Auge fallenden. Eine Teilabblendung, wie in *O* angegeben, läßt aber in das rechte Auge nur das rechte Halbbündel fallen; das mikroskopische Bild wird tiefenrichtig aufgefaßt, und infolge der Rechtläufig-

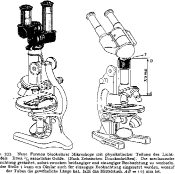


Abb. 233. Neue Formen binokularer Mikroskope mit physikalischer Teilung des Lichtbundels. Etwa $^1/_4$ natürlicher Größe. (Nach Zeissischen Druckschriften). Die mechanische Einrichtung gestattet, sofort zwischen beidaugiger und einaugiger Beobachtung zu wechseln. An der Stelle 1 kann ein Okular auch für einaugige Beobachtung eingesetzt werden, worauf der Tubus die gewöhnliche Länge hat, falls das Mittelstück AB = 115 mm ist.

keit der optischen Abbildung gilt dasselbe von der Auffassung des Gegenstandes. — Dagegen gibt die Anordnung *P* einen tiefenverkehrten Eindruck.

Um die Lichtschwächung durch Abblendung zu verringern, hat Abbe Anordnungen vorgeschlagen, bei denen bloß eins der Okulare halb abgeblendet wird, die auch den Tiefeneindruck vermitteln. Als Nebenvorrichtung dient seit Abbe für stärkere Vergrößerungen eine Scheibe mit zwei Löchern, die in die Blende des Kondensors eingelegt wird. Es werden dann die beiden Okularen dargebotenen Bilder von zwei gegen die Achse entgegengesetzt geneigten Bündeln erzeugt.

Neue Vorrichtungen der angegebenen Art zeigt Abb. 233; der binokulare Aufsatz kann bei ihnen ohne weiteres durch ein gewöhnliches Okular für ein-

äugige Beobachtung ersetzt werden. Da der Aufsatz die mechanische Tubuslänge sehr vergrößert (auf 230 bis 272 mm), so sind in ihm besondere Linsenfolgen angebracht, die den Bildort in die Brennebenen der Okulare verlegen. Mit solchen Mikroskopen „sieht man selbst mit Immersionslinsen von 2 mm oder noch geringerer Brennweite deutlich stereoskopisch, falls nur das Objekt sich überhaupt dazu eignet. Diese Art der Beobachtung setzt freilich sehr gut korrigierte Objektive voraus, wenn die Schärfe der Bilder nicht leiden soll“[1]).

Eine Abänderung der ABBEschen Grundform durch die LEITZische Werkstätte[2]) bildet die Austrittspupille des Objektivs durch ein Umkehrsystem ab. Das Bild der Pupille entstünde etwas oberhalb der Prismenvorrichtung, wird durch diese jedoch in zwei Kreise verwandelt, an denen man die Vorrichtungen zur Teilabblendung anbringen kann. Hierdurch sollen die Okularkappen vermieden werden. — Von O. HEIMSTÄDT[3]) rührt eine Einrichtung her, bei der die physikalische Teilung mit der geometrischen verbunden ist.

Anhangsweise mag noch darauf hingewiesen werden, daß ein ähnliches Teilungsverfahren auch dem Zwecke dienen kann, zwei Beobachtern gleichzeitig denselben Gegenstand zu zeigen[4]).

195. Zur Theorie der stereoskopischen Wirkung. Zur Theorie der Vorrichtung sei noch bemerkt, daß ein stereoskopischer Eindruck auch ohne die Halbblenden erreicht werden kann. A. MERCER, der ihn an einem LEALANDschen Mikroskop beobachtet hatte, gab schon 1882 die Erklärung[5]). Ist der Abstand der beiden Okulare etwas zu gering, so wird namentlich bei geringer Vergrößerung, wo die RAMSDENschen Kreise größer sind als die Austrittspupillen, von diesen ein exzentrisch nach außen gelegener Teil ausgeschnitten werden und die nämliche Wirkung eintreten, die von den Halbblenden *O* hervorgebracht wird; ein zu großer Abstand muß zu einem tiefenverkehrten Eindruck führen. Zeitweilig hat man vorgeschlagen, überhaupt die Kappen fortzulassen und durch das ebenerwähnte Verfahren zu ersetzen. Indessen macht H. SIEDENTOPF[6]) darauf aufmerksam, daß hier (wenigstens bei starker Vergrößerung, also kleinen RAMSDENschen Kreisen) durch die Farbenabweichung des Auges scheinbare Tiefenunterschiede verschieden gefärbter Körperchen auftreten können, die so stark seien, daß man ihr Verschwinden als Kennzeichen für den richtigen Okularabstand verwenden möge, der übrigens nicht mit dem Augenabstand übereinstimme. SIEDENTOPF spricht sich hier dafür aus, die Okularachsen nicht gegeneinander zu neigen, sondern parallel zu stellen, da sich sonst der richtige Abstand nicht sicher festhalten lasse.

Die Regeln für die Entstehung eines tiefenrichtigen oder tiefenverkehrten Eindrucks sind in diesem Abschnitte nach der sehr bequemen ABBEschen Darstellung angegeben. Die genauere und zugleich allgemeinere Aufklärung über diese Fragen findet man bei der Behandlung der scheinbaren Augenorte unter Ziff. 66.

---

[1]) Zeisssche Druckschr. Mikro 355 u. 408.

[2]) E. LIHOTZKY, Über Mikroskope und Doppelokulare für binokulare und stereoskopische Beobachtung. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 41, S. 305—324. 1924.

[3]) O. HEIMSTÄDT, Eine neue Strahlenteilung für stereoskopische Mikroskope. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 40, S. 271—278. 1923.

[4]) Zeisssche Druckschr. Mikro 360.

[5]) A. C. MERCER, Stereoscopic vision with non-stereoscopic binocular arrangements. Journ. Roy. Micr. Soc. (2) Bd. 2, S. 271—272. 1882.

[6]) H. SIEDENTOPF, Über Einstellung des Okularabstandes am binokularen Mikroskop. ZS. f. Phys. Bd. 21, S. 178—186. 1924. Über farben-mikrostereoskopische Täuschungen und ihre Vermeidung. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 41, S. 16—24. 1924.

γ) Die Polarisationsmikroskope.

196. Allgemeines über Polarisationsmikroskope. Die Beobachtung mit polarisiertem Lichte hat sowohl in der Zoologie und Botanik, wie auch in der Mineralogie ihre Stelle. Hier kann nicht von den Verwendungen, sondern nur von der optischen Einrichtung des Polarisationsmikroskops die Rede sein.

Das polarisierte Licht wird in der Regel durch ein NICOLsches Prisma, den Polarisator hergestellt, der unterhalb der Beleuchtungsvorrichtung angebracht wird (Abb. 234). Ein zweites NICOLsches Prisma, der Analysator, befindet sich an den verschiedensten Stellen, oberhalb des Okulars (Abb. 235), im Tubus oder auch (beim ABBEschen Okular) zwischen den beiden Linsen des Okulars. In der Regel wird man die Prismen so stellen, daß ihre Schwingungsrichtungen senkrecht zueinander sind. Das Gesichtsfeld wird dann dunkel erscheinen; liegt aber ein irgendwie doppeltbrechender Gegenstand auf dem Beobachtungstisch, so wird das Gesichtsfeld ganz oder teilweise aufgehellt, und die Art der Doppelbrechung kann dadurch festgestellt werden. Bei einem Plattchen, das aus einem doppeltbrechenden Kristall herausgeschnitten ist, kann man beispielsweise die beiden Hauptrichtungen, die Achsen der Indexellipse, dadurch feststellen, daß das Feld dunkel bleibt, wenn eine von ihnen der Schwingungsrichtung des Polarisators parallel ist. Für manche Untersuchungen benutzt man die sog. verzögernden Plättchen, in der Regel aus Glimmer und Gips, die in einer Metallfassung unterhalb des Analysators aufgelegt oder auch durch einen Schlitz oberhalb des Objektivs eingeschoben werden.



Abb 234. Ein Polarisator zum Einhangen in den ABBEschen Beleuchtungsapparat.



Abb 235. Ein Analysator zum Aufsetzen auf die Okulare

197. Polarisator und Analysator als Mikroskopbestandteile. Die Öffnung des Polarisators wird in der Regel als Eintrittspupille für die Beleuchtung dienen und die Blendenöffnung der Beleuchtungsvorrichtung außer Wirkung setzen. Für Beleuchtung mit parallelem Licht ist die größte Öffnung gleich der Diagonale; beim aplanatischen Kondensor hat man für die größte Apertur

$$a_1 = d/2f',$$

wo d die Länge der Diagonale, f' die Brennweite des Kondensors ist.

Der Analysator kann, wenn er auf das Okular gesetzt wird, die Beleuchtung dadurch beeinflussen, daß er eine Abschattung herbeiführt, weil die Austrittspupille in den Analysator fällt. Der Tubusanalysator kann von diesem Nachteil frei hergestellt werden, hat aber einen andern Fehler herbeigeführt.

Das NICOLsche Prisma ist eine Platte von beträchtlicher Dicke d. Denkt man es sich zunächst einfach brechend, so wird es, in den Strahlengang hinter dem Objektiv eingeschaltet, das Bild scheinbar verlegen, und zwar um den Betrag $d(1-1/n)$ nach oben verschieben, falls man die Neigung der aus dem Objektiv austretenden Strahlen als gering ansieht. Der Analysator ist jedoch doppeltbrechend, und zwar wird ausschließlich der außerordentliche Strahl benutzt; bei der üblichen Form des NICOLschen Prismas ist die optische Achse genau oder nahezu parallel den brechenden Kanten. Denkt man sich nun durch den einfallenden Strahl zwei zueinander senkrechte Ebenen gelegt, von denen

die eine die optische Achse enthält, die andre zu ihr senkrecht steht, so werden die in diesen Ebenen enthaltenen ebenen Strahlenbüschel verschieden beeinflußt werden und eine verschiedene Hebung des Schnittpunktes erfahren. Die Erscheinung ist zu den beiden erwähnten Ebenen symmetrisch und hat daher dieselbe Wirkung wie der Astigmatismus. Sie ist zuerst von S. BECHER[1]) ausführlich behandelt worden, der für ein NICOLsches Prisma von 25 mm Dicke einen astigmatischen Schnittweitenunterschied von 3 mm erhält. Das NICOLsche Prisma oberhalb des Okulars zeigt diesen Fehler nicht oder nur in unmerklicher Weise, weil es von Strahlenbündeln getroffen wird, deren Schnittpunkt unendlich weit oder doch sehr weit entfernt liegt, und der fragliche Unterschied daher nicht von Bedeutung ist. BECHER behandelt verschiedene Mittel zur Abhilfe, das durchgreifendste besteht darin, daß man die dingseitige Schnittweite des Objektivs nicht zu 160 mm, sondern ∞ macht. An die Stelle des Okulars muß dann ein Fernrohr treten. Diese Form ist namentlich bei Mikroskopen zu mineralogischen Untersuchungen üblich; selbstverständlich bedarf man besonderer Objektive.

198. Die Beobachtung des Blendenbildes. Bisher ist angenommen worden, daß, wie bei sonstigen mikroskopischen Beobachtungen, auf das Bild des zu prüfenden Gegenstandes eingestellt wird. Es ist aber in vielen Fällen die Beobachtung des Blendenbildes (Ziff. 171) für Untersuchungen der Polarisation vorteilhafter; sie kann mit bloßem Auge (ohne Okular), einer Lupe oder einem Hilfsmikroskop erfolgen; bei Hineinschieben einer besonderen Hilfslinse nach AMICI liefert die Folge Hilfslinse + Okular ein solches. Man spricht hier wohl von Beobachtung im konvergenten Lichte oder unterscheidet die Vorrichtung als Konoskop vom Polarisationsmikroskop[2]).

d) Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie.

199. Die Entwicklung der Dunkelfeldbeleuchtung. Bei der Beleuchtung mit durchfallendem Lichte wirkt der Gegenstand als Hindernis und erscheint daher im hellen Gesichtsfeld mehr oder minder dunkel, gefärbt usf. Zuerst 1837 gab J. B. READE[3]) ein Beleuchtungsverfahren an, bei dem der Gegenstand durch eine Lichtquelle beleuchtet wurde, die unterhalb, aber gleichzeitig so weit seitwärts stand, daß kein Licht von ihr unmittelbar in das Mikroskop gelangen konnte. Es erschienen die Gegenstände hell auf einem dunkeln Grunde (jet-black ground, im Deutschen Dunkelfeld genannt). In den fünfziger Jahren wurden — von F. A. NOBERT, TH. ROSS u. a. — Beleuchtungsvorrichtungen angegeben, bei denen der Beleuchtungsspiegel unterhalb des Tubus benutzt wurde; über dem Spiegel befand sich eine Linse, die das Licht der Lichtquelle im Gegenstande vereinigte, deren mittlerer Teil aber außer Wirkung gesetzt wurde [beispielsweise durch

[1]) S. BECHER, Über den Astigmatismus des Nicols und seine Beseitigung im Polarisationsmikroskop. Ann. d. Phys. (4) Bd. 47, S. 285—364. 1915.

[2]) Zum Polarisationsmikroskop s. H. ROSENBUSCH, Mikroskopische Petrographie der Mineralien und Gesteine, Bd. 1. Die petrographisch wichtigen Mineralien, 1. Hälfte. Untersuchungsmethoden, bearbeitet von E. A. WÜLFING, Stuttgart, E. Schweizerbart 1924; weiter A. KÖHLER, Die Verwendung des Polarisationsmikroskops für biologische Untersuchungen. Handb. d. biol. Arbeitsmethoden Abt. II, T. 2, S. 907—1108. 1926; W. J. SCHMIDT, Vom Polarisationsmikroskop und seiner Anwendung. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 37, S. 1—35. 1920, E. WEINSCHENK, Das Polarisationsmikroskop, 4. Aufl., Freiburg i. Br.: Herder 1919; E. A. WÜLFING, Ein neues Polarisationsmikroskop und kritische Betrachtungen über bisherige Konstruktionen. Abhandlgn. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. Math.-nat. Kl. 6. Abhandlg., Heidelberg: C. Winter 1918.

[3]) C. R. GORING u. A. PRITCHARD, Micrographia 1837, S. 227—231; s. die Abbildung nach J. QUEKETT bei H. SIEDENTOPF, Die Vorgeschichte der Spiegelkondensoren. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 24, S. 382—395. 1907.

Schwärzung[1])]. Die Öffnung des Mikroskops war kleiner als der innere Durchmesser des ringförmigen Beleuchtungskegels. Die beiden hier verwandten Arten der Dunkelfeldbeleuchtung unterscheiden sich dadurch, daß sie bei READE einseitig, bei NOBERT und seinen Nachfolgern allseitig ist. Beide Arten sind in der Folgezeit verbessert worden. Beim ABBEschen Beleuchtungsapparat kann man die erste dadurch erreichen, daß man die Blendenöffnung stark nach der Seite schiebt, die zweite, indem man statt der gewöhnlichen Blenden eine Zentralblende einlegt.

Die Möglichkeit der Beobachtung im Dunkelfelde suchte man verschieden zu erklären. ABBE[2]) führte sie — allerdings noch andre Gründe zulassend — auf die Wirkung des abgebeugten Lichtes zurück. Den Vorteil fand schon READE darin, daß die Blendung des Auges durch das helle Feld vermieden wurde und dadurch die Einzelheiten schärfer hervortraten[3]).

200. Die Ultramikroskopie. ABBE hatte gelegentlich[4]) darauf hingewiesen, daß die Grenze für die Auflösbarkeit nicht etwa eine Grenze für die Sichtbarkeit sei. Teilchen, die erheblich kleiner sind als die halbe Wellenlänge des Lichtes, lassen sich sehen. Die Theorie dieser Erscheinungen war teilweise schon früher ausgearbeitet[5]). Durch Beugung an kleinsten Teilchen entsteht eine nach allen Richtungen hin verlaufende, übrigens polarisierte, Lichtstrahlung. Indessen ist die Intensität sehr gering gegen die des einfallenden Lichtes und nimmt mit dem Quadrat des Volumens ab. Weiter ist sie der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional. Hierdurch erklärt sich beispielsweise die blaue Farbe des Himmels.

Beim Mikroskop ist das Verfahren der Dunkelfeldbeleuchtung 1903 von H. SIEDENTOPF und R. ZSIGMONDY zu einem Mittel ausgebildet worden, Teilchen von einer Ausdehnung, die nur Bruchteile der Wellenlänge beträgt, einzeln sichtbar zu machen und zu beobachten. Die Abstände der Teilchen müssen innerhalb der Grenze der Auflösbarkeit des Mikroskops liegen; ihre Gestalt und Größe ist selbstverständlich nicht erkennbar, vielmehr erscheinen sie als Beugungsscheibchen, die viel größer sind, als der wirklichen Ausdehnung entspricht. „Die Größe, Farbe und Intensität der Scheibchen hängt sehr von den Präparaten ab. Die Größe speziell auch von der Apertur des zur Anwendung gelangenden Mikroskopobjektives und der Wellenlänge des im gebeugten Strahlenkegel wirksamen Lichtes. Sie sind an der gleichen Stelle im Präparat um so kleiner, je höher die Apertur des Beobachtungssystems und je kurzwelliger die betreffende Farbe ist, in welcher die Teilchen erscheinen"[6]). Aus der Abhängigkeit vom Volumen folgt weiter, daß es Körperchen von einer Kleinheit gibt, die auch so nicht mehr zu sehen sind. SIEDENTOPF unterscheidet sie als amikroskopisch von ultramikroskopischen und gibt die Grenze auf einige $\mu\mu$ an[7]). Über die eigenartigen Farbenerscheinungen, über mittelbare Schlüsse auf Größe und Gestalt der Teilchen geben die angeführten Abhandlungen Aufschluß.

Die Bedingung für die Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen faßt H. SIEDENTOPF[8]) zusammen: Bei der Lichtschwäche der erregten Strahlung ist

---

[1]) Siehe H. SIEDENTOPF, a. a. O., S. 384—386.

[2]) E. ABBE, Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 110—111.

[3]) Über die einigermaßen verwandte TÖPLERsche Schlierenmethode vgl. CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 538.

[4]) E. ABBE, Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 362—363.

[5]) Vgl. die von H. SIEDENTOPF (ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd 29, S. 4. 1912) angeführten Quellen.

[6]) H. SIEDENTOPF, Ann. d. Phys. (4) Bd. 10, S. 11. 1903.

[7]) H. SIEDENTOPF, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 7, S. 276. 1905.

[8]) H. SIEDENTOPF, Über einen neuen Fortschritt in der Ultramikroskopie. Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 12, S. 6—47. 1910.

eine sehr kräftige Lichtquelle nötig (Sonnenlicht, Bogenlicht). Nur die Dunkelfeldbeleuchtung läßt die Teilchen genügend vom Hintergrund abstechen. Das von der Beleuchtungsfolge entworfene Bild der Lichtquelle muß, anders als bei andern mikroskopischen Beobachtungen, sehr scharf und obendrein möglichst klein sein, da sonst Unregelmäßigkeiten außerhalb des Gesichtsfeldes stören werden. Endlich darf, namentlich wenn trübe oder fluoreszierende Schichten im Präparat vorkommen, nur ein Gebiet von ganz geringer Tiefe beleuchtet werden, da sonst wieder eine Überstrahlung stattfände.

Für Dunkelfeldbeleuchtung, die nicht gerade der Ultramikroskopie dient, kann man sich mit weniger guter Strahlenvereinigung der Beleuchtungslinsen begnügen.

201. Formen der einseitigen Dunkelfeldbeleuchtung. Es sollen nur kurz die gegenwärtig üblichen Formen der Dunkelfeldbeleuchtung besprochen werden.

Eine einseitige Dunkelfeldbeleuchtung liefert die ursprüngliche Einrichtung von SIEDENTOPF und ZSIGMONDY, das Spalt-Ultramikroskop (1903). Das Licht der Lichtquelle *d* wird durch eine Linse *f* auf einen wagerechten Spalt *g* geworfen.

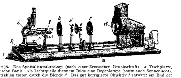


Abb. 236. Das Spaltultramikroskop (nach einer Zeissischen Druckschrift) *a* Tischplatte, *b* optische Bank. Als Lichtquelle dient im Bilde eine Bogenlampe (sonst auch Sonnenlicht), die Strahlen treten durch die Blende *d*. Das gut korrigierte Objektiv *f* entwirft ein Bild der Lichtquelle auf der wagerechten Spalte *g*. Der Spalt wird durch das zweite Objektiv *h* verkleinert abgebildet, dieses Bild wird durch das Mikroskopobjektiv *l* nochmals stark verkleinert und beleuchtet eine dünne Schicht des Präparats. *l* ist mit dem senkrechten Beobachtungsmikroskop auf dem Ständer *ms* angebracht, die Schrauben *w* dienen zur Einstellung. Um gelegentlich polarisiertes Licht anwenden zu können, dient der Polarisator *e*, der auch beiseite geklappt werden kann.

Eine weitere Linse bildet den Spalt in die Bildebene eines Mikroskopobjektivs *l* ab. Dies verkleinert das Spaltbild weiter, indem es umgekehrt wie gewöhnlich benutzt wird. Dadurch wird also nur ein ganz dünner Querschnitt des Gegenstandes beleuchtet. Beleuchtungsobjektiv *l* und Beobachtungsmikroskop (*i*) stehen senkrecht zueinander; damit Dunkelfeldbeleuchtung vorhanden ist, dürfen sie keinen Teil ihrer Apertur miteinander gemein haben. Der halbe Öffnungswinkel beider kann danach 45° sein; in der Tat nimmt man die Öffnung des Kondensors etwas kleiner (etwa 0,3 Apertur), um die Apertur der Beobachtung nicht gar zu sehr zu beschränken. Die Breite und Länge des Spaltes *g* kann so geregelt werden, daß für die Untersuchung feinster Zerteilungen die Tiefe des beleuchteten Querschnitts 1,5 bis 3 μ, seine Breite 4 bis 6 μ wird, für gröbere auch das Zehnfache betragen kann[1]).

[1]) Eine genaue Darstellung findet man in der ersten Arbeit von H. SIEDENTOPF u. R. ZSIGMONDY: Über Sichtbarmachung und Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen mit besonderer Anwendung auf Goldrubingläser; Ann. d. Phys. (4) Bd. 10, S. 139, ferner vgl. man die Zeissische Druckschr. Ultramikroskopie der Kolloide, Mikro. 229.

202. Die allseitige Dunkelfeldbeleuchtung. Das Verfahren der einseitigen (orthogonalen) Dunkelfeldbeleuchtung ist hauptsachlich dann von Bedeutung, wenn es nicht möglich oder schwierig ist, Dünnschnitte von tadelloser Oberfläche auf mechanischem Wege herzustellen, wie bei festen Kolloiden (gefärbten Gläsern und Metallen).

Die Lichtstärke ist dagegen selbstverständlich bei allseitiger Dunkelfeldbeleuchtung größer und kann das Zwanzigfache betragen. Es sind hauptsächlich drei Ausführungsformen zu unterscheiden.

a) Die Benutzung eines Linsenkondensors — des Abbeschen Beleuchtungsapparats — mit Sternblende (Zentralblende). Bei einem Immersionskondensor von 1,4 Apertur wird beispielsweise der innere Teil bis 1,0 abgeblendet; der Gegenstand befindet sich in einer Immersionsflüssigkeit, es wird aber mit einem Trockensystem beobachtet. Da an der Luftoberfläche des Deckglases alle Strahlen mit der Apertur $> 1{,}0$ total reflektiert werden, so können nur abgebeugte Strahlen ins Objektiv eintreten.

Infolge der durch Spiegelung entstehenden Nebenbilder und der Abweichungen des Kondensors wird das Feld nicht ganz dunkel sein, das Verfahren wird also in der Ultramikroskopie häufig, wo zur Sichtbarmachung der Teilchen die größte Lichtstärke nötig ist, versagen. Alsdann sind aber Linsenkondensoren wegen der Nebenbilder und der Farbenabweichungen überhaupt nicht angebracht.



Abb. 237. Der Paraboloidkondensor (nach einer Zeissischen Druckschrift) Der mittlere Teil des Beleuchtungsbündels wird abgeblendet, der äußere nimmt den durch die Pfeile gekennzeichneten Verlauf, d. h. die Lichtstrahlen werden an der Oberfläche des Tragglases total reflektiert und nur das am Präparat abgebeugte Licht (gestrichelt) gelangt ins Mikroskop.

b) Der Einspiegelkondensor. Für eine scharfe Strahlenvereinigung muß die Spiegelfläche ein Umdrehungsparaboloid sein, wie es schon F. H. Wenham 1856 vorschlug. Die verbesserte Form (Abb. 237) rührt von H. Siedentopf (1907) her[1]. Die Spiegelung findet innerhalb eines Glaskörpers statt. Auch hier werden die Strahlen von einer über 1 hinausgehenden Apertur an der Oberfläche des Deckglases total reflektiert.



Abb. 238. Der Kardioidkondensor vom H. Siedentopf (nach einer Zeissischen Druckschrift). Die untere Fläche c müßte bei theoretisch vollkommener Ausführung als Meridiankurve eine Kardioide haben. a ist die Hilfskugelfläche, an der keine Spiegelung stattfindet.

Beim Paraboloidkondensor wird nur der Achsenpunkt der Lichtquelle scharf abgebildet, da das Paraboloid nicht aplanatisch ist, vielmehr beträchtliche Vergrößerungsunterschiede für die verschiedenen Zonen zeigt.

c) Der Zweispiegelkondensor[2]) nach W. v. Ignatowsky und H. Siedentopf. Die Bauart muß (Siedentopf) die in Abb. 238 angegebene sein. Die beiden

[1]) H. Siedentopf, Paraboloidkondensor, eine neue Methode für Dunkelfeldbeleuchtung zur Sichtbarmachung und zur Moment-Mikrophotographie lebender Bakterien etc. (insbesondere auch für Spirochaete pallida). ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 24, S. 104—108. 1907. — Dunkelfeldbeleuchtung mit Paraboloid-Kondensor nach Siedentopf, Zeissische Druckschr. Mikro. 230.

[2]) W. v. Ignatowsky, Ein neuer Spiegelkondensor. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 25, S. 64 bis 67. 1908; Einige Neuerungen am Leitzschen Spiegelkondensor, ebenda Bd. 26, S. 387 bis 390. 1909; Eine Notiz zum Leitzschen Spiegelkondensor, ebenda Bd. 28, S. 50—51. 1911;

Körper, die die spiegelnden Oberflächen liefern, sind durch eine Hilfsfläche (Kittfläche) miteinander verbunden. Weiter hat SIEDENTOPF gezeigt, daß eine strenge Aplanasie dann eintritt, wenn die Meridiankurve der Fläche, an der die erste Spiegelung eintritt, eine Kardioide ist, die zweite spiegelnde Fläche eine Kugel. Die Kardioide habe ihre Spitze oben, ihre Polargleichung sei $R = r(1 + \cos u)$, so muß der Halbmesser der Kugel r sein und der Mittelpunkt um $r/2$ unterhalb der Spitze der Kardioide liegen. Die parallel zur Achse einfallenden Strahlen vereinigen sich dann nach zweimaliger Spiegelung streng in der Spitze, und außerdem ist die Sinusbedingung erfüllt, also wird nicht nur ein Punkt, sondern eine Lichtquelle von kleiner Ausdehnung scharf abgebildet. Da jedoch nur eine schmale Zone der Kardioidfläche in Frage kommt, kann man sie durch eine Kugelfläche ersetzen; der Name Kardioidkondensor ist gewählt, um an die theoretische Erkenntnis zu erinnern.

Bei diesem Kondensor ist auf genaue Innehaltung der Einstellung und der Schichtdicke zu achten. Es sind deshalb besondere Kammern für die zu untersuchenden Flüssigkeiten angefertigt. Tragglas und Deckglas bestehen aus geschmolzenem Quarz, da Glas bei der angewandten starken Beleuchtung fluoreszieren würde. Man verwendet besondere Objektive, Glyzerinimmersionen (homogene Immersion für das Quarzglas), deren Apertur natürlich geringer sein muß als die des Kondensors.

Der Kardioidkondensor unterscheidet sich vom Paraboloidkondensor durch die scharfe Abbildung einer kleinen Lichtquelle und deshalb durch besseren Kontrast. Der Paraboloidkondensor ist leichter zu handhaben, da er weniger empfindlich gegen ungenaue Einstellung, Ausrichtung und unrichtige Dicke des Tragglases ist. Empfohlen wird der Paraboloidkondensor für bequeme Sichtbarmachung lebender Bakterien, auch der lichtschwächsten, die Beobachtung von Plankton, feinsten Kristallnadeln, Diatomeen, gröberen Kolloiden; der Kardioidkondensor für Untersuchungen der BROWNschen Molekularbewegung, wie von Form und Farbe ultramikroskopischer Metallteilchen und von mikrochemischen Reaktionen und Lichtreaktionen in kolloiden oder kristalloiden Lösungen, kurz bei Untersuchungen, die die größte Lichtstärke erfordern. Er wird mit starker Beleuchtung (Bogenlicht, direktem Sonnenlicht) benutzt[1]).

Bei der allseitigen Dunkelfeldbeleuchtung hat die Apertur des Kondensors eine obere und eine untere Grenze a_2 und a_1, und es muß sein

$$a_2 > a_1 > a_0$$

wo a_0 die Apertur des Objektivs ist. Wünschenswert wäre es, a_0 möglichst gleich a_1 zu machen. Inwieweit dies zulässig ist, untersucht M. BEREK[2]).

Statt die Apertur der Beleuchtung größer zu nehmen als die der Beobachtung, wäre auch das umgekehrte Verfahren möglich. Man könnte einen Kondensor von geringerer Apertur benutzen und im Objektiv eine Zentralblende einlegen. Gegen dieses Verfahren ist einzuwenden[3]), daß die Beugungsbilder der ultramikroskopischen Teilchen sich stark ändern: Die Helligkeit des mittleren Scheibchens wird geschwächt, die der ersten Ringe gestärkt, Nadeln und ähnliche Gebilde können dadurch mehrfach erscheinen. Das Aussehen eines Gefüges,

---

Zur Geschichte des Kardioidkondensors, ebenda Bd. 28, S. 52—55. 1911; H. SIEDENTOPF, Über ultramikroskopische Abbildung, ebenda Bd. 26, S. 391—410. 1909; Über einen neuen Fortschritt in der Ultramikroskopie. Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 12, S. 6—47. 1910; ferner Druckschriften der Firmen E. Leitz und C. Zeiss. (Mikro. 306, 308.)

[1]) Nach Zeissischen Druckschriften, besonders Mikro 308.

[2]) M. BEREK, Zur Theorie der Spiegelkondensoren für Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 40, S. 225—240. 1923.

[3]) H. SIEDENTOPF, ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 26, S. 392—395. 1909.

z. B. eines Gitters, kann verändert werden. Wirken das Hauptmaximum und je ein Nebenmaximum auf jeder Seite zusammen, so muß die Abblendung des Hauptmaximums den Schein eines doppelt so feinen Gitters hervorrufen (s. Ziff. 176).

203. Zur Theorie der Dunkelfeldbeleuchtung. Zur Theorie der einseitigen oder allseitigen Dunkelfeldbeleuchtung ist noch zu bemerken, daß das Auflösungsvermögen im allgemeinen geringer sein wird, als das bei Hellfeldbeleuchtung und gleicher Apertur der Beobachtung[1]).

Es sei (Abb. 239) $LMRD$ ein Schnitt der Brennebene des Objektivs, M der Achsenpunkt, L und R die der äußersten Schiefe der Beobachtungsapertur entsprechenden Punkte, D die Richtung der Beleuchtung, so ist bei Erfüllung der Sinusbedingung

$$ML = MR = f' \cdot a_0,$$

wo a_0 die Apertur des Objektivs ist. Ferner

$$MD = f' \cdot a_k,$$

wenn a_k die Apertur der (einseitigen) Beleuchtung bezeichnet. (Es wird vorläufig ein unendlich dünnes Beleuchtungsbündel angenommen.) Man habe nun ein Gitter, dessen Striche senkrecht zu LD stehen. Das Hauptmaximum wird in D sein, die Nebenmaxima je in der Entfernung η voneinander:

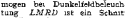


Abb. 239. Das Auflösungsvermögen bei Dunkelfeldbeleuchtung. $LMRD$ ist ein Schnitt der Brennebene des Objektivs, LR die Öffnung, D die Richtung der Beleuchtung.

$$\eta = f' \lambda_0 / \varepsilon \qquad \text{[s. Gleichung (41a)]},$$

wo ε die Gitterkonstante ist. Damit das Gitter aufgelöst werden kann, müssen mindestens zwei Maxima in das Gebiet LR fallen. Denkt man sich zunächst das Gitter sehr weit, so wird dies der Fall sein. Laßt man aber das Gitter feiner und feiner werden, so werden alle Nebenmaxima nach links wandern, und ihr Abstand wird größer werden. Hat ein Maximum, es sei das $\mathfrak{h}$te, L erreicht, während das $\mathfrak{h}-1$te sich rechts von M befindet, so wird bei weiterer Verfeinerung des Gitters das $\mathfrak{h}$te Maximum aus LR herausfallen, das $\mathfrak{h}-2$te noch nicht eingetreten sein, d. h. es ist keine Auflösung möglich. Dies tritt ein, wenn

$$\mathfrak{h}\eta = DL = f'(a_k + a_0) \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{h} f' \lambda_0/\varepsilon = f'(a_k + a_0),$$

oder

$$\varepsilon = \mathfrak{h} \lambda_0/(a_k + a_0)$$

und gleichzeitig

$$\eta > LM = f' \cdot a_0, \qquad \text{oder} \qquad (a_k + a_0)/\mathfrak{h} > a_0, \qquad \text{oder} \qquad (\mathfrak{h} - 1)\, a_0 < a_k$$

wird, und zwar ist das gröbste Gitter, für das dieser Fall eintritt, durch die größte Zahl $\mathfrak{h}$ bestimmt, die der Ungleichung genügt. Wird nun aber das Gitter noch feiner, so kann es wieder auflösbar werden, wenn nämlich das $\mathfrak{h}-2$te Maximum auf R fällt, während das $\mathfrak{h}-1$te noch rechts von L bleibt, also bei

$$(\mathfrak{h} - 2)\,\eta = DR = f'(a_k - a_0), \qquad \text{oder} \qquad \varepsilon = (\mathfrak{h} - 2)\,\lambda_0/(a_k - a_0).$$

Die Auflösbarkeit hat wieder ihre Grenze, wenn das $\mathfrak{h}-1$te Maximum nach L gelangt, für:

$$\varepsilon = (\mathfrak{h} - 1)\,\lambda_0/(a_k + a_0).$$

[1]) H. SIEDENTOPF, Über das Auflösungsvermögen der Mikroskope bei Hellfeld- und Dunkelfeldbeleuchtung. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 32, S. 1–42. 1915; s. auch M. BEREK, Betrachtungen zur Darstellung des Abbildungsvorganges im Mikroskop und zur Frage des Auflösungsvermögens im Hellfeld und Dunkelfeld, ebenda Bd. 41, S. 1–15. 1924.

D. h. ein Gitter ist auflösbar für:

$$e \geqq \mathfrak{h}\,\lambda_0/(a_k + a_0) \tag{60}$$

$$(\mathfrak{h} - 2)\,\lambda_0/(a_k - a_0) \geqq e \geqq (\mathfrak{h} - 1)\,\lambda_0/(a_k + a_0), \tag{60a}$$

$$(\mathfrak{h} - 3)\,\lambda_0/(a_k - a_0) \geqq e \geqq (\mathfrak{h} - 2)\,\lambda_0/(a_k + a_0), \tag{60b}$$

usf. Hier ist $\mathfrak{h}$ die größte ganze Zahl, die der Ungleichung

$$(\mathfrak{h} - 1)\,a_0 < a_k \tag{61}$$

genügt. Äußerst schiefe Hellfeldbeleuchtung bildet den Übergang zur Dunkelfeldbeleuchtung; sie ist gekennzeichnet durch $a_0 = a_k$, $\mathfrak{h} = 1$, so daß die Bedingung $e \geqq \mathfrak{h}\lambda_0/(a_k + a_0)$ zu $e \geqq \lambda_0/2a_0$ wird, übereinstimmend mit (43b).

Die Untersuchung zeigt, daß bei Dunkelfeldbeleuchtung unter Umständen ein feines Gitter aufgelöst werden kann, ein etwas gröberes nicht. Statt e kann man auch λ_0 als veränderlich ansehen, und auf ähnliche Weise erkennt man, daß möglicherweise ein Gitter von bestimmter Feinheit durch rotes Licht auflösbar ist, durch grünes nicht, wogegen bei Hellfeldbeleuchtung stets das Licht von kleinerer Wellenlänge günstiger ist.

Die Ungleichungen nehmen ein Ende, wo die linke Seite kleiner wird als die rechte. Damit also noch ein Gebiet:

$$h\,\lambda_0/(a_k - a_0) \geqq e \geqq (h + 1)\,\lambda_0/(a_k + a_0) \qquad (h < \mathfrak{h})$$

vorhanden ist, muß:

$$\frac{h}{h+1} \geqq \frac{a_k - a_0}{a_k + a_0} = \frac{a_k/a_0 - 1}{a_k/a_0 + 1}$$

oder

$$2h + 1 \geqq a_k/a_0 \tag{62}$$

sein. Im Falle der Gleichheit ist $h = (a_k - a_0)/2a_0$, und die letzte Auflösung kommt für

$$e = \lambda_0/2a_0$$

zustande; für den Fall der Ungleichheit ist dieser Grenzwert größer.

Das Ergebnis wird nicht anders, wenn man allseitig schiefe Dunkelfeldbeleuchtung annimmt, wie H. SIEDENTOPF durch eine Zeichnung der bei verschiedenen Azimuten entstehenden Beugungsmaximis zeigt[1]). Dagegen ist zu beachten, daß das Beleuchtungsbündel nicht unendlich dünn ist, und daher statt einer Zahl a_k ein gewisses Bereich in Frage kommen wird (beim Paraboloidkondensor etwa 1,05 bis 1,33), so daß auch die Bereiche der Auflösbarkeit vergrößert werden.

M. BEREK macht darauf aufmerksam, daß bei Dunkelfeldbeleuchtung auch das feinere Aussehen an und für sich auflösbarer Gebilde stark verändert werden müsse, da bei ihr nur Nebenmaxima hoher Ordnung mitwirken.

204. Der Wechselkondensor. Es ist danach der Wunsch begreiflich, bequem zwischen Hellfeld und Dunkelfeld wechseln zu können. Dieser Aufgabe dient der Wechselkondensor (Helldunkelfeldkondensor).



Abb. 240. Der Wechselkondensor (nach einer Zeissischen Druckschrift). Der linke Hebel bewirkt den Übergang von der Hellfeldbeleuchtung zur Dunkelfeldbeleuchtung und umgekehrt. Der rechte Hebel gestattet durch Verschiebung des einen Kondensorteils einen Unterschied in der Dicke des Tragglases auszugleichen.

[1]) H. SIEDENTOPF, ZS. f. wiss. Mikr. Bd. 32, S. 24. 1915.

In den innern Raum des Paraboloidkondensors ist eine Linsenfolge eingebaut; durch einen einfachen Handgriff kann sie eingeschaltet und das Paraboloid ausgeschaltet werden und umgekehrt.

205. Sonderfälle ultramikroskopischer Beobachtung. Eine besondere Behandlung fordern Teilchen, die in einer Richtung mikroskopisch, in der andern ultramikroskopisch sind (lineare Objekte, Nadeln, Kanten)[1].

Wenn ein einzelner Punkt eine Kugelwelle erzeugt, so mussen sich diese Wellen bei einer Nadel nach dem HUYGENSischen Prinzip zusammensetzen Es entsteht bei einseitiger Beleuchtung eine Kegelwelle, die Nadel ist die Achse, und eine Erzeugende steht senkrecht zur Einfallsrichtung des Lichtes. Die Fortpflanzung erfolgt also längs eines Kegelmantels, der zu der Wellenfläche senkrecht steht, die Nadel zur Achse und die Einfallsrichtung zur Erzeugenden hat. Damit die Nadel sichtbar ist, muß Licht in der Richtung eines Teils der Erzeugenden ins Mikroskop fallen.

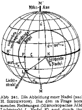


Abb 241. Die Abbildung einer Nadel (nach H. SIEDENTOPF). Die drei in Frage kommenden Richtungen (Mikroskopachse MM' Lichtstrahl L, Nadel K) sind durch ihre Schnittpunkte mit einer Kugel vom Radius 1 gekennzeichnet. K ist senkrecht zu M. K wird Achse des Beugungsbundels mit der halben Öffnung ϱ. In der Zeichnung liegt die Richtung K so, daß der Kegel gerade mit einer Erzeugenden die Apertur des Mikroskops berührt, dasselbe ist der Fall, wenn die Nadel in die Richtung K' gedreht wird. Bei den durch die Strecke KFK' gekennzeichneten Richtungen ist ϱ kleiner, es findet also keine Abbildung der Nadel statt, wohl aber, wenn die Richtung der Nadel einem Punkte der stark gezeichneten Strecke KK' entspricht.

Es liege zunächst (Abb. 241) die Nadel senkrecht zur Mikroskopachse (in der Tischebene), der Winkel zwischen der Achse und der Lichtrichtung sei α_k ($n \sin\alpha_k = a_k$), endlich der Winkel der Richtung der Nadel gegen die Ebene Achse — Lichtrichtung (das Azimut der Nadel) ζ, dann gibt die spharische Trigonometrie für den Winkel der Nadel mit dem Mantelstrahl des Kegels:

$$\cos\varrho = \sin\alpha_k \cos\zeta\,. \qquad (63)$$

In die Apertur des Mikroskops können nur dann Strahlen fallen, wenn für den Öffnungswinkel

$$U > 90° - \varrho\,, \qquad (63\,a)$$

also

$$\sin U > \sin\alpha_k \cos\zeta \qquad (63\,b)$$

ist. Für $\zeta = 0$ wird, wegen $\alpha_k > U$, die Nadel unsichtbar sein, sie wird erst sichtbar werden, wenn sie gegen das einfallende Licht eine gewisse Neigung hat. Bei allseitiger Dunkelfeldbeleuchtung kann ein Verschwinden der Nadel nicht auftreten, da ζ alle möglichen Werte annimmt und für einen Teil die Ungleichung erfüllt ist.

Dagegen kann die Nadel bei geneigter Lage auch bei allseitiger Dunkelfeldbeleuchtung unsichtbar bleiben.

In den angeführten Abhandlungen von SIEDENTOPF sind eine Anzahl auffallender Erscheinungen erklärt.

[1]) H. SIEDENTOPF, Die Sichtbarmachung von Kanten im mikroskopischen Bilde. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 25, S. 424—431. 1908. Über ultramikroskopische Abbildung linearer Objekte, ebenda Bd. 29, S. 1—47. 1912; E. MABY, Die räumliche Lagerung von Kanten im mikroskopischen Objekt bei Dunkelfeldbeleuchtung, ebenda Bd. 29, S. 48—57. 1912.

ε) Mikroprojektion und Mikrophotographie.

206. Allgemeines über Mikroprojektion. Die Projektion mikroskopischer Gegenstände erfolgt in ähnlicher Weise wie die größerer Gegenstände (die Makroprojektion), d. h. es sind mehrere Linsenfolgen zu unterscheiden, von denen die erste — oder die ersten — der Beleuchtung, die weiteren der Abbildung dienen. Für schwächere Vergrößerungen kann man ähnliche Vorrichtungen anwenden wie bei der Makroprojektion, doch benutzt man besondere Objektive

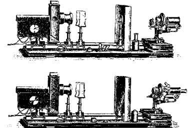


Abb. 242. Eine Vorrichtung für Mikroprojektion, oben für schwache, unten für starke Vergrößerung. $^1/_{16}$ natürliche Größe (nach einer Zeissischen Druckschrift).

Als Lichtquelle dient eine Bogenlampe, davor befindet sich eine aplanatische Linsenfolge, der Kollektor. Es folgt eine Wasserkammer, in einiger Entfernung ein Schirm zur Abhaltung von Nebenlicht, auf der rechten Seite der Abbildung der Kondensor und der Bildwerfer.

Bei schwachen Vergrößerungen wirft der Kollektor das Bild der Lichtquelle zunächst auf eine vor dem Blendenschirm stehende Sammellinse, dies Bild wird durch einen Brillenglaskondensor auf die Öffnung der Projektionslinse (Mikroplanar) abgebildet. Andrerseits bildet die einzelne Sammellinse die Öffnung des Kollektors auf die Öffnung des Brillenglaskondensors oder auf den unmittelbar dahinter gelegenen Gegenstand ab.

Bei starken Vergrößerungen wird die Einzellinse beiseite geschlagen, als Kondensor dient eine der Abb. 196 bis 199 gegebenen Linsenfolgen, unter Umständen ohne die Frontlinse, als Bildwerfer ein Mikroskop, über dessen Einrichtung Ziff. 209 bis 212 zu vergleichen ist. Der Kollektor bildet die Lichtquelle in die Eintrittspupille (vordere Brennebene) des Kondensors ab, der Kondensor die Öffnung des Kollektors auf den Gegenstand.

(Mikroplanare) von kürzerer Brennweite (20 bis 100 mm), und die Vorrichtung muß so eingestellt werden, daß der Abstand des Gegenstands vom Objektiv entsprechend geringer ist.

Für stärkere Vergrößerungen benutzt man die Mikroskope in der sonst gebräuchlichen oder in einer etwas andern, im folgenden zu besprechenden Zusammensetzung. Zur Beleuchtung dient das KÖHLERsche Verfahren (Ziff. 148), wobei zwei getrennte Folgen, der Kollektor und der Kondensor, wirken; der Kollektor bildet die Lichtquelle in die Eintrittspupille des Kondensors ab.

Eine verhältnismäßig einfache Vorrichtung, bei der das Mikroskop wagerecht gestellt ist, zeigt Abb. 242[1]).

Wie man sieht, ist hier für schwache Vergrößerungen eine Beleuchtungsvorrichtung aus drei getrennten Flächenfolgen (Kollektor, Sammellinse auf Reiter, Brillenglaskondensor) angewandt worden. Ein Kondensor wie in Abb. 196 bis 199 würde aus den gleichen Gründen wie unter Ziff. 147 letzter Abs., eine starke Abschattung hervorrufen.

Oft ist der Kollektor wieder in zwei Flächenfolgen geteilt, von denen die erste (Kollimator) die Strahlen nahezu parallel macht, die zweite (der eigentliche Kollektor) das Bild der Lichtquelle in die Eintrittspupille des Kondensors wirft. Daher kann eine Vorrichtung wie das Epidiaskop mit einigen Änderungen benutzt werden.

Eine besondere Klasse bildet die Projektion mit polarisiertem Licht, der Polarisator kann an verschiedenen Stellen in den Lichtverlauf eingeschaltet werden.

207. Allgemeines über Mikrophotographie. Für die Mikrophotographie ist grundsätzlich die nämliche optische Einrichtung nötig wie zur Mikroprojektion. Man hat verschiedene äußere Formen ausgebildet; bei der Vertikalkammer hat das Mikroskop seine gewöhnliche senkrechte Stellung, bei der Horizontalkammer ist es in wagerechte Lage zu bringen. Die Kammer ist in beiden Fällen am Okularende angebracht.

208. Die Beleuchtungsvorrichtung. Über die Linsenfolge der Beleuchtungsvorrichtung vgl. man A. KÖHLER[2]) und M. BEREK[3]). Eine gleichmäßige Beleuchtung ist nur vorhanden, wenn das Bild der Lichtquelle in die Eintrittspupille des Mikroskops fällt; gleichzeitig soll das Präparat mit der Austrittspupille der Beleuchtungsfolge zusammenfallen, da sonst für seitliche Punkte Abschattung eintreten kann. Durch die Größe des Präparats (das dingseitige Gesichtsfeld des Mikroskops) ist die bildseitige Öffnung der Beleuchtungsfolge, durch die Apertur des Mikroskops die Größe des Bildes der Lichtquelle bestimmt.

Sind f, f' die vordere und hintere Brennweite der Beleuchtungsfolge, $\mathfrak{z}$ der Brennpunktsabstand der Lichtquelle, so wird hiernach:

$$\mathfrak{z}' = f f' / \mathfrak{z}, \tag{64}$$

der Abstand der Eintrittspupille des Mikroskops vom hintern Brennpunkt der Beleuchtungsfolge. Bei den angegebenen Folgen ist eine Blende im hintern Brennpunkt des Kollektivs oder seines ersten Teils angebracht, so daß die Eintrittspupille der ganzen Beleuchtungsvorrichtung im Unendlichen, die Austrittspupille in ihrem hintern Brennpunkte liegt. $\mathfrak{z}'$ ist also für das Mikroskop der Abstand der Eintrittspupille vom Gegenstand.

1) Projektionsapparate. Zeissische Druckschr. Mikro. 380.

2) A. KÖHLER, Eine neue Nernstlampe für Mikroprojektion und Mikrophotographie. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 27, S. 477–488. 1910.

3) M. BEREK, Analytische Entwicklungen zur Frage rationeller Beleuchtungsanordnungen für Mikrophotographie und Mikroprojektion. Bericht über einen neuen mikrophotographischen Apparat der Optischen Werke E. Leitz. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 40, S. 241–257. 1923.

Es sei L der Durchmesser der Lichtquelle (bei stabförmiger oder unregelmäßiger Gestalt ihr kleinster Durchmesser), so ist der Neigungswinkel in der Austrittspupille der Beleuchtungsvorrichtung nach der GAUSSschen Theorie bestimmt durch

$$\operatorname{tg} w_1' = L/2f', \tag{65}$$

ist hingegen die Beleuchtungsfolge aplanatisch, so hat man

$$\sin w_1' = L/2f' \tag{65a}$$

Ist $a_2 = n \sin U_2$ die Apertur des Objektivs, so verlangt die Möglichkeit, mit voller Apertur zu beleuchten (BEREK, Bedingung für höchste Lichtstärke)

$w_1' \geqq U_2$ oder (das Vorzeichen ist hier gleichgültig):

$$a_2 \leqq n\, L/2f' = L/2f, \tag{66}$$

bei einer gegebenen Lichtquelle erhält man die Bedingung

$$f \leqq L/2a_2. \tag{66a}$$

f ist die dingseitige Brennweite der Beleuchtungsfolge, die auch bei einem Immersionskondensor in Luft zu messen ist.

Ist 2η das Gesichtsfeld des Mikroskops, so muß das Öffnungsverhältnis der Beleuchtungsfolge mindestens

$$2\eta/f'$$

sein, der dingseitige Öffnungswinkel wird danach

$$\operatorname{tg} u_1 \geqq \eta/f. \tag{67}$$

Da man u_1 nicht allzusehr über diesen Betrag hinaus steigern wird, so erhält man hieraus eine untere Grenze für f, andrerseits auch eine untere Grenze für u_1, da eine Multiplikation mit (66a) zu der Bedingung führt:

$$\operatorname{tg} u_1 \geqq 2\eta \cdot a_2/L, \tag{68}$$

wobei für η und a_2 die größten bei verschiedenen Benutzungen in Frage kommenden Werte zu setzen sind. Endlich gibt die Gleichung

$$\mathfrak{z} = ff'/\mathfrak{z}' \tag{64}$$

für eine gegebene Lage des Präparats und der Eintrittspupille die Stellung der Lichtquelle an.

BEREK untersucht, inwieweit es möglich ist, die Objektive zu wechseln, ohne in der Beleuchtungsvorrichtung etwas zu ändern, und wenn dies nicht gelingt, wann man sich auf Änderung der Abstände beschränken kann.

209. Verschiedene Möglichkeiten für die Zusammensetzung der Abbildungsfolge. — Verschiedene Benutzung von Okular und Objektiv. Für die verschiedenen Möglichkeiten, die Abbildungsfolge zusammenzusetzen, kommt ein Aufsatz von A. KÖHLER in Frage[1]).

a) Man kann unter Fortlassung des Okulars das Zwischenbild auffangen und photographieren. Hiermit lassen sich natürlich nur die verhältnismäßig geringen Vergrößerungen erreichen, die das Objektiv an und für sich hat, die bis etwa 100 gehen; bei den Apochromaten bleibt der Farbenfehler der Vergrößerung unverbessert. Von Vorteil ist der kurze Bau der Kammer.

b) Man läßt das Okular fort, vergrößert aber den Bildabstand so, daß die gewünschte Vergrößerung erreicht wird. Um die nämliche Vergröße-

[1]) A. KÖHLER, Übersicht über die optische Einrichtung des Projektionsmikroskops. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 39, S. 225—248. 1922.

rung $\mathfrak{N}$ zu erhalten, die für die subjektive Beobachtung als maßgebend gilt, mußte wegen

$$\beta = -\mathfrak{x}'/f_1'; \qquad \mathfrak{x}' = -\beta f_1'$$

im Vergleich zu (19)

$$\mathfrak{N} = (-\Delta/f_1')(l/f_2')$$

gelten:

$$\mathfrak{x}'/\Delta = l/f_2' = \mathfrak{N}_2; \tag{69}$$

da $\mathfrak{x}'$ die Länge der Kammer bestimmt, l/f_2', die Lupenvergrößerung des Okulars, etwa bis 10 geht, würde für die Photographie eine sehr unbequeme Länge entstehen.

Außerdem aber muß die Verschiebung des Dingpunktes die Hebung der Fehler beeinflussen. Auf der Dingseite ist

$$\beta = -f_1/\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x} = -f_1/\beta.$$

Nennt man den Abstand, bei dem gewöhnlich beobachtet wird, $\mathfrak{x}_0$, die zugehörige Objektivvergrößerung β_0, so ist ebenso

$$\mathfrak{x}_0 = -f_1/\beta_0.$$

Es ist also der Gegenstand um

$$e = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = -f_1\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_0}\right) \tag{70}$$

zu verschieben.

Da f_1, β, β_0, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_0$ negativ sind, gleichzeitig β absolut größer als β_0, so wird $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ positiv, $\mathfrak{x}$ absolut kleiner als $\mathfrak{x}_0$ sein. Natürlich muß der Gegenstand näher heranrücken. Damit muß (Ziff. 189) eine merkliche Verschlechterung der Fehlerhebung, und zwar[1]) eine Überbesserung, eintreten.

c) Man benutzt Objektiv und Okular, stellt aber — grundsätzlich wie bei einem Übersichtigen — nicht auf unendliche, sondern auf eine positive endliche Entfernung ein. Ist f' die Brennweite des ganzen Mikroskops, so gilt

$$\mathfrak{x}' = -\beta \cdot f',$$

also wesentlich kürzer als bei b) ($-f' < f_1'$, s. Ziff. 139 bis 141).

Da f' negativ ist, $\mathfrak{x}'$ positiv, wird das Bild, anders als bei b), aufrecht stehen. Der Dingort wird auch hier gegen die Beobachtung des rechtsichtigen Auges verschoben sein. Bei dieser ist nämlich der Gegenstand am Brennpunkte des ganzen Mikroskops, bei unserer Projektion um

$$e = \mathfrak{x} = -f/\beta \tag{71}$$

davon entfernt. f und β sind positiv, $\mathfrak{x}$ also negativ, man hat hier sphärische Unterbesserung. Da f meist weit kleiner ist als f_1, β_0 klein gegen β, so wird die Verschiebung geringer sein als im vorhergehenden Falle bei gleichem absoluten Werte von β.

Grundsätzlich kann man mit jedem Okular eine gewünschte Vergrößerung auf die unter b) und c) angegebene Weise erreichen; die Zerstreuungskreise der Fehler werden aber vergrößert werden, wenn man $\mathfrak{x}'$ sehr viel größer als l macht, was eintritt, wenn man mit zu schwachen Okularen eine Vergrößerung erzwingen will.

d) Man zieht das Okular heraus, wie bei der üblichen Einstellung des Fernrohrs für Übersichtige; bei HUYGENSischen Okularen kann man auch die Augenlinse allein verschieben. Hier läßt sich der Fehler, der bei b) oder c) eintritt, vermeiden.

210. Das Projektionsokular. e) Man benutzt statt des Okulars eine besonders berechnete Linsenfolge: das ABBEsche Projektionsokular (der Name ist schlecht,

---

[1]) A. KÖHLER (s. Fußnote S. 539), S. 226—228.

da es nie mit dem Auge verwandt wird). Es hat mit den HUYGENSischen Okularen die Feldlinse gemein, an Stelle der Augenlinse steht aber ein Objektiv, bei dem die sphärische und die Farbenabweichung gehoben sind. Der Abstand dieses Objektivs von der Feldlinse kann geändert und dadurch ähnlich, wie unter d) vermerkt, eingestellt werden. Es ist darauf hinzuweisen, daß sich hierbei die Brennweite und der untere Brennpunkt des Projektionsokulars ändern. Daher ist Δ/f_2 und die Gesamtvergrößerung des Mikroskops für jede Einstellung zu bestimmen. (Bei der Mikrophotographie wird, wie bei der Photographie überhaupt, die Einstellung auf einer Mattscheibe vorgenommen.)

Die bessere Fehlerhebung dieser Vorrichtungen gestattet ihre Verwendung bei etwas größerer Kammerlänge. Die Projektionsokulare sind aber von vornherein nur für geringe Vergrößerungen berechnet, weil zwar der Farbenunterschied der Vergrößerung gehoben ist, das Bildfeld aber mit allen bisher angeführten Ausführungen einen Fehler gemein hat[1]).

Die PETZVALsche Bedingung

$$\sum \varphi/n = 0\,,$$

wo für jede Linse $\varphi = (n-1)(1/r_1 - 1/r_2)$ ist, kann beim Mikroskopobjektiv nicht erfüllt sein, da die Sammellinsen stärker sind als die Zerstreuungslinsen, bei diesen n aber durchschnittlich größer ist. Die PETZVALsche Bedingung ist aber für das kleine Gesichtsfeld des Mikroskopobjektivs maßgebend. Der positive Wert von $\sum \varphi/n$ führt dazu, daß das Zwischenbild, wenn es von Astigmatismus frei ist, nach der Dingseite zu hohl erscheint. Projiziert man das Bild, so wächst der Fehler mit dem Quadrat der Vergrößerung. Für ein gewöhnliches Okular und auch für ein Projektionsokular ist aber ebenfalls $\sum \varphi/n > 0$, so daß der Fehler noch vergrößert wird. Zwar sind hier die Neigungen der Hauptstrahlen größer, und man könnte an eine Hebung (von Zonen abgesehen) mit Hilfe der höheren Glieder der Abweichungen denken; tatsächlich verschlimmern diese bei den üblichen Formen der Okulare den Fehler eher und sind auch gegen die Abweichungen im Objektiv zu klein, als daß sie einen merklichen Einfluß ausüben könnten.

Wenn man daher im Okular den Astigmatismus hebt oder ihm einen Wert gibt, der einen etwaigen Astigmatismus des Objektivs ausgleicht, so bildet das (als auffangbar angesehene) Bild eine nach dem Gegenstande hohle Fläche. Bei der Beobachtung mit dem Auge wird dieser Fehler dadurch ausgeglichen, daß man nach und nach auf die einzelnen ringförmigen Zonen der Fläche einstellt, auf der photographischen Platte müssen aber bei einiger Ausdehnung des Gesichtsfeldes die Außenteile des Bildes unscharf werden.

211. Negativlinsen. f) Daher hat man, zunächst in England und Amerika, Negativlinsen angewandt, die man als amplifier bezeichnet hat. Wie schon bei der Betrachtung der CHEVALIERschen Lupe bemerkt wurde, kann eine gewünschte kurze Brennweite des Gesamtmikroskops

$$f' = -f_1' f_2'/\Delta$$

auch durch ein negatives f_2' erreicht werden. Es liegt jetzt aber die Austrittspupille (Ziff. 140) im Innern, für die Beobachtung mit dem Auge nicht zu erreichen, so daß die Schlüssellochbeobachtung erschwert oder unmöglich gemacht wird. Bei der Projektion fällt dieser Nachteil fort.

Eine gewünschte Vergrößerung β wird erreicht, wenn

$$\mathfrak{k}' = -\beta f'$$

[1]) H. BOEGEHOLD u. A. KÖHLER, Das Homal, ein System, welches das mikrophotographische Bild ebnet. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 39, S. 249—262. 1922.

ist; man hat also wieder negatives β, ein auf dem Kopfe stehendes Bild. Durch Veränderung von Δ kann man einstellen.

Der negative Wert von φ/n wird beim amplifier die Abweichung von der PETZVALbedingung und damit die Bildfeldwölbung verringern, bei stärkern Objektiven nicht gehoben haben. Dagegen mußte — im Gegensatze zum Falle der CHEVALIERschen Lupe — der Farbenunterschied der Vergrößerung durch eine einfache Zerstreuungslinse verschlimmert werden.

Bei der CHEVALIERschen Lupe ist (Ziff. 140) das virtuelle Bild der Objektivöffnung (Abb. 243) so groß, daß man für die Folge Lupe + Auge den bildseitigen Kreuzpunkt der Hauptstrahlen nicht in diesem Bilde, sondern im Augendrehpunkt anzunehmen hat. Der Winkel zwischen zwei Hauptstrahlen, die von zwei Dingpunkten O_1 und O_2 ausgehen und sich im Augendrehpunkte schneiden,



Abb. 243. Die CHEVALIERsche Lupe. O_1, O_2 der Gegenstand, I, II die Linsen, A das Auge. Der in der Sammellinse entstandene Farbenfehler der Vergrößerung wird durch die Zerstreuungslinse ganz oder zum Teil gehoben, weil die eine den Winkel zwischen den Hauptstrahlen vergrößert, die andere ihn verkleinert.

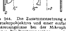


Abb. 244. Die Zusammensetzung eines Mikroskopobjektivs und einer einfachen Zerstreuungslinse bei der Mikrophotographie. Die Zerstreuungslinse verschlimmert den Farbenfehler der Vergrößerung, weil sie den Winkel der Hauptstrahlen weiter vergrößert. $P_6^{\times}$ ist die Austrittspupille des Objektivs, $P_4^{\times\times}$ die der Zerstreuungslinse, O der Gegenstand, $_{\times}O$ das Zwischenbild, $O^{\times\times}$ das schließliche Bild.

wird durch das Objektiv der CHEVALIERschen Lupe vergrößert, durch deren Okular verkleinert, beides bei einfachen Linsen für blaue Strahlen mehr als für rote, bei passender Auswahl des Glases kann man den Farbenunterschied heben.

Fällt hingegen, wie bei der Projektion, allerdings auch schon bei starken Präpariersystemen (siehe Ziff. 140/141), die Austrittspupille der Vorrichtung in ihren hintern Brennpunkt, so vergrößert auch die Zerstreuungslinse den Winkel der Hauptstrahlen (Abb. 244). Daher wird eine einfache Zerstreuungslinse den Fehler des Objektivs verstärken, falls dieses für blaue Strahlen stärker vergrößert als für rote (einfache Sammellinsen, starke Achromate, Apochromate), andernfalls einen Fehler gleicher Art einführen.

212. Zusammengesetzte Negativlinsen. g) Dieser Mangel kann durch zusammengesetzte Folgen von negativer Brennweite beseitigt werden. Gleichzeitig kann man, hauptsächlich mit Hilfe passender Glaswahl, die Zonen des Astigmatismus und der Bildfeldwölbung so ausgleichen, daß die Abweichungen des Objektivs ziemlich beseitigt sind. Wollte man die PETZVALsche Bedingung für die Gesamtfolge erfüllen, so müßte man die negative Folge so stark machen, daß die Benutzung schwierig oder unmöglich wäre. Aber auch der Ausgleich ist nur mit negativen Folgen von kurzer Brennweite gelungen, und daher ist das vorgeschlagene Verfahren besonders für starke Vergrößerungen von Vorteil. Hierher gehören die Homale der Firma C. Zeiss[1]).

[1]) Außer der unter Ziff. 211 erwähnten Arbeit kommen in Frage: H. BOEGEHOLD, Die Ebnung des mikrophotographischen Bildes (das Homal). Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 487—488. 1922; die Zeissischen Druckschr.; Photographisches Okular (Phoku) nach H. SIEDENTOPF, 2., erweiterte Ausg. 1923, Mikro 373; Das Homal, Mikro 390.

Da die Bildfeldfehler der verschiedenen Objektive voneinander abweichen, müßte streng genommen für jedes ein besonderes Homal angegeben werden, doch ist es ausreichend, einige Gruppen zu bilden und für jede eine Negativfolge zu geben. Die Homale haben durchweg den Vergrößerungsunterschied der Kompensationsokulare, da sie hauptsächlich mit Apochromaten verbunden sind.

Eine Reihe von Homalen von gleicher Brennweite (-20 mm) ist auf die verschiedenen Objektivgruppen abgestimmt. Wäre das Bild im Unendlichen, so könnte man für die Gesamtbrennweite setzen

$$f' = -V_1 f_2' = 20 V_1,$$

wobei V_1 die gewöhnliche Vergrößerung des Objektivs ist. Streng genommen wird Δ nicht den üblichen Wert haben, doch wird f' genügend richtig sein, um g' näherungsweise zu bestimmen. Über die äußere Form der Homale vergleiche man die erwähnten Arbeiten.

213. Die Mikrophotographie mit ultraviolettem Licht[1]**).** Die ABBEsche Bedingung für die Auflösbarkeit eines regelmäßigen Gefüges

$$e \geqq \lambda_0/2a$$

zeigt, daß mit abnehmendem λ_0, ebenso wie mit zunehmendem a, kleinere Einzelheiten beobachtet werden können. Für das Sonnenlicht muß man für λ_0 den Durchschnittswert, etwa $550\,\mu\mu$, setzen. Im günstigsten Falle kann man also, wenn (Monobromnaphthalinimmersion) $a = 1{,}6$ ist, bis zu

$$e = 550\,\mu\mu/3{,}2 = 172\,\mu\mu$$

gelangen. Die Benutzung einfarbigen, blauen oder violetten Lichtes führt nicht sehr viel weiter, und die Beobachtung mit dem Auge kann bei der Lichtschwäche wenig Erfolg haben. Zu viel kleineren Werten von λ_0 und damit von e gelangt man durch die Benutzung des ultravioletten Lichtes, wobei man freilich auf die subjektive Beobachtung von vornherein verzichtet und sich an die photographische Platte halten muß.

214. Der Monochromat. Will man aber wirklich weit ins ultraviolette Gebiet gelangen, so kann man keine Linsenfolgen aus Glas benutzen, da diese zu stark verschlucken. In Frage kommen Quarz und Flußspat, doch ist es unmöglich, Objektive mit Farbenhebung für größere Aperturen herzustellen, da die Krümmungen zu stark würden. Dies zwingt dazu, einfarbiges Licht zu benutzen. Man läßt einen elektrischen Funken zwischen zwei Metall-(Kadmium-)Elektroden überspringen, zerlegt das Licht durch Prismen und sondert die gewünschte Wellenlänge mit Hilfe einer Irisblende aus, die für den Kondensor die Eintrittspupille bildet[2]). Die Strahlen der Lichtquelle F (Abb. 245) werden durch einen Kollimator K_1 parallel gemacht, die Prismen P_1 und P_2 lenken das Licht der Wellenlänge, die benutzt werden soll (der Kadmiumlinie $275\,\mu\mu$), um $90°$ ab, wobei sie nahezu im Minimum der Ablenkung durchsetzt werden. Der Kollektor K_2 vereinigt die Strahlen zu einem Bilde des Funkens. Diese Teile liegen wagerecht. Bevor das Funkenbild zustande kommt, wird das Licht durch ein totalreflektierendes Prisma P nach oben geworfen, und das Bild fällt in die Eintrittspupille des Kondensors K_3. Der Kondensor besteht ebenso wie alle bisher erwähnten Teile aus Bergkristall und bildet eine zwei- bis vierteilige Folge. Im

---

[1]) A. KÖHLER, Mikrophotographische Untersuchungen mit ultraviolettem Licht. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 21, S. 129—165 u. 273—304. 1904; Mikrophotographische Einrichtung für ultraviolettes Licht. Zeissische Druckschr. Mikro 170.

[2]) S. auch die ältere Abhandlung von A. KÖHLER, Beleuchtungsapparat für gleichmäßige Beleuchtung mikroskopischer Objecte mit beliebigem einfarbigem Licht. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 16, S. 1—28. 1899.

letzten Falle hat er eine Brennweite von etwa 4 mm und kann durch eine geeignete, ultraviolettes Licht durchlassende Flüssigkeit zwischen oberster Linse und Tragglas die Apertur 1,30 erhalten. Als solche Flüssigkeit dient am besten Glyzerin. Das Tragglas ist wiederum aus Bergkristall.

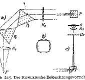


Abb. 245. Die KOHLERsche Beleuchtungsvorrichtung zum Monochromaten.

a) Der Strahlengang bis zum totalreflektierenden Prisma (wagerechter Durchschnitt). F ist der Achsenpunkt der Lichtquelle (des Funkens). P_1, P_2 Prismen, die das gewünschte einfarbige Licht ausscheiden. K_1 der Kollimator, K_2 der Kollektor, P ein total reflektierendes Prisma.
c) Der Strahlengang vom Prisma P bis zur Dingebene (senkrechter Durchschnitt). Ur die Blendenebene des Kondensors, K_3 der Kondensor, O Tragglas und Deckglas.
K_1 und K_2 entwerfen ein Bild des Funkens in der Blende, wo sich eine Uranglasplatte befindet, durch deren Fluoreszenz man die Ausrichtung der Vorrichtung prüfen kann. — Der Kondensor bildet die Austrittspupille des Kollektors in der Dingebene ab.
b) ist die Austrittspupille des Kollektors von P aus gesehen.

Dagegen kann für das Objektiv (einschließlich des Deckglases) kein doppeltbrechender Stoff verwandt werden. Durch Schmelzen gelang es, amorphen Quarz herzustellen. Die Form des Objektivs (Monochromat) wurde von M. v. ROHR angegeben: Aus lauter Sammellinsen ließ sich eine Folge von großer Apertur bestimmen, bei der die sphärische Abweichung für Licht einer Wellenlänge sehr vollkommen gehoben war, mit einer Zusatzlinse war auch die Sinusbedingung erfüllt. Es sind 1902 ein Trockensystem und zwei Immersionssysteme hergestellt worden, das stärkste Objektiv hatte eine Brennweite von 1,7 mm und eine Apertur von 1,3. Als Immersionsflüssigkeit diente wieder Glyzerin, durch passende Verdünnung mit Wasser konnte die Immersion homogen gemacht werden.

215. Sonderokulare. Zu den Objektiven kommen „Okulare" (der Ausdruck ist hier wieder schlecht) von HUYGENSischer oder RAMSDENscher Form, die aus Bergkristall angefertigt werden, die Brennweite etwa zwischen 40 und 10 mm. Bei der üblichen Länge des Mikroskops erhält man Vergrößerungen von 200 bis über 3000, wenn man die drei Objektive mit den verschiedenen Okularen benutzt und die Länge der Kammer zu 250 bis 310 mm nimmt.

Die starke Vergrößerung rechtfertigt sich durch das große Auflösungsvermögen, das trotz der (infolge des niederen Brechungsverhältnisses des Glyzerins) geringeren Apertur dem der Monobromnaphthalinimmersion (Ziff. 178) weit überlegen ist. Der Grenzwert von ε ist:

$$\varepsilon = 275\ \mu\mu/2 \cdot 1{,}3 = 106\ \mu\mu .$$

Da die Apertur hiernach allein nicht das Maß des Auflösungsvermögens bestimmt, führt A. KÖHLER den Begriff des relativen Auflösungsvermögens ein. Er setzt

$$A_r = a \cdot \frac{550}{\lambda_0}, \tag{72}$$

wo λ_0 (in $\mu\mu$) sich auf die benutzte Wellenlänge (bei nicht einfarbigem Licht auf den Durchschnitt) bezieht; für ein mit Tageslicht benutztes Objektiv ist $\lambda_0 = 550$, daher

$$A_r = a, \tag{72a}$$

für die Monobromnaphthalinimmersion:

$$A_r = 1{,}6 ,$$

für den Monochromaten aber:

$$A_r = 1{,}3 \cdot \frac{550}{275} = 2{,}6\,.$$

Zur Einstellung ist bei der Mikrophotographie mit ultraviolettem Licht die Fluoreszenz zu verwenden. Beim Monochromaten genugt die Helligkeit nicht, wenn eine fluoreszierende Platte an die Stelle der Mattscheibe gesetzt wird; KÖHLER gibt deshalb eine besondere Vorrichtung an.

Auf der Photographie mit ultraviolettem Lichte beruhte auch das Instrument, mit dem im Sommer 1925 in England die Aufsehen machenden Untersuchungen über den Erreger des Krebses angestellt wurden.

216. Stereoskopische Aufnahmen. Die verschiedenen Mittel sind bei M. v. ROHR[1]) zusammengestellt. Man kann bei zwei getrennten Linsenfolgen zwei Aufnahmen gleichzeitig erhalten, oder mit einer Linsenfolge die Aufnahmen nacheinander machen, selbstverständlich so, daß die Eintrittspupillen des Mikroskops eine verschiedene Stellung zum Gegenstande haben.

Erreicht wird dies durch Verschiebung des Gegenstandes (bei schwachen Objektiven), durch Neigung des Mikroskops oder des Gegenstandes (stereoskopische Wippe), durch Abblendung verschiedener Teile der Öffnung, endlich auch durch Beleuchtung mit schiefem Licht, das bei einer Aufnahme von rechts, bei der andern von links einfällt.

ζ) Zeichenvorrichtungen am Mikroskop.

217. Die Entwicklung der Zeichenvorrichtungen. Die verschiedenen Projektionsmikroskope können als Zeichenvorrichtungen benutzt werden, indem man den Schirm zur Zeichenfläche nimmt. Der Wunsch, bei schwacher Vergrößerung eine wagerechte Zeichenfläche zu haben, veranlaßte L. EDINGER 1891, einen Apparat anzugeben[2]), bei dem eine Lupe das Bild des Gegenstandes nach abwärts, auf die Tischfläche warf. Stärkere Vergrößerungen erhielt EDINGER 1907[3]), indem er eine der gewöhnlichen entgegengesetzte Stellung des Mikroskops (der Kondensor oberhalb, das Mikroskop unterhalb des Gegenstandes) benutzte. Die Vorrichtung wurde zunächst von E. Leitz, später auch von andern Firmen ausgeführt [siehe die Mitteilung von E. WYCHGRAM[4])], meist so, daß sie auch zur Projektion und Photographie verwandt werden kann. Eine einfachere Form, nur zum Zeichnen, gibt F. K. STUDNIČKA[5]).

Eine Verbindung der Zeichenvorrichtung mit der Mikroprojektion und -photographie enthält der Projektionsapparat nach A. GREIL[6]), der auch für große Gegenstände anzuwenden ist.

218. Der Abbesche Zeichenapparat. Eine andre Art von Zeichenapparaten beruht darauf, daß man gleichzeitig das mikroskopische Bild des Gegenstandes

[1]) M. v. ROHR, Die binokularen Instrumente, 2 Aufl., Berlin, Julius Springer 1920. Die Zusammenstellung der in Frage kommenden Abhandlungen steht auf S. 266—267.

[2]) L. EDINGER, Ein neuer Apparat zum Zeichnen schwacher Vergrößerungen. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 8, S. 179—181. 1891.

[3]) L. EDINGER, Ein neuer Apparat zum Zeichnen und Projizieren. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 24, S. 26—34. 1907.

[4]) E. WYCHGRAM, Aus optischen und mechanischen Werkstätten. VI. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 30, S. 319—348. 1913. Die Bemerkung findet sich S. 338—340.

[5]) F. K. STUDNIČKA, Ein Schrank zum Zeichnen mikroskopischer Präparate. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 40, S. 353—358. 1923.

[6]) A. GREIL, Über die Verwendung des NERNSTschen Glühlichtes im biologischen Laboratorium nebst Bemerkungen über die photographische Aufnahme von Embryonen. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 23, S. 257—285. 1906; s. auch: Der Projektionszeichenapparat nach GREIL. Zeissische Druckschr. Mikro 255; E. WYCHGRAM, s. die oben angeführte Abhandlung S. 340—342.

und ein damit zusammenfallendes Bild der Zeichenfläche sieht. Hierbei kann[1]) die Eintrittspupille des Auges geometrisch oder physikalisch geteilt sein, d. h. es kann ein Teil der das Auge treffenden Strahlen vom Ding, der andre von der Zeichenfläche kommen, oder jeder Strahl ähnlich wie unter Ziff. 194 nach beiden zurückführen. Es soll nur die auf mechanischer Teilung beruhende ABBEsche Zeichenvorrichtung kurz erwähnt werden, ihre Grundsätze sind von S. CZAPSKI auseinandergesetzt worden[2]), die erste Ausführung ist 13 Jahre älter als der CZAPSKIsche Aufsatz.

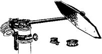


Abb. 246 Der ABBEsche Zeichenapparat. Etwa $^1/_2$ natürliche Größe (nach einer Zeissischen Druckschrift). In dem Aufsatz befindet sich das ABBEsche Würfelchen (Text), es teilt die Pupille so, daß das vom Mikroskop entworfene Bild und — mit Hilfe des seitlichen Spiegels — die Zeichenfläche gleichzeitig zu sehen sind. Über das Würfelchen kann eine Kappe gestülpt werden, die Rauchglasfenster von verschiedener Durchsichtigkeit hat und damit die Helligkeit des vom Spiegel kommenden Lichtes regelt. Die Regelung der Helligkeit des mikroskopischen Bildes erfolgt durch eine exzentrische Scheibe mit Rauchgläsern (unterhalb des Prismas). Das Würfelchen kann zur Seite geklappt werden. Angebracht wird die Vorrichtung mit einem Klemmring nahe am oberen Ende des Tubus.

Die Vorrichtung[3]) (Abb. 246) enthält das ABBEsche Würfelchen, das aus zwei miteinander verkitteten rechtwinkligen Prismen besteht, von denen das eine auf der Hypotenusenfläche versilbert ist. In der Mitte des Belags ist eine elliptische Öffnung frei, deren Projektion auf die Kathetenfläche ein Kreis von 1 oder 2 mm Durchmesser ist. Man bringt das Würfelchen über dem Okular so an, daß die Austrittspupille des Mikroskops mit der Öffnung zusammenfällt; damit die Apertur nicht oder möglichst wenig verringert wird, ist für die schwachen Vergrößerungen mit weiterer Austrittspupille die größere Öffnung zu gebrauchen. Das unmittelbar über dem Würfelchen beobachtende Auge sieht, da die Öffnung seine Eintrittspupille nicht ausfüllt, auch Gegenstände, die sich in der Versilberung spiegeln. Durch einen an einem seitlichen Arme sitzenden Spiegel wird ein Bild der Zeichenfläche erzeugt, das von der Versilberung zum zweiten Male abgebildet wird, und dies durch doppelte Spiegelung entstandene Bild fällt mit dem mikroskopischen Bilde des Gegenstandes zusammen. Das Auge muß akkommodieren und das Mikroskop auf die betreffende endliche Entfernung eingestellt sein; ist dem Auge die Akkommodation nicht möglich, so muß es sich einer Hilfslinse bedienen. Um die Helligkeit beider Bilder gegeneinander abzustufen, muß man beide durch passend angebrachte Rauchgläser schwächen können. Die ganze Vorrichtung ist so angebracht, daß sie leicht beiseite geklappt werden kann, worauf wie gewöhnlich beobachtet wird.

Das Bild der Zeichenfläche kann nur dann mit dem des Gegenstandes in seiner ganzen Ausdehnung zusammenfallen, wenn beide dieselbe Stellung im Raume haben. Die entstehende Zeichnung muß verzerrt werden, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Ist die Zeichenfläche senkrecht zur Mikroskopachse

[1]) CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 528—529. 656—657.

[2]) S. CZAPSKI, Über einen neuen Zeichenapparat und die Construction von Zeichenapparaten im allgemeinen. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 11. S. 289—298. 1894.

[3]) Gebrauchsanweisung für die ABBEschen Zeichenapparate. Zeissische Druckschr. Mikro 118 (4. Ausg. 1910).

(bei aufrechtem Mikroskop also wagerecht), so muß die Fläche des seitlichen Spiegels der Versilberungsfläche des Würfelchens parallel sein. Bei geneigter Zeichenfläche muß der seitliche Spiegel um den halben Winkel geneigt sein. Bei wagerechter Lage und richtiger Stellung des Spiegels wird jedoch ein Teil des Bildes nicht mehr auf das Bild des Papiers fallen, das neben dem Mikroskop liegt. Daher hat W. BERNHARD[1]) einen Zeichentisch empfohlen, durch dessen Einrichtung die Verzerrung vermieden werden kann.

Es sei noch auf den Aufsatz von A. KASPAR[2]) verwiesen, obwohl die dort angegebenen Anwendungen zum größten Teile nicht hierher gehören.

η) Spektralapparate am Mikroskop.

219. Das Spektralobjektiv nach Th. W. ENGELMANN[3]). Es ist an Stelle der Beleuchtungsvorrichtung anzubringen. Die Lichtquelle wird auf einen Spalt abgebildet, sodann durch ein Prisma die Zerlegung vorgenommen und durch ein Objektiv ein Bild in der Dingebene erzeugt. Man untersucht:

1. die Wirkung von Licht verschiedener Wellenlänge auf das Präparat. Man kann die Wirkung auf nebeneinanderliegende Teile beobachten oder einen schmalen Gegenstand nacheinander in verschiedene Teile des Spektrums bringen;
2. die Verschluckung des verschiedenfarbigen Lichtes durch den Gegenstand.

220. Das Spektralokular nach ABBE[4]) gibt Abb. 247. Das Okular besteht aus einer Feldlinse und einer zusammengesetzten Augenlinse. Zwischen beiden befindet sich der Spalt, über der Augenlinse das geradsichtige Prisma.

Im Okular ist eine Teilung auf Wellenlängen, die vom Spiegel (rechts oben) beleuchtet wird. Ein Vergleichsspektrum wird durch den Spiegel links hereingeworfen.

Das Okular kann zur Beobachtung der Verschluckung verschiedenfarbigen Lichtes durch Flüssigkeiten benutzt werden, und zwar ohne Objektiv. Soll die Gesamtwirkung eines Gegenstandes (etwa eines Blattes) ge-

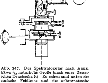


Abb. 247. Das Spektralokular nach ABBE. Etwa 1/3 natürliche Größe (nach einer Zeissischen Druckschrift). Zu sehen sind unten die einfache Feldlinse und die achromatische Augenlinse. Zwischen beiden liegt der Spalt. Die eine Hälfte erhält das Licht mit Hilfe des untern Spiegels von links, diese gibt das Vergleichsspektrum. Die andere Hälfte empfängt das Licht vom Mikroskop aus. Oberhalb der Augenlinse das geradsichtige Prisma und die Beleuchtung der Teilung von rechts aus. Das Okular wird in den Tubus eingeschoben, die zur Spektralbeobachtung dienenden Teile können ausgeschaltet, und das Okular wie ein gewöhnliches benutzt werden.

[1]) W. BERNHARD, Ein Zeichentisch für mikroskopische Zwecke. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 9, S. 439–445. 1892; Bd. 11, S. 298–301. 1894.

[2]) A. KASPAR, Der ABBEsche Zeichenapparat — ein Universalzeichenapparat. ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 41, S. 176–189. 1924.

[3]) TH. W. ENGELMANN, Über Sauerstoffausscheidung von Pflanzenzellen im Mikrospektrum. Pflügers Arch. Bd. 27, S. 485–489. 1882; Le microspectromètre. Arch. néerl. Bd. 23, S. 82–92. 1889; s. auch Mikrospektralobjektiv nach ENGELMANN. Zeissische Druckschr. Mikro 232.

[4]) Mikrospektroskop (Spektralokular nach ABBE mit Wellenlängenskala). Zeissische Druckschr. Mikro 125; über die Photographie von Spektren vgl. man: Die Kammer $4^1/_2 \times 6$ cm zum Mikrospektroskop. Zeissische Druckschr. Mikro 388.

prüft werden, so ist zwar ein Objektiv zu verwenden, der Gegenstand darf aber nicht eingestellt werden. Dies hat hingegen zu geschehen, wenn man die Verschluckung durch einzelne Teile (Zellen, Rippen) feststellen will.

Die vorhergehende Darstellung erhebt keinen Anspruch darauf, die Sondereinrichtungen am Mikroskop auch nur annähernd vollständig erwähnt zu haben. Es ist dies Sache der Lehrbücher der Mikroskopie. Es sind nur solche Anwendungen und Abänderungen erwähnt worden, die optisch ein besonderes Interesse haben.

d) Die Prüfung der Objektive (und Mikroskope).

221. Die Messung der Brennweite und des Gesichtsfeldes. Für die Messung der Brennweite von Objektiven und Mikroskopen gelten die gewöhnlichen Vorschriften. Die Vergrößerung einer Zusammenstellung von Objektiv und Okular kann mit Hilfe des Zeichenapparates bestimmt werden, indem man auf der Zeichenfläche eine Skala anbringt und diese mit einem Objektmikrometer vergleicht; man erhält hiermit $\mathfrak{N}$ natürlich für den Abstand l, den die Zeichenfläche von der Austrittspupille hat.

Die Bestimmung des Gesichtsfeldes kann ebenfalls durch das Mikrometer erfolgen, die Sehfeldzahl des Okulars erhält man durch Multiplikation mit der Objektivvergrößerung.

222. Die Bestimmung der Apertur. Von besondrer Wichtigkeit ist die Bestimmung der Apertur des Mikroskopobjektivs. Es soll nur das ABBEsche Apertometer betrachtet werden, doch sei auf die SIEDENTOPFsche Vorrichtung verwiesen[1], die auf der Sichtbarkeit linearer Gegenstände (Ziff. 205) beruht, wie auf die geschichtlichen Bemerkungen desselben Verfassers.



Abb. 248. Das ABBEsche Apertometer. Etwa $^3/_4$ natürliche Größe (nach einer Zeissischen Druckschrift). Die Vorrichtung wird auf den Tisch des Mikroskops gelegt, und dieses wie bei gewöhnlicher Beobachtung auf die Marke a eingestellt. Dann wird ohne Okular das Bild der beiden Zeiger b, nahezu in der Brennebene des Objektivs, beobachtet und die Zeiger so eingestellt, daß sie das Gesichtsfeld begrenzen. Die Ablesung an der äußern Teilung ergibt sodann die Apertur, die an der inneren den Luftwinkel. — Rechts ein Aufblick auf die äußere (Zylinder-)Fläche, bei dem die Form des Zeigers zu erkennen ist.

Das ABBEsche Apertometer[2] (Abb. 248) beruht auf dem Gedanken, das Mikroskopobjektiv wie ein Fernrohrobjektiv, d. h. zur Beobachtung eines fernen Gegenstandes zu benutzen; indem man hier das Gesichtsfeld feststellt, erhält man ein Maß für die Apertur bei der mikroskopischen Beobachtung. Voraus-

[1] H. SIEDENTOPF, ZS. f. wiss. Mikrosk. Bd. 32, S. 36—41. 1915.

[2] E. ABBE, Beschreibung des Apertometers. Übersetzung einer Abhandlung. Journ. Roy. Mikrosk. Soc. (1) Bd. 1, S. 19—22. 1878. Ges. Abhandlgn. Bd. I, S. 113—118. — Einige Bemerkungen über das Apertometer. Übersetzung einer Abhandlung. Journ. Roy. Mikrosk. Soc. (1) Bd. 3, S. 20—31. 1880; S. 227—243; H. AMBRONN u. A. KÖHLER, Methoden zur Prüfung der Objektivsysteme. Apertometer und Testplatte nach ABBE, Leipzig. S. Hirzel, 1914; Gebrauchsanweisung für das ABBEsche Apertometer. Zeissische Druckschr. Mikro 114.

setzung für eine richtige Messung ist jedoch, daß die Eintrittspupille bei der Aperturbeobachtung sich an derselben Stelle befindet, wo bei der mikroskopischen Beobachtung der Gegenstand ist.

Die Vorrichtung besteht aus einer halbkreisförmigen Glasplatte, auf deren Oberseite sich eine Teilung befindet. Der Durchmesser der Platte ist etwa 90 mm, die Dicke 12 mm. Die Begrenzungsflächen bilden eine Zylinderfläche, zwei parallele wagerechte Ebenen und eine im Winkel unter 45° zu dieser angeschliffenen Fläche.

Auf die Platte sind zwei Zeiger *b* gelegt, deren Spitzen die Zylinderfläche berühren.

In der Achse des Zylinders trägt die geneigte Ebene eine Marke; es ist dort ein Silberscheibchen, das in seiner Mitte eine runde oder spaltförmige Öffnung hat.

Die Scheibe wird auf den Tisch des Mikroskops (Abb. 193, f) gelegt und von seitwärts beleuchtet. Als Lichtquelle kann eine Nernstlampe oder auch Tageslicht dienen; im zweiten Falle „ist vor der Apertometerscheibe ein Blatt weißen, durchscheinenden Papiers so aufzustellen, daß die Zylinderfläche des Apertometers in ihrer ganzen Ausdehnung genügend hell beleuchtet wird". Bei Immersionssystemen ist zwischen Scheibe und Objektiv Immersionsflüssigkeit einzufügen.

Man stellt nun zunächst mit dem zu untersuchenden Objektiv und einem passenden Okular in gewöhnlicher Weise und bei gewöhnlicher Tubuslänge auf die Öffnung im Silberscheibchen ein, die sich möglichst in der Mitte des Sehfeldes befindet. Die Einstellung des Mikroskops ist im folgenden genau festzuhalten.

Dann nimmt man das Okular heraus und beobachtet das Öffnungsbild. Die Lichtstrahlen werden an der geneigten Fläche total reflektiert, und diese Spiegelung liefert Bilder der beiden Zeiger oder ihrer Spitzen in der Richtung der Mikroskopachse. Bei der Ausdehnung der Scheibe sind die Bilder bei starken oder mittelstarken Objektiven um ein großes Vielfaches der Brennweite entfernt; durch das Mikroskopobjektiv werden sie also nahe an der oberen Brennebene abgebildet und sind im Öffnungsbilde zu erkennen. Wenn das Bild nicht zu klein ist, kann man die beiden Zeiger so lange verschieben, bis die Spitzen den Rand des Gesichtsfelds gerade berühren. Ist der Winkel der beiden nach ihnen hinzielenden Strahlen $2U$ (im Glase), so ist

$$a = n \sin U$$

die Apertur bei der mikroskopischen Beobachtung, wenn n das Brechungsverhältnis der Apertometerscheibe ist. Nun schneidet der auf der Oberfläche aufliegende Rand des Zeigers genau mit der Spitze ab. Man könnte also auf einer Kreisteilung den Winkel U oder $2U$ ablesen. Jedoch legt man die Teilung gleich so an, daß a an beiden Zeigern abgelesen werden kann. Indem man das Mittel zwischen beiden Ablesungen nimmt, macht man kleine Fehler der Einstellung unschädlich.

Eine weitere Teilung gibt für $a < 1$ den entsprechenden Luftwinkel u_L an:

$$u_L = \arcsin a.$$

223. Die Messung der Apertur bei starken Objektiven. Bei starken Objektiven wird das Öffnungsbildchen so klein sein, daß man nicht einstellen kann. Deshalb ist ein Hilfsmikroskop zu benutzen, das aus einem besondern Objektiv, einer Blende und einem gewöhnlichen Okular besteht. Diese Linsenfolge vergrößert das Bildchen hinreichend, um eine Einstellung zu ermöglichen. Damit die Eintrittspupille die richtige Lage hat, muß die Blende so liegen, daß sie das Bild des Silberplättchens ist. — Ebenso muß bei der Beobachtung mit bloßem Auge dies an den richtigen Platz gebracht werden.

Damit auch die größten Aperturen (1,6) mit der Vorrichtung gemessen werden können, muß n größer sein als diese größten Aperturen.

224. Die Bestimmung der optischen Fehler des Objektivs. Die optischen Fehler des Objektivs können mit der Abbeschen Testplatte untersucht werden, einer dünnen Glasplatte (Abb. 249), deren Dicke von einem zum andern Ende regelmäßig zunimmt und an den verschiedenen Stellen abgelesen werden kann. Der Prüfgegenstand[1]) besteht aus einer Reihe heller (durchsichtiger) und dunkler Linien. Eine dunkle Linie läßt man durch die Mitte des Sehfeldes gehen. Man stellt bei enger zentraler Beleuchtung so ein, daß die Mitte des Gesichtsfeldes scharf ist, d. h. dort Deckglasdicke und Einstellung der etwaigen Korrektionsfassung zusammenpassen. — Gibt man nun schiefes Licht, so wird bei mangelnder Hebung des Farbenfehlers die Schnittweite des blauen Lichts kürzer oder länger sein als die des roten; dies muß auf der einen Seite der Mittellinie einen blauen,



Abb. 249. Die Abbesche Testplatte (nach einer Zeissischen Druckschrift). Der Prüfgegenstand besteht aus einer Anzahl dunkler und heller (wagerechter) Linien, sie sind auf der Unterseite eines keilförmigen Glasstreifens angebracht (Einritzen in eine Silberschicht), der Streifen dient als Deckglas, die Teilung, auf der er aufliegt, als Tragglas. Das Licht läßt man einmal senkrecht zur Platte (in der Mikroskopachse), sodann schief (aber senkrecht zu den Linien der Testplatte) einfallen. Die Änderung des Aussehens der Linien oder ihrer Ränder kennzeichnet die Über- oder Unterbesserung des Objektivs.

auf der andern einen roten Saum geben. Das sekundäre Spektrum bei Achromaten gibt einen grünlichgelben und einen purpurroten Saum, bei den Fluoritsystemen sind die Säume schwächer, bei Apochromaten sind nur blasse (tertiäre) Farben zu erkennen. — Ein sphärischer Fehler gibt einen grauen Schleier oder Vorhang an einem der beiden Ränder; an welchem er entsteht, gibt ein Urteil darüber, ob Über- oder Unterbesserung vorliegt.

Durch Verschieben der Platte kann man erkennen, daß eine größere Deckglasdicke überbessernd wirkt, den gleichen Einfluß hat eine größere Tubuslänge.

Die Fehler außer der Achse können ebenfalls an der Testplatte beobachtet werden.

Die Prüfung der sphärischen Über- oder Unterbesserung bei Dunkelbeleuchtung wird von H. Siedentopf[2]) besprochen. Die (ultramikroskopischen) Teilchen der Versilberung erscheinen als Beugungsscheibchen, die von ein oder zwei Ringen umgeben sind. Hat man auf ein solches scharf eingestellt und ändert dann die Einstellung, so werden bei sphärischer Korrektion die Ringe breiter und unschärfer werden, einerlei, ob man zu tief oder zu hoch einstellt. Dagegen wird für sphärische Unterbesserung bei zu hoher Einstellung die Erscheinung verschwimmen, bei zu tiefer Einstellung treten hingegen weitere Ringe auf. Das umgekehrte Ergebnis hat man für Überbesserung. Die Erklärung dieser Erscheinung gibt die Beugungstheorie, beispielsweise ist sie aus den Berechnungen von A. E. Conrady[3]) abzuleiten.

[1]) S. die unter Ziff. 222, Anm. 2 angeführte Arbeit von Ambronn u. Köhler; außerdem: Gebrauchsanweisung für die Abbesche Testplatte, Zeissische Druckschr. Mikro 116.

[2]) H. Siedentopf, Übungen zur Dunkelfeldbeleuchtung, S. 8—9. Leipzig: S. Hirzel 1912.

[3]) A. E. Conrady, Star-discs. Month. Not. Bd. 79, S. 575—593. 1919.

H. Das Fernrohr.

Von

O. EPPENSTEIN, Jena.

225. Begriffsbestimmung. Das Fernrohr dient gewöhnlich dazu, entfernte Gegenstände unter größerem Gesichtswinkel abzubilden, um die Annäherung an sie zu ersetzen. Dabei wird der ferne Gegenstand im allgemeinen[1]) wieder in größerer Entfernung abgebildet. Die kleinen Abweichungen hiervon, die für kurzsichtige oder weitsichtige Augen notwendig sind und für andere Augen oft willkürlich gewählt werden, sind durch geringfügige Änderungen an den Bestandteilen des Fernrohrs zu erreichen, die den Aufbau des Gerätes nicht wesentlich verändern. Wir können also im folgenden voraussetzen, daß ein unendlich entfernter Gegenstand in ein unendlich entferntes Bild übergeführt wird, daß man es also mit einer brennpunktlosen (teleskopischen) Folge zu tun hat und können den Begriff des Fernrohrs sogar mit einer solchen Folge zusammenfallen lassen.

226. Die allgemeinen Gesetze der brennpunktlosen Abbildung sind im Kap. I, Ziff. 20, abgeleitet worden. Eine brennpunktlose Folge bildet ein paralleles Strahlenbündel ihrer Definition entsprechend in ein ebensolches ab. Hieraus folgt, daß die Seitenvergrößerung β im ganzen Ding- oder Bildraum dieselbe ist. Aus der allgemeinen HUYGENS-HELMHOLTZschen Gleichung

$$\beta\gamma = \frac{n}{n'},$$

die hier, da wir $n = n' = 1$ haben,

$$\beta\gamma = 1$$

geschrieben werden kann, oder im Falle der rückwendigen Abbildung (Beteiligung eines Spiegels)

$$\beta\gamma = -1$$

lautet, folgt, daß auch das Konvergenzverhältnis γ im ganzen Ding- oder Bildraum dasselbe ist. Das Konvergenzverhältnis am Ort der Pupillen $\Gamma = \mathrm{tg}\,w' : \mathrm{tg}\,w$ ist also auch dasselbe; und dieses gewinnt hier besondere Bedeutung, da die Vergrößerung des Gesichtsfeldwinkels der Zweck der meisten Fernrohre ist. Die konstante Seitenvergrößerung β ist also auch gleich der in den Pupillen, $B = p' : p$, wenn p' den Halbmesser der A.P., p den der E.P. bezeichnet, so daß

$$B\Gamma = \frac{p'}{p}\,\frac{\mathrm{tg}\,w'}{\mathrm{tg}\,w} = 1. \tag{1}$$

Die Tiefenvergrößerung α ist nach der allgemeinen Gleichung (29) von Ziff. 19 durch

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta} = 1$$

[1]) Man kann zwar denselben Zweck auch erreichen, ohne ein Bild der fernen Gegenstände im Unendlichen zu entwerfen und sich einer ganz anderen, nicht teleskopischen Anordnung bedienen: Wenn man Bilder einer geeigneten Linsenfolge mit dem bloßen Auge betrachtet, die entweder auf einem Schirm aufgefangen oder als Luftbilder angeschaut werden, wobei man in ihrer Nähe zur Erzielung eines nach der Augenpupille konvergierenden Strahlenganges eine Kollektivlinse (s. u. unter Okulare) anbringt. In solchen Fällen spricht man aber nicht von einem Fernrohr, oder man kann den Fall des Luftbildes auf eine teleskopische Folge und damit auf ein Fernrohr zurückführen, wenn man das auf das Bild akkommodierende Auge auffaßt als ein auf Unendlich eingestelltes Auge mit einer Sammellinse, in deren Brennpunkt das angeschaute Bild liegt und die dann zusammen mit dem Kollektiv das „Okular" des Fernrohrs darstellt.

mit den anderen verbunden, woraus hier

$$\alpha = 1 : \Gamma^2 \tag{2}$$

folgt. Die durch ein Fernrohr erzeugte Abbildung ist demnach durch Abb. 250[1], die einer zweifachen Vergrößerung entspricht, wiedergegeben. Der Gegenstand ist ein Quadrat. Γ ist positiv angenommen, P und P' sind die Pupillen des Ding- und Bildraumes

$$\Gamma = \mathrm{tg}\,w' : \mathrm{tg}\,w = \frac{y'}{\xi'} : \frac{y}{\xi} = \frac{y'}{y} : \frac{\xi'}{\xi} = \beta : \alpha .$$

Die Strecke $O\bar{O}$ verhalt sich zu ihrem Bild $O'\bar{O}'$ wie OP zu $O'P'$ wie $\Gamma^2:1$, in der Abbildung $= 4:1$. PP' nennt ERFLE die Fernrohrlange. In manchen Fällen ist der Zweck des Fernrohrs weniger oder gar nicht die Vergrößerung, sondern die Herstellung dieser Länge PP', d. h. die Versetzung des Konvergenzpunktes der Hauptstrahlen an einen anderen Ort, nämlich dann, wenn P dem Auge nicht zugänglich ist. Man spricht dann von einem „Sehrohr" (s. u. und vgl. auch unter „Vergrößerung", Ziff. 109).

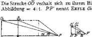


Abb. 250. Die Abbildung des Quadrates $OO_1\bar{O}\bar{O}_1$ durch eine brennpunktlose Linsenfolge in $O'O_1'\,\overline{O'O_1'}$; P die Eintritts-, P' die Austrittspupille.

$OO_1 = y$, $\quad y' : y = \beta = {}^1/_2$.
$O'O_1' = y'$, $\quad \xi' : \xi = \alpha = {}^1/_4$.
$PO = \xi$, $\quad \mathrm{tg}\,w' : \mathrm{tg}\,w = \Gamma = 2$.
$P'O' = \xi'$.

Die Abb. 250 zeigt, daß man durch die gewöhnliche Behauptung, das Fernrohr vermittele eine Γfache Annaherung an den Gegenstand, leicht zu einer falschen Meinung über den Bildort gelangt. Es verlaufen allerdings die Hauptstrahlen unter einem solchen Winkel, als ob sich der Gegenstand der E.P. bis auf den Γten Teil genähert hätte; denn wenn man durch P eine Parallele z. B. zu $P'\bar{O}_1'$ zieht, so wird diese von der verlängerten $O_1\bar{O}_1$ in einer achsensenkrechten Ebene geschnitten, die von P nur den Γten Teil so viel absteht, als die Ebene durch $\bar{O}$.

227. Die Ausführungsformen der teleskopischen Abbildung. Will man eine teleskopische Vorrichtung aus dünnen Linsen oder Spiegeln zusammensetzen, so sind wenigstens zwei solche notwendig, die mit ihren Brennpunkten zusammenfallen. Auf diesen Fall (oder die Aneinanderreihung mehrerer solcher Paare) lassen sich alle Ausführungsformen von Fernrohren zurückführen, die praktische Bedeutung gewonnen haben. Man kann aber vergrößernde teleskopische Vorrichtungen auch mit brechenden Prismen allein erhalten. Solche sind zuerst von AMICI[2]), später von BREWSTER[3]) angegeben worden. Beide erzielten mit einem Paare Prismen, deren Hauptschnitt in einer Ebene lag, sowohl Vergrößerung wie Achromasie und fügten ein zweites gleiches Prismenpaar mit zum ersten senkrechten Hauptschnitt hinzu[4]). Im folgenden beschränken wir uns auf die erstgenannten Verwirklichungen teleskopischer Abbildungen.

Das wichtigste Beispiel einer solchen Verwirklichung, das auch der praktischen Ausführung in vielen Fällen sehr nahekommt, sind zwei dünne Linsen,

---

[1]) In Anlehnung an ERFLE in CZAPSKI-EPPENSTEIN, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., S. 544.

[2]) G. B. AMICI, Soc. Ital. delle Science (Modena Mem. di mathem. Bd. 19, S. 121. 1821).

[3]) D. BREWSTER, Optics. London 1833, deutsch von HARTMANN. Quedlinburg u. Leipzig 1835.

[4]) Eine Ableitung s. bei ERFLE in CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 344.

die mit je einem ihrer Brennpunkte zusammenfallen. Eine der beiden muß offenbar stets eine Sammellinse sein, da eine Zerstreuungslinse einfallende parallele Strahlenbündel nur divergent macht (virtuelle Brennpunkte hat), also wohl die konvergierenden Bündel von Sammellinsen parallel machen kann, aber nie die bereits divergierenden einer anderen Zerstreuungslinse; während eine Sammellinse einen reellen Brennpunkt hat, vor dem die Büschel konvergieren, hinter dem sie aber wieder divergieren, also einer anderen Sammellinse dargeboten werden können, die sie parallel macht. So ergeben sich die beiden Fälle von Abb. 251 und 252. In beiden gilt

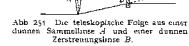


Abb. 251. Die teleskopische Folge aus einer dünnen Sammellinse A und einer dünnen Zerstreuungslinse B.
$AF_1' = f_1'$. $AF_1 = f_1$
$BF_2 = f_2$; $BF_2' = f_2'$.

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{BF_2'}{AF_1'} = \frac{f_2}{f_1'},$$

und da Punkte im Achsenabstande AA_1 in solche vom Achsenabstande BB_1 abgebildet werden, ist

$$BB_1 : AA_1 = B = 1 : \Gamma,$$

so daß die Seitenvergrößerung

$$B = \frac{f_2}{f_1'}. \tag{3}$$

Bei Linsen in Luft gilt $B\Gamma = +1$ (S. 48) und $f_1' = -f_1$, $f_2 = -f_2'$, also

$$\Gamma = \frac{f_1}{f_2'}, \tag{4}$$

welche Gleichung nach Gleichung (43), Ziff. 24 allgemein für die Zusammensetzung zweier Folgen zu einer brennpunktlosen Abbildung gilt. Für Linsen gilt auch

$$\Gamma = -\frac{f_1'}{f_2}. \tag{4a}$$

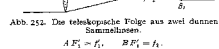


Abb. 252. Die teleskopische Folge aus zwei dünnen Sammellinsen.
$AF_1' = f_1'$, $BF_2' = f_2$.

Wir können uns hier auf die Fälle beschränken, in denen durch das Fernrohr eine rechtwendige Abbildung (Ziff. 17) vermittelt wird, da andere (spiegelverkehrte, bei denen also z. B. eine rechte Schraube als Linksschraube erscheint) praktisch nur zu gewissen Meßzwecken (als Teilbilder von Entfernungsmessern) vorkommen; dann bedeutet positives Γ, daß ein von oben oder von rechts die Mitte der E.P. treffender Hauptstrahl auch die A.P. von oben oder von rechts trifft: d. h., daß das Auge ein aufrechtes Bild erblickt; negatives Γ bedeutet ein umgekehrtes Bild. Gleichung (4a) besagt, daß man ein aufrechtes Bild erhält, wenn die eine der beiden Linsenfolgen sammelnd, die andere zerstreuend ist; daß dagegen ein aus zwei sammelnden Linsenfolgen zusammengesetzes Fernrohr umgekehrte Bilder liefert, das erstere ist das holländische, das zweite das astronomische Fernrohr.

Wird ein Fernrohr aus einem Hohlspiegel und einem erhabenen Spiegel mit gemeinsamem Brennpunkt zusammengesetzt, so ergibt sich ebenfalls ein aufrechtes Bild; ein umgekehrtes, wenn beide Spiegel Hohlspiegel sind. (Solche Fernrohre aus zwei Spiegelpaaren haben mit den später erwähnten Spiegelteleskopen nach CASSEGRAIN und GREGORY nichts zu tun, bei denen der zweite Spiegel nicht das Okular, sondern einen Teil des Objektivs bildet.)

Solange es sich um eine rechtwendige Abbildung handelt, gilt nach Kap. I

$$B \cdot \Gamma = 1,$$

also entspricht bei einem Fernrohr stets einer positiven Seitenvergrößerung oder aufrechten Abbildung seitlicher Erstreckungen, z. B. der Pupillen, ein aufrechtes Bild, gleichgultig, wie das Fernrohr zusammengesetzt ist und umgekehrt.

228. Objektiv und Okular. Alle Fernrohre von praktischer Bedeutung, auch wenn sie aus zahlreichen Linsen zusammengesetzt sind, lassen sich zweckmäßig in zwei Teile zerlegen, um die Betrachtung zu vereinfachen. Man nennt den ersten das Objektiv, den zweiten das Okular und rechnet (nach Alb. König) zum Objektiv alle optischen Mittel bis zu der Stelle, wo sich der Querschnitt des achsenparallelen Bündels bis etwa auf die Größe der A.P. zusammengezogen hat. Dann kann man sagen, daß die Hebung der Bildfehler (mit Ausnahme der ganz schwach vergrößernden Fernrohre) in bestimmter Weise auf Objektiv und Okular verteilt werden muß: im Objektiv, dessen Bild eine im Verhaltnis zur Brennweite geringe Ausdehnung besitzt, sind die vom Gesichtsfeldwinkel abhängigen Fehler im allgemeinen zu vernachlässigen; die von der Öffnung abhängigen aufzuheben, nämlich die sphärische Abweichung, die Koma (Abweichung von der Sinusbedingung), die chromatische Längsabweichung. Beim Okular hat man wegen der geringen Öffnung und des großen Gesichtsfeldes hauptsächlich Bildwölbung, Astigmatismus, Verzeichnung, Farbenabweichung der Vergrößerung zu beseitigen. Diese Unterscheidung wird um so weniger ausgeprägt, je geringer die Vergrößerung ist; schwache Fernrohre mussen im ganzen korrigiert werden. Ob es möglich ist, Fehler des Objektives und des Okulars auszugleichen, hängt im übrigen auch davon ab, ob zwischen Objektiv und Okular ein Zwischenbild existiert, an dessen Ebenheit und Bildschärfe Anforderungen gestellt werden, das letztere ist der Fall, wenn es mit einer Teilung, einem Markenbilde, Meßfäden usw. zur Deckung gebracht werden soll; dann muß das Objektiv bereits in der Achse und oft auch außer der Achse korrigiert sein; wodurch wieder eine gewisse Hebung der Bildfehler des Okulars bedingt wird.

229. Einteilung der Fernrohre. Der für die Behandlung wichtigste Unterschied der beiden Abb. 251 und 252 ist nicht darin begründet, daß bei der einen aufrechte, bei der anderen umgekehrte Bilder entstehen, denn wir werden später sehen, daß in Abb. 252 das Okular durch Hinzufügen weiterer Linsen oder Spiegel leicht zu einem zerstreuenden gemacht werden und das Bild aufgerichtet werden kann, ohne daß der Aufbau des Gerätes, insbesondere die Strahlenbegrenzung, wesentlich geändert wird. Der wichtigste Unterschied ist der, daß im Falle der Abb. 251 die Strahlen das Okular erreichen, ohne vorher ein Bild des Gegenstandes zu erzeugen; während in Abb. 252 ein „Innenbild" zustande kommt. Gleichzeitig entsteht in Abb. 251 kein reelles Bild des Objektives; da aber bei den meisten Fernrohren das Objektiv die E.P. bildet oder ihr naheliegt, ist die A.P. bei Abb. 251 unzugänglich; bei Abb. 252 wird etwas hinter der hinteren Brennebene des Okulars ein reelles Bild des Objektivs entstehen. Die durch Abb. 251 dargestellte Gattung heißt

das holländische Fernrohr.

230. Die Strahlenbegrenzung. Der Durchmesser des achsenparallelen Bündels wird nicht vom Okular, sondern entweder vom Objektiv oder einer dahinterliegenden Blende begrenzt, deren Bild nach Ziff. 94 in den Dingraum zu entwerfen wäre, um die E.P. zu finden. Es genügt, zur Beschreibung anzunehmen, daß diese Begrenzung im Objektiv selbst stattfindet, und Objektiv und Okular als dünne Linsen anzusehen, da die Einführung getrennter Hauptebenen keine Änderung der folgenden Betrachtung ergeben würde.

Das vom Okular entworfene Bild des Objektivs (Abb. 253) ist fast immer größer als die Augenpupille $P_1'P_2'$, mit der es in der Beschränkung des achsenparallelen

Bündels in Wettbewerb tritt. Holländische Fernrohre, die so stark sind, daß das Objektivbild als Öffnungsblende wirkt, mögen hier außer Betracht bleiben. Also wirkt (Ziff. 103) die E.P. des ruhenden Auges als die A.P. des holländischen Fernrohres; die Objektivfassung wird Gesichtsfeldblende. Da diese Blende nicht mit der Ebene des Gegenstandes oder eines Bildes zusammenfällt, wirkt sie abschattend (vignettierend) entsprechend Ziff. 95. Da die E.P. hinter der E.L. liegt, entspricht Abb. 106, Ziff. 95, den Verhältnissen des holländischen Fernrohres mit der Besonderheit, daß der Gegenstand sehr weit, ξ sehr groß und u sehr klein anzusetzen ist, so daß der Unterschied zwischen den Winkeln w_1 und ω sowie w_2 und Ω verschwindet (Abb. 253).



Abb. 253. Die Strahlenbegrenzung im holländischen Fernrohr. $PL = \eta$, $PP_1 = p$; $L L_1 = l$.
$L_1'L_2'$ das vom Okular entworfene Bild des Objektivs L_1L_2. Die Blende bei P' ist die Augenpupille, ihr vom Fernrohr rückwärts in den Dingraum entworfenes Bild bei P ist P_1P_2.

231. Das Gesichtsfeld des h.F. bei ruhendem Auge. Zur Berechnung der Gesichtsfeldwinkel nehmen wir zuerst das Auge als ruhend an. Die Neigung der äußersten Strahlen, die an der Abbildung teilnehmen, der äußere Gesichtsfeldwinkel Ω ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{l + p}{\eta},$$

wenn η wieder der Abstand zwischen E.P. und E.L., l die halbe Öffnung der E.L. und p der Halbmesser der Augenpupille ist. Nennen wir den Abstand der Augenpupille vom Okular a, so ist der Abstand der Augenpupille von dessen hinterem Brennpunkt $a - f_2'$ (der hintere Brennpunkt liegt vor dem Okular); dieser Abstand wird durch das ganze Fernrohr abgebildet in dem Abstand der E.P. vom vorderen Brennpunkt des Objektivs, der also $\Gamma^2 \cdot (a - f_2')$ ist. Ist der Abstand der Eintrittsluke vom vorderen Brennpunkt des Objektivs b, so ist der Abstand der E.P. von der E.L.

$$-\eta = \Gamma^2(a - f_2') - b.$$

Da das Objektiv als dünne Linse vorausgesetzt ist, deren Fassung als Gesichtsfeldblende ($= 2l$) wirkt, so wird

$$-\eta = \Gamma^2(a - f_2') - f_1' = \Gamma^2 a + \Gamma(f_1' + f_2'),$$

mit Rücksicht auf Gleichung (4a); indem $L = f_1' + f_2'$ die Baulänge des Geräts bedeutet, wird

$$-\eta = \Gamma(a\Gamma + L).$$

Wir haben in Abb. 253 zur Anlehnung an Abb. 106 die Punkte der E.P. mit dem unteren Rande der E.L. verbunden, so daß wir für die Gesichtsfeldwinkel negative Werte erhielten. Wir wollen aber im folgenden die für die oberen positiven Gesichtsfeldwinkel gültigen Werte hinschreiben:

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{l + p}{\Gamma(a\Gamma + L)}. \tag{5}$$

Entsprechend ergibt sich für den größten Neigungswinkel der parallelen Strahlenbündel, die die Pupille noch ganz erfüllen,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{l - p}{\Gamma(a\Gamma + L)}. \tag{6}$$

Die größte Neigung der Strahlen, die durch die Mitte der Augenpupille gehen, also der Hauptstrahlen, ist

$$\operatorname{tg} W = \frac{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\Omega}{2} = \frac{l}{\Gamma(a\Gamma + L)} \,. \tag{7}$$

Auf der Bildseite ergibt sich entsprechend

$$\operatorname{tg}\Omega' = \frac{l+p}{a\Gamma + L}\,, \tag{5a}$$

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{l-p}{a\Gamma + L}\,, \tag{6a}$$

$$\operatorname{tg} W' = \frac{l}{a\Gamma + L} = \frac{\operatorname{tg}\omega' + \operatorname{tg}\Omega'}{2}\,. \tag{7a}$$

232. Das Gesichtsfeld des h. F. bei blickendem Auge. In Wirklichkeit wird beim Betrachten, wie Ziff. 103 auseinandersetzt, das Auge um den Mittelpunkt des Augapfels gedreht. Der Mittelpunkt der Perspektive P' ist dann nicht mehr der der Augenpupille, sondern der Drehpunkt des Auges, der etwa 10,5 mm hinter der Pupille liegt. Bleiben hierbei Fernrohr und Auge in un-

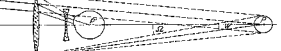


Abb. 254. Das holländische Fernrohr vor dem gedrehten Auge.
P' der Augendrehpunkt. P sein vom Fernrohr rückwärts in den Diagramm entworfenes Bild

veränderter Lage, so ist die Strahlenbegrenzung durch Abb. 254 dargestellt. Die Hauptstrahlengesichtswinkel W und W' bestimmen sich hierbei in derselben Weise wie bisher, nur daß in die Gleichungen (7) und (7a) Werte von a eingehen, die um etwa 10 mm größer sind. Die Bestimmung von ω und Ω unterscheidet sich jedoch insofern von der vorigen, als die Strahlen größter Neigung für Öffnung Null und für volle Pupille bei bewegtem Auge offenbar durch die Tangenten gegeben sind, die von den Rändern der E.L. an eine Kugel gelegt werden, die um den dingseitigen Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen (das vom Fernrohr rückwärts in den Dingraum entworfene Bild des Augendrehungspunktes) mit dem ebenfalls in den Dingraum abgebildeten Halbmesser der Augenpupille als Radius gelegt werden. So folgt hier

$$\sin(\Omega - W) = \frac{p}{\sqrt{\eta^2 + p^2}} = \sin(W - \omega)\,[1]\,.$$

Das Gesichtsfeld wird bei bewegtem Augapfel erheblich kleiner als bei ruhendem. Zum Vergleich mit den astronomischen Fernrohren muß man jedoch das für das ruhende Auge berechnete Gesichtsfeld heranziehen, denn man wird auch beim holländischen Fernrohr wie bei jenem zur Vergrößerung des Gesichtsfeldes Kopfbewegungen zur Hilfe nehmen und mehr und mehr zur Schlüssellochbeobachtung übergehen; beim astronomischen Fernrohr ist dies in noch viel höherem Grade notwendig, da bei ihm der zweite Fall von Ziff. 103 verwirklicht ist. Auch bei dieser Art des Vergleiches zeigt sich, daß das holländische Fernrohr ein recht

[1] H. Erfle in Czapski-Eppenstein, S. 549.

geringes Gesichtsfeld besitzt. Dies ergibt sich durch Vergleich der bildseitigen Gesichtsfelder:

233. Begrenzung der Ausführung großen Gesichtsfelds beim h. F. Für das bildseitige Gesichtsfeld des holländischen Fernrohrs folgt aus (7a)[1]

$$\frac{l \cdot f_1'}{\operatorname{tg} W'} = \frac{L + a\Gamma}{f_1'} = 1 - \frac{1}{\Gamma} - \frac{a}{f_2'}.$$

Bei gleichem bildseitigen Gesichtsfeld muß also das halbe Öffnungsverhältnis $l:f_1'$ des Objektivs um so größer genommen werden, je stärker die Vergrößerung und je größer der Abstand a im Verhältnis zur Brennweite des Okulars ist. (Hieraus folgt die Verkleinerung des Gesichtsfeldes für den Augendrehpunkt als Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen.) Durch Verkleinerung von $a:f_2'$ läßt sich umgekehrt bei gleicher Vergrößerung das Gesichtsfeld steigern. Dies erreicht man durch Vergrößerung beider Brennweiten im gleichen Verhältnis. Für stärkere Vergrößerungen kann das zweite Glied vernachlässigt werden; ist dann a und f_2' gegeben, so wächst das Gesichtsfeld annähernd proportional dem Öffnungsverhältnis des Objektivs; man muß also große Durchmesser bei kleiner Länge erstreben. Wählt man den verhältnismäßig günstigen Fall $\Gamma = 2$, $a = 10$, $f_2' = -20$, so ist das bildseitige Gesichtsfeld gleich dem Öffnungsverhältnis, um 40°, den beim astronomischen Fernrohr gewöhnlichen Betrag zu erreichen, muß das Öffnungsverhältnis 1:2,75, also der Durchmesser 29 mm sein. Für 4fache Vergrößerung ergäbe sich schon, daß das Öffnungsverhältnis zum Gesichtsfeld sich wie 5:4 verhalten muß, für 8fache wie 11:8, selbst ein Öffnungsverhältnis von 1:2 ergäbe dann nur ein bildseitiges Gesichtsfeld von 20,2° und einen Durchmesser von 80 mm, während zur Ausfüllung einer Augenpupille von 5 mm Durchmesser ein Objektivdurchmesser von 40 mm genügte. Ein solches Fernrohr würde außer durch das geringe Gesichtsfeld auch durch den hohen Herstellungspreis unvorteilhaft sein, der durch das Objektiv sowohl seines Durchmessers als seines Öffnungsverhältnisses wegen bedingt würde. Die Herstellung holländischer Fernrohre lohnt daher nur für schwächste Vergrößerungen. Es wird fast ausschließlich als Doppelfernrohr für Handgebrauch ausgeführt.

234. Die Helligkeit des holländischen Fernrohrs. Da die Augenpupille selbst als A.P. wirksam ist, so ist nach Ziff. 136 die Helligkeit der des Sehens mit freiem Auge bis auf die Verluste der Leuchtkraft gleich (damit dies unter allen Umständen zutrifft, muß das Objektiv mindestens einen Durchmesser von 8 Γ haben, weil 8 mm der größte Pupillendurchmesser bei Nacht ist; was aber schon des Gesichtsfeldes halber mindestens erreicht werden sollte). Die Lichtverluste sind außerdem infolge der geringen Anzahl der reflektierenden Flächen sehr gering. Die Absorption an den dünnen Linsen ist fast zu vernachlässigen. Die ungleiche Helligkeit des Gesichtsfeldes stört nicht allzu sehr. Beim Durchsehen nach einer gleichmäßig leuchtenden Fläche zeigt übrigens die ungleiche Lichtverteilung besonders schön die auf S. 215 beschriebene Erscheinung des Kontrastes. Wo die helle Scheibe in der Mitte in die Zone nach außen abfallender Helligkeit übergeht, entsteht entsprechend der MACHschen Betrachtung ein heller Ring, der oft so ausgeprägt erscheint, daß die objektiv hellste Stelle, die Mitte, dagegen dunkler wird.

235. Das Zentrum der Perspektive des h. F. ist das dingseitige Bild des Augendrehpunktes. Liegt er 25 mm hinter der Negativlinse, so liegt sein dingseitiges Bild nach obigem $-\eta = 25\,\Gamma^2 + \Gamma L$ (also bei 4maliger Vergrößerung und $L = 100$ mm 800 mm) hinter dem Objektiv.

[1] Nach ALB. KÖNIG, Die Fernrohre und Entfernungsmesser, S. 44. Berlin 1923. In der Gleichung ist wegen $f_2' < 0$ das letzte Glied positiv.

236. Die Hebung der Bildfehler beim holländischen Fernrohr. Da es sich stets um schwache Vergrößerungen handelt, werden die Fehler des Gesichtsfeldes: Verzeichnung, chromatischer Vergrößerungsunterschied, Bildwölbung, in erster Linie zu berücksichtigen und für das Fernrohr als Ganzes zu beseitigen sein. Die Abweichungen in der Achse zeigen sich besonders, wenn das Auge nicht vor der Mitte des Okulars gehalten wird, und müssen immerhin in gewissen Grenzen gehalten werden. Abgesehen von stärkeren Vergrößerungen genügt beim Okular eine einfache Negativlinse.

237. Die Entwicklung des holländischen Fernrohres. Der Erfinder ist Johann Lipperhey, Brillenschleifer in Middelburg (Patent von 1608), früher wurde es Galileo Galilei zugeschrieben, der jedenfalls die ersten astronomischen Beobachtungen damit gemacht hat[1]).

Ein holländisches Fernrohr der üblichen Bauart ist in Abb. 255 dargestellt. Abb. 256 zeigt ein verbessertes zweifaches Fernrohr nach M. v. Rohr, bei dem besonders das Gesichtsfeld bei blickendem Auge gesteigert ist.

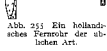


Abb. 255 Ein holländisches Fernrohr der üblichen Art.



Abb. 256 Ein holländisches Fernrohr nach M. v. Rohr

Das Fehlen des reellen Zwischenbildes macht das holländische Fernrohr zur Festlegung von Richtungen und zur Ausmessung von Richtungsunterschieden zunächst unbrauchbar; denn man kann kein Fadenkreuz und keine Teilung mit dem Bild zugleich scharf und parallaxenfrei erscheinen lassen. Der Mangel läßt sich umgehen, wenn man die Bündel geometrisch oder physikalisch teilt. Doch konnten diese Konstruktionen keine Bedeutung gewinnen[2]).

Die Wirkung der Okularverstellung des holländischen Fernrohrs auf seine Vergrößerung s. weiter unten.

Das astronomische (Keplersche) Fernrohr.

Die andere Art des Fernrohres, diejenige mit Zwischenbild, hat eine weit größere Bedeutung gewonnen. Ihre einfachste Grundform ist diejenige mit positivem Okular, die also ein umgekehrtes Bild gibt [Gleichung (4a), f' negativ]. Der Aufbau ist durch Abb. 252 gegeben.

238. Die Strahlenbegrenzung des astronomischen Fernrohrs ergibt sich aus Abb. 257, wo der häufigste Fall dargestellt ist, daß das Objektiv zugleich Öffnungsblende und E.P. ist. (Der Fall, daß die E.P. vor dem Objektiv liegt, wie er z. B. bei Entfernungsmessern häufig ist, ändert in den folgenden Betrachtungen nichts Wesentliches und erledigt sich durch die allgemeinen Betrachtungen von Ziff. 94 und das Folgende.) Hieraus folgt, daß das sammelnde Okular eine reelle A.P. erzeugen muß. Es liegt also der zweite Fall von Ziff. 103 vor. Die A.P., das Objektivbild, erscheint als kleiner in der Luft schwebender Kreis, wenn man das Fernrohr ins Helle richtet. Sie ist fast nie groß genug, um Beobachtungen mit bewegtem Auge zu gestatten; es wird vielmehr der Kopf mehr oder weniger verschoben werden; bei kleiner A.P. und kleiner Augenpupille soweit, daß sich die A.P. als Drehpunkt ergibt (Abb. 117), während bei großer A.P. geringe Kopfbewegungen genügen und der Drehpunkt, der sich aus der Drehung des Auges und der Ver-

[1]) Über die Erfindungsgeschichte vgl. C. de Waard jun., De uitvinding der verrekijkers. Een bijdrag tot de beschavingsgeschiedenis', s'Gravenhage 1906; A. Favaro, Atti del R. Ist. Ven. Bd. 60, II, S. 370. 1901; Memorie e documenti per la storia della università di Padova Bd. 1, S. 73. 1922.

[2]) Vgl. solche bei H. Erfle in Czapski-Eppenstein, S. 553.

schiebung des Kopfes ergibt, wie in Abb. 116 zwischen Pupille und Augendrehpunkt liegt. Die Annehmlichkeit des Beobachtens mit Fernrohren großer A.P., die sich auch dann zeigt, wenn ihre Helligkeit wegen kleiner Augenpupille nicht ausgenutzt werden kann, beruht auf diesem geringeren Betrag der notwendigen Kopfbewegungen. Der Objektivdurchmesser dividiert durch den Durchmesser der A.P. liefert nach Gleichung (1) die Vergrößerung.

Die Gesichtsfeldblende wird gewöhnlich in der Ebene des Zwischenbildes künstlich durch eine Blechscheibe hergestellt (*DD* in Abb. 257). Das Bildfeld ist dann scharf begrenzt und unter den in Abb. 257 dargestellten Verhältnissen erhalten auch die Randpunkte die Strahlen der ganzen Fläche des Objektivs. Dies läßt sich praktisch bei vielen Anwendungen des Fernrohres nicht verwirklichen, z. B. wenn die E.P. vor dem Objektiv liegt; ist der Abstand *a* und der dingseitige Gesichtsfeldwinkel *W*, so mußte das Objektiv um $a \operatorname{tg} W$ größer sein, als die E.P., man wird in solchen Fällen oft ein kleineres Objektiv wählen, so daß dieses für die seitlichen Punkte die Öffnung beschränkt. Man hat dann auch hier zwischen einem Raum zu unterscheiden, der mit voller und einem solchen, der mit abnehmender Öffnung abgebildet wird; nur daß der letztere nicht wie beim holländischen Fernrohr allmählich in den von der Abbildung ausgeschlossenen übergeht, sondern dieser gewöhnlich infolge der Blende in der Bildebene scharf einsetzt. Wenn die Randpunkte noch durch Hauptstrahlen (also etwa mit halber Öffnung) abgebildet werden, so ist der Abfall noch erträglich. Gewöhnlich laßt man die Randpunkte mit einem etwas größeren Teil der Öffnung abbilden.

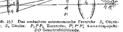


Abb. 257. Das einfachste astronomische Fernrohr. S_1 Objektiv, S_2 Okular. $P_1 P P_2$ Eintritts-, $P_1' P' P_2'$ Austrittspupille. *DD* Gesichtsfeldblende.

Das durch die Blende *DD* in der Bildebene bestimmte Gesichtsfeld ist, wenn deren Durchmesser $2b$ ist, gegeben durch den halben Winkel *W* nach

$$\operatorname{tg} W = \frac{-b}{f_1} \tag{8}$$

oder auf der Bildseite durch

$$\operatorname{tg} W' = \frac{-b}{f_2}. \tag{9}$$

239. Die Bildfehler und ihre Beseitigung. Beim astronomischen Fernrohr hat außer bei sehr schwachen Vergrößerungen die unter Ziff. 228 angegebene Einteilung für die Hebung der Bildfehler Geltung. Infolgedessen ist die Ausdehnung des Gesichtsfeldes fast ganz eine Frage des Aufbaues des Okulars. *W'* ist durch das Okular gegeben; *W* hängt nur von der Vergrößerung ab. (Überschlagsweise pflegt man oft einfach mit $W = W' : \Gamma$ zu rechnen.)

In der schematischen Ausführung von Abb. 257 und auch in der wirklichen Ausführung mit den unten zu erörternden „einfachen" Okularen gibt entsprechend Gleichung (4a) das astronomische Fernrohr ein umgekehrtes Bild. Da die weiter unten zu behandelnden Prismenfernrohre und die Erdfernrohre trotz aufrechten Bildes den grundsätzlichen Aufbau des astronomischen beibehalten, so sind die obigen Betrachtungen und Rechnungen auch für sie ebenso anzuwenden. Dasselbe gilt für die folgenden Beschreibungen der sammelnden Okulare und der Objektive.

240. Die astronomischen (einfachen) Okulare. Abb. 257 läßt erkennen, daß die Wirkung des Okulars sich in zwei verschiedene Aufgaben scheiden läßt. Die eine, die schon aus der Definition des Fernrohrs und Abb. 252 hervorgeht, ist, die von der gemeinsamen Bildebene divergierenden Bündel parallelstrahlig zu machen, diese Ebene ins Unendliche abzubilden, wie es eine Lupe tut. Die andere besteht darin, die Hauptstrahlen dem Punkte auf der Achse (der A. P.) zuzuführen, in den die Augenpupille gebracht werden soll. Bei den älteren Okularen sind zwei Linsen vorhanden, von denen die eine, die Augenlinse, mehr die Lupenwirkung auf die Bündel, die andere, die Kollektivlinse, mehr — gelegentlich sogar allein — die Wirkung auf die Hauptstrahlen ausübt. In der Abb. 258 ist die letztere Linse nahe an die Bildebene gerückt; würde sie ganz damit zusammenfallen, so wäre sie ohne Einfluß auf die Konvergenz der Bündel; sie hat auch hier eine sehr geringe Wirkung darauf; dagegen bricht sie die von P aus divergierenden Hauptstrahlen nach der Achse zu. Die zweite, die Augenlinse, macht die Bündelstrahlen parallel, aber sammelt außerdem die Hauptstrahlen in einem näheren Achsenpunkt. Beim Wegfall der Kollektivlinse würde die Vergrößerung des Fernrohres kaum (wenn die Linse ganz in die Bildebene fällt, gar nicht) geändert werden; die Mitte des Gesichtsfeldes würde dieselbe Erscheinung zeigen, aber um den Rand sichtbar zu machen, müßte die Augenlinse sehr groß ausgeführt werden (Abb. 257). Die Kollektivlinse vergrößert deshalb bei gegebener Augenlinse das Gesichtsfeld und heißt deshalb auch Feldlinse.

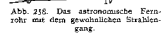


Abb. 258. Das astronomische Fernrohr mit dem gewöhnlichen Strahlengang.

Die Wahl der Orte und der Stärke dieser beiden Linsen wurde schon durch die Forderung bestimmt, daß die Farbenabweichung der Lupenvergrößerung aufgehoben sein soll; oder es darf der bildseitige Hauptstrahl, der von einem seitlichen Punkt der Brennebene kommt, für verschiedene Farben nicht verschiedene Neigung haben. Da bei stärkeren Vergrößerungen meist die Hauptstrahlen vor dem Okular nahezu achsenparallel verlaufen, so bedeutet dies, daß die Brennweite des Okulars für verschiedene Farben dieselbe sein soll. Nun lautet aber die Bedingung dafür, daß zwei dünne, im Abstand d befindliche Linsen aus demselben Glase für alle Farben dieselbe Brennweite haben

$$d = \frac{f_1' + f_2'}{2}. \tag{10}$$

Für die Gesamtbrennweite eines solchen Linsenpaares gilt ferner

$$F' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - d} \tag{11}$$

und für den Abstand des vorderen Brennpunktes von der ersten Linse

$$S = \frac{(d - f_2') f_1'}{f_1' + f_2' - d} = F' \frac{d - f_2'}{f_2'}; \tag{12}$$

und wenn (10) erfüllt ist

$$S = \frac{f_2' - f_1'}{f_1' + f_2'} \cdot f_1'. \tag{12a}$$

Für den Abstand des zweiten Brennpunktes von der hinteren Linse gilt

$$S' = \frac{(f_1' - d) f_2'}{f_1' + f_2' - d} = F' \frac{f_1' - d}{f_1'}, \tag{13}$$

wenn (10) erfüllt ist

$$S' = \frac{f_1' - f_2'}{f_1' + f_2'} f_2'. \tag{13a}$$

Das älteste HUYGENSsche Okular erfüllt die Bedingung (10) durch die Wahl von

$$f_1' = 3 f_2'; \qquad d = 2 f_2'.$$

Hieraus folgt

$$F' = \tfrac{3}{2} f_2'. \qquad S = F'; \qquad S' = \tfrac{1}{2} F'.$$

Eine spätere Form hat

$$f_1' = 2 f_2'; \qquad d = \tfrac{3}{2} f_2'.$$

Hieraus folgt:

$$F' = \tfrac{4}{3} f_2'; \qquad S = \frac{F'}{2}; \qquad S' = \frac{F'}{4}.$$

Allgemein liegt beim HUYGENSschen Okular die vordere Brennebene zwischen [redacted]

dieselbe Helligkeit besitzen, als ob jeder allein vorhanden wäre. In dem Punkt mitten zwischen ihnen (für $\mathfrak{Z} = 1{,}9$) sinkt die Helligkeit nach der obigen Tabelle auf $2 \times 37 = 74\%$ jener ab. Die entstehende Lichtverteilung zeigt Abb. 269. Dieser Unterschied (durch den Kontrast verstärkt, s. weiter unten) genügt nach der Erfahrung, um die beiden Punkte deutlich zu unterscheiden. Der Unterschied zwischen den beiden Gipfeln des Lichtgebirges und dem mittleren Sattel wird 0 für einen Abstand, der kleiner ist als 3,2 optische Einheiten. Dann wird der Winkelabstand $\zeta = \sigma : f = 0{,}51\,\lambda : p$; für $\lambda = 0{,}55$ ist dies $\zeta = 0',97 : p$. Beziehen wir diese Größe auf den Dingraum, so ist p die E.P. des Fernrohrs; ζ wäre also etwa der kleinste Winkel zwischen Doppelsternen, der der Beugung wegen erkennbar ist. Beziehen wir sie auf den Bildraum des Fernrohres, so ist p der Halbmesser der A.P. und ζ der Winkel, der dem Auge dargeboten wird. Um das Auflösungsvermögen ausnutzen zu können, ist es aber nötig, die Bilder der beiden Punkte in etwa 1′ scheinbaren Abstand zu bringen. Man wird also für $\zeta = 1'$ den Halbmesser der A.P. = 1 mm oder die Fernrohrvergrößerung gleich dem Halbmesser des Objektives in Millimeter wählen müssen, wenn man das Auflösungsvermögen vollkommen nutzbar machen will. Steigert man die Vergrößerung über diesen Betrag hinaus, so erhält man „leere Vergrößerung", es wird kein neues Detail mehr sichtbar. Jedoch ist die Steigerung auf das Doppelte der Winkel zur Beobachtung bequemer; man macht also besser den Durchmesser der A.P. = 1 mm, berechnet also für jeden Millimeter Durchmesser der E.P. zur vollen aber auch bequemen Ausnutzung des Objektives eine Vergrößerungseinheit.

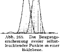


Abb. 269. Die Beugungserscheinung zweier selbstleuchtender Punkte in einer Bildebene.

249. Die Kontrasttheorie. Alle optischen Bilder zeigen infolge der Beugung statt scharfer Grenzen den allmählichen Übergang der Beleuchtungsstärke, der oben für das Bild einer Kreisscheibe beschrieben war. In Ziff. 138 ist auseinandergesetzt, daß trotzdem infolge der Kontrastwirkung oft scharfe Grenzen gesehen werden. Wo diese Grenzen liegen, ergibt die ebenda skizzierte Theorie von Kühl, die von der Machschen Kontrasttheorie ausgeht. Er berechnet die in Ziff. 138 definierte Kontrastfunktion ΔB z. B. für das Beugungsbild einer hellen Scheibe. Sie hat am Rande des „idealen" (= geometrischen) Bildes ein Minimum innerhalb dieses Bildes; außerhalb ein Maximum; dies ergibt einen hellen Randstreifen innerhalb, einen dunklen Streifen außerhalb. Dazwischen liegt eine Stelle, an der $\Delta B = 0$ ist. Bei größeren Bildern stimmt diese mit dem idealen Bildrand überein; bei kleineren liegt sie ins dunkle Gebiet hinaus verschoben. Auch nach dem Innern der Scheibe zu geht ΔB von seinem Minimalwert wieder zu 0 über; ebenso nach außen von seinem Maximalwert. Diese Stellen entsprechen der inneren Grenze des hellen und der äußeren des dunklen Streifens. Nun „zeigt der Vergleich der hauptsächlich für Fernrohrmessungen in Betracht kommenden Bildformen eine so weitgehende Übereinstimmung in der Lage der ausgezeichneten Kontraststellen zum idealen Bildrand", daß Kühl[1]) eine Tabelle aufstellen kann, in der die Breite des idealen Bildes als Eingang dient, gemessen in optischen Einheiten, und in der die Lage folgender Stellen angegeben ist: die innere Grenze des hellen Streifens ($\Delta B = 0$); das Maximum des hellen Streifens (ΔB = Minimum); die Grenze des hellen und dunklen Streifens ($\Delta B = 0$); das Maximum des dunklen Streifens (ΔB = Maximum);

[1]) A. Kühl, l. c. S. 374.

die äußere Grenze des dunklen Streifens ($AB = 0$). Die Anwendung dieser Tabelle, die sinngemäß umgekehrt auch für die betreffenden Stellen dunkler Bilder auf hellem Grunde gilt, ergibt allgemeingültige Regeln für die „gesehenen" und „gemessenen" Bildgrenzen an „alleinstehenden" oder „kombinierten" Bildern; letztere treten z. B. bei der Messung mit Meßfäden und mit Doppelbildern auf. In solchen Fällen sind die betreffenden Erscheinungen der beiden Bilder einfach übereinander gelagert zu denken. Die Grundregel KÜHLS lautet: „An alleinstehenden und kombinierten Bildern sieht das Auge eine gut definierte Grenze dort, wo eine zwischen beiden Randkontrasten liegende kontrastfreie Zone an den dunklen Kontraststreifen angrenzt." Hieraus lassen sich Vorschriften zur Korrektion von Fernrohrmessungen auf die Orte der wahren geometrischen Bilder ableiten.

Die Methoden von MICHELSON und anderen zur Steigerung der Auflösungsfähigkeit der Fernrohre, welche nicht mit Bildern der Gegenstände, sondern mit Interferenzerscheinungen arbeiten, gehören nicht in diese Darstellung[1]).

250. Die Helligkeit der Fernrohre und ihr Zusammenhang mit dem Erkennen von Einzelheiten ist in Ziff. 136 und 142 behandelt worden, so daß die Ergebnisse hier nur kurz zusammengestellt zu werden brauchen. Für ausgedehntere Gegenstände gilt: Bei Vergrößerungen unter der Normalvergrößerung ist das Fernrohrbild so hell wie das des freien Auges bis auf die in Ziff. 128—131 erörterten Lichtverluste. Bei höherer Vergrößerung nimmt die Helligkeit mit dem Quadrat der Vergrößerung ab. Für punktförmige Gegenstände und sehr kleine Flächen ist die Helligkeit proportional der Fläche der E.P.; ihr entsprechend werden auch schwache Lichter geringer Ausdehnung sichtbar gemacht. — Die Erkennbarkeit von Einzelheiten in größeren Flächen ist aber nicht nur von der Helligkeit des Bildes, sondern auch von der Vergrößerung selbst abhängig; das Optimum der Vergrößerung bei gegebener Öffnung hängt von der Beleuchtung ab[2])[3]).

Die Tiefe der Schärfe des Fernrohrs ist in Ziff. 122 behandelt worden; in Ziff. 123 die Akkomodationstiefe.

Die Spiegelfernrohre.

251. Der Aufbau und die Eigenschaften der eigentlichen Spiegelfernrohre. Für astronomische Zwecke werden seit der ersten Zeit des Fernrohres solche verwendet, bei denen ein wesentlicher Teil der sammelnden Wirkung durch spiegelnde Flächen erreicht wird. Sie scheinen gleichzeitig mit den holländischen Fernrohren, einige Jahre vor dem KEPLERschen, aufgetreten zu sein (ZUCCHI 1608, sam-

[1]) Eine Beschreibung s. z. B. bei A. KÜHL, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1923, Bd 44, S. 45—63.

[2]) Die von GEHLHOFF (ZS. f. techn. Phys. Bd. 2, S. 245. 1921) abgeleiteten Kurven, die die Herabsetzung der Schwelle der Beleuchtungsstärke als Funktion des Sehwinkels für verschiedene Vergrößerungen angeben, gelten zunächst nur für die Sichtbarmachung sehr kleiner leuchtender Flächen, nicht für das Unterscheiden von Punkten, Linien und Flächen oder das Erkennen von Formen. Wegen der zugrundeliegenden Messungen vgl. auch A. KÜHL, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 121. 1923.

[3]) Anmerkung während der Korrektur: Die Frage der Verbesserung des Sehens durch das Fernrohr wird in einer soeben erschienenen Arbeit A. KÜHL's theoretisch weitergeführt, auf die hier nur verwiesen werden kann. KÜHL definiert die „visuelle Leistung" des Fernrohrs durch die mit ihm erreichte „Sehschärfe" im Sinne der Ophthalmologie, die auf den dort eingeführten „Sehproben" beruht. Die Abhängigkeit der so bestimmten Sehschärfe, ebenso die der Augenpupille von der Beleuchtung ist bekannt. Hieraus leitet KÜHL die Abhängigkeit der Fernrohrleistung von der Vergrößerung, der Eintrittspupille und den Lichtverlusten ab, wobei er für das Dämmerungssehen das RICCOsche Gesetz (Ziff. 139) zugrunde legt. (A. KÜHL, ZS. f. Instrkde. Bd. 47, S. 75. 1927.)

melnder Hohlspiegel mit Negativlinse als Okular; MERSENNE 1638, sammelnder Parabolspiegel und kleiner paraboloidischer erhabener Spiegel, der durch eine Öffnung des großen angesehen wird; Wirkung die des holländischen Fernrohres[1)].

Die erste Lösung der hier auftretenden Aufgabe, die von einem Hohlspiegel herkommenden Strahlen dem Auge ohne größere Verluste durch Verdeckungen zuzuführen, ist in Abb. 270 gezeigt, und wird gewöhnlich nach

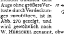


Abb. 270. Das Spiegelfernrohr von HERSCHEL.

W. HERSCHEL genannt, obwohl sie (nach ALB. KÖNIG) auf LEMAIRE (1732) zurückgeht. Der sammelnde Spiegel wird schräg gestellt (Achse *M*). Der Spiegel wurde gewöhnlich mit dem Öffnungsverhältnis $2p : f_1' = 1/10$ ausgeführt; um die Achse bis an den Rand des eintretenden Buschels zu bringen, genügt offenbar eine Neigung



Abb. 271. Das Spiegelfernrohr von NEWTON.

von 1/40 des Spiegels gegen die eintretenden Strahlen, also etwa 1,5°. Dies führt zu einem Astigmatismus, der bei stärkeren Vergrößerungen heute nicht mehr als erträglich angesehen werden wird. Die Lösung von NEWTON (1672), Abb. 271, umgeht diese Schwierigkeit durch einen kleinen Planspiegel unter 45° gegen die Achse, er schlug auch ein kleines Prisma als Ersatz vor; dieses auch mit

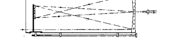


Abb. 272. Das Spiegelfernrohr von GREGORY.

sammelnder Eintritts- und Austrittsfläche, um so die bildaufrichtende Umkehrlinse des KEPLERschen terrestrischen Fernrohres zu ersetzen. Dieses Bild wäre aufrecht erschienen, während es bei der üblichen in Abb. 271 gezeichneten Bauart umgekehrt ist. Der kleinere „Fang"spiegel nimmt mindestens den halben Durch-

1) Literatur s. bei M. EPPLE in CZAPSKI-EPPENSTEIN, S. 568.

messer des großen, multipliziert mit dem Öffnungsverhältnis, weg, wenn das Bild außerhalb des eintretenden Bündels entsteht. Foucault verlegte es deshalb näher an den Fangspiegel und beobachtete es mit einem terrestrischen Fernrohr.

Bei den folgenden Formen wird der Fangspiegel, wie bei dem obenerwähnten Vorschlag von Mersenne, kugelförmig ausgebildet. Älter als die Newtonsche Konstruktion ist die von Gregory (1661), (Abb. 272), bei der ein Hohlspiegel hinter der Brennebene steht; der Fangspiegel wirkt wie eine Umkehrlinse. Nach dem ursprünglichen Vorschlag sollte der Hauptspiegel paraboloidisch, der Fangspiegel ellipsoidisch sein. Das Cassegrainsche Fernrohr (ebenfalls 1661) hat, wie der Vorschlag von Mersenne, einen erhabenen Spiegel; doch wirkt er nicht als Negativokular, sondern bildet mit dem Hauptspiegel zusammen ein Teleobjektiv, da er vor der Brennebene des Hauptspiegels errichtet wird (Abb. 273); das Bild ist daher umgekehrt. Das Fernrohr wird dementsprechend verkürzt. Wird der Hauptspiegel geneigt, so kann die Durchbohrung vermieden werden; so entsteht das Brachyteleskop (1877) von J. Forster und K. Fritsch, das von letzterem ausgeführt wurde (Abb. 274). Der Astigmatismus des Hauptspiegels kann durch den Fangspiegel ausgeglichen werden. Heute üblich sind die Anordnungen von Newton, Cassegrain, in kleinerer Ausführung auch Gregory. Will man diese mit etwas größerem Öffnungsverhältnis ausführen, so muß von der Kugelform abgewichen werden. Auch ist es empfehlenswert, die sphärische Abweichung bei beiden Spiegeln für sich zu beseitigen; sonst ist die Zentrierung zu schwierig, auch die Prüfung der einzelnen Spiegel unmöglich, die auf Lokalretusche beruht; deshalb wird der Hauptspiegel paraboloidisch, der Auffangspiegel bei Gregory ellipsoidisch, bei Cassegrain hyperbolisch ausgeführt. Der Ausgleich durch Kugelflächen ist unmöglich[1]).

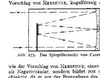


Abb. 273. Das Spiegelfernrohr von Cassegrain.



Abb. 274. Das Brachyteleskop von Forster und Fritsch.

Die Bildfehler eines Kugelhohlspiegels s. bei A. König[2]), ebenso die eines Parabolspiegels; bei diesem ist die sphärische Abweichung 0; die Koma dieselbe wie beim Kugelspiegel. Auch die Bildfehler der Gregoryschen und Cassegrainschen Anordnung außer der Achse sind von A. König (S. 78) behandelt. Schwarzschild[3]) hat für photographische Spiegel zwei von der Kugel abweichende Hohlspiegel angegeben, die frei von sphärischer Abweichung und Koma sind, und bei denen tangentiale und sagittale Bildfläche gleich weit von der Gaussschen Bildebene abstehen (Bildfeldebnung im übertragenen Sinne) und einen geringeren Abstand (Astigmatismus) haben als beim Parabolspiegel.

[1]) Ch. v. Hofe, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 42, S. 177. 1921.
[2]) A. König, l. c. S. 76.
[3]) K. Schwarzschild, Göttinger Nachr., N. F. Bd. 4, Nr. 1/3. 1905.

252. Moderne Ausführungen. Bei den photographischen Spiegelfernrohren[1]) auf dem MT. WILSON sind verschiedene Bauarten vereinigt (Abb. 275). Der Hauptspiegel des älteren hat 1,52 m Öffnung und 7,6 m Brennweite; für Aufnahmen unmittelbar in der Brennebene mit 1:5 Öffnungsverhältnis dient die Anordnung von NEWTON; in einer solchen ähnlich CASSEGRAINS wird die Brennweite durch zwei auswechselbare Fangspiegel auf 24,4 bzw. 30,5 m vergrößert, wobei das Bild durch einen kleinen 90° ablenkenden Planspiegel *D* vor der Mitte des Hauptspiegels auf die seitliche Platte bzw. den Sternspektrographen geworfen wird. Durch einen dritten Fangspiegel *D* kann die Brennweite auf 45,7 m gesteigert werden, der kleine Planspiegel steht hier im Kreuzungspunkt der Deklinations- und Polarachse und wird so mitgedreht, daß er die Strahlen durch die Polarachse *E* hindurch in den Beobachtungsraum wirft, wo ein 6,4 m langer Sternspektrograph angeschlossen werden kann. Der parabolische Hauptspiegel hat eine Mitteldicke von 175 mm, der hyperpolische Fangspiegel eine solche von

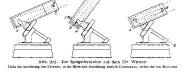


Abb. 275. Die Spiegelfernrohre auf dem MT WILSON
Links die Anordnung von NEWTON, in der Mitte eine Anordnung ähnlich CASSEGRAIN, rechts die von RANYARD

76 mm bei einem Durchmesser von 406 bis 445 mm für die verschiedenen Brennweiten, der eine Planspiegel hat eine Öffnung von 502 × 368 mm² und eine Dicke von 79 mm, der andere von 565 × 318 mm² und 92 mm. Es zeigte sich, daß die Leistung dieses vorzüglichen Fernrohres nur dann voll ausgenutzt wird, wenn die Temperatur auf 1° konstant gehalten wird. Bei dem neuen von HOOKER gestifteten Fernrohr derselben Sternwarte hat der Hauptspiegel 2,57 m Durchmesser, 292 mm Mitteldicke und 12,88 m Brennweite; durch Fangspiegel von 0,73 bzw. 0,64 m Durchmesser kann die Brennweite auf 41 bzw. 76 m gesteigert werden. Der Sternspektrograph in der Polarachse ist für Konkavgitter von 6,4 m Radius und für ebene Gitter mit einem Objektiv von 9,15 m Brennweite eingerichtet. Als Werkstoff für die Spiegel dienten früher Metallegierungen. Bei dem Spiegelmetall von ROSSE (68,2 Cu + 31,8 Sn) werden etwa 64% des Lichtes zurückgeworfen, bei einer neueren Stahllegierung von KRUPP mit ausgezeichneter Haltbarkeit etwa 59%. Dagegen erreicht man bei einer guten Versilberung 96%. Das Zurückwerfungsvermögen sinkt mit abnehmender Wellenlänge, Silber hat bei 0,31 μ ein stark ausgeprägtes Minimum[2]). Das für Melbourne 1869 gestiftete CASSEGRAINsche Spiegelfernrohr mit $D = 1{,}219$ m war wohl das letzte größere mit einem Metallspiegel ausgerüstete. Heute benutzt man auf der Vorderfläche

[1]) Der folgende Abschnitt stammt aus A. KÖNIG, l. c. S. 74.
[2]) Siehe hierzu im Abschnitt über Strahlungsvermittlung Ziff. 130, Abb. 131.

versilberte Glasspiegel, deren Gewicht wesentlich geringer ist; die Rückseite wird nur zum Wärmeschutz mitversilbert; die öfters nötige Erneuerung der Versilberung bietet bei geeigneten Einrichtungen keine besondere Schwierigkeit.

253. Die Mediale. In der Mitte zwischen Linsen und Spiegelfernrohren stehen die sog. „Mediale". Maßgebend war bei ihnen außer der Verwendung der hinteren Versilberung an Stelle der unhaltbaren Versilberung von Vorderflächen die bessere Korrektion, insbesondere des Farbenfehlers der Objektive. Das sekundäre Spektrum zweier dünner Linsen läßt sich bei gewöhnlichen Glasarten ohne die starken Krummungen der Apochromate aufheben, wenn die Linsen getrennt angeordnet werden; aber nur für ein virtuelles Bild. Man kann aber dieses Bild reell machen, wenn man einen Hohlspiegel hinzufügt, der die hintere Fläche einer Linse bildet. Schon W. FR. HAMILTON [engl. Patent 1814[1])] hat als Objektiv eine sammelnde Kronlinse und eine davon getrennte zerstreuende Flintlinse mit versilberter Rückseite, die einen Hohlspiegel darstellt, vorgeschlagen. SCHUPMANN[2]) hat diese Konstruktion im „Brachymedial" aufgenommen und das Medial hinzugefügt. Abb. 276 zeigt das Medial, bei dem das Bild von einem kleinen Prisma, dessen Flächen, um als Kollektiv zu wirken, kugelig ausgebildet sind, senkrecht zur Achse reflektiert wird, und erst dann die Flintlinse und den sammelnden Hohlspiegel erreicht, in den die Kollektivlinse den Hauptspiegel abbildet; so wird die Farbenabweichung der Vergrößerung für alle Farben gehoben; man erhält aber durch die Schiefstellung der Spiegellinse Bildfehler. Der besondere Vorteil ist die Kleinheit dieses Spiegels. Die Verbiegung eines solchen Spiegels durch sein eigenes Gewicht spielt im Gegensatz zu den großen Spiegeln keine Rolle. Größer und deshalb etwas empfindlicher ist der Spiegel des Brachymedials (Abb 277), der aber frei von den Fehlern der Schiefstellung ist. Die hier übrigbleibende Farbendifferenz der Vergrößerung kann durch Kompensationsokulare beseitigt werden; „oder man verkittet mit dem als Prisma ausgebildeten Fangspiegel *s* eine Verbesserungslinse, dann ist es auch für photographische Zwecke brauchbar, zumal da sich neben der Hebung der Koma Bildfeldebnung im übertragenen Sinne bei mäßigem Astigmatismus erreichen läßt. Leider ist bisher mit dem Brachymedial kein Versuch im großen gemacht worden" (KÖNIG a. a. O. S. 76).



Abb. 276. Das Medial.

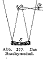


Abb. 277. Das Brachymedial.

254. Der Wettkampf zwischen den „Reflektoren" und „Refraktoren" für astronomische Zwecke (für andere kommen Spiegel überhaupt nicht in Betracht) steht heute etwa so: Die sphärische Abweichung läßt sich für beide beseitigen; die Koma bleibt bei dem üblichen Spiegelteleskop störend. (Die Koma eines CASSE-

[1]) Vgl. M. v. ROHR, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 42, S. 279. 1921; Bd. 43, S. 377. 1922.

[2]) L. SCHUPMANN, Die Medialfernrohre, Leipzig 1899; Astron. Nachr. Bd. 196, S. 101. 1913; ZS. f. Instrkde. Bd. 33, S. 108. 1913; Bd. 41, S. 212 u. 253. 1922.

GRAINschen oder GREGORYschen Doppelspiegels, dessen Einzelglieder frei von sphärischer Abweichung sind, ist nach KÖNIG[1] gleich der eines Parabolspiegels von gleicher Öffnung und Brennweite. Das Linsenfernrohr ist auch deshalb an Bildschärfe überlegen, weil der Einfluß ungleicher Erwärmung, die vorübergehende Deformationen erzeugt, bei den Spiegeln viel größer ist. Wo es also auf höchste Schärfe ankommt, wie bei der Messung, ist der Refraktor überlegen; ebenso wo ein größeres Gesichtsfeld gebraucht wird, wie zum Aufsuchen von Planeten und Kometen. Der Spiegel hat den Vorzug, mit viel größeren Öffnungen ausgeführt werden zu können, weil an das Glas geringere Ansprüche gestellt werden. (Das größte Objektiv hat 1 m, der größte Spiegel 2,5 m Durchmesser; die Kosten der Spiegel sind auch wegen der leichteren Montierung bei gleich großen Abmessungen nur der zehnte Teil der des Refraktors.) Deshalb läßt sich auch mit dem Spiegel sowohl größere Punkthelligkeit als größere Helligkeit von Flächen erzielen, auch die völlige Freiheit von sekundärem Spektrum bedeutet einen Helligkeitsgewinn. Der Spiegel ist also für Beobachtungen von Planeten, lichtschwächeren Sternen und Nebeln geeigneter.

Die Bildaufrichtung mit Linsen.

255. Das zusammengesetzte (terrestrische) Okular. Schon KEPLER (1611) hatte angegeben, daß man das umgekehrte Bild seines Fernrohrs durch Hinzufügen einer Zwischenabbildung aufrichten konnte. Er ist demnach auch der Erfinder des „terrestrischen" Fernrohrs [zur Geschichte vgl. M. v. ROHR[2]), ENGELMANN[3])]; auf A. M. SCHYRLE, einen Mönch aus Rheidt (Rheita) (1645), scheint die Verbreitung dieser für den nicht wissenschaftlichen Gebrauch damals wichtigsten Fernrohrgattung zurückzugehen. Nur in der Astronomie und bei geodätischen Arbeiten (wenigstens in den meisten Ländern) läßt man das Bild umgekehrt, mit Rücksicht auf den einfacheren Bau, der der Bildgüte und der Reflexfreiheit zugute kommt.

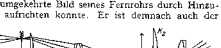


Abb. 278. Ein zusammengesetztes (bildaufrichtendes) Okular. U Umkehrlinse K_1 Kollektiv. Das zweite Kollektiv K_2 und die Augenlinse A bilden ein einfaches (KELLNERsches) Okular

Das terrestrische Okular enthält also eine Umkehrlinse, die von dem reellen Bild des Objektives wiederum ein reelles Bild erzeugt; es verhält sich zu dem einfachen Okular, wie das zusammengesetzte Mikroskop zur Lupe, nur daß der Gegenstand hier kein allseitig strahlender oder sehr kleiner, wie oft beim zusammengesetzten Mikroskop, sondern das vom Objektiv erzeugte Bild ist, dessen Hauptstrahlen vom Objektivmittelpunkt (oder der A.P. des Objektives) divergieren und zweckmäßig erst von einer in seiner Nähe angebrachten Kollektivlinse so gerichtet werden, daß sie sich in der eigentlichen Umkehrlinse schneiden oder doch wenigstens nicht so weit von ihr, daß diese Linse einen zu großen Durchmesser erhalten müßte. Abb. 278 zeigt ein solches Okular.

256. Schematische Zerlegung des Erdfernrohrs. Denkt man sich hier die Umkehrlinse aus zwei Teilen zusammengesetzt, zwischen denen die von einem Punkte der Bildebene ausgehenden Bündel parallelstrahlig sind, so erhält man Abb. 279. Hier kann man nun den Teil $O_1 K_1 O_2$ als ein erstes, $O_3 K_2 O_4$ als ein zweites

[1]) A. KÖNIG, a. a. O. S. 26.
[2]) M. v. ROHR, ZS. f. Instrkde. Bd. 40, S. 15. 1920; Die binokul. Instrumente, 2. Aufl., S. 27. Berlin 1920.
[3]) M. ENGELMANN, Sirius Bd. 51, S. 93, 108. 1918.

astronomisches Fernrohr auffassen; beide sind hintereinander geschaltet. Die Austrittspupille des ersten P' (das Bild des Objektivmittelpunktes) fällt in der Abb. 279 mit der E.P. des zweiten zusammen. Die entstehende Vergrößerung ist gleich dem Produkt der einzelnen Vergrößerungen. Die A.P. des ersten Fernrohrs wird nicht nur zweckmäßig möglichst in die E.P. des zweiten fallen, sondern muß ihr auch an Größe gleich sein, damit man die Linsen richtig ausnutzt. Man kann hier bereits zwei Fälle der Anwendung des Erdfernrohrs unterscheiden, die freilich nicht immer voneinander getrennt auftreten:



Abb 279 Ein bildaufrichtendes Linsenfernrohr. Es kann in zwei astronomische Fernrohre zerlegt werden, deren erstes aus dem Objektiv O_1, dem Kollektiv K_1 und dem Vorderglied der Umkehrlinse O_2 besteht; das Hinterglied O_3, das Kollektiv K_2 und die Augenlinse O_4 bilden das zweite.

1. Der Zweck ist die Fernrohrvergrößerung. Dann werden beide Fernrohrteile eine Vergrößerung $\Gamma > 1$ besitzen. Man wird bestrebt sein, die Länge des Ganzen möglichst gering zu halten.

2. Der Zweck ist die Verlegung des Augenortes P'' nach einer dem Auge unzugänglichen Stelle P, die in Abb. 279 mit dem Objektiv zusammenfallt (Sehrohr). In diesem Falle ist oft große Länge erwunscht, während der Durchmesser meist nicht beliebig gesteigert werden darf. Will man gleichzeitig die Vergrößerung des Ganzen kleiner halten als die des zweiten Fernrohrs, so muß das erste verkleinern; man kann so z. B. die Vergrößerung 1 erhalten, wenn $\Gamma_1 = 1 : \Gamma_2$ ist. Man könnte in solchen Fällen auch von zwei vergrößernden, aber gegeneinander geschalteten Fernrohren sprechen. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

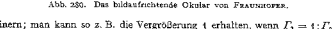


Abb. 280. Das bildaufrichtende Okular von FRAUNHOFER.

257. Das vergrößernde Erdfernrohr mit Linsen. Die früher häufigste Verwendung fand es in den Auszugfernrohren, deren Vergrößerung meist etwa zwischen 10facher und 30facher liegt, und die heute mehr und mehr durch die Prismenfernrohre verdrängt werden. Der hohen Vergrößerung entsprechend wird im Okular nur auf seitliche Bildfehler zu korrigieren sein. Diese Aufgabe löste das terrestrische Okular von FRAUNHOFER[1]), das aus vier Linsen der gleichen Art besteht (Abb. 280). Die Bauart solcher Fernrohre zeigt Abb. 281. In manchen Fällen, insbesondere wenn eine noch stärkere Vergrößerung des Okulars wünschenswert ist, muß auf die Einfachheit des Baues, die das FRAUNHOFERsche Okular auszeichnet, verzichtet werden. Man geht dann gewöhnlich auf die grundsätzliche



Abb. 281. Ein Erdfernrohr (Auszugfernrohr).

[1]) Angaben bei J. J. PRECHTL, Praktische Dioptrik usw. Wien: Heubner 1828 oder A. GLEICHEN, Lehrb. d. geometr. Optik. Leipzig 1902; ältere Okulare bei M. v. ROHR, Theorie der optischen Instrumente. Berlin: Julius Springer 1904.

Anordnung von Abb. 278 zurück, verbessert das Umkehrsystem, indem man es z. B. der Bauart eines photographischen Aplanats annähert und ersetzt etwa das dort gezeichnete RAMSDENsche Okular KELLNERscher Art durch ein anderes. Man kann so dem umkehrenden Okular auch dasselbe Gesichtsfeld wie dem einfachen geben.

Den Fall des Sehrohrs werden wir weiter unten behandeln.

Das Prismenfernrohr.

258. Bildaufrichtende Spiegelprismen. Vielleicht der wichtigste Fortschritt im Bau des Fernrohrs in neuester Zeit war die Einführung der Bildaufrichtung durch Spiegelprismen, weil sie den einzigen Mangel des astronomischen Fernrohrs beseitigt, ohne die Nachteile des terrestrischen, die große Baulänge und die Bildverschlechterung durch die Zwischenabbildung einzuführen. Bei Handfernrohren war die gleichzeitige Verkürzung der Fernrohrlänge sogar für den Gebrauch ein entscheidender Vorzug: Doppelfernrohre für den Handgebrauch mit stärkerer Vergrößerung als etwa 2× und genügendem Gesichtsfeld (bildseitig 40° und mehr, neuerdings 70°) sind nur auf diese Weise ausführbar.

Die Wirkung von Spiegeln in optischen Geräten ist dadurch gekennzeichnet, daß sie in ungerader Anzahl eine „rückwendige" Abbildung erzeugen, in gerader Anzahl aber eine „rechtwendige". Diese vom Verfasser in der Bearbeitung von CZAPSKIS Theorie der opt. Instr. nach ABBE 1904 eingeführten Bezeichnungen sollen den grundsätzlichen Unterschied ausdrucken, den man bereits ohne jede Annahme über die Lagenbeziehung des Bildraumes zum Dingraum zu machen genötigt ist. Blickt man im Dingraum etwa der Lichtrichtung entgegen auf einen Uhrzeiger, so wird die Bewegung seines Bildes, wenn man im Bildraum ebenfalls der Lichtrichtung entgegenblickt, bei rechtwendiger Abbildung wiederum im gleichen Sinne stattfinden; bei rückwendiger im entgegengesetzten. Rückwendige Abbildung macht aus einer Rechtsschraube eine Linksschraube; aus der rechten Hand eine linke usw., wie aus der Betrachtung im einfachen Planspiegel bekannt ist. Sie kann nach der Definition auch durch Umkehrung der Betrachtungsrichtung gewonnen werden, sie entsteht also, wenn man ein photographisches Negativ von der Schichtseite aus ansieht.

Bei rechtwendigen Bildern unterscheidet man ferner **aufrechte** und **umgekehrte** Bilder; doch bezieht sich dieser Unterschied offenbar nur auf die Lage des Bildes zum Beobachter. Erscheinen Ding und Bild in derselben Richtung, so ist freilich sofort klar, daß das umgekehrte Bild (abgesehen von den Maßverschiedenheiten, die bei allen diesen Betrachtungen wegbleiben) dadurch entsteht, daß der Gegenstand um diese Richtung um 180° gedreht wird. Man kann dann auch sagen, daß „oben und unten, rechts und links vertauscht ist". (Die Drehung um 180° ist nur ein Sonderfall einer der sonst möglichen Drehungen, von denen später besonders die um 90° eine Rolle spielen wird.) Erscheint aber das Bild in einer anderen Richtung als der Gegenstand, so ist die Unterscheidung von der Stellung des Beobachters abhängig. Ein rechtwendiges Bild heißt dann aufrecht, wenn man die Richtungen des Bildes in die entsprechenden des Gegenstandes durch eine der folgenden Bewegungen überführen kann:

1. durch Drehen des Kopfes oder Körpers um eine vertikale Achse, wie es beim Vergleich eines mir gegenüberstehenden Menschen mit seinem Bildnis geschieht, das an der Wand neben ihm oder ihm gegenüber hängt;

2. durch Neigen des Kopfes um eine horizontale Achse, wie es durch Vergleich des mir am Tische gegenübersitzenden Menschen mit einem auf dem Tische liegenden Bildnis geschieht[1];

3. durch Drehungen nach 1 und 2, wie es durch Vergleich des seitlich oder hinter mir sitzenden Menschen mit einem auf dem Tisch vor mir liegenden Bildnis geschieht. Der mir am Tisch Gegenübersitzende nennt dieselbe Zeichnung umgekehrt. Dieselben Aussagen bleiben bestehen, wenn ich und mein Gegenüber vor dem Tische stehen und die Augen senkrecht über die Tischebene bringen. Es ist also keine Eigentümlichkeit einer Spiegelfolge, ein aufrechtes oder umgekehrtes Bild zu entwerfen außer, wenn die Sehrichtung durch die Spiegelfolge nicht verändert wird. Ein Beispiel zeigt Abb. 282, die das unten näher besprochene Goulier'sche Prisma darstellt. Ein Beobachter, dessen Körperachse sich in der vertikal gedachten Zeichenebene bei aa befindet, der durch Kopfneigung die aus dem Prisma oben austretenden Strahlen ins Auge erhält, sieht ein aufrechtes, ein ebenso bei bb stehender, der dasselbe tut, sieht ein umgekehrtes Bild. (Ein vor oder hinter der Zeichenebene Stehender sieht es um 90° verdreht.)



Abb. 283. Die Wirkung eines Winkelspiegels. Die Spiegel 11 und 22 bilden den Winkel w, der Dingraum wird in den Bildraum durch Drehung um die Kante K um den Winkel $2w$ übergeführt.

Die entsprechende Unterscheidung macht man bei rückwendigen Bildern. Ein rückwendiges Bild, bei dem oben und unten vertauscht ist, nennt man höhenverkehrt; ein aufrechtes rückwendiges Bild seitenverkehrt. Ein wagerechter Spiegel gibt also ein höhenverkehrtes Bild, ein senkrechter Spiegel ein seitenverkehrtes. Bei unter 45° gegen die Horizontale geneigtem Spiegel hängt die Aussage wieder von der Stellung des Beobachters ab.

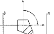


Abb. 282. Das Goulier'sche Prisma mit 90° Ablenkung.

Das vom astronomischen Fernrohr gelieferte Bild ist rechtwendig und umgekehrt. Die Aufgabe, es in ein rechtwendiges, aufrechtes zu verwandeln, kann nur durch eine gerade Anzahl von Spiegeln gelöst werden. An Stelle freier Spiegel werden fast immer Prismen benutzt, die hierbei mögliche Verwendung der Totalreflexion vermeidet den unter Ziff. 130 besprochenen Lichtverlust. Auch wenn Totalreflexion gelegentlich nicht erreichbar ist, wählt man Prismen mit versilberten Spiegelflächen; bei ihnen ist die dem Glase zugekehrte Fläche des Silberbelages haltbar, während freie Metallspiegel entweder nicht haltbar oder nicht hell oder farblos genug sind (Ziff. 130).

259. Der Winkelspiegel. Die Bildumkehrung erfordert also Spiegelpaare, sog. Winkelspiegel. Die Wirkung eines solchen ist die Drehung des Dingraumes um die Schnittkante der beiden Spiegel als Achse; in Abb. 283 ist K die Schnittkante der beiden Spiegel *11* und *22*. Die Drehung des Bildraumes findet in demselben Sinne statt, in dem der zuerst getroffene Spiegel in den zweiten übergeführt wird, und um den doppelten Winkelbetrag. Der Sonderfall eines Winkelspiegels von 45° ist in der Abb. 282 dargestellt; hier ist der Bildraum um 90° gegen den Dingraum verdreht; bei 90° Spiegelwinkel wären es 180°.

[1] Diese Drehung um die horizontale Achse ist aber beschränkt (im Gegensatz zu der um die vertikale). Zwischen den Beinen durchgesehen „erscheinen die Gegenstände umgekehrt".

260. Die Bildaufrichtung mittels 2 Spiegelflächen. Aus dem Gesagten folgt, daß ein Winkelspiegel bildumkehrend wirkt, dessen Schnittkante in oder parallel einer senkrechten Ebene durch die Blickrichtung liegt, und der 90° Spiegelwinkel besitzt. In Abb. 284 ist die Zeichenebene die vertikale Ebene durch die nach dem Auge zielende Blickrichtung KA, K_1K_2 ist die Schnittkante des Winkelspiegels oder ihre Parallele in dieser Ebene, LK die Projektion des einfallenden Strahles auf diese Ebene (er ist ihr ebenfalls parallel). Der Bildraum entsteht aus dem Dingraum durch Drehung um 180° um K_1K_2; das bedeutet, daß der Pfeil ab in $a'b'$ übergeht, daß ferner vor der Zeichenebene liegende Punkte in solche hinter ihr übergehen; für das Auge hat also eine Drehung um 180° um die Blicklinie stattgefunden, die oben und unten, rechts und links vertauscht hat. Die Drehung um 180° um K_1K_2 kann offenbar durch eine 180°-Drehung um KA ersetzt werden mit Zuhilfenahme einer Drehung um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse, die LK in $L'K$ überführt. Die letztere Art von Drehung ist aber ohne Einfluß auf die Bildlage, da sie durch Drehen des Kopfes um eine horizontale Achse ausgeglichen wird. Die beiden Spiegel, die sich in K_1K_2 schneiden, könnten z. B. die Spiegel I und II von Abb. 285 sein, die in den beiden Punkten 1 und 2 getroffen werden und die miteinander 90° bilden. Man legt in diesem Falle die Schnittkante K_1K_2 oft so, daß sie von der Blicklinie oder, wenn es sich um einen Zusatz zu einem Fernrohr handelt, von der optischen Achse des Fernrohres selbst getroffen wird, indem die einfallende Achse, die austretende Achse und die Schnittkante in derselben vertikalen Ebene liegen. In diesem Falle nennt man den Winkelspiegel, insbesondere wenn er als Prisma ausgeführt ist, ein „Dach". Der Winkel der Spiegelfläche muß hierbei besonders genau sein;

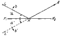


Abb. 284. Zur Bildaufrichtung durch einen Winkelspiegel. KA die Blickrichtung des Auges. K_1K_2 die Kante eines rechtwinkligen Winkelspiegels.

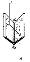


Abb. 285. Ein Winkelspiegel von 90° mit der Kante K_1K_2.

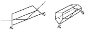


Abb. 286. Ein Dachprisma.



Abb. 287. Rechtwinklige Ablenkung durch ein Dachprisma.

denn ein Teil der Strahlen desselben Büschels fällt zuerst auf I, ein anderer zuerst auf II, und der Winkel zwischen zwei einfallenden Strahlen muß nach der doppelten Spiegelung, auch wenn die Reihenfolge verschieden ist, unverändert sein. Dieses ablenkende und bildumkehrende „Dachprisma" von Amici zeigt Abb. 286. Abb. 287 zeigt für den Sonderfall der rechtwinkligen Ablenkung außer dem Verlauf der Achse noch den zweier dieser parallelen Strahlen, deren einer in derselben Halbierungsebene des 90°-Winkels verläuft wie die Achse, der andere senkrecht dazu. Beim Austreten zeigt sich, daß diese Strahlen für den von A blickenden Beobachter auf der anderen Seite der Achse verlaufen; woraus nach der Gleichung $B\Gamma = 1$ auch die Umkehrung der Konvergenzwinkel, also die Bilddrehung um 180°, folgt.

Die zu Abb. 284 angestellten Betrachtungen bleiben nun auch gültig, wenn die Zeichenebene dieses Bildes nicht die senkrechte, sondern die wagerechte

Ebene darstellt. Dazu ist vorauszusetzen, daß die einfallende Achse, die Bildachse, und die Schnittkante sämtlich wagerecht verlaufen.[1])

261. Geradsichtige Aufrichteprismen mit zwei Spiegelungen. In den meisten Fällen ist es erwünscht, daß die Ein- und Austrittsachse einander parallel sind. Will man in diesem Falle mit zwei Spiegelungen auskommen, so muß man die Schnittkante K und damit beide Spiegel parallel zu den Achsen legen. Die Spiegelung an einer dem einfallenden Strahl parallelen Fläche ist mit Hilfe von Brechungen in dem Amicischen Spiegelprisma (Abb. 288) erreicht; vereinigt



Abb. 288. Das Amicische Spiegelprisma.

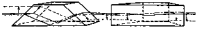


Abb. 289. Das Umkehrprisma von Delaborne.

man zwei solche, deren Spiegelflächen senkrecht zueinander stehen, so ist die Schnittkante der Achse parallel (Abb. 289). Diese Zusammenstellung heißt auch das Delabornesche Umkehrprisma, wird auch oft nach Dove genannt, der es unabhängig gefunden und auch für den Fall anderer als des rechten Winkels untersucht hat. Sie ist auch so ausführbar, daß die Achse die Schnittkante trifft, das ist als Dachprisma (Abb. 290) nach Sang-Zentmayer. Die bei diesen Prismenformen auftretenden schrägen Brechungen machen es unmöglich, sie zwischen Objektiv und Okular zu benutzen; sie wirken wie eine schiefgestellte planparallele Platte, die nur dann das Bild nicht verschlechtert, wenn die Bündel parallelstrahlig sind; d. h. vor dem Objektiv, da hinter dem Okular der Platz selten ausreicht.

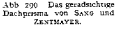


Abb. 290. Das geradsichtige Dachprisma von Sang und Zentmayer.

262. Aufrichteprismen mit vier Spiegelungen. Gehen wir wieder von der senkrechten Ebene in Abb. 284 aus, so haben wir oben schon bemerkt, daß die Hinzufügung einer beliebigen Drehung um eine horizontale Achse keinen Einfluß auf die Bilddrehung hat. Man kann also zu dem Spiegelwinkel, dessen Schnittkante K_1K_2 ist, einen anderen hinzufügen, dessen Schnittkante senkrecht zu der Zeichenebene von Abb. 291 steht. So entsteht z. B. ein Prisma nach Art von Abb. 292 oder 293, das jedoch nicht geradsichtig wie diese zu sein braucht. Auch kann die Reihenfolge der Spiegelungen geändert werden, z. B. können die Teile A_1A_2 des Winkelspiegels mit horizontaler Schnittkante durch den Winkelspiegel B_1B_2, dessen Schnittkante in einer vertikalen Ebene liegt, getrennt sein. Denn dann kann man den Spiegel A_2 durch B_2B_2 rückwärts abgebildet denken, so daß das Bild A_2' wieder A_1 benachbart wird; die Schnittkante von A_1 und A_2' liegt wieder horizontal und sie und der Winkel zwischen beiden ist für die Bilddrehung maßgebend. Ein Beispiel zeigt Abb. 291 in dem Umkehrprisma von H. Schmidt; hier allerdings wird die letzte Spiegelfläche, wenn sie durch das Dach rückwärts abgebildet wird, der ersten parallel, so daß die Schnittkante im Unendlichen liegt und die Drehung Null wird. — Wie oben bemerkt, können wir in Abb. 284 die Zeichenebene



Abb. 291. Ein ablenkendes bildaufrichtendes Prisma (in einem Zielfernrohr für Flugabwehrgeschütze) nach H. Schmidt.

[1]) Die Drehung um 180° um die Kante K_1K_2 läßt sich wiederum ersetzen durch eine ebenso große Drehung um die Blicklinie und eine Drehung um eine zur Zeichenebene senkrechte, in diesem Falle vertikale Achse, die, weil sie durch eine Drehung des Kopfes um eine vertikale Achse ausgeglichen wird, nach 1. in Ziff. 258 ohne Einfluß auf die Beurteilung der Bildlage ist.

als die wagerechte Ebene ansehen und zu dem Winkelspiegel, dessen Kante in dieser verlauft, noch einen solchen hinzufügen, dessen Kante senkrecht steht, da Drehungen um die vertikale Achse die Beurteilung der Bildlage nicht ändern. Das Prisma in Abb. 291 kann also auch so liegen, daß die Zeichenebene horizontal ist.

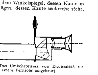


Abb 292 Das Umkehrprisma von DAUBRESSE (in einem Fernrohr eingebaut)

263. Geradsichtige Aufrichteprismen mit vier Spiegelungen. Macht man eine solche Spiegelzusammenstellung geradsichtig, so kann die Beschrankung auf die vertikale Ebene fallen. Ein jedes geradsichtige Umkehrprisma muß um seine Achse drehbar sein, ohne das Bild zu beeinflussen, es ist durchaus einem astronomischen Fernrohr von der Vergrößerung 1 gleichwertig. Es genugt also, zwei Winkelspiegel A_1A_2 und B_1B_2 mit zwei **aufeinander senkrechten**, sonst beliebigen Achsen anzuordnen, wobei die Reihenfolge der Spiegelungen auch gleichgültig ist, also ein Paar durch das andere getrennt sein kann.

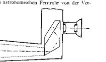


Abb 293. Das SPRENGERprisma von A. LEMAN

Bei einem Umkehrprisma von DAUBRESSE (Abb. 292) ist der Winkelspiegel mit horizontaler Achse das GOULIERsche Prisma, der mit dazu senkrechter Achse das AMICIsche Dachprisma mit rechtem Winkel; man muß hier zwei Flächen versilbern. Das LEMANsche Umkehrprisma (auch bekannt als Sprengerprisma nach der Firma, die 1895 ein Patent darauf erhielt) bedarf keiner Versilberung und kann aus einem Stück hergestellt werden (Abb. 293). Ohne Dach verwirklicht denselben Gedanken der erste PORROsche

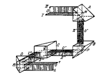


Abb. 294. Der erste PORROsche Umkehrprismensatz.

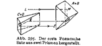
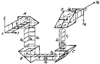


Abb. 295. Der erste PORROsche Satz aus zwei Prismen hergestellt.

Prismensatz (Abb. 294, in der wiederum die Umkehrung der Ebenen *I* und *II* gezeigt wird), aus vier rechtwinkligen Prismen *ABCD* bestehend. Die Schnittkante der Spiegel *A* und *B* steht senkrecht zu der der Spiegel *C* und *D*. In diesem

Falle steht auch die Achse senkrecht auf beiden. Die Prismen werden gewöhnlich paarweise verbunden (Abb. 295) und diese beiden Teile oft auch verkittet. Geschieht dies nicht, so ergibt sich noch ein weiterer Vorteil, der aus Abb. 294 und 295 offensichtlich wird: die Verkürzung der Baulänge des Fernrohrs. PORRO machte seine Anordnung 1850 bekannt, seine Prismenfernrohre waren aber vergessen und wurden von ABBE 1873 neu erfunden. Er schuf mit ihrer Benutzung den Prismenfeldstecher, der 1893 von der Firma Zeiß zuerst hergestellt wurde; die älteren Versuche J. PORROS hatten vermutlich wegen der schlechten Beschaffenheit des Glases und der mangelhaften Herstellung der Prismenflächen kein befriedigendes Ergebnis gehabt[1]).


Abb. 296. Der zweite PORROsche Umkehrprismensatz.

Da man, wie oben erwähnt, die Reihenfolge der Spiegelungen vertauschen kann, so kann man (Abb. 296) einen Winkelspiegel, bestehend aus den Prismen B und C, einschließen mit einem Teile eines anderen, A und D, und erhält so den zweiten PORROschen Prismensatz. Nach der Hälfte $A + B$ hat hier eine Bilddrehung um 90° stattgefunden; nach $C + D$ ist sie um weitere 90 auf 180° erhöht. In kleinster Ausführung zeigt diesen Satz Abb. 297. Er eignet sich aber auch besonders zum Abtrennen von D, das in weitere Entfernung hinausgerückt werden kann, um so den Eintrittsachsen eines Doppelfernrohres einen viel größeren Abstand als den Augenabstand zu geben (vgl. Ziff. 270 u. folg.), was


Abb. 297. Der zweite PORROsatz aus zwei aneinander gekitteten Stücken hergestellt.


Abb. 298. Das ABBEsche Umkehrprisma.

auch mit dem ersten Satze möglich ist (ABBE 1893, Patent von C. Zeiß). Da es für die Erfüllung unserer Bedingung nur nötig ist, daß die Schnittkante der Spiegel A und D senkrecht zu der von B und C ist, so brauchen z. B. die Winkel LMP und QRS in Abb. 297 nicht rechte zu sein, die Spiegelflächen A und D können miteinander einen anderen Winkel als 90° bilden, z. B. weniger gegen die Ein- und Austrittsachse geneigt sein. Sie können dann soweit verschoben werden, daß sie im Sinne der Lichtrichtung nicht mehr nebeneinander, sondern hintereinander stehen, und B und C können zu einem Dach vereinigt werden. Man erhält so das geradsichtige Umkehrprisma von ABBE (Abb. 298), das dem SANG-ZENTMAYERschen ähnlich ist, aber den praktisch sehr wichtigen Vorteil senk-

[1]) Zur Geschichte der PORROschen Prismen s. S. CZAPSKI, Vereins-Bl. d. deutsch. Ges. f. Mech. u. Opt. Bd. 5, S. 49, 57, 65, 72. 1895; Verh. d. Ver. z. Förd. d. Gewerbefleißes in Preußen Bd. 39. 1895; G. WITT, Himmel und Erde Bd. 12, S. 173. 1900; N. JADANZA, Atti di Torino Bd. 27, S. 200. 1891; M. v. ROHR, Die binokularen Instrumente, 2. Aufl., S. 89 bis 94, 136, 196 bis 203. 1920.

rechten Ein- und Austritts der Achse und eine kleinere Dachfläche hat. Eine andere Form, bei der vor oder hinter einem Dach zwei Spiegel vorhanden sind, und die Schnittkante dieser beiden senkrecht zur Dachkante ist, zeigt Abb. 299, die auch als eine Verbesserung des DAUBRESSEschen Prismas aufgefaßt werden kann, weil hier eine Versilberung erspart worden ist. Bei einer Abart des ABBEschen Prismas, die von ALB. KOENIG[1]) herrührt, ist der Abstand der Dachkante von der Eintritts- und Austrittsachse wesentlich verkleinert worden. Die beiden Prismen, die vor und hinter dem Dach benutzt werden, sind noch enger zusammengeschoben, indem eine Fläche gleichzeitig als Durchtritts- und Spiegelungsfläche verwendet wird.

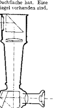


Abb. 299. Die Bildumkehrung in einem Hand-Sehrohr.

264. Aufrichteprismen mit sechs Spiegelungen. Setzt man hinter das Prisma *B* und vor das Prisma *C* des zweiten PORROschen Satzes (Abb. 296) je eine Spiegelfläche, die einander parallel sind, so bleibt der so entstehende Prismensatz geradsichtig. Er behält auch die Eigenschaft, bildumkehrend zu sein, weil zwei parallele Spiegelflächen keine Bilddrehung zur Folge haben. Werden im besonderen diese Spiegel so gewählt, daß die Spiegelungsebene des ersten auf der von *A* und *B*, die des zweiten auf der von *C* und *D* senkrecht stehen, und bildet die erste mit *A* und *B*, die zweite mit *C* und *D* eine rücksichtige Spiegelfolge, so erhält man den aus zwei Tetraedern bestehenden Prismensatz von DAUBRESSE (Abb. 300), dessen beide Hälften jedoch in flacher Form ausgeführt werden (Abb. 301).

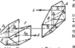


Abb. 300. Der aus zwei Tetraedern bestehende Prismensatz von DAUBRESSE. *A* und *B*, *E* und *F* entsprechen den Prismen *A* und *B*, *C* und *D* des zweiten PORROschen Satzes (Abb. 296). *C* und *D* sind die beiden hinzugefügten parallelen Spiegel.

Ebenso wie wir oben das DAUBRESSEsche oder das LEMANsche Umkehrprisma aus einem Dachprisma dadurch erhielten, daß wir einen Winkelspiegel hinzufügten, dessen Schnittkante senkrecht zur Dachfläche stand, können wir, ohne die bildaufrichtende Wirkung zu beeinträchtigen,



Abb. 301. Die Ausführungsform eines Tetraeders nach DAUBRESSE.

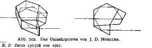


Abb. 302. Das Umkehrprisma von J. D. MOELLER.

[1]) D. R. P. ZEISS 130508 von 1901.

weitere solche Winkelspiegel hinzufugen. So entsteht das Prisma von J. D. MOELLER[1] (Abb. 302), das besonders geringe Abmessungen ohne Versilberungen gestattet. Andere, grundsätzlich gleichartige Prismen mit sechs Spiegelungen beruhen auf Benutzung derselben Flache als Durchtritts- und als Spiegelungsfläche; so die von H. SCHMIDT[2]). Auch hier ist ein Dach mit zwei Winkelspiegeln verbunden, deren Schnittkanten beide zur Dachkante senkrecht stehen.

Die Fernrohre mit veränderlicher Vergrößerung.

265. 1. Wechsel zwischen zwei Vergrößerungen: a) Vergrößerungswechsel durch Ersatz von Teilen des Fernrohrs durch andere. Da das Objektiv bei stärkeren Fernrohren der schwierigste und teuerste Teil des Gerätes ist, so ist es seit langem ublich, ein Objektiv mit verschieden starken Okularen zu gebrauchen; was man bei einem schwächeren Okular an Vergrößerung aufgibt, gewinnt man dann im Durchmesser der A.P. und meistens auch (da das bildseitige Gesichtsfeld etwa gleich sein wird) an dingseitigem Gesichtsfeld. Man ordnet vielfach mehrere Okulare auf einer kugeligen drehbaren Scheibe (einem „Revolver") an, wie z. B. bei Beobachtungs- (Aussichts-) Doppelfernrohren in Abb. 313 oder auf einem Ring, wie bei dem Stangenfernrohr der Abb. 318. Wird aus Gründen des Gebrauchs oder der mechanischen Anordnung das Okular unverändert gelassen und das Objektiv vertauscht, so soll oft die Länge des Fernrohrs erhalten werden. Man wählt dann als Objektiv langer Brennweite ein Teleobjektiv (erst sammelnde, dann Zerstreuungslinse), als Objektiv kurzer Brennweite diese Zusammenstellung in umgekehrter Reihenfolge. Hier werden wir schon auf die Möglichkeit geführt, dieselben beiden Objektivteile bald in der einen, bald in umgekehrter Lage zu verwenden.

b) In manchen Fällen empfiehlt es sich, außer der hauptsächlich gebrauchten Vergrößerung eine andere durch Vorschalten eines bildaufrichtenden Fernrohrs zu gewinnen, z. B. eine schwächere fur ein Bild großen Gesichtsfeldes, das zur Übersicht dienen soll, durch Vorschalten eines verkleinernden Fernrohrs aus einer Negativlinse mit nachfolgender Positivlinse. Dieses Vorschaltfernrohr unterscheidet sich von einem umgekehrten holländischen nur durch den Strahlengang; z. B. wird hier der Schnittpunkt der Hauptstrahlen oft zwischen den Linsen liegen. Anwendungen hiervon werden wir beim Unterseebootsperiskop finden.

c) Der Wechsel der Vergrößerung kann auch ohne Hinzutreten neuer Teile durch Lagenänderung der vorhandenen vorgenommen werden; ein Fall wurde bereits unter a) erwähnt; auch b) kann als eine Lagenänderung vorhandener Teile ausgeführt werden, wenn das holländische Fernrohr bald vergrößernd, bald verkleinernd vorgesetzt wird. Am einfachsten ist der Wechsel zwischen zwei Vergrößerungen beim Erdfernrohrokular durch Wechsel in der Lage der Umkehrlinse zu erreichen, die bald vergrößernd, bald verkleinernd gebraucht werden kann, ohne den Abstand zwischen ihrem Gegenstand und ihrem Bild zu ändern, wobei, falls sie gleichzeitig umgekehrt wird, auch die Bedingungen für die Güte der Abbildung erhalten bleiben; oft wird dies nicht einmal nötig sein zu beachten. Sind die beiden Vergrößerungen des Fernrohrs Γ_1 und Γ_2, so wird man also die Umkehrlinse im einen Falle $\sqrt{\Gamma_1}:\sqrt{\Gamma_2}$, im anderen $\sqrt{\Gamma_2}:\sqrt{\Gamma_1}$ mal vergrößern lassen. Wählt man nicht diese reziproken Verhältnisse, so ist noch eine weitere Verschiebung, z. B. des Okulars, nötig.

266. 2. Die stetige Änderung der Vergrößerung. (Pankratische Fernrohre.) Um das Bild bei der Änderung der Vergrößerung scharf zu erhalten, müssen mindestens zwei Linsen verschoben werden. Eine Übersicht über die

[1]) J. D. MOELLER, D. R. P. 358868 von 1920.
[2]) H. SCHMIDT, D. R. P. 108685 u. 108686. 1899.

verschiedenen Möglichkeiten liefert die folgende Betrachtung nach KÖNIG[1]). Damit diese Linsen überall ein brauchbares Bild liefern, müssen sie nicht nur einzeln chromatisch korrigiert sein, sondern ihre monochromatischen Abweichungen in und außer der Achse müssen in der Mittelstellung verschwinden und in deren Nachbarstellungen gering sein; die Kurven der Werte dieser Abweichungen müssen also die Nullinie in der Mittelstellung berühren. Dies wird der Fall sein, wenn die Mittelstellung eine Symmetriestellung ist, wenn also die verschobenen Linsen in dieser Stellung mit der Vergrößerung 1 abbilden und selbst symmetrisch ausgebildet sind. Wegen dieser Symmetrie bei der Mittelstellung werden beide Teile am besten gleich gemacht werden. Statt nun die beiden einzelnen Verschiebungen zu betrachten, kann man einerseits die mittlere Verschiebung beider Teile des Linsenpaares und andererseits die Änderungen ihres Abstandes betrachten. Die erstere bewirkt in roher Annäherung die Vergrößerungsänderung, die letztere die Scharfstellung. Das Linsenpaar kann die Umkehrlinse darstellen; dieser Fall ist in der Abb. 303 dargestellt.



Abb. 303. Das Umkehrlinsenpaar eines pankratischen Fernrohrs in zwei symmetrischen Stellungen

Man kann der Forderung, daß die monochromatischen Abbildungsfehler in der Mittelstellung, in der sie gehoben sind, ein Maximum oder Minimum darstellen, auch dann genügen, wenn man nur eine der beiden Linsen für die mittlere Vergrößerung in eine Symmetriestellung bringt, also 1 : 1 abbilden läßt. Die Verschiebung dieser Linse wirkt dann kräftig auf die Vergrößerung, weniger auf den Bildort, so daß eine zweite Linse, deren Hauptaufgabe es ist, das Bild scharf zu erhalten, nur geringe Verschiebungen erfährt. Man kann die erste Linse Vergrößerungslinse, die zweite Einstellinse nennen. Die Einstellinse kann das Okular selbst sein; oder, wenn man besser eine konstante Länge des ganzen Fernrohres festhält, eine dem Bilde nahe Linse, z. B. die Feldlinse des Okulars, deren Verschiebung auf die Bildgüte wenig Einfluß hat. Die Vergrößerungslinse kann wiederum a) die Umkehrlinse eines Erdfernrohrs, b) die hintere Sammellinse eines Objektivs, das aus einer Negativ- und Positivlinse besteht, sein. In dem Falle a) und b) ist die Vergrößerung dieser Linse in der Mittelstellung -1. c) Es kann als Vergrößerungslinse eine Zusatzlinse zum Objektiv, am besten eine sammelnde gewählt werden, die, wenn sie im Brennpunkt steht, die Bildgröße nicht ändert (selbst die Vergrößerung $+1$ gibt), vor dem Brennpunkt verkleinernd, hinter ihm vergrößernd wirkt, in beiden Fällen aber die Schnittweite verkürzt.

SCHRÖDER[2]) hat zuerst brauchbare pankratische Fernrohre, und zwar als Richtfernrohre für Schiffsgeschütze gebaut; für diese Zwecke ist ihre Verwendung heute noch üblich, da man auf diese Weise bei hellem Licht, ruhiger Luft und geringer Schiffsbewegung die hohe Vergrößerung ausnutzen, bei Dunkelheit, Flimmern oder starker Schiffsbewegung aber deren Nachteile vermeiden kann. Die Einhaltung der festen Fernrohrlänge gelang zuerst OTTWAY[3]). Ältere und eigene neue Formeln für die Linsenverschiebungen hat ERFLE[4]) gegeben. Die neueren pankratischen Fernrohre besitzen ein Verhältnis der stärksten zur schwächsten Vergrößerung bis zu 6:1.

[1]) A. KÖNIG, Das Fernrohr, S. 60.
[2]) H. SCHRÖDER, ZS. f. Instrkde. Bd. 10, S. 133. 1890.
[3]) W. OTTWAY, Engl. Pat. 4063/05 v. 27. 2. 05.
[4]) H. ERFLE, ZS. f. Instrkde. Bd. 41, S. 107. 1921

Das Sehrohr.

267. Zusammenhänge zwischen den maßgebenden Größen. In Ziff. 256 haben wir den Sonderfall des Sehrohres aus dem allgemeinen des Erdfernrohres durch die besondere Forderung abgeleitet, daß es mindestens eine der Aufgaben dieses Gerätes ist, das Auge, den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen, an einem Orte abzubilden, der für das Auge selbst nicht erreichbar ist. Am bekanntesten ist die Anwendung in den Tauchbooten geworden; aber auch andere militärische Verwendungen sind häufig, z. B. zum Beobachten aus Unterständen. Insbesondere bei dem Tauchbootsehrohr tritt die Aufgabe auf, bei gegebenem Rohrdurchmesser und einer gegebenen Länge L eine möglichst große Helligkeit und hohe Vergrößerung zu erreichen. Ist dieser Durchmesser nach Abzug des für Fassungen usw. nötigen Raumes $= D$, so ist dies gleichzeitig der größtmögliche Durchmesser der Umkehrlinsen und der Kollektive. Die hintere Brennweite des Objektives sei F'_{01}, der oberen Umkehrlinse F'_{02}, die der unteren F'_{03}, des Okulars F'_{04}; geht man von dem maximalen bei dem gewählten Okulartypus möglichen bildseitigen Gesichtsfeld $2w'$ (z. B. 50°) aus, so ist das dingseitige $2w$ durch die gewünschte Vergrößerung Γ gegeben. Die günstigsten (größten) Brennweiten des Objektives und Okulars folgen aus

$$F'_{01} = D : \operatorname{tg} w \quad \text{und} \quad F'_{04} = D : \operatorname{tg} w'.$$

Hieraus folgt, daß $\Gamma = F'_{01} : F'_{04}$ ist, oder daß die Umkehrlinsen gleiche Brennweite haben, oder die Vergrößerung 1 liefern. Ist die Rohrlänge groß gegen F'_{01} und F'_{04}, so ist annähernd $F'_{02} = F'_{03} = \sim \frac{1}{2} L$. Die Vergrößerung des hinteren Fernrohres ist also

$$\Gamma_2 = F'_{03} : F'_{04} = \sim L : 2F'_{04} = L \operatorname{tg} w' : 2D.$$

Der Durchmesser der A.P. wird also

$$2p' = \frac{D}{\Gamma_2} = \frac{2D^2}{L \operatorname{tg} w'}.$$

Die Erhöhung des Durchmessers auf das $n$fache gestattet also unabhängig von der Vergrößerung annähernd (bei gegebenem bildseitigem Gesichtsfeld) entweder den Durchmesser der A.P. oder die Länge auf das n^2fache zu steigern. A.P. und Länge sind einander umgekehrt proportional. Der Durchmesser des Objektives ist $\Gamma \cdot 2p'$, oder aus dem ersten Fernrohr berechnet $DF'_{01} : F'_{02} = 2DF'_{01} : L$. Bei dieser Betrachtung ist angenommen, daß die Umkehrlinsen dicht nebeneinander stehen, so daß sie miteinander verschmolzen werden könnten; wenn man sie auseinanderrückt, so tritt eine seitliche Abschattung des Gesichtsfeldes ein, die unmerklich bleiben kann, wenn an keiner anderen Stelle abgeschattet wird; dann ist etwa ein Auseinanderrücken um eine Brennweite F'_{01} zulässig. Geschieht dies, so ist in der obigen Rechnung der Faktor 3 statt 2 zu setzen.

268. Die gewöhnlichen Formen. Ein solches Sehrohr für Unterseeboote mit etwa 1,5facher Vergrößerung zeigt Abb. 304. Um diese Rohre möglichst unsichtbar zu machen, mußte aber bald der aus dem Wasser herausragende Teil mit möglichst kleinem Durchmesser ausgeführt werden. Hierzu wird der Durchmesser des ersten Bildes und des Kollektives K_1 verkleinert; zur Erhaltung des Gesichtsfeldes muß dann die Brennweite des Objektives im gleichen Verhältnis verkürzt werden; damit das erste Fernrohr dieselbe Vergrößerung behält, muß auch O_2 entsprechend kürzere Brennweite erhalten. Will man die gleiche Rohrlänge behalten, so entfernen sich die Umkehrlinsen O_2 und O_3 mehr voneinander; die größere Abschattung kann ausgeglichen werden, wenn man O_3 einen größeren Durchmesser gibt, als dem axialen Bündel entspricht. Abb. 305 zeigt ein solches Sehrohr; bei ihm ist auch eine Einrichtung für den Vergrößerungswechsel mit einem

der oben beschriebenen Mittel angebracht: die Linse V_1 ist eine Zerstreuungslinse, V_2 eine Sammellinse, beide ergeben ein verkleinerndes holländisches Fernrohr. In Abb. 306 ist der Objektivkopf des Gerätes vergrößert wiedergegeben. Man erkennt, daß man durch Drehung abwechselnd das Prisma P_1 mit dem verkleinernden holländischen Fernrohr $V_1 V_2$ wie in Abb. 305 und das Prisma P_2 mit dem vergrößernden holländischen Fernrohr V_1', V_2' vorschalten kann. Es ist üblich, auf diese Weise zwischen 1,5facher und 6facher Vergrößerung des Sehrohres zu wechseln. Die Länge der gebräuchlichen Unterseeboots-Sehrohre ist 6 bis 10 m. Sie werden für einen Druck bis zu 10 Atm dicht ausgeführt. Eingehende Darstellungen der Entwicklung der Sehrohre geben ERFLE[1]) und WEIDERT[2]). Ausführliche Ableitungen der charakteristischen Daten (des Zusammenhanges zwischen Länge, Durchmesser und Pupillen) findet man bei ERFLE[3]).

269. Sonderformen des Sehrohrs[4]). Die beschriebenen Sehrohre müssen, um den ganzen Horizont absuchen zu können, um ihre Achse gedreht werden, wobei der Beobachter um diese Achse herumgeht. Man kann die Stellung des Beobachters festhalten, wenn man nur das obere Reflexionsprisma dreht; um die hiermit verbundene Drehung des Bildes aufzuheben, wird man grundsätzlich die selben Mittel verwenden, die später für das Rundblickzielfernrohr beschrieben werden, nämlich die Aufrichtung des Bildes durch ein geradsichtiges Prisma mit einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen, das mit halber Geschwindigkeit gedreht wird. Für Tauchboote scheint hiervon kaum Gebrauch gemacht worden zu sein. Man kann aber den ganzen Horizont auch auf einmal abbilden, wenn man eine Ringspiegellinse verwendet. Auch diese Einrichtung scheint ohne Bedeutung geblieben zu sein; ebenso das Multiperiskop, das aus mehreren, gewöhnlich acht, Sehrohren besteht, die

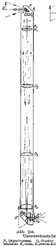


Abb. 304.

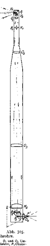


Abb. 305.

Unterseeboots-Sehrohre.

P_1 Objektivprisma. O_1 Objektiv. O_2 und O_3 Umkehrlinsen K_1 erstes, K_2 zweites Kollektiv, P_2 Okular-Prisma, O_4 Augenlinse des Okulars B_1 erste, B_2 zweite Bildebene. P Eintritts-, P' Austrittspupille

[1]) H. ERFLE, Naturwissensch. Bd. 7, S. 805, 826, 942. 1919.
[2]) F. WEIDERT, Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. 1914, S. 174.
[3]) H. ERFLE, D. Opt. Wochenschr. 1920, S. 136, 154, 171.
[4]) Die Patentliteratur über diese Sonderformen ist bei H. ERFLE (Czapski-Eppenstein, 3. Aufl., S. 614) zusammengestellt.

mit gemeinsamen Umkehrlinsen in einem Rohr vereinigt sind und den Horizont auf ebenso viele Gesichtsfelder verteilen. Das Mattscheibensehrohr, bei dem die anstrengendere Beobachtung durch das Okular mit der auf einer Mattscheibe abwechseln kann, die beidäugig und mit bequemerer Kopfhaltung angesehen wird, ist durch den Nachteil der geringen Lichtstärke des Mattscheibenbildes beeinträchtigt und deshalb ebenfalls kaum zur Anwendung gekommen. Wichtig dagegen ist nach der Entwicklung der Luftwaffe das Luftzielsehrohr geworden. Abb. 307 zeigt, daß hierzu das Prisma P_2 kippbar gemacht wird. Als luftdichter Abschluß dient eine Glasschale A aus zwei konzentrischen Kugeln, die für paralleles Licht wie eine Negativlinse wirkt, zur Aufhebung dieser Wirkung wird eine Sammelausgleichslinse W mit der Geschwindigkeit des eintretenden Büschels, der doppelten des Prismas P_1, mitbewegt. Das Prisma P_1 ist durch P_1' zu einem Würfel ergänzt. Hierdurch wird nach Abb. 308 erreicht, daß in jeder Lage stets die ganze Öffnung wirksam ist. Jedes rechtwinklige Prisma wirkt in bezug auf die Richtung der an den zwei Katheten gebrochenen und an der Hypotenuse reflektierten Strahlen so wie ein der Hypotenuse paralleler Spiegel, infolge der Brechungen wird aber die Hypotenuse von beiden Seiten erreicht[1]).

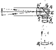


Abb. 306. Der Objektivkopf eines Tauchbootsehrohrs mit Vergrößerungswechsel. Höhere Vergrößerung bei Einschaltung von $V_1' P_2 V_2'$. Geringere bei $V_1 P_2 V_2$.

Das Doppelfernrohr.

270. Das beidäugige Sehen durch ein Doppelfernrohr. Die häufigste Anwendung des Fernrohres wird heute für den Gebrauch mit beiden Augen gemacht. Die Grundsätze des beidäugigen Sehens sind in Kap. 2 Ziff. 59 bis 60 behandelt, ihre Anwendung auf das Fernrohr in Ziff. 66ff. Im folgenden wird von diesen Ergebnissen Gebrauch gemacht werden.

Die Einführung der Bildumkehr durch Prismen legte Abbe sofort den Gedanken nahe, den Abstand der Eintrittspupillen größer als den der Austrittspupillen zu wählen, also das Doppelfernrohr mit den Eigenschaften auszurüsten, die Helmholtz durch Vorsetzen zweier, den Abstand der E.P. vergrößernder Spiegelpaare vor die Augen oder vor ein Fernrohrpaar beim Telestereoskop (Ziff. 67) erreicht hatte. Wir müssen deshalb sogleich von dem allgemeineren Falle ausgehen, daß der Abstand der beiden E.P. verschieden ist von dem Abstande der A.P.



Abb. 308. Ein rechtwinkliges Doppelprisma wirkt wie ein Spiegel, der infolge der Brechung von beiden Seiten erreicht wird.

Das Tiefenunterscheidungsvermögen wirkt bei einem Doppelfernrohre, dessen Eintrittspupillenabstand m mal so groß ist als der Abstand der Augenpupillen, und dessen Vergrößerung Γ ist, auf das $m\Gamma$fache des freien Sehens erhöht. Man nennt deshalb $m\Gamma$ die totale Plastik, m die spezifische Plastik eines solchen Doppel-



Abb. 307. Das Luftzielsehrohr.

[1]) Über das Standsehrohr, das bei festem Okular verschiedene Ausblickshöhe gestattet, wozu der Abstand zwischen O_2 und O_3 veränderlich gemacht wird, vgl. A. König, a. a. O. S. 68.

fernrohrs. Das damit erhaltene Raumbild ist nach allen Dimensionen $m$mal verkleinert und außerdem Γfach in der Richtung der Hauptblicklinie (senkrecht zur Verbindungslinie der Pupillen) zusammengedruckt. Alle Doppelfernrohre mit einer hoheren Vergrößerung als 1 geben also eine „Kulissenwirkung". Die $m$fache Verkleinerung des Raumbildes zeigt sich gewohnlich nicht als die zu erwartende modellahnliche Erscheinung, da der Eindruck durch Verstandesmomente mit bestimmt wird. Dagegen ist die Kulissenwirkung oft auffallend.

271. Optische Bedingungen für ein Doppelfernrohr. Gefordert wird zunachst die Parallelität der Achsen. Abweichungen von der Größe δ bewirken eine Abweichung des Bildstrahles des einen Fernrohres gegen den des anderen von $(\Gamma - 1) \cdot \delta$. Sie andern, wenn sie seitlich (in der Ebene durch die Pupillenmitten) stattfinden, nur die Konvergenz der Augen und sind unschadlich, wenn keine Divergenz uber etwa $1°$ oder keine zu starke Konvergenz (etwa uber $3°$) notwendig gemacht wird, da man den absoluten Wert der Konvergenz kaum empfindet. Finden die Abweichungen in einer dazu senkrechten Ebene statt, so schneiden einander zwei zusammengehorige Bildstrahlen uberhaupt nicht mehr, trotzdem sind Abweichungen der austretenden Strahlen von $0{,}5°$ unschadlich. Ferner muß die Vergroßerung Γ beider Fernrohre gleich sein, die zulassigen Abweichungen ergeben sich aus derselben Grenze ($d\Gamma \cdot \Gamma < 0{,}5° \cdot W'$, wenn W' der großte halbe bildseitige Gesichtsfeldwinkel ist). Endlich sollen die Bilder der beiden Fernrohre nicht gegeneinander um ihre Achse verdreht sein; auch hier liefert der durch die Verdrehung entstehende Hohenfehler an den Stellen des horizontalen Schnittes durch das Gesichtsfeld die erlaubte Grenze. Die Verdrehung darf in Bogenmaß nicht großer als $0{,}5° : W'$ sein. Endlich muß der Abstand der beiden A.P. dem Abstand der Augenpupillen des Beobachters angepaßt werden konnen. Der Abstand der Pupillen liegt bei Erwachsenen zwischen 55 und 75 mm. Bei den üblichen schwachen holländischen Fernrohren verzichtet man gewohnlich auf die Anpassung an den Augenabstand und benutzt sie exzentrisch.


Abb 309 Ein hollandisches Doppelfernrohr (Theaterglas)

272. Ausfuhrungsformen des Doppelfernrohrs: Handfernrohre. Abb. 309 zeigt ein neueres holländisches Doppelglas. Die Einstellung der Okulare erfolgt hier gemeinsam durch einen mittleren Trieb. Bei Handfernrohren mit Prismen ist es ublich, die Abstandsänderung der Austrittspupillen durch Schwenken beider Fernrohre um die Achse eines Gelenks auszufuhren, die den Fernrohrachsen parallel ist, welche hierbei einander parallel bleiben.

Die Prismenfernrohre zeigen als Doppelfernrohre seit ihrer Einführung durch ABBE meistens den erweiterten Objektivabstand. Abb. 310 stellt die optischen Teile eines solchen mit den PORROschen Prismen erster Art dar, Abb. 311 die Außenansicht eines Feldstechers dieser Gattung mit besonderer optischer Leistung. Zugunsten des gedrängten Baues wird gelegentlich der Vorteil des erweiterten Objektivabstandes aufgegeben (Abb. 312), insbesondere bei Theatergläsern, wo auch die gemeinsame Einstellung beider Okulare beliebter ist, weil sie eine Scharfstellung fur wechselnde kurze Entfernungen erleichtert. Man macht dann aber noch eines der Okulare einzeln einstellbar, um Verschiedenheiten der Augen auszugleichen. Für die meisten anderen Zwecke, insbesondere militärische, und bei stärkeren Fernrohren wird die einfachere und festere

Bauart von Abb. 311 vorgezogen, bei der die beiden Okulare einzeln einstellbar sind

Großere Doppelfernrohre. Abb. 313 zeigt ein Standfernrohr, dessen Vergrößerung durch Wechseln der Okulare 12,24 und 40fach gemacht werden

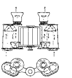


Abb 310 Ein Doppelfernrohr mit Prismen



Abb 311. Ein Prismenfeldstecher von 8facher Vergroßerung mit 70° Gesichtsfeld und einer Austrittspupille von 5 mm

kann. Sie sind auf dem oben beschriebenen Revolver angeordnet. Das verwendete Umkehrprisma ist das von Abb. 298 Fernrohre mit größerer Achsenversetzung werden vorteilhaft mit der zweiten Art der PORROschen Anordnung ausgeführt, wobei das vierte rechtwinklige Prisma von den anderen getrennt wird (Abb. 314). Hier läßt sich der Abstand der Eintrittspupillen erheblich steigern, Abb 315 zeigt ein solches „Scherenfernrohr" mit Handgriff. Nach den Ziff. 263 gegebenen Erläuterungen konnen die beiden Arme ohne Sturzen des Bildes um jede der Visierlinie parallele Achse gedreht werden. Werden sie nach oben gerichtet, so erhält man ein Doppelfernrohr, das



Abb 312 Ein Theaterglas (Prismenfernrohr)



Abb 313 Ein Aussichtsfernrohr mit Okularwechsel (Revolver).

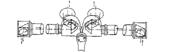


Abb. 314. Die Prismen in einem Handscherenfernrohr.

zur Beobachtung hinter Deckungen besonders geeignet ist und ebenfalls, wie bei gestreckter Lage der Arme, die benötigten Okularabstände durch geringe Änderungen des Winkels der beiden Rohre liefert. Da die Deckung im Landkrieg bei weitem das wichtigste Erfordernis geworden ist, so hat man beim Scherenfern-


Abb. 315 Ein Handscherenfernrohr.

rohr der Landheere auf die Steigerung der spezifischen Plastik ganz verzichtet und das Gelenk der besseren Widerstandsfähigkeit wegen nach oben an die Objektive verlegt (Abb. 316). Es gestattet hier den Okularabstand auch so weit zu vergrößern, daß zwei Personen gleichzeitig beobachten können. Auf See handelt es sich andererseits ausschließlich um die Erhöhung der Plastik, man hat hier wiederum der größeren Festigkeit halber auf die andere Möglichkeit verzichtet und in dem Stangenfernrohr (Abb 317) das Gelenk gänzlich weggelassen. Die Anpassung an den Augenabstand ist, wie die Abbildung zeigt, hier durch Parallelverschiebung des ganzen rechten Fernrohres in horizontaler Richtung erreicht; zur Bildaufrichtung dient ein Okularprisma, das zusammen mit dem einfachen rechtwinkligen Prisma vor dem Objektiv dieselbe Wirkungsweise wie oben bei Abb. 299 beschrieben Für den Vergrößerungswechsel sind die Okulare auf einem um das Rohr drehbaren Ring angebracht (Abb. 318).


Abb 316. Das Scherenfernrohr zum Gebrauch des Landheeres.

Eine dritte Art der Anpassung an den Augenabstand ist[1]) durch ein Paar paralleler Spiegel möglich, die entweder durch zwei getrennte rechtwinklige total reflektierende Prismen oder in einem einzigen Glasstück hergestellt werden können. Ein solches „rhombisches" Spiegelpaar gibt stets nur Versetzungen, niemals Drehungen des Bildes, wie es selbst auch gedreht wird; man benutzt ein solches, dessen Rhombuswinkel $\alpha = 45°$ und $135°$ sind, und dreht es um die Achse, die in der zu beiden Spiegeln senkrechten Ebene liegend, beide unter 45° trifft. Ein so gebautes Doppelokular zeigt Abb. 319. In der Form zweier getrennter Stücke wird es z. B. im Hyposkop nach ALB. KOENIG benutzt (Abb. 320). Hier ist die Eigenschaft des rhombischen Spiegelpaares sowohl für die Objektivarme als für die


Abb. 317. Die optischen Teile des Stangenfernrohrs.

[1]) Nach FORBES, D. R. P. 146380 v. J. 1902.

Okulararme verwendet worden. Der Objektivarm enthält ein Prismenpaar mit zwei parallelen Spiegelflächen, ein Objektiv und Kollektiv; der Okulararm ebenfalls ein solches Prismenpaar, die Umkehrlinsen und das Okular. Die Schwingung

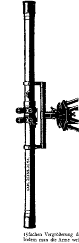


Abb. 318. Ansicht eines Stangenfernrohrs mit 2 m Abstand der Objektivspiegel.

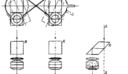


Abb 319 Ein Doppelokular mit rhombischen Prismen (R) in Grundriß, Aufriß und Seitenriß Die rhombischen Prismen sind mit zwei Zylindern verbunden, die durch ein kreuzweis um sie gelegtes Band zu symmetrisch gleichen Drehungen veranlaßt werden

der Objektivarme verandert die Ausblickhöhe und die spezifische Plastik; die der Okulararme gestattet die Veranderung des Abstandes der Austrittspupillen, der sowohl dem Augenabstand des Beobachters angepaßt werden als auch für zwei verschiedene Beobachter eingestellt werden kann. Das Gerät wird auch mit festem Okulararm ausgeführt; dann werden rhombische Prismen vor dem Okular angewendet. Die Objektivarme wie die Okulararme werden etwa 1,6 m lang ausgeführt; so ist bei horizontalen Objektivarmen der Abstand der beiden E.P. 3,3 m, bei der 15fachen Vergrößerung die Tiefenunterscheidung auf das 750fache gesteigert. Indem man die Arme weiter nach oben dreht, kann im ganzen 3 m Einblickhöhe über den Austrittspupillen erreicht werden. Die Tiefenunterscheidung nimmt dabei wieder ab.

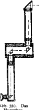


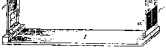
Abb. 320. Das Hyposkop.

Anwendungen des Fernrohrs.

Während im obigen das Fernrohr als Hilfsmittel der Betrachtung und des Erkennens behandelt wurde, soll im folgenden noch kurz von zwei Anwendungen die Rede sein, der Festlegung einer Richtung durch ein Fernrohr (a) und der Messung von Winkeln innerhalb des Gesichtsfeldes (b). Beide sind in der Aufgabe der Einstandsentfernungsmessung (c) vereinigt.

a) Das Fernrohr als Richtgerät.

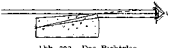
278. Vorzüge des Fernrohrs gegenüber einfacheren Zieleinrichtungen. Einrichtungen zum Festlegen von Richtungen, zum Zielen, wurden vielleicht zuerst in der Sternkunde in ihrer ältesten praktischen Anwendung, der Zeitbestimmung, gebraucht; später kam die Vermessung hinzu. Die Feuerwaffen haben in neuerer Zeit ein großes Anwendungsgebiet hinzugefügt. Die einfachere, älteste Zieleinrichtung besteht aus zwei körperlichen Marken in einigem Abstand; es ist das „Absehen" (Diopter) in seinen verschiedenen Formen, von denen Kimme und Korn die bekanntesten sind. In sehr vielen Fällen unterscheidet man den Winkel gegen die Horizontalebene als Höhenrichtung von dem Winkel der horizontalen Projektion gegen eine feste horizontale Richtung als Seitenrichtung. Ist nur einer von diesen beiden Winkeln zu bestimmen, so wird auch Spalt und Faden (Abb. 321) verwendet. Für feinere Zwecke ist der Hauptmangel des Absehens darin begründet, daß der Zielpunkt und die beiden Marken nicht gleichzeitig scharf gesehen werden können, sondern von mindestens zweien von ihnen nur Zeichnungen aus Zerstreuungsflecken nach Art der Abb. 110, Ziff. 99, wahrgenommen werden. Hierdurch wird nicht nur eine Ungenauigkeit, sondern auch ein systematischer Fehler eingeführt, da die Zerstreuungskreise beim Auge nicht symmetrisch zur Visierlinie, der Linie zwischen Dingpunkt und Mitte der Augenpupille, liegen. CZAPSKI[1]), der diese Frage ausführlich erörtert hat, führt hierfür u. a. den von RÖNTGEN[2]) beschriebenen Versuch an: Ein rechtwinkliges Prisma vor das Auge gehalten, zeigt ein Bild der Augenpupille, das von der Pupille aus doppelt so weit liegt als die Kante zwischen den beiden Spiegelflächen. Diese Kante erscheint nun meist nicht so, daß sie das Bild halbiert, sondern liegt für viele Beobachter in einem oder dem anderen Sinne verschoben. Wenn hierbei das Auge etwa auf das Bild der Pupille eingestellt ist, also die Kante unscharf sieht, so wären die Visierlinien durch die Verbindungsgerade der Mitte der Augenpupille mit der Mitte ihres Spiegelbildes (das hier der Dingpunkt ist) gegeben. Diese Gerade geht nach geometrischen Gesetzen durch die Kante; erscheint diese seitlich verschoben, so ist dasselbe Verhalten etwa für das Visier zu erwarten, wenn auf das Korn oder das Ziel akkommodiert wird. Die Abweichung, die von den Unregelmäßigkeiten des Auges, insbesondere der Linse, herrührt, ist aber nicht nur von Person zu Person, sondern auch für dasselbe Auge bei verschiedenen Entfernungen verschieden. — Bei vielen Arten von Abkommen werden außerdem durch einseitige Beleuchtung Fehler erzeugt werden.


Abb. 321. Spalt und Faden als Richtmittel („Absehen").

[1]) S. CZAPSKI, Das Richten mit Zielfernrohr, S. 16. Berlin 1904.
[2]) W. C. RÖNTGEN, Wied. Ann. Bd. 52, S. 589. 1894.

Diese Schwierigkeiten fallen fort, wenn das eine Glied des Abkommens durch eine optische Folge ersetzt wird, die das andere in die Ebene des Zieles abbildet. Beim Richtglas (Abb. 322) und beim Spiegelvisier (Abb. 323) ist dies das zweite Glied, dies wird beim Richtglas durch geometrische, beim Spiegelvisier durch physikalische Teilung der in das Auge gelangenden Bundel ermoglicht. Beim Richtglas wird gewohnlich der Raum zwischen einer sammelnden Fläche, in deren Brennebene eine Marke liegt, und dieser Marke durch Glas ausgefullt; eine der Flächen des so entstehenden Glasstabes wird so abgeschrägt, daß keiner ihrer Punkte Strahlen in eine zentral gehaltene Pupille mittlerer Große entsenden kann. Die Marke erscheint gleichzeitig scharf mit einem sehr weiten Ziele. Beim Spiegelvisier wird, wenn eine unbelegte Glasplatte verwendet wird, nur etwa 10% des vom Ziel kommenden Lichtes dem Bilde entzogen und durch 10% des von der Marke kommenden Lichtes ersetzt. Durch schwache Versilberung dieses Spiegels kann der Anteil der Marke erhöht werden, was aber bei der häufigsten Anwendung mit künstlichem Licht nicht zweckmaßig ist.

Beim Richtfernrohr ist das erste Glied des Abkommens durch das Objektiv dargestellt, das ein Bild des Zieles erzeugt. In dieser Bildebene wird als zweites Glied die Zielmarke angebracht und Bild und Marke meist mit einem vergrößernden Okular betrachtet. Besteht die Zielmarke aus einer oder mehreren Geraden, so kann sie durch feine Fäden dargestellt werden; doch werden häufiger Glasplättchen verwendet, auf


Abb. 322. Das Richtglas.

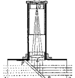


Abb. 323. Das Spiegelvisier

denen die Striche eingerissen sind, wobei auch Marken anderer Form dargestellt werden können. Diese „Strichplatten" sind zwar haltbarer als Faden, müssen aber gegen Staub geschützt werden. Zu militärischen Zwecken werden sie vorwiegend verwendet. In dem allgemeineren Falle, daß Zielbild und Marke nicht vollständig zusammenfallen, werden sich alle Dingpunkte mit der Marke zu decken scheinen, die auf der Verbindungslinie der in dem Raum abgebildeten Marke mit der E.P. des Fernrohrs liegen (Abb. 110). Sie ist daher die Visierlinie.

274. Geodätisches Zielfernrohr. Für die Vermessung hat man es meist mit wechselnden Gegenstandsentfernungen zu tun, deren Bilder so verschieden liegen, daß bei der erforderlichen Genauigkeit des Zielens die Entfernung der Marke gegen das Objektiv veränderlich gemacht werden muß, um die Marke mit dem Zielbild gleichzeitig scharf zu erhalten. Hierzu kann man das Fadenkreuz verschiebbar machen; seine Verschiebung muß auf einer Geraden erfolgen, deren in den Dingraum zurück entworfenes Bild dann die Visierlinie darstellt, wenn jedes neue Ziel sorgfältig auf die Marke fokussiert wird. Wenn die Verschiebungsgerade der Marke durch den hinteren Hauptpunkt des Objektivs geht, so wird die Visierlinie eine ihr Parallele durch den vorderen Hauptpunkt; wenn die Verschiebungsgerade mit der Verbindungslinie beider Hauptpunkte des Objektivs zusammenfällt, so ist die Visierlinie mit dieser identisch. Wenn man also die Verschiebungsgerade der mechanischen Fernrohrachse (durch seine

beiden Lagerringe definiert) parallel macht und durch den hinteren Hauptpunkt gehen läßt, so ist auch die Visierlinie der mechanischen Achse parallel; läßt man die Verschiebungsgerade durch die beiden Hauptpunkte gehen und mit der mechanischen Achse zusammenfallen, so fällt auch die Visierlinie mit der mechanischen Achse zusammen. Um die Schwierigkeit der geradlinigen Führung des Fadenkreuzes (oder Objektivs, was auf dasselbe hinauskommt) zu umgehen, verwendet man statt dessen eine verschiebbare Einstellinse von langer Brennweite hinter dem Objektiv. Man braucht dann die Führung dieser Linse in weniger hohem Grade geradlinig zu machen; sie wird zwar in gleichem Verhältnis auch länger; dies ist aber für die mechanische Ausführung unerheblich, solange die Länge einen gewissen Betrag nicht überschreitet, während eine sehr hohe Anforderung an die Geradlinigkeit auch bei kürzester Führung schwer zu erreichen ist. Außer der Geradlinigkeit ist die Forderung zu erfüllen, daß beide Hauptpunkte der Einstellinse in der Geraden verbleiben, die den hinteren Hauptpunkt des Objektivs mit der Zielmarke verbindet; doch sind Abweichungen hiervon in geringem Maße zulässig[1]).

275. Die Parallaxe. Die Einstellung des Zielbildes wie überhaupt jedes Bildes auf eine Marke beurteilt man zunächst nach der gleichzeitigen Schärfe, prüft sie aber, wenn man genau fokussieren will, auf „Parallaxe". Hierunter versteht man die gegenseitige Verschiebung zwischen Bild und Marke, die bei hinreichenden Verschiebungen des Auges gegenüber der Austrittspupille stets eintritt, wenn Bild und Marke nicht zusammenfallen. Betrachtet man nämlich in diesem Falle etwa die Ebene der Marke als Einstellebene im Sinne von Ziff. 99, so ist ein Dingpunkt des Zieles dort durch einen Zerstreuungskreis dargestellt. Dessen Schwerpunkt verschiebt sich aber, wenn die E.P. seitlich abgeblendet wird (Ziff. 98); und diese Abblendung tritt ein, wenn die Augenpupille Teile der A.P. seitlich abschneidet. Liegen Bild und Marke um Δ getrennt und ist der Öffnungswinkel $2\,U$, so würde der Schwerpunkt des Zerstreuungskreises der Einstellebene eine Verschiebung gleich dem Durchmesser des Zerstreuungskreises $2z = 2\Delta \operatorname{tg} U$ ausführen, wenn man von voller Öffnung beiderseits bis zur Öffnung Null beobachten könnte (vgl. Abb. 125). Da dies nicht der Fall ist, so kann die Verschiebung nur einen Bruchteil $2q\Delta \operatorname{tg} U$ betragen. q ist durch Versuch für verschiedene Fälle bestimmt worden[2]).

Eine parallaxenähnliche, aber unregelmäßige Störung des Zusammenfallens eines Bildes mit einer Marke (ebenso eines Bildes mit einem anderen) tritt dann auf, wenn beide nicht durch dieselben Teile des Okulars und insbesondere des optischen Apparates des Auges abgebildet werden; sie ist groß genug, um derartige Geräte für feine Messungen unbrauchbar zu machen[3]).

276. Zielfernrohre ohne Marke. Richtfernrohre ohne Fadenkreuz lassen sich mittels Doppelbildern herstellen, wenn das eine Bild gegen das andere eine Verschiedenheit der Vergrößerung aufweist. Beim Schwenken des Fernrohrs bewegen sich dann die Bilder proportional der Differenz der Vergrößerung. Am genauesten wird also dies Verfahren, wenn die Vergrößerung den nach dem Bau des Fernrohrs höchstmöglichen Wert, aber mit verschiedenen Vorzeichen, besitzt, d. h. wenn das Bild gegen das andere höhen- und seitenverkehrt ist;

---

[1]) ALB. KÖNIG, Das Fernrohr, S. 115. Berlin 1923.

[2]) Vgl. hierzu ALB. KÖNIG, Das Fernrohr, S. 115. Berlin 1923; Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) Bd. 20, S. 354. 1885; Scient. Pap. Bureau of Stand. Bd. 2, S. 430 (wo auch eine Ableitung aus der Beugungslehre gegeben wird); P. ENGI, Dissert. Zürich 1917.

[3]) Eine Erwähnung dieser Forderung findet sich bei E. ABBE, Vierteljschr. d. astron. Ges. Bd. 14, S. 355. 1879. Der Fehler kann bei Berichtigungseinrichtungen an Entfernungsmessern eine Rolle spielen.

sie bewegen sich dann in entgegengesetzten Richtungen[1]). Soll nur in Seite oder nur in Höhe gerichtet werden, so genügt es, das zweite Bild in Seite oder Höhe gegen das erste umzukehren.

Über die Genauigkeit des Zielens vgl. A. Noetzli[2]), Labitzke[3]), deren Ergebnisse bei Alb. König[4]).

277. Die Zielfernrohre für Feuerwaffen. Bei allen mit einer Schußwaffe verbundenen Fernrohren muß die Lage von Objektiv und Strichmarke auch bei Erschütterungen unveränderlich sein; vollkommene Dichtigkeit gegen Regen ist ebenfalls für die Konstruktion maßgebend. Ferner kann offenbar der Einfluß verschiedener Zielentfernungen auf die Lage des Zielbildes vernachlässigt, Objektiv und Marke in festem Abstand gehalten werden.

Die Neigung des Rohres gegen die Horizontale ist die arithmetische Summe aus der Neigung der Visierlinie (dem „Gelände-" oder „Höhenwinkel" des Zieles) und der „Erhöhung" des Rohres, die durch die Krümmung der Flugbahn gefordert wird. Die Erhöhung nimmt also mit der Entfernung zu und ist durch mancherlei in der Ballistik studierte Einflüsse, in erster Linie die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, bestimmt; bei erheblichen Höhenwinkeln des Zieles nimmt sie stark ab, um bei 90° zu verschwinden. Auch die Seitenrichtung des Rohres muß wegen der vom Drall der Züge erzeugten Seitenabweichung des Geschosses verschieden von der Visierlinie gewählt werden; diese Abweichung ist eine Funktion der Entfernung (und bei größeren Höhenwinkeln auch von diesem). Beim Gewehr ist die Erhöhung des Laufes gering; bei Jagdgewehren wird ihre Abhängigkeit von der Entfernung ganz vernachlässigt.

Die gewöhnlichste Einrichtung zum Nehmen größerer Erhöhungen ist der Aufsatz, eine oft im Kreisbogen gekrümmte und in einer kreisförmigen Führung verschiebbare, mit einer Entfernungsteilung versehene Stange, die das Visierfernrohr trägt, da an dieser Stelle das früher vorhandene Abkommen ersetzt. Aufsatzstange und Führung weichen aus der senkrechten Ebene nur um den kleinen durch die Abweichung wegen des Dralles erforderlichen Winkel ab. Ist der Aufsatz am Geschützrohr geführt, so wird durch sein Herausziehen der Winkel zwischen Rohr und Visierlinie vergrößert; man muß ihn zuerst der Entfernung entsprechend einstellen und dann das Geschützrohr so richten, daß das Ziel auf der Marke des Visierfernrohrs erscheint. Eine Änderung der Entfernung zwingt dazu, den Aufsatz zu verstellen, wobei das Ziel die Marke verläßt, und dann das Rohr nachzurichten, bis das Ziel wieder einsteht. Bei großen Entfernungsänderungen wird es sogar aus dem Gesichtsfeld verschwinden können. (Ebenso wie die Verstellung der Aufsatzstange wirken entsprechende andere Einrichtungen zum Nehmen der Erhöhung, z. B. ein optisches Kippen der Visierlinie, wie es etwa durch Drehung eines vor dem Objektiv angebrachten Spiegels geschehen kann.) Um aber ununterbrochen richten zu können, hat man die Einrichtung der „unabhängigen Visierlinie" eingeführt, bei der das Zielfernrohr nicht vom Rohr mitgenommen, sondern z. B. von der Lafette getragen wird. Wird hierbei das Fernrohr auf das Ziel gerichtet, so folgt das Geschützrohr um den gleichen Winkel. Die Erhöhung des Rohres läßt sich aber einstellen, ohne die Visierlinie zu beeinflussen[5]).

---

[1]) E. S. Jeaurat, Phil. Trans. Bd. 130, S. 130—138. 1779; R. Koenig u. K. Satori, ZS. f. Instrkde. Bd. 29, S. 315. 1909. Der zuletzt aufgestellten Forderung wird bei diesem Vorschlag nicht genügt. Alb. König, Das Fernrohr, S. 116.

[2]) A. Noetzli, Österr. ZS. f. Vermessungswesen Bd. 12, S. 102. 1915.

[3]) P. Labitzke, ZS. f. Instrkde. Bd. 44, S. 61. 1924.

[4]) Alb. König, Das Fernrohr, S. 125. Berlin 1923.

[5]) Verschiedene mechanische Möglichkeiten der Ausführung s. z. B. bei Eberhardt, Das Wesen der modernen Visiervorrichtungen bei Landartillerie, Berlin 1909.

278. Die Gewehrzielfernrohre. Für die Jagdgewehre ist die Länge des terrestrischen Fernrohres wegen der größeren Sicherheit seiner Verbindung mit dem Laufe ein Vorteil. Man benutzt meist 2- bis 8fache Vergrößerung. Bei der Vergrößerung 1 kann man erreichen, daß bei sehr schmaler Fassung der Augen-

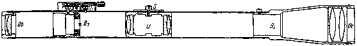


Abb. 324. Ein Zielfernrohr für Gewehre
Ob Objektiv B_1 Brennebene mit Zielmarke *U* Umkehrlinsen B_2 zweite Bildebene *Oc* Okular

linse das Gesichtsfeld des freien Sehens sich mit dem des Fernrohrs fast lückenlos ergänzt. Der Abstand des Auges vom Okular beträgt etwa 80 mm. Deshalb wird das Gesichtsfeld nicht über 25° gewählt, um keine zu große Augenlinse zu erhalten. Abb. 324 zeigt den Aufbau eines 6fachen Zielfernrohrs (vgl. Ziff. 257). Das Kollektiv kann hier weggelassen werden; die aus Fäden bestehende Zielmarke (B 1) ist auf- und abschiebbar, um nach der Befestigung auf dem Gewehr die richtige Stellung durch Einschießen zu finden und durch einen klemmbaren Knopf festzuhalten. Zur Scharfstellung dient hier oft die Drehung des Okularstutzens, durch die die Umkehrlinse verschoben wird. Die Höhenstellung der Marke und die Scharfstellung des Bildes werden auch mit anderen mechanischen Mitteln erreicht. Es werden auch Gewehrzielfernrohre mit mehreren wechselbaren Vergrößerungen gebaut. Bei Zielfernrohren für Maschinengewehre, die sowohl als Prismen- wie als Linsenfernrohre ausgeführt werden, tritt noch eine Einrichtung hinzu, um durch seitliche Verschiebung der Abkommarke geringe seitliche Abweichung der Visierlinie zu erreichen, wodurch für seitliche Bewegung des Zieles vorgehalten werden kann. Auch wird hier die Vertikalbewegung der Zielmarke zur Einstellung der Erhöhung für die wechselnden Schußentfernungen benutzt, wobei eine mit der Vertikalbewegung verbundene geringe seitliche Verschiebung den Einfluß des Dralles berücksichtigt. Dies kann auch durch Drehen einer Glasplatte geschehen, die nacheinander auf einer Spirale angeordnete, deshalb verschieden hochgelegene Abkommarken in das Gesichtsfeld bringt (Abb. 325).



Abb. 325. Spiralige Anordnung der Zielmarke. Der (feststehende) kleine Kreis ist das Gesichtsfeld des Fernrohrs. Die Zielmarke ist der Schnittpunkt des senkrechten Strichs δ mit der jeweils durch Drehung der großen Platte eingestellten Zielmarke.

279. Die Geschützzielfernrohre. Das „direkte Richten“, d. h. das Anvisieren des Zieles selbst, ist heute nur noch bei Schiffsgeschützen die Regel, die deshalb grundsätzlich als geradsichtige Fernrohre ausgeführt werden können. Sie erhalten jedoch in vielen Fällen stetig veränderliche Vergrößerung (Ziff. 266). Die Zielmarke wird dann in die erste Bildebene gelegt, wodurch die Genauigkeit von der Führung der verschiebbaren Linsen unabhängig wird. Abb. 326 zeigt ein solches pankratisches Zielfernrohr, das für 4- bis 20fache Vergrößerung eingerichtet ist, die Wahl wird durch die Helligkeit, Sichtigkeit und Schiffsbewegung bestimmt. Befinden sich die Fernrohre hinter einer Panzerung, so müssen sie so lang gewählt werden, daß sie an die Scharten heranreichen. Bei großen Geschützen wird Seiten- und Höhenrichtung getrennt von je einem Mann mit je einem Richtfernrohr vorgenommen; eines der beiden oder beide erhalten durch

ein Spiegelprisma seitlichen Einblick. Auch für Flugabwehrgeschütze ist bisher das direkte Richten üblich gewesen; Abb. 287 zeigt ein dafür bestimmtes Zielfernrohr mit Einblick schräg von oben.

Bei Landgeschützen wird die Seitenrichtung nur noch in seltenen Fällen nach dem Ziel genommen, da dies meistens vom Geschütz aus unsichtbar ist; vielmehr nach einem Hilfsziel, das seitlich oder rückwärts gelegen sein kann, die



Abb 326 Ein pankratisches Zielfernrohr. Die Vergrößerung wird durch Drehen des breiten gerändelten Rings geändert. Rechts von der Gummimuschel des Okulars eine drehbare Kugelkalotte, durch die verschiedene Farbgläser eingeschaltet werden können.

Höhenrichtung mit einer Libelle. Dieses indirekte Richten erforderte ein Zielfernrohr, dessen Visierlinie um $\pm 180°$ um eine vertikale Achse gedreht werden konnte. Man erreicht dies dadurch, daß man die Fernrohrachse senkrecht stellt, durch ein Spiegelprisma um 90° ablenkt und dieses Prisma um die Senkrechte dreht. Da der Einblick horizontal sein und fest stehen muß, werden für den

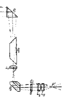


Abb. 327.

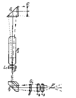


Abb 328.

Das Rundblickfernrohr.

Links Ausblick nach vorn, rechts nach hinten. P_1 drehbares Objektivprisma, P_2 Wendeprisma mit halber Drehgeschwindigkeit des ersten, P_3 Dachprisma. L_1 Objektiv, L_2 L_3 Okular P Eintritts-, P' Austrittspupille G (entfernt zu denkender) Gegenstand. B Bild mit der Strichplatte G_1 zusammenfallend.

Beobachter die Bilder sich zu drehen scheinen. (Das Spiegelbild einer senkrechten Ziellinie im oberen Spiegelprisma liegt stets in der Einfallsebene, nimmt also an deren Drehung teil.) Jede Bilddrehung kann durch eine halb so schnelle Drehung eines geradsichtigen Prismas mit einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen aufgehoben werden. Hierzu dient bei der in der Firma C. P. Goerz von H. Jacob[1]) entwickelten und allgemein angenommenen

[1]) Beschreibung bei W. Zschokke, Arch. f. Optik Bd. 1, S. 241. 1907; A. Gleichen, Theorie der modernen optischen Instrumente, S. 172. Stuttgart 1911; J. v. Hofe, Fernoptik, 2. Aufl., S. 8. 1921.

Form das AMICIsche Wendeprisma (Abb. 288); da dies nur bei parallelen Strahlen keine Bildverschlechterung gibt, so wird das Objektiv dahinter angeordnet (Abb. 327). Die Drehung eines Knopfes betätigt ein Differentialgetriebe, dessen eines Hauptrad das obere 90°-Prisma P_1, dessen Reiterradachse das mittlere Aufrichteprisma P_2 mitnimmt, so daß deren Drehungen sich wie 2 zu 1 verhalten. Abb. 327 zeigt das Fernrohr beim Ausblick nach vorn, Abb. 328 beim Ausblick nach hinten; im zweiten Falle hat sich Prisma P_1 um 180°, P_2 um 90° gedreht; in beiden Fällen ist das Bild aufrecht. Das Prisma P_1 läßt sich außerdem um eine horizontale Achse drehen, um die Höhenrichtung zu ändern. Das Rundblickfernrohr ist gegenwärtig bei fast allen Landgeschützen im Gebrauch.

b) Das Fernrohr als Winkelmeßgerät.

Sofern Winkel durch mechanische Bewegung eines Fernrohrs gemessen werden, ist in optischer Beziehung die Aufgabe mit der des vorigen Abschnittes identisch, da das Fernrohr hier nur als Zielgerät dient. Von optischem Interesse ist dagegen die Winkelbestimmung im Gesichtsfeld des Fernrohrs, die auf der Messung der Bildgröße beruht. Vorrichtungen, die hierzu dienen, werden oft Mikrometer (Feinwinkelmesser) genannt. Die Winkelmessungen werden mit im Gesichtsfeld angebrachten Marken oder auch mit Doppelbildern ausgeführt. Im Anschluß an die Doppelbildmikrometer werden wir auch die Messung größerer Winkel mit Doppelbildern behandeln.

In der Astronomie ist der Zweck der Mikrometer die Feststellung der Winkel selbst. In der Geodäsie dient die Winkelmessung zur Ermittelung der Entfernung eines Gegenstandes bekannter Größe, einer Meßlatte (Tachymetrie). Auch zur militärischen Entfernungsmessung gibt es eine Anzahl einfacher Geräte, die auf der Messung kleiner Winkel unter Voraussetzung bekannter Größe des Zieles beruhen.

280. Mikrometer mit Marken. Feste Teilungen sind das einfachste Hilfsmittel zur Ausmessung eines Bildes; sie sind entweder auf Glas hergestellt [die feinsten mit dem Diamanten gerissen[1]), stärkere geätzt; sie können auch photographisch hergestellt werden] oder bestehen aus feinen Fäden.

Die Sonderformen fester Mikrometer, die in der Astronomie üblich sind, sind meist durch die Möglichkeit bestimmt, die Zeitbeobachtung zur Messung mit heranzuziehen[3]). In der militärischen Technik sind insbesondere quadratische Netze zur Bestimmung der Winkelgrößen üblich. Zur Vermeidung der Beugungserscheinungen, die Striche oder Fäden im durchgehenden Lichte zeigen, hat man auch die Bilder von Strichen oder Fäden benutzt (Ghostmikrometer); für genauere Messungen sind sie dann ungeeignet, wenn sie auf einer Teilung der Pupille beruhen (s. oben Ziff. 275 und das Folgende).

Schon vor der Benutzung fester Teilungen ist ein verstellbarer Faden benutzt worden, der mit einer feinen Schraube gegen einen festen Faden verschoben werden konnte [GASCOIGNE 1640[2])]. Als „Positionsmikrometer" ist dieses Gerät um die optische Achse in meßbarer Weise drehbar.

Die Stelle der Schrauben kann mit geringerer Genauigkeit ihre Abwicklung im Gesichtsfelde ersetzen: Die älteste Form ist der optische Meßkeil, der schon von HUYGENS beschrieben ist: zwei einander unter spitzem Winkel schneidende

[1]) BRANDER scheint die Diamantteilung eingeführt zu haben (Polymetroscopium dioptricum, Augsburg 1764).

[2]) Siehe L. AMBRONN, Handb. d. astr. Instrkde., Bd. II, S. 504. Berlin 1899.

[3]) L. AMBRONN, a. a. O. S. 517; siehe dort auch die neueren Formen des Mikrometers, die in der Astronomie üblich geworden sind. Sie sind Präzisionsgeräte, bei denen die Ausschaltung des persönlichen Fehlers angestrebt wird (REPSOLD).

Linien, in die das Bild des zu messenden Gegenstandes eingepaßt wird. Ebenso wirkt die Spirale, die im Gesichtsfelde gedreht werden kann.

Statt die Striche der Bildgröße anzupassen, kann man auch die Messung dadurch vornehmen, daß man durch Änderung der Brennweite die Bildgröße einem festen Strichabstande anpaßt.

Endlich kann man auch ruhende Gegenstände mit einem festen Striche messen, indem man, statt den Strich von einem Bildpunkt zum anderen zu verschieben, das Bild verschiebbar macht und die beiden Meßpunkte an den Strich anlegt; die Einrichtungen zur Bildverschiebung werden unten bei den Doppelbildmikrometern beschrieben werden.

281. Das Verhältnis zwischen Winkel und Bildgröße als abhängig vom Strahlengang; Meßfehler. Die beschriebenen Einrichtungen können ebenso wie zur Ausmessung von Fernrohrbildern auch zur Ausmessung anderer optischer Bilder verwendet werden; ihre allgemeine Theorie ist in Ziff. 105 bis 108 behandelt. Dort ist angenommen, daß die ins Auge gelangenden Bündel eine gemeinsame achsensymmetrische A.P. und gleichmäßige Lichtverteilung haben; dann konnte die Erscheinung in der Auffangebene durch die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen dargestellt werden. Der Abstand eines Bildpunktes von der Achse, wie er in der Auffangebene erscheint, ist dem Tangens des Winkels proportional, den der dingseitige Hauptstrahl mit der Achse bildet; der Proportionalitätsfaktor ist nahezu die Brennweite; genauer nach Gleichung (7), Ziff. 107, das Produkt aus dem Abstand der A.P. des Objektives von der Auffangebene und dem Verhältnis der Konvergenzwinkel in der E.P. und A.P. des Objektives. Liegt die Auffangebene in der hinteren Brennebene des Objektives oder ist der Strahlengang nach der Bildseite telezentrisch[1]), so ist der Proportionalitätsfaktor genau der Brennweite gleich. In Ziff. 106 ist auch der ABBEsche Vorschlag, ein Fernrohrobjektiv durch eine Zusatzlinse telezentrisch zu machen, ohne die E.P. aus dem Objektiv zu verlegen, wiedergegeben; er führt, wenn Objektiv und Zusatzlinse als dünne Linsen gelten können, und die Zusatzlinse in der Brennebene liegt, zu einer Folge zweier Linsen von gleicher Brennweite im Abstande dieser Brennweiten; und aus der allgemeinen Formel $F = f_1 f_2 : (f_1 + f_2 - D)$ folgt, daß kleine Änderungen df von $f_1 = f_2 = f$ die Gesamtbrennweite F nicht verändern, diese somit von Temperaturänderungen der einzelnen Linsen nicht beeinflußt wird, dagegen von der Änderung von D, d. h. der Ausdehnung des Rohres, abhängt. Anwendung hat der ABBEsche Vorschlag bisher wohl nicht gefunden; gewöhnlich sind nämlich die Gesichtsfeldwinkel klein; und wenn, wie es meistens der Fall ist, die Öffnungswinkel größer sind, so kann man durch die in Ziff. 275 beschriebene Verschiebung des Auges die Parallaxe zwischen Marke und Bildebene genau genug erkennen und beseitigen, d. h. die Marke in die Bildebene des wahren Bildes verschieben. Fallen beide zusammen, so braucht freilich die Auffangebene (die zum Augenhintergrund konjugierte Ebene Ziff. 108) nicht mit jenen beiden zusammenzufallen. Dies wird schädlich, wenn die Bündel, die von den Marken ausgehen, nicht mit jenen identisch sind, die von dem mit den Marken zusammenfallenden Bildpunkte ausgehen. Da dies selten in erheblichem Betrage der Fall ist, rechtfertigt sich die häufige Verwendung des nicht telezentrischen Strahlenganges. Wenn z. B. die Marken nur als schwarze oder gefärbte Unterbrechungen im Gegenstandsbild sichtbar werden, so sind die Strahlenbündel, deren Spitzen in den Punkten der Marken liegen, nur fehlende oder andersgefärbte Bündel in der Schar derer, deren Spitzen in den Punkten

[1]) Nach einer Mitteilung Prof. v. ROHRS geht aus der franz. Patentschrift J. PORROS hervor, daß dieser den telezentrischen Strahlengang in seinem „anallaktischen" Fernrohr verwirklicht hatte.

des Bildes liegen; dann ist die Lage der Auffangebene gleichgültig. Lenken aber die Marken, was in geringem Grade immer der Fall ist, das auf sie auffallende Licht ab (Meßstriche und Fäden durch Beugung, photographische Marken auch durch Reflexion oder Brechung), so sind die von ihnen ausgehenden Bündel mehr ausgebreitet, und die Helligkeit in ihnen anders verteilt als in den Bündeln der mit ihnen zusammenfallenden Bildpunkte; die Schwerlinien beider fallen nicht zusammen; die Lage der Auffangebene beeinflußt die Auffassung der Zerstreuungsflecke. Selbst wenn die Schwerlinien zusammenfallen, die Bündel aber verschiedene Öffnung besitzen, können die Abbildungsfehler des Auges zu Meßfehlern Veranlassung geben, da bei Erweiterung der Öffnung der Bildpunkt im Auge seitliche Verschiebungen erfahren kann. Leuchten die Marken sogar mit einem vom Gegenstande unabhängigen Lichte, sind z. B. Striche oder Fäden oder eine photographische Schicht von der Seite beleuchtet, wie dies bei Dunkelheit durch eine seitlich angebrachte Lampe geschieht, so gehen von den Marken so weit geöffnete Bündel aus, daß eine wirkliche Lochblende in der A. P. des Fernrohrs angebracht werden muß, um sie mit den Bündeln der Bildpunkte zusammenfallen zu lassen.

282. Die Winkelmessung mit Bilderpaaren. Sind die Gegenstandspunkte, deren Winkel gemessen werden sollen, gegenüber dem Fernrohr nicht in Ruhe und auch nicht wie himmlische Gegenstände gleichförmig gegenüber dem Fernrohr bewegt, so ist die Anwendung der Mikrometer mit Marken schwierig, da sie zwei hintereinander zu machende Beobachtungen oder Einstellungen erfordert; dies gilt insbesondere für Messung an Bord eines Schiffes, für alle freihändigen Messungen, aber auch für alle feineren Messungen infolge der Luftunruhe. Man zieht dann die Messung mit zwei Bildern des Gegenstandes vor, die in meßbarer Weise gegeneinander verschiebbar sind, und so weit verschoben werden, bis sich die Punkte decken, deren Winkel gemessen werden sollen. Das bekannteste Beispiel ist das Heliometer (Bouguer[1]) 1748), bei dem das Fernrohrobjektiv zerschnitten ist und die beiden Teile parallel zu der Schnittlinie verschoben werden können. Jede Objektivhälfte entwirft ein Bild der Sonne, man kann durch die Verschiebung z. B. den linken Rand mit dem rechten zur Deckung bringen. Beträgt die Verschiebung der hinteren Hauptpunkte der beiden Hälften aus ihrer sich deckenden Lage v, so ist die scheinbare Größe der Sonne $v:F$. Die Messung ist unabhängig von der Bewegung des Gegenstandes gegen das Fernrohr, da beide Bilder sich stets zusammen bewegen und eine einzige Einstellung genügt. Von der Kenntnis der Nullage der Verschiebung (des Zusammenfallens der Hauptpunkte) macht man sich frei, wenn man von der Berührung des linken Randes mit dem rechten zur Berührung des rechten Randes mit dem linken übergeht; die dazu nötige Verschiebung entspricht der doppelten scheinbaren Größe[2]). Das Heliometer ist ein Beispiel eines Meßgerätes mit „Mischbildern": Der ganze Dingraum ist im Bildraum zweimal wiedergegeben, so daß jedem Dingpunkte zwei Bildpunkte entsprechen. Eine Messung ist auch möglich, wenn jeder Dingpunkt nur einen Bildpunkt besitzt, aber zwei durch eine Trennungslinie geschiedene Teile des Bildraumes meßbar gegeneinander verschoben werden können; man könnte dann die Sonnenscheibe durch die Trennungslinie halbieren. Doch ist dieses Verfahren, „Halbbilder" zu erzeugen, das wir später unten bei den Entfernungsmessern mit Basis im Gerät finden werden, bei der Winkelmessung von einem Standort aus nicht üblich. Hier werden wohl immer Mischbilder verwendet, die entsprechenden Einrichtungen werden Doppel-

[1]) Vgl. Alb. König, Das Fernrohr, S. 134; L. Ambronn, a. a. O. S. 552.

[2]) Die Verfahren zur Messung des Abstandes zweier Sterne siehe bei Alb. König, a. a. O. S. 135.

bildmikrometer genannt. Abb. 329 zeigt die Wirkung einer solchen Einrichtung, wie sie zu militarischen Zwecken (auf Kriegsschiffen) verwendet wird: Durch die Beruhrung zwischen der Schornsteinkante des einen Schiffsbildes und der Wasserlinie des anderen wird der scheinbare Winkel w der Schiffshöhe h gemessen. Ist diese Höhe h bekannt, so folgt die Entfernung $E = h : \mathrm{tg}\, w$.



Abb 329 Das Doppelbildmikrometer zur Entfernungsmessung von Schiffszielen angewendet.

283. Die Bedingungen für die Strahlenbegrenzung bei Doppelbildern sind in Ziff. 108 entwickelt worden. Wir setzen voraus, daß die beiden Bilder in axialer Richtung nicht gegeneinander verschoben sind, was durch die Parallaxe kontrolliert wird. Fallt ein Punkt des einen Bildes mit einem Punkte des anderen Bildes zusammen, so sollte auch das Strahlenbündel, das vom ersten und das Strahlenbundel, das vom zweiten ausgeht, zusammenfallen, nicht nur nach der Lage der Strahlen, sondern auch in bezug auf die Lichtverteilung, damit die Schwerlinien, oder wenigstens ihre Projektionen auf die Ebene des zu messenden Winkels zusammenfallen. Das Zusammenfallen der Schwerlinien allein befreit nicht ganz von Fehlern, wenn die Öffnungen nicht übereinstimmen, aus dem oben für die Messung mit Faden erörterten Grunde. Beim Zusammenfallen der Projektionen der Schwerlinien bleibt für feinste Messungen immer noch die in Ziff. 275 erörterte Fehlerquelle der Benutzung verschiedener Teile des Okulars und insbesondere des Auges übrig.

284. Die Erzeugung der Doppelbilder. Die Teilung des Objektives in zwei Hälften ist schon oben erwähnt. Man kann statt dessen andere vorhandene Linsen des Fernrohrs zerschneiden und ihre Hälften verschieben; wenn man vollkommen gemischte Bilder erhalten will, so müssen diese Linsen einem Öffnungsbilde naheliegen, wie z. B. die Umkehrlinsen oder (weniger gut) die Augenlinse des Okulars. Man kann auch hinter dem Objektiv eine zerschnittene Zusatzlinse anbringen und ihre Teile verschieben. Man kann endlich auch die eine Hälfte des Objektives mit einem Ablenkungskeil[1]) veränderlicher Stärke bedecken, der in der Meßrichtung ablenkt; man muß dabei darauf achten, daß die beiden Bilder, die von den beiden Hälften des Objektives erzeugt werden, keine Verschiebung in axialer Richtung gegeneinander erleiden. Ablenkungskeile veränderlicher Stärke werden weiter unten beschrieben. Alle diese Einrichtungen laufen auf eine „geometrische Teilung“ der die E.P. oder A.P. des Fernrohrs durchsetzenden Bundel hinaus. Sie hat den Nachteil, daß das Auge zentrisch vor beide Pupillenhälften gehalten werden muß, damit beide Bilder gleich hell erscheinen; auch leidet die Genauigkeit der Messung, weil verschiedene Teile des Auges das eine und das andere Bild vermitteln (s. oben). Diese Nachteile fallen fort bei Anwendung zweier Objektive, deren Bilder durch eine halb durchlässige, halb reflektierende, z. B. eine schwach versilberte Schicht gemischt werden (Abb. 336); und ebenso bei Verwendung der Kristallmikrometer (s. unten), bei denen jeder Strahl in zwei Strahlen zerspalten wird. In diesen beiden Fällen kann man von einer physikalischen Teilung der Bündel, im Gegensatz zur geometrischen, sprechen.

285. Ablenkungskeile veränderlicher Stärke. Ein solcher würde durch eine plankonvexe Linse entstehen, in deren Kugelfläche sich eine plankonvexe mit

[1]) Wir wollen hierunter alle Einrichtungen zur Ablenkung ohne Sammel- oder Zerstreuungswirkung verstehen.

etwa gleichem Radius und gleichem Brechungsverhältnis unter beständiger Beruhrung dreht (Abb. 330). Wenn die Linsen schwach sind, so wird ihre Wirkung durch einen geringen Abstand nicht geändert; sie ist außerdem von der Verdrehung um den hinteren Hauptpunkt unabhängig; so kann dasselbe wie durch Drehung auch durch Verschiebung der beiden Linsen entsprechend Abb. 331 erzielt werden[1]). Einen Keil veranderlicher Stärke erhält man auch nach Abb 332 durch zwei Keile, die um die Achse um entgegengesetzt gleiche Beträge drehbar sind. Besitzen beide die Ablenkung a und werden sie aus der Lage, in der sie einander zu einer planparallelen Platte ergänzen, um den Winkel δ gedreht, so lenken sie zusammen um $2 \cdot a \sin\delta$ ab, und zwar in der Ebene, zu der ihre Hauptschnitte stets symmetrisch bleiben (die Komponenten ihrer Ablenkungen in dieser Ebene verstärken einander; die senkrecht dazu heben einander auf) Doch gilt dies einfache Gesetz nur fur schwache Ablenkungen; die Wirkung starkerer Keilpaare ist ausfuhrlich von ERFLE[2]) behandelt worden, der auch die Bedingung ableitete, unter der starkere Keile ebenfalls eine wechselnde Ablenkung in einer Ebene erzeugen. Das Drehkeilpaar, das auch nach HERSCHEL genannt wird, aber ebenso wie das oben beschriebene Linsenpaar auf BOSCOVICH[3]) zurückgeht, wird insbesondere im Entfernungsmesserbau vielfach verwendet, dort hat sich die Bezeichnung „Kompensator" dafur eingeburgert. Will man das Drehkeilpaar auf einen Teil des Objektivs wirken lassen, so kann man die Keile in der Mitte durchbohren, so daß der mittlere Teil des Objektivs unbeeinflußt bleibt. Ordnet man alle die beschriebenen Einrichtungen vor dem Objektiv an, so bleiben die abgelenkten Bilder in der Brennebene und zeigen keine Parallaxe gegen die nicht abgelenkten. Man kann auch zwei brechende Keile um eine Parallele zur Keilkante drehen [COLZI[4])] (Abb. 333). Statt die Teile eines Drehkeilpaars hintereinander von dem Lichte durchsetzen zu lassen, das einem Teil der Objektivöffnung zugefuhrt wird, kann man auch den einen der Keile vor der einen, den anderen vor der anderen Objektivhälfte in entgegengesetztem Sinne drehen; dann ist mit der Drehung außer der entgegengesetzten Bewegung der beiden Bilder eine gemeinsame, dazu senkrechte verbunden.



Abb 330 Ein Keil veranderlicher Starke



Abb 331 Ersatz eines veranderlichen Keils durch zwei gegeneinander verschiebliche Linsen entgegengesetzt gleicher Brennweite



Abb 332. Das Drehkeilpaar („Kompensator") Durch das kleine Kegelrad (links) werden die beiden großen und damit zwei gleiche Ablenkungskeile um entgegengesetzt gleiche Winkel gedreht.



Abb 333 Zwei um die Keilkante um entgegengesetzt gleiche Winkel drehbare Ablenkungskeile („Schwingkeilpaar")

Von den hinter dem Objektiv anzubringenden Einrichtungen zur Bildverschiebung sei zunächst die drehbare planparallele Platte nach CLAUSEN[5]) erwähnt; sie wird auch in doppelter Anordnung als Mikrometer benutzt (Abb. 334), indem zwei



Abb. 334. Zwei Planparallelplatten, die um entgegengesetzt gleiche Beträge verdreht werden

[1]) Für die Entfernungsmessung vielleicht zuerst von GOULIER 1864 verwendet; vgl. DE MARRE, Des instruments pour la mesure des distances, S. 116. Paris 1880.
[2]) H. ERFLE, ZS. f Phys. Bd. 1, S. 57. 1920.
[3]) R. J. BOSCOVICH, Phil. Trans. Bd 66 (2), S. 789. 1777.
[4]) V. COLZI, D. R. P. 235736 vom Jahre 1910.
[5]) TH. CLAUSEN, Astron. Nachr. Bd. 18, S. 95. 1841.

Platten nebeneinander sich um entgegengesetzt gleiche Winkel drehten. Am bekanntesten ist die Verwendung dieser Einrichtung bei dem HELMHOLTZschen Ophthalmometer geworden. Die Bildverschiebung ist außer von der Neigung auch von der Dicke abhängig. Man kann also statt der Neigung die Dicke veränderlich machen, indem man eine (zur Achse schräge) Glasplatte in zwei Glaskeile zerschneidet, die man aufeinander verschiebt. Einer solchen Einrichtung verwandt ist der Verschiebungskeil, den MASKELYNE[1]) 1777 angab: Ein schwach ablenkendes Prisma, in der Richtung der Achse verschoben, gibt, wenn es im Brennpunkt steht, keine, wenn es sich von ihm entfernt, proportional wachsende Verschiebung; der zu messende Winkel ist also der Entfernung des Prismas vom Brennpunkt proportional. MASKELYNE verwandte zwei entgegengesetzt gleiche Ablenkungskeile in gleichem Abstand vom Brennpunkt, deren jeder für einen Achsenpunkt der Bildebene die halbe Objektivoffnung verdeckte und die er gleichzeitig axial verschob (Abb. 335). Durch Verwendung zweier gleichdicker Keile wird die Parallaxe zwischen den beiden Bildern vermieden.

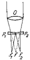


Abb. 335. Wanderkeil nach MASKELYNE.

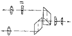


Abb. 336. Ein „Wanderkeil" verschiebt das Bild des oben gezeichneten Objektives. Es mischt sich mit dem des unten gezeichneten durch eine halb reflektierende, halb durchlässige Schicht.

Abb. 336 zeigt die Verwendung eines einzelnen solchen Keiles; die Parallaxe tritt hier nicht auf, weil zwei getrennte Objektive vorhanden sind, deren Strahlen an einer halb durchlässigen, halb spiegelnden Silberschicht gemischt werden (physikalische Teilung s. oben). Der Verschiebungskeil ist besonders durch BARR und STROUD in den Bau der Einstandsentfernungsmesser eingeführt worden, wo er das am häufigsten gebrauchte Mikrometer ist.

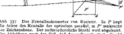


Abb. 337. Das Kristallmikrometer von ROCHON. In P liegt die Achse des Kristalls der optischen parallel, in P' senkrecht zur Zeichenebene. Der außerordentliche Strahl wird abgelenkt. Die Abbildung zeigt den Fall, daß der außerordentliche Strahl (wie im Quarz) ein größeres Brechungsverhältnis hat.

Der bereits am Schlusse von Ziff. 294 erwähnte Vorteil einer Anordnung nach Abb. 336, daß beide Bilder dieselbe A.P. besitzen, also Okular und Auge an denselben Stellen durchsetzen, ist auch den Kristallmikrometern eigentümlich. Bei diesen wird durch die Doppelbrechung ein Strahl natürlichen Lichtes in zwei senkrecht zueinander polarisierte zerlegt, von denen wenigstens einer eine Ablenkung erfährt, so daß beide in verschiedener Richtung austreten. Bei dem Prisma von ROCHON (Abb. 337), das aus Kalkspat oder Quarz hergestellt wird, trifft die optische Achse senkrecht auf die Eintrittsfläche eines Kristallprismas, dessen Achse mit ihr zusammenfällt, nachher an einer schrägen Kittfläche auf ein Kristallprisma, dessen Achse senkrecht zur Einfallsebene liegt. Da das Ganze eine planparallele Platte bildet, so tritt der ordentliche Strahl ungebrochen

[1]) Vgl. L. AMBRONN, a. a. O. S. 595.

durch, während der außerordentliche Strahl eine Ablenkung erfährt. Beim Prisma nach WOLLASTON ist die Kristallachse in dem zuerst getroffenen Prisma senkrecht zur optischen Achse, liegt aber in der Einfallsebene der zweiten Brechung. Es werden dann der ordentliche und der außerordentliche Strahl nach entgegengesetzten Seiten abgelenkt. Bei dem Prisma nach SENARMONT ist die Achse des ersten Kristallprismas ebenso wie bei dem ROCHONschen Prisma gelegen, die Achse des zweiten senkrecht zur optischen Achse in der Einfallsebene. Auch hier wird nur der außerordentliche Strahl abgelenkt. Alle diese Prismenzusammenstellungen ergeben, zwischen Objektiv und Brennebene eingeschaltet, Doppelbilder, deren Abstand wächst, wenn sie sich von der Brennebene entfernen; die Winkelmessung erfolgt entsprechend Abb. 335 oder 336 durch axiale Verschiebung. Man kann auch nach ALB. KÖNIG[1]) zwei ROCHONsche Prismen als Drehkeilpaar verwenden, wenn man das Licht zwischen beiden Prismen zirkular polarisiert; sonst würde jeder der beiden aus dem ersten Prisma austretenden linear polarisierten Strahlen durch das zweite in zwei neue linear polarisierte zerlegt werden, also vier Bilder entstehen.

Die beschriebenen Ablenkungskeile veränderlicher Stärke sind im Gegensatz zu dem geteilten Objektiv zunächst nicht achromatisch. Zwischen der Wellenlänge C und F ist bei der mittleren Ablenkung ε ein Unterschied von $\varepsilon:\nu$, wo $\nu = (n_D - 1):(n_F - n_C)$. Stört dieser Unterschied, so müssen die Einrichtungen in der früher beschriebenen Weise achromatisiert werden.

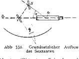


Abb 338. Grundsätzlicher Aufbau des Sextanten

286. Die Messung größerer Winkel mit Doppelbildern. Die Methode der Doppelbilder ist nicht auf Winkel beschränkt, die unterhalb der Gesichtsfeldgröße des Fernrohrs liegen. Im Sextanten[2]) und seinen Abarten (Oktanten, Spiegel- und Prismenkreise) wird sie für Winkel benutzt, die bei Prismenkreisen 180° erreichen. Es wird gewöhnlich geometrische Teilung der Öffnung des Fernrohrs benutzt. Vor einem Fernrohr (Abb. 338) befindet sich ein zur Hälfte versilberter fester Spiegel s. Ein drehbarer Spiegel S ist so angebracht, daß s die Verbindungslinie sS der Spiegelmitten in die Fernrohrachse spiegelt. Außer dem direkt gesehenen Bilde wird noch ein zweites durch den aus s und S bestehenden Winkelspiegel in das Fernrohr abgebildet. Fallen die Zielpunkte L und R zusammen, die den Winkel α bilden, so bilden s und S den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, an einer Teilung, die zur Drehachse von S konzentrisch ist, wird unmittelbar α abgelesen. Über die Ausführungsformen, die Verwendung und die Fehler und ihre Ermittelung vgl. die Handbücher der Vermessungskunde und der nautischen Instrumente[3]). Von der eben beschriebenen Bauart weicht insbesondere der STEINHEILsche Prismenkreis ab, bei dem das Fernrohr auf zwei rechtwinklige Prismen zielt, deren jedes die halbe Höhe des Objektivs besitzt und die gegen-

[1]) D. R. P. Carl Zeiss 188992 vom Jahre 1906.

[2]) Zur Geschichte des Sextanten vgl. L. AMBRONN, a. a. O. Bd. II, S. 772. Nach der dort angeführten Bemerkung M. J. G. F. BOHNENBERGERS legte JOHN HADLEY die erste Beschreibung eines Reflexionsinstruments 1731 vor (J. HADLEY, Phil. Trans. S. 147. 1731; S. 341. 1732), unter seinen hinterlassenen Papieren fand sich aber eine Handschrift NEWTONS, die eine Zeichnung und Beschreibung des Geräts enthielt.

[3]) Z. Bsp. L. AMBRONN, a. a. O. S. 771—813; W. JORDAN, Grundzüge der astron. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885; H. EYLERT, Der Sextant. Arch. d. Seewarte 1881.

einander um dieselbe Achse meßbar verdreht werden können. Die Prismen wirken als Spiegel nach Abb. 288, sie können bis zu Spiegelungswinkeln von 180° gebraucht werden.

c) Die Einstandsentfernungsmesser.

287. Das Meßprinzip. Grundsätzlich besteht der Einstandsentfernungsmesser aus zwei starr miteinander verbundenen Zielfernrohren. Ihren Abstand wollen wir die Basis nennen und annehmen, daß ihre Visierlinien nahezu senkrecht zur Basis und parallel gerichtet seien. In Abb. 339 ist $B_1B_2 = b$ die Basis, Z das Ziel. Die Basis ist durch das Gerät selbst dargestellt, der Winkel am Ziel w ist gleich der Differenz der Neigungen von B_1Z und B_2Z gegen die Basis $= \alpha_2 - \alpha_1$. Es ist

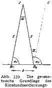


Abb. 339. Die geometrische Grundlage des Einstandsentfernungsmessers. $b = B_1B_2$ die Basis; Z das Ziel, $w = \alpha_2 - \alpha_1$ wird gemessen.

$$B_1Z = E_1 = \frac{b \sin \alpha_2}{\sin w},$$

$$B_2Z = E_2 = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin w}.$$

Solange α_2 und α_1 sich von 90° nicht sehr unterscheiden, ist also $E_1 = E_2$ und für kleine w

$$E = b : w. \tag{1}$$

Eines der Zielfernrohre, z. B. B_1Z, wird auf das Ziel gerichtet, während die Visierlinie des anderen durch eines der früher beschriebenen Mittel (Winkelmikrometer) aus der parallelen Lage B_2C in die Richtung nach dem Ziel geschwenkt wird. Dieser Schwenkwinkel $CB_2Z = w$ wird gemessen und gewöhnlich an einer Teilung abgelesen, die nach Entfernungen gestrichelt und beziffert ist; also von $E = \infty$ nach der kürzesten meßbaren Entfernung verläuft.

Die Aufgabe der Entfernungsmesser war bis jetzt fast stets eine militärische[1]), die entwickelten Typen sind durch die Waffengattungen, ihre Schußentfernungen und Transportmöglichkeiten bestimmt. Der Winkel w erreicht hierbei niemals größere Werte als etwa 0,003 im Bogenmaß = ca. 10′, was z. B. bei 6 m Basis und 2000 m kürzester Entfernung (für Zwecke der Marine und Küste) oder bei 0,6 m Basis und 200 m kürzester Entfernung (für Infanterie) vorkommt.

Es sind auch Entfernungsmesser angegeben worden[2]), bei denen nicht der Winkel α_2 des zweiten Fernrohrs, sondern bei festem w die Basis b geändert wird; die Entfernung wird dann der Basis proportional; diese haben aber wegen der mechanischen Schwierigkeiten und weil sie nur bei der größten Entfernung die gleiche Genauigkeit, wie die Geräte mit konstanter Basis erreichen, ohne eine kürzere Baulänge zu liefern, keinen Eingang gefunden.

288. Die Meßgenauigkeit. Da die Basis stets mit genügender Genauigkeit herzustellen und konstant zu erhalten ist, besteht der einzige Fehler der Messung

[1]) Auch als Hilfsmittel der Navigation beginnen Einstandsentfernungsmesser sich einzuführen; die Geodäsie benutzt bis jetzt nur solche mit sehr kleinen Basen.

[2]) Eine Übersicht über die älteren Entfernungsmesserkonstruktionen gibt Jak. de Marre, Des Instruments pour la mesure des distances. Paris 1880. Messung durch Änderung der Basis s. dort S. 203. Eine neuere geodätische Anwendung bei M. Zeller, Bern: Schmid & Cie, ohne Jahreszahl (1920?).

in der Ungenauigkeit der Bestimmung von w; aus der Gleichung (1) folgt für kleine Entfernungsfehler dE und kleine Winkelfehler dw

$$dE = -\frac{b}{w^2}\,dw = -\frac{E^2}{b}\,dw\,. \tag{2}$$

Der Entfernungsfehler wächst also quadratisch mit der Entfernung.

Die Genauigkeit der Winkelbestimmung findet eine Grenze in der **Sehschärfe des Auges**; im folgenden werden wir sehen, daß bei den angewandten Methoden nicht das in Kap. 2, Abb. 66, erörterte Auflösungsvermögen, sondern ein feineres Unterscheidungsvermögen (Abb. 67) in Betracht kommt, das diese „subjektive" Grenze, die also im Bildraum der Fernrohre gilt, auf wenige Sekunden herabdruckt; der „objektive" Winkelfehler, der des Dingraumes, ist dann im Verhältnis der Fernrohrvergrößerung $\Gamma\times$ kleiner. Gewöhnlich rechnet man bildseitig mit 10″; bei kleineren tragbaren Entfernungsmessern ist die Vergrößerung 10×, bei größeren nahezu 30×; so daß man auf der Dingseite einen vom Auge herrührenden Fehler von 1″ oder 0,3″ annehmen kann[1]). Die später zu erörternden **Fehler des Gerätes** selbst erzeugen jedoch weit größere Winkel- und damit Entfernungsfehler. Meist bleibt dabei die Entfernungsteilung in sich richtig, ist aber verschoben, so daß zu der Ablesung ∞ nicht mehr parallele Visierlinien gehören; man kann sich in Abb. 339 die Linie B_2C aus ihrer zu B_1Z parallelen Lage um einen Gerätewinkelfehler dw verdreht denken; dieser erreicht Werte bis zu 3″. Bei den größeren und schwerer transportablen Entfernungsmessern kann er immerhin durch eingebaute Berichtigungsvorrichtungen auf etwa 2″ herabgedruckt werden. Unter diesen Voraussetzungen sind für einen Entfernungsmesser mit 50 cm Basis und 10× Vergrößerung und einem Entfernungsmesser mit 6 m Basis und 30× Vergrößerung die Entfernungsfehler errechnet, die vom Auge und diejenigen, die vom Geräte zu erwarten sind, die ersteren haben auch eine Bedeutung für den Vergleich mehrerer mit demselben Gerät rasch nacheinander gemachter Messungen, da sich der Gerätefehler in kurzen Zeiträumen nicht ändert.

Meßfehler von Einstandsentfernungsmessern.

Basis 50 cm, Vergrößerung 10×.

Bei der Entfernung	ergibt der Winkelfehler des Auges ($dw = 1''$)	ergibt der Winkelfehler des Geräts ($dw = 3''$)
200 m	0,4 m	1,2 m
400 „	1,5 „	4,8 „
600 „	3,5 „	10,5 „
800 „	6,2 „	18,6 „
1000 „	9,7 „	29 „
2000 „	38 „	116 „
3000 „	87 „	262 „

Basis 6 m, Vergrößerung 30×.

Bei der Entfernung	ergibt der Winkelfehler des Auges ($dw = 0,3''$)	ergibt der Winkelfehler des Geräts ($dw = 2''$)
2000 m	1,0 m	6,5 m
4000 „	3,9 „	21 „
6000 „	8,7 „	58 „
8000 „	16 „	104 „
10000 „	24 „	162 „
15000 „	55 „	365 „
20000 „	97 „	650 „

289. Der Schnittbildentfernungsmesser. Um zu einer weniger sperrigen Konstruktionsform für die beiden



Abb. 340. Der Aufbau des Entfernungsmessers: Die beiden Zielfernrohre sind in die Basis verlegt, das Okular ist gemeinsam.

Zielfernrohre zu gelangen, hat schon BRANDER 1781 die Achse der beiden Objektive O_1 und O_2 mit der Basis zusammenfallen lassen (vgl. Abb. 340, die aber nicht ge-

[1]) Auf die Größe dieses Fehlers kommen wir unten bei der Betrachtung des Schnittbild- und des Raumbildentfernungsmessers noch zurück.

nau dem Branderschen Aufbau entspricht) und die Strahlen vor den Objektiven durch die Spiegel S_1 und S_2, hinter den Objektiven durch die Spiegel s_1 und s_2 um 90° abgelenkt, so daß die Hauptlänge der Fernrohre in die Basis fiel. Er hat bereits die beiden dem Okular nahen Spiegel in halber Höhe ausgeführt, um ein gemeinsames Okular zu benutzen, so daß nur ein Beobachter gebraucht wurde; dabei mußte zuerst eines der beiden Zielbilder durch Richten des ganzen Fernrohrs, das zweite durch Drehen eines der Hauptspiegel auf einen Faden gestellt werden. (Die Spiegeldrehung wird besser durch ein weniger empfindliches mikrometrisches Verfahren ersetzt, z. B. das in Abb. 340 angedeutete Drehkeilpaar oder den Verschiebungskeil, s. Ziff. 285, 291.) Dieses Verfahren setzt unveränderliche Lage von Gerät und Ziel zwischen der ersten und zweiten Einstellung voraus. Hiervon befreite sich zuerst Adie[1]), indem er den Faden wegließ und ein Bild über das andere stellte. Hiermit wird zugleich eine Erhöhung der Genauigkeit erzielt, wenn man, wie dies zuerst Barr u. Stroud[2]) mit Erfolg getan haben, die beiden Bilder in einer der Basis parallelen Linie von möglichst verschwindender Breite zusammenstoßen läßt, wobei die physische Begrenzung der beiden Bilder in der Brennebene des Fernrohrs liegen muß. Zusammenstellungen aus Prismen, die zwei Bilder ober- und unterhalb einer Linie vereinigen, heißen Scheideprismen[3]). Abb. 341 zeigt die Anordnung eines solchen, bei dem die Trennungslinie durch die Kante eines spiegelnden Silberbelags auf einer verkitteten Glasfläche geliefert wird, die in ihrem nichtversilberten Teile das Licht durchläßt.

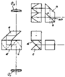


Abb. 341. Ein Scheideprisma. Vom Objektiv O_1 gelangt das Licht in das Dachprisma c; vom Objektiv O_2, durch das rhombische Prisma e gehoben, in das Dachprisma d, das darüber liegt, beide Dachkanten liegen in der Meßebene. Die „Scheidefläche" zwischen a und b ist in der oberen Hälfte versilbert und wirft dort die von O_2 kommenden Strahlen zurück; in der unteren läßt sie die von O_1 kommenden durchtreten.

Das Gesichtsfeld eines solchen Schnittbildentfernungsmessers zeigt das Aussehen von Abb. 342; hier ist links die vor der Messung etwa vorhandene Unterbrechung gerader Linien, rechts das Aussehen nach der Einstellung, „die Koinzidenz", gezeigt. Diese läßt sich bei geraden Linien senkrecht zur Basis mit der in Kap. 2, Ziff. 49 erörterten Genauigkeit der „Nonieneinstellung" vornehmen, für die wir im obigen 10" einsetzten, was unter gün-



Abb. 342. Das Gesichtsfeld eines Schnittbildentfernungsmessers vor und nach der Einstellung

[1]) P. Adie, Engl. Patt. 357 v. J. 1860.
[2]) Barr u. Stroud, Engl. Pat. 13 507 vom Jahre 1893.
[3]) Beschreibungen von Scheideprismen findet man in folgenden Patenten von Barr u. Stroud, Engl. Pat. 13 507 v. J. 1893; 3 172 v. J. 1901; 1 462 v. J. 1903; 9 906 v. J. 1908; 30 152 v. J. 1909; 127 885 v. J. 1917; 180 028 v. J. 1921, in folgenden Patenten von C. Zeiss, D. R. P. 175 900 v. J. 1905; 254 888 v. J. 1910; 350 452 v. J. 1914, und von C. P. Goerz, D. R. P. 233 565 v. J. 1908; 233 566 v. J. 1908; 254 819 v. J. 1908; 270 995 v. J. 1910; 276 530 v. J. 1910.

stigen Verhältnissen gilt (sogar ein Drittel dieses Betrages kommt vor). Bei spitzeren Winkeln geht die Genauigkeit der Einstellung nach v. HOFE[1]) zurück. Ebenso, wenn die zu vergleichenden Linienstücke des Zieles eine zu geringe scheinbare Länge besitzen [H. SCHULZ[2])], was mit der in Kap. 2 Ziff. 49 gegebenen Erklärung der Noniengenauigkeit übereinstimmt, weil dann keine genugende Anzahl von Zapfen beteiligt ist. Kleine Entfernungsmesser kann man um die Visierlinie drehen, um die Trennungslinie senkrecht zur Ziellinie zu stellen. Schräge Ziellinien sind im übrigen schon deshalb ungeeignet zur Messung, weil die Höhenlage der Bilder längst nicht mit dem Grade der Genauigkeit richtig erhalten werden kann wie die Seitenlage. In der Höhenlage sollen sich beide Bilder ergänzen; tritt die Erscheinung von Abb. 343 auf („Höhenfehler"), so bewirkt diese bei Benutzung

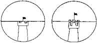
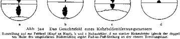


Abb. 343. Der Höhenfehler eines Schnittbildentfernungsmessers (vgl. das vorige Bild). Links fehlt ein Teil des Bildes, rechts erscheint ein Teil doppelt.



a b c d

Abb 344 Das Gesichtsfeld eines Kehrbildentfernungsmessers

a Einstellung auf ein Feldziel (Kopf an Kopf), b und c Höhenfehler, d ein starker Höhenfehler (gleich der doppelten Höhe des umgekehrten Bildstreifens) ergibt Fuß-an-Fuß-Stellung an der oberen Trennungslinie.

von schrägen Ziellinien Meßfehler. Um auch bei unregelmäßig begrenzten Gegenständen Linien senkrecht zur Trennungslinie zu erzeugen, wurden nach dem Vorgang von Barr & Stroud Zylinderlinsen eingeführt, die die Bilder senkrecht zur Trennungslinie auseinanderziehen; diese verwaschenen Bilder sind vorzugsweise zur Messung von Lichtern geeignet.

290. Der Kehrbildentfernungsmesser. Ziele mit unregelmäßigen Begrenzungen lassen sich meist besser einstellen, wenn eines der beiden Bilder umgekehrt ist, das obere Bild, wenn das Ziel oben eine scharfe Umrißlinie hat, wie die meisten feldmäßigen Ziele, das untere, wenn die untere Umrißlinie sich besser zur Einstellung eignet, wie dies gewöhnlich bei Luftfahrzeugen der Fall ist. Abb. 344a zeigt die „Kopf-an-Kopf"-stellung eines Feldzieles, Abb. 345 die „Fuß-an-Fuß"stellung eines Luftzieles. Die Wiederholung des Zieles auf der anderen Seite der Trennungslinie macht es hier möglich, Spitzen, die etwa senkrecht zur Trennungslinie verlaufen, mit nahezu derselben Genauigkeit einzustellen wie beim Schnittbildentfernungsmesser, für den das gleiche Ziel eine zu geringe Höhe des geradlinigen Um-



Abb. 345. Die Fuß-an-Fuß-Stellung eines Luftziels im Kehrbildentfernungsmesser.

[1]) CHR. v. HOFE, ZS. f. techn. Phys. Bd. 1, S. 85. 1904.

[2]) H. SCHULZ, ZS. f. Instrkde. Bd. 39, S. 91, 124, 242. 1919, wo überhaupt der Einfluß der Zielform durch zahlreiche Messungen untersucht wird.

rißteiles aufweisen würde. Die Einstellung geradlinig begrenzter Ziele ist offenbar ebenso möglich, wie beim Schnittbildentfernungsmesser. Auch die schädliche Wirkung des Höhenfehlers bei schräg zur Trennungslinie verlaufenden Linien ist dieselbe. Der Höhenfehler zeigt sich hier darin, daß beide Bilder, die bei Drehung des Gerätes um eine zur Basis parallele Achse sich symmetrisch zur Trennungslinie bewegen, diese nicht gleichzeitig erreichen. Abb. 344, die Beispiele des Höhenfehlers zeigt, läßt gleichzeitig die häufigste Ausführung des Kehrbildentfernungsmessers erkennen, bei der das umgekehrte Gesichtsfeld der Höhe nach nur einen kleinen Streifen des aufrechten bedeckt; man verliert so weniger vom Gesichtsfeld überhaupt, da der umgekehrte Teil nur eine Wiederholung des darunter (in Abb. 345 darüber) befindlichen benachbarten Teiles des aufrechten ist, also nichts Neues zeigt, jedoch einen Teil des aufrechten unsichtbar macht. Die Schmalheit des umgekehrten Gesichtsfeldes ermöglicht nach Eppenstein[1]) einen leichten Übergang von der Kopf-an-Kopf- zur Fuß-an-Fuß-Stellung, wodurch derselbe Entfernungsmesser für beide Meßarten brauchbar wird. Dies geschieht durch willkürliche Einführung eines etwas stärkeren Höhenfehlers nach Abb. 344d (wozu dieselben Mittel gebraucht werden können, die zur Beseitigung etwa von selbst auftretender Höhenfehler stets vorhanden sein müssen und später beschrieben werden); denn der Höhenfehler bedeutet nichts anderes, als daß die Symmetrielinie der beiden Bilder nicht mehr mit ihrer Trennungslinie zusammenfällt; wird sie von einer Trennungslinie in die andere verlegt, so ist die gewünschte Wirkung erreicht. Eine andere Art, beide Meßarten in einem Gerät zu vereinigen, hat H. Jakob angegeben[2]); sie besteht in der Sichtbarmachung der vom Scheideprisma eines Kehrbildentfernungsmessers bei der Herstellung des Kopf-an-Kopf-Bildes ausgeschiedenen Bildteile, entweder dadurch, daß die z. T. durchlässige, z. T. versilberte Scheidefläche der beiden Bilder verschiebbar gemacht und durch eine andere ersetzt wird, bei der die durchlässige und die versilberte Stelle vertauscht sind, oder durch Einbau eines zweiten Okulars, das die Strahlen erhält, die von der Rückseite der Silberschicht reflektiert werden, und in dem deshalb das Fuß-an-Fuß-Bild erscheint. Abb. 346 zeigt ein solches Doppelokular, bei dem dieselbe Konstruktion wie in Abb. 341 zugrunde gelegt ist. Die Silberfläche reflektiert hier jedoch nach beiden Seiten. Das für Luftziele bestimmte Okular hat eine um 90° von der des anderen verschiedene Einblicksrichtung, die auch die Kopfhaltung beim Messen nach oben erleichtert. Wenn dasselbe Okular für Erd- und Luftziele bestimmt ist, so gibt man ihm am besten eine Einblicksrichtung, die um 60 bis 80° gegen die Meßebene geneigt ist.

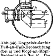


Abb. 346. Doppelokular für Fuß-an-Fuß-Beobachtung (bei a) und Kopf-an-Kopf-Beobachtung (bei b). Die Hälfte der Scheidefäche spiegelt nach beiden Seiten. h Trennungslinie.

291. Die beim Entfernungsmesser verwendeten Mikrometereinrichtungen. Als Mittel zur Schwenkung der Visierlinie des zweiten Fernrohres aus der dem ersten parallelen Lage in die Zielrichtung können, wie erwähnt, grundsätzlich alle oben (Ziff. 280—285) beschriebenen Mikrometer angewendet werden. Wo keine Visiermarken vorhanden sind, wie beim Schnittbild- und Kehrbildentfernungsmesser, ist man auf solche Mikrometer beschränkt, die das Bild verschieben.

[1]) C. Zeiss, D. R. P. 230463 v. J. 1910.
[2]) C. P. Goerz, D. R. P. 263948 v. J. 1912; 231461 v. J. 1910. Andere Patente von C. P. Goerz, die dasselbe bezwecken, sind 254282 v. J. 1910. (Erfinder E. Berneck) 263944 v. J. 1912; 281196 v. J. 1912 (Erfinder Chr. v. Hofe).

Gewöhnlich wird der von Barr & Stroud hier eingeführte Maskelynesche Verschiebungskeil, der zwischen Objektiv und Bild bewegt wird, benutzt; bei kleinen Entfernungsmessern ist durch Carl Zeiß das vor dem Objektiv drehbare Keilpaar nach Boscovich, das das Innenrohr kurz zu halten gestattet, eingeführt; die Verschiebung des ersteren und der Sinus der Drehung des letzteren sind der reziproken Entfernung proportional; sie werden mit der entsprechenden Entfernungsteilung gekuppelt. Eine andere von Eppenstein[1]) angegebene Meßeinrichtung besteht darin, die Brennweiten der Objektive verschieden zu wählen, wodurch ein weiteres Mikrometer überflüssig wird. Sie ist für alle Arten von Entfernungsmessern anwendbar; beim Schnittbild- oder Kehrbild-Entfernungsmesser gibt sie die Möglichkeit einer „festen Skala", ähnlich der des Raumbildentfernungsmessers und mit ähnlich schneller Arbeitsweise. Es gehört nämlich dann zu jeder anderen Stelle der Gesichtsfelder der zwei fest miteinander zu denkenden Visierfernrohre ein anderer Winkel w; eine im Gesichtsfeld liegende Teilung kann unmittelbar nach Entfernungen beziffert werden.

Stereoskopische (Raumbild-) Entfernungsmesser.

292. Der Raumbildentfernungsmesser ist eine andere Lösung der Aufgabe, die Messung von gegenseitiger Bewegung von Entfernungsmesser und Ziel unabhängig zu machen: Das Nacheinander der Einstellung der Zielmarke des einen und des anderen Fernrohres fällt hier dadurch fort, daß das Gesichtsfeld des einen Fernrohres dem einen, das des zweiten dem anderen Auge dargeboten wird. Sind die beiden Marken von gleicher Größe und Form, so erscheinen sie selbst als ein Raumding in bestimmter Entfernung. Denn die beiden Okulare der Visierfernrohre sind nichts anderes als die Betrachtungslinsen des Stereoskopes nach Ziff. 66ff. und die Marken entsprechen identischen, in das Stereoskop gelegten Bildern. Noch einleuchtender ist die folgende Betrachtung: Wenn die Bilder der beiden Zielfernrohre den beiden Augen zugeführt werden, so bilden diese ein Doppelfernrohr im Sinne von Ziff. 270 (und müssen natürlich auch die in Ziff. 271 angeführten Bedingungen erfüllen). Zwei gleiche Marken in den Gesichtsfeldern eines solchen Doppelfernrohres verhalten sich nicht anders als die Bilder eines Gegenstandes von verschwindender Tiefenausdehnung. Das Tiefenunterscheidungsvermögen weist diesem Gegenstand eine bestimmte Entfernung innerhalb der anderen Gegenstände des Sehfeldes zu. Ein Dingpunkt G_1 wird in den beiden Gesichtsfeldern durch die Bildpunkte g_1 und $\overline{g}_1$ dargestellt (Abb. 347).

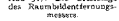


Abb. 347. Die Grundlage des Raumbildentfernungsmessers.

g_1 und $\overline{g}_1$ die beiden Bildpunkte eines Dingpunkts G_1, g_2 und $\overline{g}_2$ die eines Dingpunkts G_2. Die Marken m_1 und $\overline{m}_1$ stellen einen Gegenstand M_1, die Marken m_2 und $\overline{m}_2$ einen Gegenstand M_2 vor. Der den Marken m_∞ und $\overline{m}_\infty$ entsprechende Gegenstand ist unendlich fern angenommen.

Er wird näher oder weiter erscheinen wie ein durch die Marke m_1 und $\overline{m}_1$ dargestellter Dingpunkt M_1, wenn die (in der Ebene durch die beiden Pupillenmitten und die Punkte g_1 und $\overline{g}_1$ gemessene) Entfernung $g_1\overline{g}_1$ = kleiner oder größer als $m_1\overline{m}_1$; oder wenn g_1m_1 kleiner oder größer als $\overline{g}_1\overline{m}_1$ ist.

Sind die beiden Zielfernrohre von Abb. 339 auf das Ziel gerichtet, so ist $g_1m_1 = \overline{g}_1\overline{m}_1 = 0$; dann ist der Winkel der Ziellinien w durch Gleichung (1) gegeben. Der Winkel der Ziellinien bleibt aber derselbe, wenn, ohne daß die beiden Größen verschwinden, ihre Gleichheit erhalten bleibt, also

$$g_1m_1 = \overline{g}_1\overline{m}_1 . \tag{3}$$

[1]) C. Zeiss, D. R. P. 205128 v. J. 1908.

Die obige Betrachtung lehrt, daß diese Bedingung bei räumlichem Sehen bedeutet, daß G_1 und M_1 gleich weit entfernt erscheinen. Die Einstellung oder Messung des Zieles wird also beim Raumbildentfernungsmesser dadurch vollzogen, daß das Ziel in scheinbar gleiche Entfernung mit der Meßmarke gebracht wird, ohne mit ihr zusammenfallen zu müssen.

Wenn wir die in Ziff. 289 gemachte Voraussetzung aufrechterhalten, daß die beiden zum Doppelfernrohr vereinigten Zielfernrohre ursprünglich parallelgerichtet sind, so werden ihre Zielmarken m_1 und $\overline{m}_{\infty}$ einen im Unendlichen liegenden Gegenstandspunkt darstellen; die Entfernung E des Dingpunktes G_1 wird nun dadurch gemessen, daß durch Schwenken der einen Visierlinie (etwa durch Verschieben der rechten Zielmarke aus der Lage $\overline{m}_{\infty}$ in die Lage $\overline{m}_1$) die Beziehung (3) hergestellt wird. Diese Verschiebung mißt den Winkel w (sie ist gleich $\operatorname{tg} w$ oder w multipliziert mit der Brennweite des Objektives). Da die Entfernung wieder aus Gleichung (1) folgt, ergeben sich die Entfernungsfehler wie oben nach Gleichung (2) durch Fehler dw, die entweder von der Ungenauigkeit herrühren, mit der die Beziehung (3) infolge der begrenzten Tiefenunterscheidung der Augen hergestellt wird oder von Gerätefehlern, die man, wie oben gesagt, fast immer als die Abweichung von der Parallelität der Visierlinien bei der Markenlage m_1 und $\overline{m}_{\infty}$ auffassen kann. In die Gleichung (2) ist hier also für dw entweder die Grenze der Tiefenunterscheidung oder der Gerätefehler einzusetzen. Nun ist aber das Tiefenunterscheidungsvermögen, wie die Erfahrung durch den neuerdings sehr häufigen Gebrauch der Raumbildentfernungsmesser gezeigt hat, der Fähigkeit, die ungebrochene Fortsetzung einer Geraden, die Koinzidenz, zu erkennen, gleich; sie erreicht unter günstigen Verhältnissen ebenfalls wenige Sekunden. Gewöhnlich wird hier ebenfalls 10″ als Grenze angesetzt. Die Gerätefehler rühren, wie unten gezeigt wird, von Teilen des Entfernungsmessers her, die bei monokularen und Raumbildgeräten die gleichen sind; sie sind von der Art der Messung und den hierzu benötigten Teilen bei zweckmäßigem Aufbau unabhängig. Deshalb ist die Tabelle in Ziff. 298 für beide Geräte in gleicher Weise zu verwenden. (Siehe auch Ziff. 61.)

Die Herstellung der scheinbar gleichen Entfernung von Ziel und Marke, der Beziehung (3), kann statt durch Verschieben der Marke auch durch Verschieben eines Zielbildes mit einem der früher genannten optischen Mikrometer geschehen, und dieser Weg wird wegen des dabei zu erreichenden längeren Meßweges, also der geringeren Empfindlichkeit der mechanischen Übertragung auf die Entfernungsteilung jetzt fast immer vorgezogen. Da der Eindruck bei langsamer Verschiebung des Bildes infolge der geringen Empfindlichkeit des Raumsinnes für die absolute Größe des Winkels w nicht sehr von dem beim Verschieben der Marke entstehenden verschieden ist, so ist für beide Bauarten der Name des Raumbildentfernungsmessers „mit wandernder Marke“ üblich geworden.

293. Raumbildentfernungsmesser mit fester Skala. Man kann den Raumbildentfernungsmesser auch ohne Markenverschiebung ausführen, wenn man statt eines mehrere Markenpaare $m_1\overline{m}_1$; $m_2\overline{m}_2$ usw. anbringt (Abb. 347), die Gegenstände verschiedener Entfernung M_1; M_2 usw. vortäuschen. Zunächst erscheint eine sehr große Zahl solcher Meßmarken notwendig; sie vermindert sich aber, wenn ihre Lage so gewählt wird, daß die Gegenstände m_1, m_2 auf einer geraden in die Tiefe führenden Linie erscheinen; dies erleichtert die Schätzung der Zwischenwerte. Man wählt gewöhnlich mehrere Gerade im Gesichtsfeld, die im Zickzack verlaufen und am besten einer schrägen Ebene des Raumes angehören. Abb. 348 zeigt ein solches Markenbild. Diese Form des Raumbild-

entfernungsmessers wurde von H. de Grousilliers[1]) angegeben und ist heute als Raumbildentfernungsmesser „mit fester Skala" bekannt; Abbe[1]) fügte die „Wandermarke" in den beiden oben beschriebenen Ausführungen hinzu. Die Genauigkeit des Messens ist bei der Wandermarke größer sowohl wegen der feineren Unterteilung als auch weil die gemessene Entfernung dem Messer un-

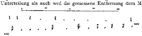


Abb. 348. Das Gesichtsfeld eines Raumbild-Entfernungsmessers mit fester Skala. Die Ziffern an den Marken bedeuten in den untern beiden Zickzacklinien Hunderter, in den obern Tausender

bekannt bleiben und er allein auf die Einstellung der Entfernungsgleichheit beschränkt werden kann. Auch die Wandermarke wird aber nach v. Hofe[2]) besser so ausgeführt, daß neben der eigentlich zum Messen bestimmten Marke mehrere Nebenmarken in scheinbar anderer Entfernung erscheinen, die zu jener symmetrisch liegen und dadurch das räumliche Sehen anregen. Ein Beispiel zeigt Abb. 349, wo die Meßmarke ein in der Luft schwebendes Kreuz darstellt. Die Wandermarke wird auch mit mehreren in gleicher Entfernung erscheinenden Meßmarken ausgeführt.



Abb. 349. Die „mehrfache" wandernde Marke. Bei Betrachtung der Abbildung mit beiden Augen erscheint über dem Hause ein räumliches Kreuz. Sie zeigt auch den am Schlusse von Ziff. 349 erwähnten Höhenfehler.

294. Die Verwendung des Raumbildentfernungsmessers. Stets muß darauf geachtet werden, daß die Meßmarke das Ziel nicht verdeckt; die Tatsache der Verdeckung stört als Verstandesmoment den räumlichen Eindruck, so daß Ungeübte nicht imstande sind, eine Marke räumlich weiter zu sehen als einen von ihr verdeckten Gegenstand; es wird dann meist Marke oder Gegenstand doppelt gesehen.

Da diese Regel im Gelände schwer einzuhalten ist, so eignen sich Raumbildgeräte für Landgebrauch weniger als für See- und Luftziele, wo die Umgebung des Zieles leer ist; daß sie außerdem hell ist und die schwarzen Marken besser

[1]) C. Zeiss, D. R. P. 8257 v. J. 1893. Der Vorläufer des Raumbildentfernungsmessers „mit fester Skala" war die Rollettsche Leiter: Eine Glastafel mit den Stereoskopbildern einer sich in die Tiefe erstreckenden mit Marken besetzten Geraden. Durch dieses Stereoskopbild konnte die Gegend betrachtet und die Entfernung eines Zieles mit der scheinbaren Entfernung einer Marke verglichen werden. E. Mach fügte u. a. noch den Vorschlag hinzu, die Gegend durch ein Telestereoskop zu betrachten, womit ein stereoskopischer Entfernungsmesser ohne Vergrößerung im Grundsatz gegeben war. Vgl. M. v. Rohr, Die binokularen Instrumente, 2. Aufl., S. 138. Berlin 1920.

[2]) C. Zeiss, D. R. P. 201473 v. J. 1907.

hervortreten läßt, ist besonders günstig. Beim Gebrauch auf beweglicher Unterlage (Schiffen) und gegen Ziele, die ihre Richtung rasch ändern (Flugzeuge), ist es andererseits ein besonderer Vorteil der Raumbildgeräte, daß sie kein so genaues Richtungnehmen erfordern wie die Geräte, bei denen das Ziel auf eine Trennungslinie zu richten ist; bei den Raumbildgeräten genügt es, wenn die Meßmarke keinen größeren scheinbaren Abstand als einige Minuten vom Ziel besitzt, geringe gegenseitige Bewegungen beider erschweren das Messen zum mindesten nicht. Man erzielt deshalb bei ihnen eine fast stetige Messung, während der Richtvorgang bei den anderen Geräten das Messen öfter unterbricht. Außerdem gestatten Raumbildgeräte auch die Entfernung sehr unregelmäßig oder unscharf begrenzter Gegenstände, wie z. B. Wolken (Sprengwolken) zu messen; natürlich ist die Genauigkeit entsprechend der Unschärfe herabgesetzt; gegenüber der Schnittbildmessung scheint sie aber dadurch gesteigert zu sein, daß eine größere Anzahl von Punkten des Zieles zu der Messung beiträgt. Die Raumbildgeräte mit fester Marke eignen sich besonders für rascheste Messungen und freihändigen Gebrauch.

Auch der Raumbildentfernungsmesser kann, ähnlich wie der Schnitt- oder Kehrbildentfernungsmesser, unter einem „Höhenfehler" leiden, der darin besteht, daß die beiden Zielbilder relativ zu ihren Meßmarken verschieden hoch liegen; er macht nur bei höheren Beträgen das Messen unmöglich, darf aber nicht die Beträge erreichen, die man nach Ziff. 271 für den Höhenfehler der beiden Bilder eines Doppelfernrohrs im allgemeinen zulassen kann.

295. Raumbildentfernungsmesser nach Pulfrich-König. Eine Abart des Raumbildentfernungsmessers wurde von Pulfrich[1]) angegeben. Bei ihr ist die Wandermarke durch ein zweites Raumbild des Zieles ersetzt, das im allgemeinen in anderer Entfernung erscheint. Der Meßvorgang besteht in der Herbeiführung scheinbar gleicher Entfernung beider Zielbilder. Jedes Auge erhält hiernach zwei Bilder. Eine für beliebige Ziele brauchbare Form erhielt dieses Meßprinzip durch Alb. König[2]) dadurch, daß er die dem einzelnen Auge dargebotenen Bilder nach Art des Schnittbildentfernungsmessers trennte. Sieht so z. B. das linke Auge in einen Schnittbildentfernungsmesser, dessen unteres Bild vom linken, das obere vom rechten Objektiv herrührt, und seien die beiden oberen Bildhälften von ein und demselben Objektiv geliefert, so würde das obere Zielbild eine feste Vergleichsmarke für das untere darstellen. Sein linkes und rechtes Teilbild entspricht vollkommen den Marken m_1 und $\overline{m}_{100}$ in Abb. 347. Ist aber die obere Hälfte des linken Bildes vom rechten Objektiv und die obere Hälfte des rechten Bildes vom linken Objektiv geliefert, so wird, wenn das untere Raumbild des Zieles sich scheinbar nähert, das obere sich entfernen. Die Einstellgenauigkeit wird auf diese Weise verdoppelt. Das untere Raumbild ist ein orthoskopisches, das obere ein pseudoskopisches. Sind bei dieser Konstruktion die beiden Halbbilder aufrecht, so daß also jedem Auge das Gesichtsfeld eines Schnittbildentfernungsmessers dargeboten wird, so kann das Gesichtsfeld des einen Auges ohne besondere Objektive aus den „verlorenen" Strahlen des anderen Gesichtsfeldes gewonnen werden [Eppenstein[3]), Taylor[3])].

296. Der mechanische und optische Aufbau eines Entfernungsmessers und die Fehlerquellen. Die beiden Spiegel S_1 und S_2 müssen miteinander einen Winkel von 90° bilden. Dieser ist bei größerer Basis nicht bis auf Sekunden unveränderlich zu erhalten[4]). Jede Abweichung ergibt aber im

[1]) C. Zeiss, D. R. P. 162471 v. J. 1903. [2]) C. Zeiss, D. R. P. 255955 v. J. 1911.
[3]) Engl. Pat. 6082 v. J. 1910.
[4]) Eine interessante Form eines gemeinsamen Trägers, der die Aufgabe verhältnismäßig gut löst, zeigt das Engl. Pat. 13507/1893 von Barr & Stroud.

Geräte Fehler vom doppelten Betrage, deshalb wird statt der Spiegel das GOULIERsche Winkelspiegelprisma, heute meist Penta- oder Fünfseitprisma genannt (Ziff. 259, Abb. 282), an dieser Stelle benutzt, das eine von Drehungen um die Schnittkante beider Spiegelflächen unabhängige Ablenkung vom Doppelten des Spiegelwinkels erzeugt[1]). Kleine Drehungen eines solchen Winkelspiegels um zwei zu der Schnittkante senkrechte Achsen erzeugen nur Ablenkungsfehler zweiter Ordnung: Eine Drehung um die Halbierungslinie des Spiegelwinkels ergibt eine Drehung des Bildes um den Mittelpunkt, eine Drehung um die dritte Senkrechte eine Höhenverschiebung des Bildes. Die erstere ist, wenn beide Bilder entgegengesetzt gedreht werden, um so schädlicher, je mehr der Zielpunkt außer dem Hauptschnitte des Prismas liegt (der Ebene, die zu den beiden Spiegelflächen senkrecht steht); die zweite ergibt, wenn beide Bilder verschieden hoch verschoben werden, wie schon oben beim Schnittbildentfernungsmesser erwähnt, bei schrägen Ziellinien einen Meßfehler, indem verschiedene, aber gleich hoch erscheinende Punkte dieser Linien als identisch aufgefaßt werden können. Dadurch, daß die beiden Spiegel sich an einem vollen Glaskörper befinden, werden zwar gröbere Winkeländerungen ausgeschlossen, aber infolge der schlechten Wärmeleitung des Glases[2]) bleibt eine Empfindlichkeit der Ablenkung gegen Erwärmung, besonders einseitige, zurück. Um diese aufzuheben, ist man zum Winkelspiegel in besonderen Ausführungsformen zurückgekehrt, die die Schwierigkeiten zu vermeiden suchen, die der starren Befestigung von Glasplatten an metallischen Haltern entgegenstehen und von der verschiedenen Ausdehnung beider Körper bei Temperaturerhöhung ebenso wie der verschiedenen Temperaturleitfähigkeit derselben herrühren[3]). Nehmen wir nun an, daß die beiden Winkelspiegel an den Enden der Basis konstant und um 90° ablenken (das letztere nur, um die Vorstellung festzulegen), so besteht die Forderung, daß die beiden gedachten Zielfernrohre bei der Stellung der Entfernungsteilung auf ∞ einander parallel gerichtet seien, beim Raumbildentfernungsmesser dann, daß die beiden Strahlen, die von jeder der beiden Meßmarken zum hinteren Hauptpunkt des zugehörigen Objektives gehen, einander parallel sind. Beim Schnittbildentfernungsmesser lautet diese Forderung so, daß die Strahlen von jedem der beiden Hauptpunkte nach dem Schnittpunkt der beiden Spiegel, durch die jedes Scheideprisma schematisch ersetzt werden kann, in eine Gerade fallen. Im folgenden sei in Abb. 350 ein Raumbild-Gerät angenommen; die Betrachtung der Gerätefehler ist für beide Gerätearten in gleicher Weise anwendbar, wenn wir der Übersicht halber die empfindlichen optischen Teile in beiden Fällen als die zwei Objektive und das „Mittelstück" bezeichnen. Diese drei Teile können, solange ihre gegenseitige Lage sich nicht ändert, beliebige kleine parallele Verschiebungen und kleine Drehungen in der Meßebene ohne Wirkung auf das Bild ausführen (die anderen kleinen Drehungen ergeben nur Höhenfehler und Bildverdrehung); aber eine Querverschiebung eines der drei Teile in der Meßebene erzeugt eine Unparallelität der Zielfernrohre. Wenn z. B. das Mittelstück, das in der Abb. 350 aus den Dachprismen D und den Markenplatten M, die die Meßmarken tragen, besteht, um a in der Meßebene quer verschoben wird, so entsteht ein Winkelfehler von $2a:F$, wenn F die Brennweite der Objektive ist,

[1]) Die gleiche Eigenschaft besitzen alle Winkelspiegel, die um 90° ablenkend ein Bild ergeben, das nicht seitenvertauscht ist, z. B. das $^3/_4$-Porro-Prisma, bestehend aus ABC oder BCD in Abb. 297.

[2]) STRAUBEL (D. R. P. CARL ZEISS 215393) hat deshalb den Ersatz des Glases durch kristallischen Quarz vorgeschlagen, der 10mal bessere Leitfähigkeit hat.

[3]) Engl. Pat. TAYLOR 20315 v. J. 1908, 7392 v. J. 1910; D. R. P. C. P. GOERZ 243389 v. J. 1910; D. R. P. CARL ZEISS 224239 v. J. 1909, 291134 v. J. 1912, 350176 v. J. 1918.

also bei $a = 0{,}001$ mm und 200 mm Brennweite einen Fehler von 2″. Man wird daher die Objektive O_1 und das Mittelstück auf einem Träger befestigen, der möglichst unverbieglich ist, dem „Innenrohr" J. Das Außenrohr A ist in manchen Fällen durch wechselnde Lagerung und Belastung, mehr und häufiger noch durch einseitige Erwärmung, wechselnden Verbiegungen ausgesetzt; diese dürfen sich nicht auf das Innenrohr übertragen; dies ist deshalb auf der einen Seite durch ein Kardangehänge K mit dem Außenrohr verbunden, auf der anderen Seite kann es mit einem kugeligen Wulst W im Außenrohr gleiten. Sein Material wird spannungsfrei gewählt. Die Befestigung der empfindlichen Teile am Innenrohr muß starr und doch spannungsfrei erfolgen. Das Innenrohr kann bei längerer Basis viel kürzer als das Außenrohr gewählt werden. Das Außenrohr muß weit genug sein, um bei einseitiger Erwärmung die Temperaturverschiedenheit des Innenrohrs in der empfindlichen Richtung so gering zu halten, daß die Durchbiegung verschwindend bleibt. Dies kann auch dadurch gefördert werden, daß das Material in der richtigen Weise verteilt wird, um in der empfindlichen

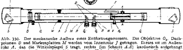


Abb. 350. Der mechanische Aufbau eines Entfernungsmessers. Die Objektive O_1, Dachprismen D und Markenplatten M werden vom Innenrohr J getragen. Dieses ist im Außenrohr A, das die Winkelspiegel S trägt, rechts (im Schnitt $A\,A$) kardanisch aufgehängt (der kardanische Zwischenring K kann mit der Höhenberichtigungsschraube H auf und abbewegt werden). Links paßt das Innenrohr mit dem Kugelwulst W im Außenrohr. Der Meßknopf K_n dreht einen Trieb, der eine Zahnstange und damit den Ablenkungskeil V und die Entfernungsteilung E verschiebt. V drehbarer Keil zur Berichtigung der Entfernungsangabe.

Richtung gute Wärmeleitung zu erzielen. Wird bald in der Horizontalebene, bald nach oben gemessen, so muß auch die Durchbiegung durch die Schwere keine Änderung der gegenseitigen Lage von Objektiven und Mittelstück hervorrufen; der Durchhang der Enden und der Mitte muß daher gleich sein.

Die Winkelspiegel S an beiden Enden pflegt man bei kleinen Entfernungsmessern an dem Außenrohr selbst zu befestigen; bei größeren an einem besonderen zwischen Innen- und Außenrohr gelagerten Träger, der wiederum von Verbiegungen des Außenrohrs nicht beeinflußt wird; man vermeidet so die obengenannten Fehler zweiter Ordnung der Winkelspiegel.

Zur Messung dient in dem gezeichneten Beispiel der durch den Meßknopf K_n betätigte Verschiebungskeil V. Seine Verschiebung ist mit der einer Entfernungsteilung E verbunden, die nach den reziproken Werten von E fortschreitet, da die Verschiebung dem Winkel φ proportional ist. Bei dem gezeichneten Raumbildentfernungsmesser werden die Bilder durch die Dachprismen D aufgerichtet; die Brennebenen zusammen mit den Meßmarken werden durch die Okulare O_2 betrachtet, die Anpassung an den Augenabstand geschieht durch rhombische Prismen der in Ziff. 272 erörterten Art und entsprechend Abb. 319. Die Dachprismen D und die Marken sind starr genug miteinander verbunden, um, wie oben geschehen, als ein Ganzes behandelt zu werden.

Zur Beseitigung des Höhenfehlers können sehr verschiedene Einrichtungen dienen. In der Abb. 350 wird durch Betätigung der Höhenberichtigungsschraube *H* das Innenrohr um eine zur Visierlinie parallele Achse gedreht, wodurch eines der beiden Doppelfernrohre nach oben, das andere nach unten gerichtet wird.

Bei den großen Anforderungen an die Winkelgenauigkeit tritt bei langen Basen noch die Refraktion im Innern der Rohre, z. B. auf dem Wege zwischen Objektiv und Winkelspiegeln, als störend auf: Bei der Erwärmung von der Zieloder der umgekehrten Seite findet eine Ablenkung der Strahlen infolge der Verschiedenheit der Luftdichte statt, die bei den vorkommenden Sonnenbestrahlungen mehrere Sekunden Fehler erzeugen kann. Barr & Stroud[1] haben hiergegen die Einfügung luftleerer Raume vorgeschlagen; auch ein oder mehrere Mantel aus gutleitendem Material, die um die Strahlenwege gelegt werden, vermindern den Fehler hinreichend.



Abb 331. Entfernungsmesser für Infanterie im Gebrauch.

Die Betrachtungen lassen erkennen, daß die Anforderungen an die Unveränderlichkeit der optischen Einstandsentfernungsmesser an der Grenze des Erfüllbaren liegen, um so mehr, als die Beanspruchungen durch den militärischen Gebrauch im Gegensatz zu sonstigen Meßgeräten besonders scharf sind: Kleinere Entfernungsmesser sollen den Fall auf den Erdboden, den Transport zu Pferde oder am Geschütz, größere die Erschütterungen durch benachbarte Geschütze ohne Schaden aushalten und alle durch allgemeine oder einseitige Wärmewirkungen unbeeinflußt bleiben. Deshalb wird stets eine Berichtigungsvorrichtung der Entfernungsangabe vorgesehen.



Abb. 332. Entfernungsmesser mit 10 m Basis auf Gestell für Küstenverteidigung. Der Kran dient zum Ein- und Auslegen. Am Gestell Handräder für grobe und feine Seiten- und Höhenrichtung

gesehen. Da die zu erwartenden Fehler, wie schon erwähnt, fast immer nur die eine Störung hervorrufen, daß gegenüber der Entfernungsteilung der tatsächliche Winkel der beiden Visierlinien um einen konstanten Wert gefälscht ist, so genügt es, bei unveränderter Ablesung der Entfernungsteilung, den Winkel der Ziellinie veränderlich zu machen, um den Fehler für alle Entfernungen zu beseitigen. Dies kann z. B. durch Einschaltung eines drehbaren Glaskeils *B* in Abb. 350 vor eines der beiden Fernrohre geschehen; seine Ablenkung ist so gering, daß ihre Höhenkomponente vernachlässigt werden kann; ihre Seitenkomponente nimmt bei der Drehung veränderliche Werte an. Wandert die Entfernungsteilung wie beim Verschiebungskeil dem Winkel *w* proportional, so kann auch die Teilung oder ihr Ableseziger verschiebbar gemacht werden, ohne die Visierlinie zu beeinflussen. Ist ein Entfernungsmesser mit einem dieser Hilfsmittel gegen irgendein Ziel bekannter Entfernung „berichtigt", so mißt er alle Entfernungen richtig, da Fehler der Mikrometereinrichtung selbst meist nicht zu erwarten sind.

[1] Engl. Pat. 2115/1915; dasselbe für Prüfvorrichtungen für Entfernungsmesser im Engl. Pat. 15540/1914.

Die äußere Form nach den obigen Grundsätzen gebauter Entfernungsmesser zeigen Abb. 351 und 352. Zu der zweiten sei bemerkt, daß eine Prüf-Einrichtung zur „absoluten Justierung" (s. u.) eingebaut ist.

Bauarten ohne Innenrohrfehler. Die oben erörterten Fehler der gegenseitigen Verlagerung von Objektiven und Mittelstück haben Veranlassung zu verschiedenen hiervon unabhängigen Konstruktionen gegeben[1]; doch konnten sich diese wegen der optischen Nachteile nicht einführen, zumal ja der Fehler der veränderlichen Ablenkung der Winkelspiegel hierdurch nicht beseitigt wurde; besser ist deshalb der Einbau der unten beschriebenen Prufvorrichtungen.

297. Die Prüfvorrichtungen der Entfernungsmesser. Da beim Gebrauch der Entfernungsmesser selten Ziele bekannter Entfernung vorhanden sind (in manchen Fällen sind die Gestirne als Ziele zu verwenden), benutzt man künstliche Ziele als Ersatzmittel. Das älteste ist die Berichtigungslatte, ein zur Basis paralleler Träger mit zwei dazu senkrechten Strichen im Abstande der Basis. Ihr Aussehen in einem Kehrbildentfernungsmesser zeigt Abb. 353. Bei beliebigem Abstande vom Entfernungsmesser werden diese Striche ein unendlich entferntes Ziel ersetzen können, wenn sie dem Entfernungsmesser nicht so nahe sind, daß die Abweichung ihres Bildes aus der Brennebene stort. Schnitt- und Kehrbildentfernungsmesser sind hiergegen wenig empfindlich, da nur der Nachteil auftritt, daß die Trennungslinie außerhalb der Bildebenen liegt, also eine geringe Vermischung der Bilder stattfindet; es genügt hier bei 10facher Vergrößerung ein Abstand von etwa 50 m; bei Raumbildgeräten ist die Einschaltung von Linsen notwendig, in deren Brennebene die Marken der Berichtigungslatte liegen, da sonst die Parallaxe zwischen Marke und Bild bei seitlicher Augenlage die Messung in der in Ziff. 275 beschriebenen Weise fälscht; seitliche Lage der Augenpupille tritt aber schon bei kleinen Fehlern in der Anpassung der Okulare an den wahren Augenabstand ein. Auch durch Ausschalten von Glasplatten hinter dem Objektiv oder durch besondere in der Ebene des Lattenbildes gelegene Hilfsmarken läßt sich die Parallaxe beseitigen.

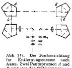


Abb. 354. Die Prüfeinrichtung für Entfernungsmesser nach Abbe. Zwei Pentaprismen A und B sind vor den Entfernungsmesser gesetzt und vermitteln die Abbildung der Marke m in m_1. Sind die Strahlen L und R parallel, so entsprechen die Marken m und $\underline{m_1}$ den Marken m_2 und $\underline{m_{1\infty}}$ der Abb. 347.

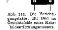


Abb. 353. Die Berichtigungslatte: Ihr Bild im Gesichtsfelde eines Kehrbildentfernungsmessers.

Da auch die Berichtigungslatte selten in kurzen Zeiträumen während der Messung zu verwenden, an Bord von Schiffen nicht leicht anzubringen ist, ist in die meisten größeren Geräte eine Prüfvorrichtung eingebaut. Eine solche wurde

[1] Der „Innenrohrfehler" läßt sich bei all den Entfernungsmessern leicht vermeiden, die nicht zwei getrennte Bilder, sondern im ganzen Gesichtsfeld ein Mischbild darbieten; denn hier liegt es nahe, nur ein Objektiv zu verwenden und seine Öffnung teils dem einen, teils dem anderen Ende der Basis zuzuordnen. Hiervon finden sich Beispiele aus der älteren Zeit bei de Marre (s. oben). Alle diese Bauarten von Entfernungsmessern ergeben bei Umkehrung der Strahlenrichtung Prüfvorrichtungen nach Art der unten beschriebenen. Von Entfernungsmessern mit getrennten Bildern, also monokularen mit scharfer Trennungslinie oder binokularen mit Raumbildmessung, die unempfindlich gegen Innenrohrfehler sind, seien genannt: Barr u. Stroud, Engl. Pat. 3173/1901 u. Engl. Pat. 18272/1902; Carl Zeiss, D. R. P. 216193 v. J. 1907 u. Carl Zeiss, D. R. P. 205127 v. J. 1908 u. a. m.

von ABBE[1]) sofort bei der Übernahme des DE GROUSILLIERSschen Planes für den Raumbildentfernungsmesser entworfen; sie besteht aus zwei vor den Entfernungsmesser gesetzten Fünfseitprismen (Abb. 354). Wird eines der Okulare eines Raumbildentfernungsmessers von hinten beleuchtet, so werden die Meßmarken der einen Fernrohrhälfte durch die Objektive, die Winkelspiegel und diese Berichtigungsprismen auf die Meßmarken des anderen abgebildet. Lenken die letzteren zusammen um 180° ab, so müssen zwei Meßmarken aufeinanderfallen, die der Entfernung ∞ entsprechen (m_1 und m_1 ∞ in Abb. 347), oder das linke Teilbild der Wandermarke muß bei der Stellung ∞ der Entfernungsteilung in das rechte abgebildet werden. Ist dies nicht der Fall, so wird dies Zusammenfallen durch eine Vorrichtung nach Art des Keiles *B* der Abb. 350 herbeigeführt. Die Prüfeinrichtung nach ALB. KÖNIG[2]) besteht ebenfalls aus zwei Fünfseitprismen, jedoch in gleicher Stellung. Sie haben die halbe Höhe der Eintrittspupillen des Entfernungsmessers und sind um den gleichen Betrag gegeneinander versetzt (Abb. 355, obere Hälfte). Das von einem Gegenstand herkommende Strahlenbüschel wird so in zwei Teile gespalten und jeder Teil einer Eintrittspupille des Entfernungsmessers zugeführt; sind die Ablenkungen beider Prismen gleich, so wird das beliebig entfernte Ziel wie ein unendliches erscheinen. Es wird besser durch ein künstliches, eine Marke in der Brennebene eines Fernrohrobjektives (Kollimator) ersetzt; um die Baulänge des Entfernungsmessers nicht zu vergrößern, wird der Kollimator dem Entfernungsmesser parallel gelegt und seine Achse durch zweimalige Spiegelung um 180° abgelenkt. Eine andere Anordnung (Abb. 357, untere Hälfte) unterscheidet sich von der vorigen nur durch die andere Lage der beiden Fünfseitprismen und des gemeinsamen Zieles oder der Kollimatorachse.

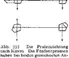


Abb. 355. Die Prüfeinrichtung nach KÖNIG. Die Fünfseitprismen haben bei beiden gezeichneten Anordnungen die halbe Höhe der E P des Entfernungsmessers. Bei der oben gezeichneten sind sie auch um diesen Betrag gegeneinander in der Höhe versetzt. Oben ist ein (zweimalgebrochener) Kollimator gezeichnet, der das Ziel ersetzt.

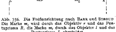


Abb. 356. Die Prüfeinrichtung nach BARR und STROUD. Die Marke m_r wird durch das Objektiv *r* und das Pentaprisma *R*, die Marke m_l durch das Objektiv *l* und das Pentaprisma *L* abgebildet.

Eine andere Prüfvorrichtung wurde von BARR & STROUD[3]) angegeben (Abb. 356) und beruht auf der Eigenschaft des schon von BRANDER 1772 angegebenen „biaxialen" Fernrohrs. Tragen die Objektive *l* und *r* selbst Marken, so wird (wenn man ihnen durch kleine, nicht gezeichnete, nur einen Teil des Objektivs bedeckende Beleuchtungsstreifen Licht zuführt) jede der Marken von dem entfernten Objektiv, also m_l von *l*, m_r von *r*, in zwei unendlich entfernte Punkte abgebildet, die um 180° (oder nahezu diesen Winkel) auseinanderliegen und deren Winkel durch Querverschiebung der Objektive nicht verändert wird.

[1]) CARL ZEISS D. R. P. 73568 v. J. 1893.
[2]) CARL ZEISS D. R. P. 165510 v. J. 1904.
[3]) Engl. Pat. BARR & STROUD 28728/1906.

Durch die Winkelspiegel L und R werden die Punkte in einen einzigen abgebildet; d. h. sie ergeben parallele Bündel, die in den Entfernungsmesser eintreten.

Die angegebenen Arten der Prüfeinrichtungen setzen aber alle die Unveränderlichkeit der Ablenkungen der verwendeten Winkelspiegel voraus[1]). Ändern sich diese um ε_1 und ε_2, so ändert sich die Parallelität der austretenden Bündel bei der Abbeschen und Barr- & Stroudschen Anordnung um $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, bei beiden Königschen Anordnungen um $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$[2]).

Von der Ablenkungsänderung der zur Prüfung benutzten Winkelspiegel befreit die Berichtigung mit doppelter Messung nach Eppenstein[3]), die von der Firma Carl Zeiß als „absolute Berichtigung" eingeführt worden ist. Man kann

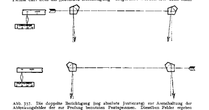


Abb. 357. Die doppelte Berichtigung (sog. absolute Justierung) zur Ausschaltung der Ablenkungsfehler der zur Prüfung benutzten Pentaprismen. Dieselben Fehler ergeben bei der oben gezeichneten Stellung Konvergenz, bei der unten gezeichneten Divergenz von gleichem Betrage. Die mittlere Einstellung des verschieblichen Ablesezeigers (links) entspricht ∞.

den beiden Winkelspiegeln der Abb. 355 zwei verschiedene Lagen geben, bei denen die Abweichung von der Parallelität der in den Entfernungsmesser eintretenden Bündel einmal $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, das andere Mal $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ist; da sich die Ablenkung der Winkelspiegel in kurzen Zeiträumen nicht ändert, so ist das Mittel der beiden Einstellungen von den Fehlern der Winkelspiegel frei. Abb. 357 zeigt

[1]) Wir wollen die Ablenkung der Winkelspiegel, um die Vorstellung festzulegen, durch den Winkel berechnen, um den die Lichtrichtung des eintretenden Strahles in die Lichtrichtung des austretenden gedreht werden muß, wobei der Uhrzeigersinn als positiv gelte.

[2]) Immerhin benutzt man für die Prüfeinrichtungen kleinere Winkelspiegelprismen, die etwas weniger temperaturempfindlich als große sind, und man kann diese auch aus ziemlich unempfindlichem Werkstoff herstellen, z. B. Quarz (s. oben) oder Metall mit polierter Oberfläche, was bei der Berichtigung der Entfernungsmesser wegen der Möglichkeit, künstlich zu beleuchten, unschädlich ist. Setzt man auch die Unveränderlichkeit der Winkelspiegel des Entfernungsmessers voraus, so kann man einfachere Prüfvorrichtungen für die Unveränderlichkeit des Innenrohrs allein einbauen. H. Wild schlug z. B. vor, Marken auf den Objektiven eines Schnittbildentfernungsmessers anzubringen und durch das Scheideprisma ihr Zusammenfallen zu beobachten (D. R. P. Carl Zeiss 216420 v. J. 1907, wo auch andere Prüfarten des Innenrohrs allein beschrieben sind). Die Prüfung des Innenrohrs allein hat sich aber bisher nicht bewährt, da keine genügende Unempfindlichkeit der Winkelspiegel des Entfernungsmessers zu erreichen war.

[3]) D. R. P. Carl Zeiss 221181 v. J. 1908.

eine solche Anordnung: Zuerst treten die Strahlen des Fernziels oder Kollimators von links in zwei (in der Höhe parallel verschobene) Fünfseitprismen; darunter ist die zweite Lage gezeichnet, in der die Prismen um 90° gedreht sind und Strahlen von rechts erhalten. Es ist angenommen, daß das linke Prisma eine geringere Ablenkung als 90°, das rechte eine größere besitzt, die aber in beiden Lagen dieselben sind. Die austretenden Strahlen konvergieren in der ersten Lage ebensoviel, als sie in der zweiten divergieren. Im Bild ist angenommen, daß die Berichtigung des Entfernungsmessers durch Verschieben des Zeigers der Entfernungsteilung vorgenommen wird; er wird bei der ersten und zweiten Prüfung, nachdem das vom Kollimator dargebotene Ziel im Entfernungsmesser mit der Meßvorrichtung wie ein natürliches eingestellt worden ist, auf den Strich an der Entfernungsteilung gestellt; jedesmal aber seine Stellung an einer Berichtigungsteilung abgelesen; die wahre Berichtigung erhält man, indem man den Zeiger auf das Mittel der beiden Ablesungen stellt.

298. Entfernungsmesser mit Doppelmessung. Die oben beschriebenen Prüfeinrichtungen nach KÖNIG und EPPENSTEIN können so aufgefaßt werden, daß sie durch künstliche Zusätze dem Entfernungsmesser die Basis Null geben,

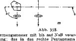


Abb. 358.



Abb. 359.

Entfernungsmesser mit bis auf Null veränderlicher Basis. Die Anordnung m ist die Meßstellung; das in das rechte Pentaprisma eintretende Licht wird in das linke gespiegelt und gelangt in das linke Objektiv. In der „Justierstellung" j ist das rechte Pentaprisma so verschoben, daß es im Grundriß vor dem rechten Objektiv liegt, dieses ist aber in der Höhe verschoben zu denken. Die in das rechte und linke Objektiv eintretenden Strahlen sind nur in der Höhe verschieden, so daß alle Ziele sich wie unendlich entfernte darstellen.

so daß ein beliebig entferntes Ziel sich verhält wie ein unendlich entferntes. Eine andere Prüfmethode ist dann möglich, wenn man die Teile des Entfernungsmessers selbst so einrichtet, daß er mit der Basis Null messen kann, ohne neue Teile, wie Winkelspiegel usw., hinzuzufügen, deren Veränderlichkeit entweder zur Gefahr wird oder wie bei dem zuletzt beschriebenen Verfahren durch eine doppelte Berichtigung ausgeschaltet werden muß. Dann ergibt der Vorgang der Berichtigung und Messung nur die Differenz zweier Winkelmessungen; sie muß richtige Werte ergeben, wenn dieselben Fehlerquellen in beiden Fällen mit demselben Vorzeichen wirken. Diese Forderung wurde zuerst von STÜTZER[1]) erfüllt. Abb. 358, 359 zeigt unter m einen solchen Entfernungsmesser in der ersten (Meß-) Stellung und unter j in der zweiten (Berichtigungs-) Stellung. Die Strahlen sind nur bis zu den Objektiven geführt und die Teile hinter diesen fortgelassen. In der Hauptsache baute STÜTZER die Konstruktion eines zusammenlegbaren Entfernungsmessers hierauf auf. Doch ist der Grundgedanke einer Erweiterung fähig, von der zuerst ein Sonderfall von BARR & STROUD[2]) veröffentlicht wurde.

[1]) D. R. P. CARL ZEISS 250395 v. J. 1911. Derselbe Gedanke wurde später von EPPENSTEIN auf Entfernungsmesser der gewöhnlichen Bauart ausgedehnt, indem ein Winkelspiegel abgenommen und so vor den anderen gesetzt wird, daß die Basis Null entsteht. D. R. P. CARL ZEISS 330753 v. J. 1919.

[2]) Engl. Pat. 26333 v. J. 1912.

Die zweite Stellung derselben ablenkenden Bestandteile des Entfernungsmessers braucht nämlich gar nicht zur Basis Null zu führen, sondern die erste und zweite Stellung brauchen nur zwei verschiedene Basen b_1 und b_2 zu ergeben. In beiden wird dieselbe unbekannte Entfernung E durch die Winkel w_1 und w_2, jedoch jedesmal mit demselben Winkelfehler dw bestimmt. Ohne Kenntnis dieses Fehlers hat man als Differenz der Einstellungen der Meßvorrichtung:

$$w_2 - w_1 = (b_2 - b_1) : E .$$

Die gesuchte Größe $1:E$ ist unabhängig vom Fehler dw und um so genauer bestimmt, je größer die Verschiedenheit zwischen den Basislängen ist. Der Vorschlag von BARR & STROUD bestand darin, in einem Entfernungsmesser von der Konstruktion nach Abb. 350 die Basislänge durch Anschieben der Winkelspiegel an das Innenrohr zu verkürzen. STÜTZER[1]) zeigte nun, daß man b_2 nicht nur zu Null machen, sondern ihm sogar negative Werte, insbesondere den Wert $-b_1$, geben kann, woraus

$$w_1 - w_2 = 2\,b_1 : E$$

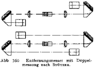


Abb. 360. Entfernungsmesser mit Doppelmessung nach STÜTZER.

folgt. Die Doppelmessung mit der Basis b_1 und der Basis $-b_1$ besitzt im Vergleich mit der Doppelmessung mit der Basis b_1 und der Basis 0 die doppelte Genauigkeit; sie ist gleichwertig einer Doppelmessung mit der Basis $2b_1$ und der Basis 0. Die Ausführungsformen solcher Entfernungsmesser sind allerdings schwieriger zu verwirklichen; ein Beispiel zeigt Abb. 360, die die beiden Stellungen des Entfernungsmessers in einem zur Meßebene senkrechten Schnitte darstellt. In der oberen Hälfte der Abbildung entsenden die Fünfseitprismen ihre Strahlen in die abgewendeten Enden der Basis, an denen sich Tripelspiegel (Glaskörper mit drei aufeinander senkrechten Spiegelflächen) befinden, die gegen jede Verdrehung unempfindlich sind und das Licht um 180° in die Objektive ablenken, in der anderen Hälfte sind die Fünfseitprismen um die doppelte Höhe der Bündelbreite gesenkt und um 90° gedreht, so daß sie nun das Licht in die ihnen benachbarten Tripelspiegel entsenden.

Eine andere Berichtigungsart ist zunächst nur für zwei Entfernungsmesser erdacht worden. Sie rührt von v. HOFE[2]) her. Sei im Gesichtsfelde eines Schnittbildentfernungsmessers ein Strich angebracht, so läßt sich das Gerät in umgekehrter Strahlenrichtung wie eine Prüfvorrichtung vor einen anderen Entfernungsmesser legen. Zeigt die Teilung beider auf ∞ und wird im Gesichtsfeld des zweiten Koinzidenz der Strichbilder herbeigeführt, so sind beide Geräte, wenn sie nicht richtig zeigen, auf entgegengesetzt gleiche Fehler abgestimmt. Mißt man mit ihnen dasselbe Ziel, so ergibt sich dessen wahre Entfernung als der Kehrwert des Mittels der Kehrwerte der beiden Meßergebnisse. (Das Verfahren ist natürlich auf Raumbildgeräte zu übertragen.) Wendet man dieses Berichtigungsverfahren auf die beiden Teilbildgeräte an, die zusammen den Raumbildentfernungsmesser nach PULFRICH-KÖNIG darstellen, so gelangt man zu einem von EPPENSTEIN für solche Geräte angegebenen Berichtigungsverfahren[3]).

[1]) D. R. P. CARL ZEISS 302435 v. J. 1913. Eine zusammenfassende Darstellung seiner Gedanken gab R. STÜTZER in ZS. f. Instrkde. Bd. 34, S. 1, 33. 1914.

[2]) D. R. P. C. P. GOERZ 251041 v. J. 1911.

[3]) D. R. P. CARL ZEISS 350752 v. J. 1917.

Kapitel 3.

Optische Konstanten.

Mit 166 Abbildungen.

A. Die Messung der Brechungszahlen von Gasen, flüssigen und festen Körpern, Kristallen usw. Methoden. Apparate.

Von

HEINRICH KESSLER, Jena.

Einleitung.

1. Allgemeines über die Brechungszahlen und die Dispersion. Als relatives Brechungsverhältnis, Brechungsquotient, Brechungsindex, Brechungszahl oder Brechzahl n eines optischen Mittels bezeichnen wir das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit v_L in Luft zu der Lichtgeschwindigkeit v_M im optischen Mittel:

$$n = \frac{v_L}{v_M}. \tag{1}$$

Es gibt somit die relative Brechungszahl n an, wieviel mal schneller sich das Licht in Luft fortpflanzt denn in dem betreffenden optischen Mittel. Neben dieser derart festgelegten, auf Luft bezogenen sog. „relativen" Brechungszahl n wird oft noch eine „absolute" Brechungszahl N angegeben, bei der an Stelle der Luft das Vakuum als Bezugsstoff verwendet wird. Ist bei einer Beobachtungstemperatur $t°$ C: n_t die relative Brechungszahl des Mittels, $\mu_{t,p}$ die absolute Brechungszahl der Luft bei dieser Temperatur und beim Drucke p mm Hg, so können wir die absolute Brechungszahl $N_{t,p}$ des optischen Mittels berechnen aus der Formel

$$N_{t,p} = n_t \cdot \mu_{t,p} = n_t + n_t(\mu_{t,p} - 1). \tag{2}$$

Dabei ist die absolute Brechzahl der Luft für einen bestimmten Druck p mm Hg und die Temperatur $t°$ C zu berechnen aus der Formel

$$\mu_{t,p} - 1 = \frac{(\mu_{0,760} - 1) \cdot p}{(1 + \alpha \cdot t) \cdot 760}, \tag{3}$$

worin $\alpha = 1/273 = 0{,}00367$ der Ausdehnungskoeffizient der Gase ist. Bei Zimmertemperatur (20° C) und mittlerem Barometerstand (750 bis 760 mm Hg) ist die absolute Brechzahl der Luft für eine mittlere Wellenlänge ($D = 5893$ A.E.):

$$\mu_{t,p}|^D = 1{,}00027.$$

Die absoluten Brechungszahlen sind also rund 1,0003 mal so groß wie die relativen Brechungszahlen. Abgesehen von ganz besonderen Fällen werden im allgemeinen

von optischen Mitteln nur die relativen Brechungszahlen mitgeteilt, weshalb wir uns im folgenden darauf beschränken, nur die relativen, kurzweg Brechungszahlen genannt, zu behandeln.

Haben wir durch Gleichung (1) einerseits die Brechungszahl festgelegt als das Verhältnis zweier Lichtgeschwindigkeiten, so können wir anderseits die Brechungszahl noch durch ein zweites, uns experimentell leichter zugängliches Verhältnis ausdrücken.

Trifft ein Lichtstrahl aus Luft L auf ein optisches Mittel M von der Brechzahl n (Abb. 1), das eine ebene Begrenzungsfläche besitzt, so wird der Lichtstrahl gebrochen. In dem Punkte, wo der Lichtstrahl die ebene Begrenzungsfläche trifft, denken wir uns auf die Fläche eine Senkrechte errichtet, das sog. „Einfallslot". Den Winkel, den der einfallende bzw. gebrochene Strahl mit diesem Einfallslote bildet, nennen wir den Einfalls- bzw. Brechungswinkel. Es gilt dann das bekannte Snelliussche Brechungsgesetz:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen in einer Ebene, der sog. Einfallsebene.

2. Das Verhältnis, gebildet aus dem Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Brechungswinkels, ist für eine und dieselbe Lichtsorte konstant, d. h. unabhängig von der Größe des Einfallswinkels, und zwar ist es gleich der Brechungszahl n:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n. \tag{4}$$



Abb. 1. Snelliussches Brechungsgesetz. 1. Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen in der Einfallsebene. 2. Das Verhältnis $\sin i_1 : \sin i_2$ ist konstant, gleich der Brechzahl n des Mittels.

Eine etwas andere, leicht einprägbare Form nimmt das Brechungsgesetz an, wenn der Strahl aus einem optischen Mittel mit der Brechzahl n_1 in ein optisches Mittel mit der Brechungszahl n_2, die durch eine ebene Trennungsfläche voneinander geschieden sind, übertritt. In diesem Falle gilt:

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2. \tag{5}$$

Dies besagt: Beim Übertritt eines einfarbigen Lichtstrahls von einem optischen Mittel in ein anderes bleibt das Produkt aus Brechungszahl und Sinus des Einfallswinkels erhalten. Das Produkt $n \cdot \sin i$ ist eine Invariante.

Ein Wesentliches dieses Brechungsgesetzes ist, daß es nur für einfarbiges Licht gilt. Mit der Wellenlänge λ ändert sich auch der Wert der Brechungszahl, insofern als mit abnehmender Wellenlänge des Lichtes die Brechbarkeit wächst, d. h. die Brechungszahl größer wird, wodurch die Erscheinung des Spektrums bedingt ist. Diese Eigenschaft der optischen Mittel, Lichtstrahlen verschiedener Wellenlängen verschieden stark zu brechen, bezeichnen wir als Dispersion.

Die Brechungszahlen für die einzelnen Wellenlängen werden als n_λ bezeichnet. Insbesondere werden zur optischen Kennzeichnung der verschiedenen Mittel, z. B. der Glasarten, der Flüssigkeiten, der organischen Verbindungen usf. die Brechungszahlen für die Wasserstofflinien $C = 6562$ A.E., $F = 4861$ A.E., $G' = 4340$ A.E. und die Natriumlinie $D = 5893$ A.E. verwendet. An Stelle der Natriumdoppellinie $D_1 = 5896$ A.E. und $D_2 = 5890$ A.E., die zwar meist nicht aufgespalten wird, die aber oft verbreitert erscheint und die Genauigkeit der Messung wohl stets etwas herabdrückt, wird neuerdings, speziell bei Glasarten, die naheliegende Heliumlinie $d = 5875{,}6$ A.E. gebraucht.

Ein Maß für die brechende Kraft eines optischen Mittels ist das Lichtbrechungsvermögen $(n_D - 1)$. Um die Ablenkung, Brechung, eines Licht-

strahls durch einen kleinen Keil (brechender Winkel kleiner als 5°) mit für die Praxis genügender Genauigkeit zu erhalten, brauchen wir nämlich nur den brechenden Winkel dieses Keiles mit dem Lichtbrechungsvermögen $(n_D - 1)$ des Keilmaterials zu multiplizieren.

Als ein Maß für die Dispersion im sichtbaren Lichtwellengebiet zwischen 400 und 810 mμ betrachten wir die mittlere Dispersion $(n_F - n_C)$ und die einzelnen partiellen oder Teildispersionen: $(n_{G'} - n_F)$, $(n_F - n_D)$, $(n_D - n_C)$. Um Glasarten miteinander hinsichtlich ihrer Dispersion vergleichen zu können, werden die Teildispersionen auf die mittlere Dispersion als Einheit bezogen, wodurch wir zu den relativ partiellen oder relativen Teildispersionen

$$\frac{n_{G'} - n_F}{n_F - n_C}, \qquad \frac{n_F - n_D}{n_F - n_C}, \qquad \frac{n_D - n_C}{n_F - n_C}$$

kommen, die für das sekundäre Spektrum von Linsenfolgen maßgebend sind. Von wesentlicher Bedeutung für die Farbenfreiheit der Linsenfolgen ist die von Abbe eingeführte reziproke Dispersion, kurz Abbesche Zahl genannt:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}. \tag{6}$$

Während bei fast allen Stoffen die Messung der Brechungszahlen im sichtbaren Lichtwellengebiet keine größeren Schwierigkeiten bereitet, steigen im allgemeinen die Schwierigkeiten um so mehr, je weiter wir bei der Messung in das ultraviolette (4000 bis 1800 A.E.) oder in das ultrarote (oberhalb 800) Gebiet vordringen wollen. Meist ist es die starke Absorption dieser äußersten Lichtwellengebiete durch das verwendete optische Mittel, die eine Messung der Brechungszahlen für ultrarote und ultraviolette Strahlen unmöglich macht.

Hinsichtlich der Zahlenwerte der Brechzahlen der verschiedenen Mittel für die verschiedenen Wellenlängen sei auf die Tabellenwerke von Landolt-Börnstein-Roth-Scheel[1]) und Dufet[2]) verwiesen.

2. Die Dispersionsformeln. Wir wollen hier noch kurz eingehen auf die Formeln, die die Werte der Brechungszahlen für alle Wellenlängen errechnen lassen, wenn wir auf Grund einiger beobachteter Brechungszahlen die Konstanten berechnet haben. Wir müssen unterscheiden zwischen solchen Dispersionsformeln, die streng theoretisch begründet sind, und solchen, die sich nur die Aufgabe gestellt haben, die Brechungszahlen innerhalb eines bestimmten Wellengebietes mit für die Praxis genügender Genauigkeit darzustellen.

Mit der Aufstellung solcher Formeln haben sich die verschiedensten Forscher beschäftigt. Für praktisch vorliegende Fälle von genügender Genauigkeit sind aber nur wenige.

An erster Stelle ist die theoretisch begründete Ketteler-Helmholtzsche Formel[3]) zu nennen, die sich bisher stets bewährt hat. Sowohl die ältere elastische

[1]) Landolt-Börnstein-Roth-Scheel, Physikalisch-chemische Tabellen, 2 Bde. 5. Aufl. Berlin: Julius Springer 1923.

[2]) H. Dufet, Recueil de données numériques optiques. 2 Bde. Paris: Gauthier-Villars et Fils 1898.

[3]) Das Nähere über diese Dispersionsgleichung ist nachzulesen in diesem Handbuch Bd. XXI oder bei: H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. Bd. 154, S. 582—596. 1875; Berl. Ber. 15. Dez. 1892; Wied. Ann. Bd. 48, S. 389—405. 1893; E. Ketteler, Pogg. Ann. Bd. 140, S. 1—53 u. 177—219. 1870; Theoretische Optik. Braunschweig 1885; Wied. Ann. Bd. 12, S. 481—519. 1881; Bd. 49, S. 382—386. 1893; E. Ketteler und C. Pulfrich, Wied. Ann. Bd. 15, S. 337—378. 1882; E. Lommel, ebenda Bd. 3, S. 339—356. 1878; W. Sellmeier, Pogg. Ann. Bd. 143, S. 272—285. 1871; Bd. 145, S. 399—421 u. 520—549. 1872; Bd. 147, S. 386—403 u. 525—554. 1872; W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, S. 691—704 u. 873—908. 1883; A. Wüllner, ebenda Bd. 17, S. 580—587. 1882. Kayser, Handbuch Bd. IV, Artikel Pflüger.

(SELLMEIER, HELMHOLTZ), als auch die neuere elektromagnetische Dispersionstheorie (HELMHOLTZ) gründen sich auf die Annahme, daß Brechung und Dispersion wesentlich bedingt sind durch das Mitschwingen der Körpermolekule. Dabei ist die Absorption als ein Energieverlust aufzufassen, der durch einen der Reibung ähnlichen Vorgang entsteht.

Im Falle der farblos durchsichtigen Mittel kann die Absorption vernachlässigt werden und es gilt für die Brechungszahl n_λ der Wellenlänge λ die vereinfachte Dispersionsgleichung

$$n_\lambda^2 = n_\infty^2 + \sum \frac{M_m}{\lambda^2 - \lambda_m^2}, \tag{7}$$

in der n_∞ die Brechungszahl für die Wellenlänge $\lambda = \infty$, λ_m die $m$te Resonanzstelle (Eigenschwingung, Absorptionsgebiet des untersuchten optischen Mittels) und M_m Konstante bedeuten. Diese Formel gibt den Verlauf der Abhängigkeit der Brechungszahl von der Wellenlänge vollkommen richtig wieder, solange wir nicht Wellenlängen der Resonanzstellen selbst verwenden. In der Nähe der Absorptionsgebiete ist die Wiedergabe der Brechungszahlen richtig. Mit wachsender, dem Absorptionsgebiet sich nähernder Wellenlange nimmt die Brechungszahl immer schneller ab, einem Mindestwerte zustrebend. Für das Absorptionsgebiet selbst besitzt die Formel keine Gültigkeit mehr, da in diesem Wellenlängenbezirke die gerade in Gleichung (7) vernachlässigte Absorption eine maßgebende Rolle spielt. Für Wellenlängen jenseits des Absorptionsgebietes wird die Darstellung der Werte der zugehörigen Brechungszahlen wieder richtig, insofern als für kleiner werdendes λ die Brechungszahlen immer schneller zunehmen und einem Maximalwert zustreben. Dieser Verlauf der Dispersionskurve in der Nähe eines Absorptionsgebietes entspricht der anomalen Dispersion (Ziff. 21 u. 22).

Liegt nur ein ultraviolettes und ein ultrarotes Absorptionsgebiet[1]) λ_v und λ_r vor, so geht die Formel (7) über in die einfachere Form der sog. fünfkonstantigen Ketteler-Helmholtzschen Dispersionsformel:

$$n_\lambda^2 = n_\infty^2 + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_v^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_r^2}, \tag{8}$$

die, falls die ultrarote Absorptionsstelle weit ab vom sichtbaren Spektrum liegt, zu der noch einfacheren Formel (9) führt:

$$n_\lambda^2 = a^2 + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_v^2} - C\lambda^2 - C_1\lambda^4, \tag{9}$$

in der die Konstanten a, C und C_1 gegeben sind durch die Beziehungen

$$a^2 = n_\infty^2 + \frac{M_2}{\lambda_r^2}; \qquad C = \frac{M_2}{\lambda_r^4}; \qquad C_1 = \frac{M_2}{\lambda_r^6}. \tag{10}$$

Mit dieser Formel können die Brechungszahlen bis auf eine Genauigkeit von einigen Einheiten der vierten Dezimale wiedergegeben werden[2]).

---

[1]) Das ultraviolette Absorptionsgebiet kann mit Hilfe eines Quarzspektrographen durch eine photographische Aufnahme des Absorptionsspektrums des betreffenden Stoffes ermittelt werden, während das Absorptionsgebiet im Ultrarot nach der RUBENSschen Reststrahlenmethode (Ziff. 4) festgestellt werden kann.

[2]) H. RUBENS, Wied. Ann. Bd. 53, S. 267—286. 1894; Bd. 54, S. 476—485. 1895; F. PASCHEN, ebenda Bd. 53, S. 301—333. 1894; A. PFLÜGER, ebenda Bd. 65, S. 173—213. 1898. Siehe auch H. KAYSER, Handbuch der Spektroskopie Bd. 1, Kap. 3 (KONEN) und Bd. 4, Kap. 1 (PFLÜGER).

Eine Formel, die rein empirisch gefunden wurde, ist die HARTMANNsche Dispersionsformel. HARTMANN[1]) geht davon aus, daß die Darstellung aller gemessenen Brechzahlen des Quarzes von $\lambda = 2140$ A.E. bis $\lambda = 2\mu$ eine Kurve $n = f(\lambda)$ liefert, die größte Ähnlichkeit mit einer gleichseitigen Hyperbel hat, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind. Eine dieser Anschauung entsprechende erste Formel

$$n - n_0 = \frac{c}{\lambda - \lambda_0}, \tag{11}$$

worin n_0, λ_0, c Konstante sind, stellt zwar einen großen Teil des Spektrums schon besser dar als die andern empirischen Dispersionsformeln. Die noch vorhandenen Abweichungen der errechneten Werte von den beobachteten können aber noch weiter herabgedrückt werden, wenn der Gleichung die Form

$$n - n_0 = \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} \tag{12}$$

gegeben wird, worin α eine positive, nur ganz wenig von der Eins verschiedene Zahl (0,8 bis 1,3) ist. HARTMANN[2]) gibt Wege und Mittel an, die Konstanten dieser Formel aus Beobachtungen zu errechnen. Er findet, daß für die verschiedenen Glasarten eine gute Darstellung erhalten wird, wenn wir $\alpha = 1{,}2$ setzen. Für Krongläser liegt dann das λ_0 zwischen 1700 und 1900, für Flintgläser zwischen 1900 und 2100. Im Gegensatz zu HARTMANN stellt HARTING[3]), der die HARTMANNschen Konstanten der Formel (12) für alle optischen Glasarten des SCHOTTschen Katalogs bestimmt, fest, daß für die besten Darstellungen der beobachteten Brechzahlen das α zwischen 0,8 und 1,3 schwankt, während die λ_0-Werte für Krongläser zwischen 1440 und 2800 und für Flintgläser zwischen 1560 und 2120 liegen. Nach von mir selbst vorgenommenen Durchrechnungen ist eine Genauigkeit von einigen Einheiten in der 5. Dezimale leicht zu erreichen, was etwa der Meßgenauigkeit der angewandten Beobachtungsmethode entsprach. Um die Fehlerausgleichung bei unvollständiger Angleichung der Formel an die Beobachtung vollständig durchzuführen, ist es von Vorteil, mit Hilfe einiger über den dargestellten Spektralbereich geeignet verteilten Wellenlängen eine Fehlerkurve aufzustellen, aus der die Fehler für jede andere Wellenlänge entnommen werden können, um als Korrektion an der aus der Formel errechneten Brechzahl angebracht zu werden.

Gleichung (11) benutzt HARTMANN, um mit Hilfe einer graphischen Darstellung die Brechungszahlen bis auf einige Einheiten der 5. Dezimale zu interpolieren. Dazu konstruiert er sich ein besonderes Koordinatennetz, dessen Ordinaten, die Brechungszahlen n_λ, linear ansteigen, während für die Abszissen λ in Abhängigkeit von der Millimeterteilung eine Gesetzmäßigkeit ähnlich der Gleichung (11) gewählt wird. Dadurch erreicht er, daß in einem solchen Hartmannschen Dispersionsnetz, wie es von der bekannten Firma Schleicher & Schüll (Düren im Rheinland) (Netz 30×39 cm, Ausgabe A für das sichtbare Spektrum von 3750 bis 7700; Ausgabe B für das photographisch wirksame violette Spektrum von 3370 bis 5000) zu beziehen ist, die Dispersionskurve zu einer geraden Linie wird. Die Arbeitsweise ergibt sich aus einer von HARTMANN mitgeteilten Anweisung.

[1]) J. HARTMANN, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 12. 1902; Anhang Nr. 42, S. 1—16. 1898; Astrophys. Journ. Bd. 8, S. 218. 1898; ZS. f. Instrkde. Bd. 19, S. 57—58. 1899.

[2]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 37, S. 166—174. 1917. Außerdem siehe Fußnote 1.

[3]) H. HARTING, Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 97—102. 1908; ZS. f. Instrkde. Bd. 31, S. 72—79. 1911.

3. Einteilung der Methoden zur Messung der Brechungszahlen fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Zur Bestimmung der Brechungszahl eines Körpers können wir die verschiedensten Wege einschlagen. Im Prinzip kann jede Methode in Anwendung kommen, der eine Beziehung zugrunde liegt, in der die Brechungszahl vorkommt. Grundlegend für die Brauchbarkeit einer Methode in der Praxis sind aber ihre Anwendungsfähigkeit und die dabei zu erzielende Meßgenauigkeit.

Überschauen wir die zahlreichen, bekannt gewordenen Wege zur Ermittlung der Brechzahlen im sichtbaren Lichtwellengebiet, so erkennen wir, daß sich die Verfahren in vier größere Gruppen einreihen lassen. Von größter Bedeutung zur Bestimmung der Brechungszahlen ist die Methode der prismatischen Ablenkung in ihren verschiedenen Formen. Daneben stellt sich fast gleichwertig, was die Genauigkeit betrifft, überlegen, was die praktische und schnelle Anwendbarkeit betrifft, die Methode der Totalreflexion, die ein Prisma von bekannter Brechzahl zu Hilfe nimmt. In der Genauigkeit diesen beiden Gruppen überlegen, aber wohl unterlegen in der Vielseitigkeit der Anwendung sind die interferometrischen Verfahren der 3. Gruppe. Zu diesen dreien, von denen jede sozusagen ein in sich abgeschlossenes einheitliches Gepräge zeigt, geselle ich noch eine 4. Gruppe, in der ich die Verfahren unterbringe, die sich in die drei erstgenannten Gruppen nicht eingliedern lassen.

Alle diese Methoden erlauben im allgemeinen nur die Messung der Brechungszahl für Wellenlängen zwischen 4000 und 8000. In dem Augenblick, wo wir auch die Brechungszahlen im ultravioletten oder ultraroten Wellenlängengebiet damit bestimmen wollen, versagen im allgemeinen die drei letzten Gruppen. Nur den spektrometrischen Messungen am Prisma bleibt ihre Bedeutung auch für diese Gebiete erhalten.

4. Lichtquellen. Ehe wir auf die einzelnen Methoden näher eingehen, wollen wir uns die Mittel vergegenwärtigen, die benutzt wurden und noch benutzt werden, um Licht einzelner Wellenlängen für die Messungen zur Verfügung zu haben.

Am bequemsten herzustellen ist das einfarbige gelbe Licht der Natriumflamme, deren Licht der FRAUNHOFERschen D-Linie ($D_1 = 5896$ und $D_2 = 5890$) entspricht, und die bei Brechzahlmessungen die weitaus stärkste Verwendung gefunden hat. Die Form einer solchen Natriumlichtquelle variiert von der einfachen Spiritusflamme, deren Spiritus Kochsalz zugesetzt ist, bis zu den durch mancherlei Zusatzeinrichtungen verbesserten Natrium-Bunsenbrennern verschiedenster Konstruktion.

Am meisten gebraucht neben der Natriumflamme sind die mit verschiedenen Gasen gefüllten Geisslerschen Röhren, zu deren Füllung Wasserstoff, Helium, Argon und Krypton starke Verwendung finden. Diese Gase liefern bei der durch sie hindurchtretenden elektrischen Entladung Emissionsspektren, die ganz ausgeprägte, helle, leichterkennbare Linien aufweisen, und die deshalb bequem, vor allem bei dem prismatischen Bestimmungsverfahren, Anwendung finden können. So liefert das Wasserstoffspektrum die Linien $H_\alpha = 6562$; $H_\beta = 4861$; $H_\gamma = 4340$, von denen die ersten beiden mit den FRAUNHOFERschen Linien C und F und die letzte nahezu mit G übereinstimmen. Mit der D-Linie der Natriumflamme zusammen dienten bisher diese drei Linien C, F und G' zur Kennzeichnung der Brechung der optischen Glasarten des Jenaer Glaswerks von O. Schott & Gen. (Jena). Da aber das Natriumlicht kein einfarbiges Licht ist, sondern zwei Linien aufweist, deren Aufspaltung bei starker Dispersion die Messung unsicher macht, und da außerdem das Arbeiten mit einem Natrium-Bunsenbrenner praktisch verschiedene Unzulänglichkeiten aufweist, ist auf

meine Veranlassung, angeregt durch HARTING[1]), die Benutzung der Natriumlinien aufgegeben worden, um sie durch die viel bequemer herstellbare und hellere, für spektrometrische Zwecke vollkommen einfarbige, gelbe Heliumlinie, im SCHOTTschen Glaskatalog bezeichnet mit *d* (Wellenlänge = 5875), zu ersetzen. Vom Standpunkt der rechnenden und praktischen Optik aus stehen dieser Änderung durchaus keine Bedenken entgegen, da die Linie ganz dicht bei den Natriumlinien liegt. — Um bei Verwendung von GEISSLERschen Röhren die oft gewünschte grüne Linie 5460 und die violette Linie 4358 des Quecksilbers im Emissionsspektrum zu bekommen, wird ein Tropfen Quecksilber in die Wasserstoffröhre mit eingebracht, der beim Gebrauch erhitzt wird, so daß in der Röhre neben dem Wasserstoff auch die Quecksilberdämpfe durch die Entladung zur Emission angeregt werden. Die violette Linie 4358, im SCHOTTschen Glaskatalog als *g* bezeichnet, ist insbesondere dann notwendig, wenn infolge starker Absorption durch das zu messende optische Mittel die violette Linie des Wasserstoffs gar nicht oder nur schlecht sichtbar ist.

Ganz intensive Linien liefern die Quecksilberbogenlampen, wie sie nach ARONSschem[2]) Vorgange in verschiedenen Typen eingeführt wurden, so die Konstruktionen nach LUMMER-STRAUBEL[3]), FABRY und PEROT[4]), SIEDENTOPF[5]) u. a. Eine einfache für viele spektrometrische Zwecke vollkommen in ihrer Intensität ausreichende Quecksilberlampe wird vom Glaswerk O. Schott & Gen. (Jena), seit einiger Zeit in den „Hageh"-Lampen hergestellt. Um außer den Quecksilberlinien auch noch intensive Linien anderer Metalle verwenden zu können, sind von verschiedenen Seiten die betreffenden Metallamalgame an Stelle des reinen Quecksilbers als Elektroden in diesen Lampen verwendet worden, so von GUMLICH[6]), HAMY[7]), LUMMER-GEHRCKE[8]) u. a.

Während die Lampen, bei denen gewöhnliches Röhrenglas zur Herstellung benutzt wurde, nur wenig weit ins ultraviolette Gebiet hinein Linien liefern, geht das Linienspektrum der von W. C. HERAUS (Hanau), aus Quarzglas hergestellten „Quarzglas-Quecksilber- und Amalgam-Lampen[9])" bis tief ins Ultraviolette hinein. Die Intensität dieser Lampen ist so kräftig, daß bei einem Quarzflußspatspektrographen, ohne besonderen Müheaufwand im Aufbau, die Linien um 2400 bis 2300 noch gut auf einer gewöhnlichen photographischen Platte sichtbar sind. Bei den Amalgamlampen verwendet HERAUS speziell Zink und Cadmium, die ein linienreiches UV-Spektrum besitzen. Doch darf, soweit ich durch Erfahrung feststellen konnte, der Zusatz an diesen beiden Metallen einen gewissen kleinen Prozentgehalt nicht übersteigen, soll die Lampe in ihrer leichten Handhabung und guten Haltbarkeit, die der einfachen Quarz-Quecksilberlampe unbedingt zuzusprechen ist, nicht leiden.

Vielfache Verwendung, insbesondere zu spektrometrischen Messungen im Ultraviolettgebiet finden auch die im elektrischen Flammenbogen oder in der Funkenstrecke mit den betreffenden Metallelektroden durch Entladung, sei es

[1]) H. HARTING, Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 97—102. 1908; ZS. f. Instrkde. Bd. 31, S. 72 bis 79. 1911.

[2]) L. ARONS, Wied. Ann. Bd. 47, S. 767—771. 1892; Ann. d. Phys. Bd. 23, S. 176—178. 1907.

[3]) O. LUMMER, ZS. f. Instrkde. Bd. 15, S. 294. 1895; Bd. 21, S. 201—204. 1901. Die Lampe kann von Franz Schmidt & Haensch, Berlin, bezogen werden.

[4]) CH. FABRY et A. PEROT, C. R. Bd. 128, S. 1156—1158. 1899; Journ. de phys. Bd. 9, S. 369. 1900; ZS. f. Instrkde. Bd. 22, S. 360. 1902.

[5]) H. SIEDENTOPF, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 22—23. 1904.

[6]) G. GUMLICH, ZS. f. Instrkde. Bd. 17, S. 161—165. 1897.

[7]) M. HAMY, C. R. Bd. 124, S. 749—752. 1897.

[8]) O. LUMMER u. E. GEHRCKE, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 296—298. 1904.

[9]) R. KÜCH u. T. RETSCHINSKY, Ann. d. Phys. Bd. 20, S. 563—583. 1906; Bd. 22, S. 852—866. 1907.

in Luft oder unter Wasser, zum Leuchten gebrachten Dämpfe der Metalle Al, Cd, Fe, Hg, Mg und anderer[1]).

Neben diesen einzelne Linien liefernden Lichtquellen dienen zur Erzeugung einfarbigen, oder nahezu einfarbigen, Lichtes sog. **Monochromatoren**, die nichts weiter als lichtstarke Spektralapparate, Spektroskope, sind, in deren Bildebene sich ein zweiter Spalt befindet, der aus einem dort von einer weißen Lichtquelle entworfenen kontinuierlichen Spektrum einen ganz engen, nahezu einfarbigen Lichtbezirk herausblendet, der dann selbst als Lichtquelle für das Spektrometer verwendet wird. Durch solche Monochromatoren, wie sie von jedem größeren optischen Werk bis zu den vollkommensten Formen bezogen werden können, wird neben einer größeren Mannigfaltigkeit und gleichmäßigeren Verteilung der ausgeblendeten, nahezu einfarbigen Spektralbezirke (Spektrallinien) über das ganze Spektrum, auch eine größere Bequemlichkeit beim Übergang von einer solchen Spektrallinie zu einer anderen gewährleistet.

Zur Erzeugung starker **Wärmestrahlung** können wir den elektrischen Kohlebogen und die Lichtbögen der Alkalien und Erdalkalien[2]) benutzen, die Emissionslinien bis 5,4 μ liefern. Ein intensives kontinuierliches Wärmespektrum liefern der Auersche **Gasglühkörper** bei entferntem Glaszylinder (Zugglas) und der Linnemannsche[3]) **Zirkonbrenner**. Der Auersche Glühkörper besitzt den für viele Fälle beachtlichen Vorteil einer großen strahlenden Fläche, weist aber, wie auch die elektrischen Lichtbögen, nur eine schlechte Konstanz auf. Demgegenüber ist der Zirkonbrenner nahezu vollkommen frei von zeitlichen Schwankungen der Emissionsintensität, die außerdem sehr groß ist.

Bei Verwendung der kontinuierlichen Wärmequellen können wir uns die einzelnen Wellenlängen nach der spektrometrischen Methode der Minimalablenkung bei selbsttätiger Konstanthaltung derselben (Ziff. 13 und 14) absondern. Da die Dispersionen der dabei benutzten Prismen aus Flußspat, Steinsalz und Sylvin bekannt sind, können wir die isolierten Wellenlängen leicht aus der Stellung des Prismas berechnen und so eine Eichkurve des verwendeten Wärmewellenmonochromators aufstellen. Mit solchen Prismen-Spiegel-Spektrometern (Ziff. 61) — an Stelle der Linsen werden oberflächenversilberte Hohlspiegel gebraucht, weil das Material der Linsen die Wärmeenergie zum größten Teil absorbieren würde, während Silber zu fast 100% reflektiert — kommen wir nur bis zur Absorptionsgrenze des zum Prisma verwendeten Kristalls, die etwa bei 23 μ liegt.

Noch größere Wellenlängen können wir nach der **Methode der Reststrahlen**[4]) aussondern. Für die Stellen starker Absorption weisen die durchsichtigen optischen Mittel metallische Reflexion auf. Lassen wir deshalb die von einer Wärmequelle ausgehenden Strahlen an der Oberfläche eines solchen Körpers mit Gebieten metallischer Reflexion reflektieren, so weisen die reflektierten Strahlen eine quantitativ wesentlich andere spektrale Zusammensetzung auf als die auffallenden, insofern als diejenigen Wellenlängen in stärkerer Intensität reflektiert werden, für die der reflektierende Körper starke Absorption und infolgedessen starke Reflexion besitzt. Nach mehrmaliger Reflexion der Strahlung einer Wärmequelle an einem solchen Körper werden daher von den

[1]) Vgl. dazu H. Kayser u. H. Konen, Handb. d. Spektroskopie Bd. VII. Leipzig: S. Hirzel.

[2]) F. Paschen, Ann. d. Phys. Bd. 27, S. 537—570. 1908; Bd. 29, S. 625—663. 1909; Bd. 33, S. 717—738. 1910; Bd. 36, S. 191—197. 1911.

[3]) E. Linnemann, Wien. Ber. (2) Bd. 92, S. 1248. 1885.

[4]) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. Bd. 60, S. 418—462. 1897; H. Rubens u. E. Aschkinass, ebenda Bd. 65, S. 241—256. 1898; E. Aschkinass, Ann. d. Phys. (4) Bd. 1, S. 42—68. 1900.

einzelnen Wellenlängen schließlich nur noch die Strahlen in merklichem Energiebetrage vorhanden sein, die metallisch reflektiert werden, also den Absorptionsgebieten des reflektierenden Körpers, die auch in die KETTELER-HELMHOLTZsche Dispersionsformel (Ziff. 2) eingehen, entsprechen. Diese Absorptionsgebiete können über das ganze Spektrum vom äußersten Ultraviolett bis ins äußerste Ultrarot verteilt liegen. Im ultravioletten Gebiet kann die reflektierte Strahlung nur photographisch auf Reststrahlen zur Feststellung des für die Dispersionsformeln notwendigen Absorptionsgebietes untersucht werden[1]). In der Hauptsache wird aber diese Reststrahlenmethode für das Ultrarot benutzt, wo die Gebiete metallischer Reflexion mit dem Bolometer oder der Thermosäule nachweisbar sind. Die nachstehende Zahlentafel gibt eine Zusammenstellung von Reststrahlen im Ultrarot:

Quarz	8,50	9,02	20,75				
Glimmer	8,32	9,38	18,40	21,25			
Flußspat				24,0	31,6		
Marmor, Kalkspat	6,69	11,41			29,4		
Gips	8,69				30–40		
Alaun		9,05			30–40		
Steinsalz						51,2	
Bromnatrium						50–55	
Sylvin							61,1
Bromkalium							60–70

Eine Absonderung von Wärmestrahlen können wir auch mit Hilfe eines Spiegelspektrometers unter Zuhilfenahme eines Reflexionsgitters oder Drahtgitters[2]) von bekannter, etwa 0,03 bis 0,06 mm betragender Gitterkonstante durchführen. Zu beachten ist dabei, daß auf dem Spalt der Beobachtungsseite dann immer mehrere Wellenlängen einstehen, die Spektren von verschiedener Ordnung angehören. Ist das Gitter ein normales, bei dem alle Ordnungen auftreten, so verhalten sich die zu gleicher Zeit im Beobachtungsspalte einstehenden Wellenlängen umgekehrt wie ihre Ordnungszahlen

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \ldots : \lambda_n = n : \ldots : 3 : 2 . 1 .$$

Ist das Drahtgitter ein solches, bei dem die Drahtstärke gleich der halben Gitterkonstante ist, d. h. sind die zwischen den undurchsichtigen Strichen liegenden Spaltöffnungen von gleicher Breite wie die Striche selbst, so sind die Intensitäten der Spektren gerader Ordnung, wenn die Gitterebene senkrecht zum einfallenden Strahl steht, Null, also nicht zu sehen. Nur die Spektren ungerader Ordnung sind wahrnehmbar. Bei einem solchen Gitter verhalten sich somit die auf dem Beobachtungsspalt gleichzeitig einstehenden Wellenlängen umgekehrt wie ihre ungeraden Ordnungszahlen

$$\lambda_1 : \lambda_3 : \lambda_5 : \ldots : \lambda_{(2m+1)} = (2m+1) : \ldots : 5 : 3 : 1 .$$

Die Linien der verschiedenen Ordnungen, die mit einer Linie des sichtbaren Gebiets der $n$ten bzw. $(2m+1)$ten Ordnung koinzidieren, sind also alle Linien im Ultrarot, da ihre Wellenlängen ganze Vielfache dieser sichtbaren Wellenlänge vorstellen. Kennen wir folglich in beiden Fällen die Wellenlänge λ_n bzw. $\lambda_{(2m+1)}$ der sichtbaren Farbe, die der $n$ten bzw. $(2m+1)$ten Ordnung angehört, so können wir damit die anderen Wellenlängen berechnen. Bei Kenntnis des Beugungswinkels φ und der Gitterkonstanten c, die wir mit Hilfe bekannter Linien im sichtbaren Gebiet experimentell genau bestimmen werden, können wir aber

[1]) F. F. MARTENS, Ann. d. Phys. (4) Bd. 6, S. 603–640. 1901.

[2]) H. RUBENS, Wied. Ann. Bd. 53, S. 267–286. 1894; F. PASCHEN, ebenda Bd. 53, S. 301–333. 1894; vgl. auch vorstehende Seite Fußnote 4.

auch aus der Formel $n \cdot \lambda_n = c \cdot \sin\varphi$, indem wir n gleich den obigen Verhältniszahlen setzen, die zu jedem am Spiegelspektrometer einstellbaren Winkel gehörigen Wellenlängen festlegen.

I. Die Meßverfahren für das sichtbare Lichtwellengebiet.

a) Die Verfahren, bei denen die Körper in Prismenform zur Messung verwendet werden.

5. Die allgemeinen Grundlagen der spektrometrischen Messungen. Bei den Verfahren dieser Gruppe a) verwenden wir durchweg den Stoff in Prismenform. Um ein solches Prisma zu erhalten, werden dem Korper, falls er fest ist, zwei ebene Flächen angeschliffen und poliert, die sich in einer Kante, der brechenden Kante, schneiden, und die den brechenden Winkel φ (Abb. 9) untereinander einschließen. Handelt es sich bei den zu untersuchenden optischen Mitteln um Flüssigkeiten oder Gase, so werden diese in Hohlprismen eingeschlossen, die von planparallelen Verschlußplatten aus Glas begrenzt werden. (Ziff. 24 bis 28).

Lassen wir in ein solches Prisma einen einfarbigen Lichtstrahl eintreten, so wird dieser beim Durchgange durch das Prisma eine bestimmte Ablenkung erfahren. Den Winkel, den der austretende Strahl mit dem einfallenden Strahl einschließt, nennen wir den Ablenkungswinkel δ (z. B. Abb. 13). Dabei lassen wir, um die geometrisch einfachsten Beziehungen zu erhalten, den Strahl das Prisma in einem Hauptschnitt durchsetzen. Damit dies der Fall ist, wird der Aufbau stets so getroffen, daß das Prisma im parallelen Strahlengang steht, der zudem noch senkrecht zur brechenden Kante verläuft.

Die zur Errechnung der Brechzahl bei den verschiedenen Verfahren dienende Formel ist in der Regel eine einfache Beziehung zwischen der Brechzahl n, dem brechenden Winkel φ und dem Ablenkungswinkel δ oder dem Austrittswinkel β. Es handelt sich somit bei den spektrometrischen Methoden um die möglichst genaue Messung zweier Winkel. Die mit dem verwendeten Winkelmeßgerat (Goniometer) zu erzielende Meßgenauigkeit bei der Winkelmessung ist ausschlaggebend für die für die Brechzahl des optischen Mittels zu erzielende Meßgenauigkeit, die allerdings auch noch von der Größe des brechenden Winkels φ abhängt, insofern als mit größer werdendem Prismenwinkel die Meßgenauigkeit wächst.

α) Die meßtechnischen Grundlagen.

6. Allgemeines zur Messung am Spektrometer. Zur Messung des brechenden und Ablenkungswinkels wird ein Spektrometer verwendet. Wir kennen verschiedene Typen von Spektrometern, deren Güte in Konstruktion und mechanischer Ausführung für die Meßgenauigkeit ausschlaggebend ist, abgesehen davon, daß ein solches Gerät auch so eingerichtet sein muß, daß der Beobachter bei dessen Benutzung durch einfache und bequem durchzuführende Handgriffe sein Ziel erreicht. Nicht unwichtig bei der Konstruktion solcher Spektrometer ist die Berücksichtigung der Ergebnisse der



Abb. 2. Spektrometerschema.

durch E. ABBE begründeten Theorie der Strahlenbegrenzung in optischen Instrumenten[1]) bei den optisch wirksamen Teilen.

In der Abb. 2 ist eine schematische Darstellung eines solchen Spektrometers gegeben. Ein Teilkreis kann mit Hilfe zweier einander diametral gegenüberliegenden Ablesenonien N_1 und N_2 abgelesen werden. Im Mittelpunkt des Teilkreises genau über der Drehachse befindet sich ein justierbares Tischchen T als Träger des Meßprismas P. Zwei Fernrohre S und B, im allgemeinen mit Objektiven von gleicher Brennweite versehen, sind auf Armen so angeordnet, daß die Achse des Teilkreises auch ihre Drehungsachse ist. Das Fernrohr S ist ein sog. Spalt- oder Kollimatorrohr, weil in der Brennebene seines Objektivs ein meist meßbar mikrometrisch in seiner Breite verstellbarer Spalt eingebaut ist. Es steht im allgemeinen fest. Die vom Spalt, der durch eine entsprechende Lichtquelle beleuchtet wird, ausgehenden Strahlen treten somit als Parallelstrahlenbündel aus, durchsetzen als solches das Prisma P und treten in das Beobachtungsfernrohr B ein, wo sie in der Brennebene wieder vereinigt werden und dort, wenn wir eine mehrfarbige Lichtquelle verwendet haben, eine Reihe von verschiedenfarbigen Bildern des Spaltes erzeugen, entsprechend den in der Lichtquelle vorhandenen einzelnen Wellenlängen. Der Vorteil des auf Unendlich eingestellten Spaltrohres gegenüber dem von FRAUNHOFER ursprünglich angewandten Verfahren, wonach er einen in endlicher Entfernung innerhalb des Beobachtungsraumes liegenden, durch Sonnenlicht beleuchteten Spalt zu Hilfe nahm, ist der, daß die umständliche Berücksichtigung einer Korrektion wegen dieser endlichen Entfernung des Spaltes in Wegfall kommt, und daß die Apparatur dadurch einfacher und handlicher wird.

Das Beobachtungsrohr B besitzt in seiner Brennebene eine Marke M, die zur Einstellung auf die im Gesichtsfeld sichtbaren Spektrallinien dient. Die Beobachtung selbst erfolgt mit Hilfe eines Okulars. Die Einstellmarke M kann verschiedene Gestalt haben. Ist der Spalt breit, so wählen wir am besten einen breiten dunklen Faden (Abb. 3a), der dem Spaltbild genau parallel läuft. Den Spalt selbst machen wir dabei am günstigsten eine Kleinigkeit breiter als den Faden. Befinden sich Spalt und Faden im Falle der Einstellung in Deckung, dann soll beiderseits vom Faden der Spalt gerade noch einen feinen, dünnen Lichtblitz ins Auge des Beobachters schicken, der in diesem Falle am besten entscheiden kann, wann Spalt und Faden sich in symmetrischer Deckung befinden. Eine zweite Art der Marke ist ein unter 45° stehendes Kreuz, das dann vor allem mit Vorteil verwendet wird, wenn der Spalt eng gemacht wird (Abb. 3c). Die Einstellung erfolgt in diesem Falle so, daß die Linie durch den Schnittpunkt des Kreuzes geht. Ein solches schrägstehendes Kreuz können wir auch bei breitem Spalt verwenden, indem wir den einen Rand des Spaltes (Abb. 3b) durch den Schnittpunkt des Kreuzes gehen lassen. Ob wir dabei den linken oder rechten Rand zur Einstellung benutzen, ist an sich gleichgültig, wenn wir bei einer



Abb. 3. Einstellmöglichkeiten: a) Breiter Faden in breitem Spalt, so daß beiderseits Lichtblitz gleich. — b) Fadenkreuz auf Rand von breitem Spalt. — c) Fadenkreuz auf schmalen Spalt. — d) und e) Doppelfaden auf feine Linie.

[1]) S. CZAPSKI, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach ABBE, 3. Aufl. S. 146—212. Leipzig: J. A. Barth 1924; und diesen Bd. XVIII: Artikel O. EPPENSTEIN, Strahlenbegrenzung.

Durchmessung nur immer den gleichen Spaltrand dazu nehmen. Bei genauen Messungen ist aber die Einstellung mit breitem Spalt und Vertikalfaden der letztgenannten vorzuziehen, weil, wenn nur der Lichtblitz genügend schmal gewählt wird, eine ganz außerordentlich gute Einstellgenauigkeit sich auf diese Art und Weise erzielen läßt[1]. Für den Fall, daß zur Messung Sonnenlicht und damit die Fraunhoferschen, also schwarze feine Linien gebraucht werden, wird wieder das schrägstehende Fadenkreuz gute Dienste tun (Abb. 3c). Vorzuziehen ist aber auch hier wieder eine Anordnung, die gestattet, die betreffende Fraunhofersche Linie einzuschließen zwischen zwei zu dieser parallele schwarze Fäden (Abb. 3d), so daß im Augenblick der Einstellung die Fraunhofersche Linie sich symmetrisch zwischen den beiden Fäden befindet. Es macht keine Schwierigkeiten, einen solchen Doppelfaden von verstellbarer Breite im Okular einzubauen. Die Fäden werden vorteilhaft von mehrfacher Breite einer Fraunhoferschen Linie gewählt und der Abstand der beiden Fäden wird so eingestellt, daß bei symmetrischer Einstellung der Linie auch hier der zwischen Linie und Faden liegende Lichtspalt ein ganz feiner (Abb. 3e) ist, weil nur in diesem Falle die maximale Einstellgenauigkeit gewährleistet ist.

Von Einfluß auf die Genauigkeit der Winkelmessung ist auch die mehr oder minder behobene sphärische Abweichung der verwendeten Objektive[2].

Für die Genauigkeit der auf dem Spektrometer ermittelten Winkel ist es stets von Vorteil, wenn der Winkel nicht nur einfach gemessen wird, sondern wenn wir ihn als ein Vielfaches messen, was wir durch geeignetes, hintereinander erfolgendes Wiederholen des einfachen Winkels durchführen können (Ziff. 10).

7. Das Spektrometer. Wie schon erwähnt, gibt es verschiedene Spektrometerkonstruktionen, so von Lang, Meyerstein und Abbe, die alle die an sie gestellten Forderungen erfüllen.

Um ein Bild eines solchen gut arbeitenden Spektrometers zu geben, soll hier etwas ausführlicher auf das Abbesche Spektrometer[3], das für alle später zu behandelnden Prismenmethoden brauchbar ist, und auf seine Einrichtungen eingegangen werden.

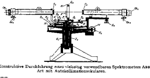


Abb. 4. Konstruktive Durchführung eines vielseitig verwendbaren Spektrometers Abbescher Art mit Autokollimationsokularen.

[1] Ich konnte an einer großen Reihe von gänzlich ungeübten Laienbeobachtern feststellen, daß mit dieser Lichtblitzmethode bei einer etwa 25fachen Fernrohrvergrößerung Einstellgenauigkeiten von $1/2''$ bis $1''$ die Regel waren, die auch von einem geübten Auge wohl nicht mehr wesentlich unterboten werden können.

[2] H. Krüss, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 199–207. 1892.

[3] E. Abbe, Ges. Abhdlgn. Bd. 2, S. 93–97. Jena: G. Fischer 1906.

Der scheibenförmige Teilkreis T ist mit einer durch seine Mitte gehenden senkrecht zur Teilkreisebene stehenden Achse Z_1 aus Stahl fest verbunden, die in einer konischen Büchse des Grundgestells G_1, das auf drei Füßen ruht, gut laufend eingeschliffen ist. Diese Achse Z_1 ist nach oben über die Fläche des Teilkreises hinaus in einen konischen Zapfen Z_2 verlängert, auf den eine Buchse B_1 aufgeschliffen ist, die in einen zur Teilkreisebene parallelen Hilfskreis K ausläuft, auf den der Träger H des Prismas aufgebracht werden kann. Durch Anziehen der Klemme K_2 wird der Teilkreis T mit dem Grundgestell G_1 fest verbunden. Eine unter Umständen bei dieser Klemmung notwendige Feinverstellung des Teilkreises kann mit Hilfe eines Mikrometerwerkes M, dessen Trommelteilung $^1/_{10}$ Minuten = 6 Sekunden direkt abzulesen und $^6/_{10}$ Sekunden zu schätzen gestattet, durchgeführt werden. Ziehen wir die Klemme K_1 fest, so ist dadurch der das Prisma tragende Hilfskreis K an den Teilkreis T festgekuppelt, so daß er nur mit diesem zusammen bewegt werden kann. Als Träger des Meßprismas kann eines der bekannten Spektrometertischchen verwendet werden, das drei als verstellbare Schrauben ausgebildete Füße besitzt, die zur Ausrichtung des Prismas dienen. Im allgemeinen sind diese Füße an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet. Die Justierung wird aber wesentlich erleichtert, wenn diese Schrauben die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, dessen eine Kathete parallel zur Eintrittsfläche des Meßprismas zu liegen kommt. In seiner Form abweichend hiervon, in seiner Verwendung aber wesentlich einfacher und zweckmäßiger ist der von Abbe eingeführte Prismenhalter H [1]. Auf einer dreieckigen Grundplatte P, die parallel einer Seitenkante zwischen zwei Schraubenspitzen S_3 wie in einem Scharnier sich dreht, während auf der gegenüberliegenden Ecke eine Schraube S_2 einen verstellbaren Fuß bildet, erhebt sich nahe über der Mitte des Teilkreises ein senkrechter Ständer G_2, der als zylindrischer Ring ausgebildet ist und um den als Führung sich eine zylindrische Hülse H drehen läßt. Auf diese Hülse H kann mit Hilfe von zwei Klemmfedern F eine Metallscheibe, die zentral eine genügend große Durchbohrung besitzt, und auf die über diese Durchbohrung hinweg das Meßprisma mit Plastolin oder Klebewachs angeheftet wird, seitlich angedrückt und in dieser Lage festgehalten werden. Die Anlagefläche des Halters H soll sich möglichst genau in der mathematischen Achse des Drehzapfens Z_1 des Teilkreises T befinden.

Das Spektrometer besitzt zwei Fernrohre, die beide durch die Verwendung des Abbeschen Autokollimationsokulars (Ziff. 8) als Autokollimationsfernrohre ausgebildet sind. Das eine Fernrohr O_2Ok_2 (Abb. 4) ist am feststehenden Grundgestell G_1 justierbar angebracht. Das zweite Fernrohr O_1Ok_1 ist mit Hilfe einer als offenes Dreieck ausgebildeten Gabel G_3, auf der der Träger des Fernrohrs festsitzt, ähnlich wie der Abbesche Prismenhalter H gelagert. Zwei Spitzenschrauben S_5 an den offenen Enden der Gabel bilden das Scharnier, um das sich die Gabel G_3 dreht, wenn die Schraube S_1 betätigt wird, wodurch auch das Fernrohr O_1Ok_1 justierbar wird. Um den Hilfskreis K, der das Prisma trägt, bei Bedarf unabhängig vom Teilkreis in einer gewünschten Lage festhalten zu können, ist am Grundgestell G_1 eine Klemmung S_4 vorgesehen.

Ein Teilkreis, wie wir ihn an einem solchen Spektrometer verwenden, weist im allgemeinen zwei Fehler auf. Erstens sind Teilungsfehler vorhanden und zweitens besitzt der Teilkreis in den meisten Fällen eine gewisse Exzentrizität. Beide Fehler dürfen allerdings, wenn der Teilkreis brauchbar sein soll, eine bestimmte kleine Grenze nicht überschreiten. Bei den von guten Firmen bezogenen

[1] Räumliche Skizze dazu s. in F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik, 14. Aufl., S. 294, Abb. 129. 1923.

Spektrometern sind diese Fehler nie erheblich, so daß sie jedenfalls durch geeignete Anordnung der Messungen so gut wie unschädlich gemacht werden können.

Der bei einem Teilkreis auftretende Fehler der Exzentrizität rührt davon her, daß die mathematische Drehachse nicht genau durch den Mittelpunkt des Teilkreises geht. Er gibt sich darin kund, daß wir verschiedene Winkelwerte für ein und denselben Winkel beobachten, je nachdem, an welcher Stelle des Teilkreises wir messen. Diesen meist am stärksten sich bemerkbar machenden Fehler gleichen wir dadurch aus, daß wir die Ablesung an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen des Teilkreises vornehmen. Es genügt, an einem Ablesemikroskop Grad, Minuten und Sekunden abzulesen und am andern nur die Sekunden. Aus den Sekundenwerten wird der zu verwertende, die Exzentrizität ausschaltende Mittelwert gebildet. Die Ablesung selbst erfolgt mit Hilfe von Meßmikroskopen, die am Grundgestell angeordnet sind und die die Beobachtung an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen des Teilkreises, in Abb. 4 durch N gekennzeichnet, gestatten.

Um den Teilungsfehler, der darin besteht, daß die einzelnen Teilintervalle nicht genau gleich sind, auszuschalten, werden wir mehrere Messungen hintereinander unter Benutzung anderer Stellen des Teilkreises ausführen, was dadurch, daß wir den Hilfskreis K nacheinander in voneinander verschiedenen Stellungen mit dem Teilkreis T fest verklemmen, erreicht werden kann. So sind wir in der Lage mehrere Messungen hintereinander mit verschiedenen Zahlen zu machen, deren Ergebnisse uns zu den wahrscheinlichsten, in der Rechnung zu verwertenden Winkeln mitteln.

8. Die Autokollimationsokulare nach Gauss und Abbe. Ein Okular zur Autokollimation wurde schon von Gauss angegeben. In seiner einfachsten Form ist es in Abb. 5 dargestellt. Zwischen dem Okular Ok und dem Fadenkreuz M ist ein unter 45° zur optischen Achse des Beobachtungsfernrohrs stehender Spiegel P eingefügt, der durch eine seitliche Öffnung im Rohr Licht erhält und dieses auf die Fadenkreuzebene wirft, die sich im Brennpunkt des Fernrohrobjektivs befindet. Schauen wir durch das Objektiv in das Rohr, so sehen wir ein dunkles Kreuz auf hellem Grunde. Die vom Kreuz ausgehenden Abbildungsstrahlen treten aus dem Objektiv, da das Kreuz in dessen Brennebene liegt, als Parallelstrahlenbündel aus. Bringen wir in ihren Weg einen Planspiegel, der senkrecht zu ihrer Fortpflanzungsrichtung steht, so werden sie in sich zurückgeworfen und vereinigen sich nach dem abermaligen Durchtritt durch das Objektiv wiederum in dessen Brennebene zu einem wirklichen Bilde des Fadenkreuzes, das mit dem Fadenkreuz selbst zusammenfällt. Eine solche rückkehrende Vereinigung der Strahlen im Gegenstandsort selbst nennen wir Autokollimation. Nur wenn der Bildort mit dem Ort des Fadenkreuzes genau zusammenfällt und keine Parallaxe (vgl. Ziff. 9 u. 68) zwischen beiden vorhanden ist, steht das Fernrohr auf Unendlich ein. Ist Parallaxe vorhanden, so muß diese durch Verschieben des Objektivs beseitigt werden. Um günstige Helligkeitsverhältnisse zu bekommen, wird die Platte P vorteilhaft halbdurchlässig versilbert.



Abb. 5. Einfaches Gausssches Okular mit unter 45° geneigter, halbdurchlässig versilberter Platte P, nur für verhältnismäßig langbrennweitige Okulare geeignet.

Diese Anordnung ist, da der Spiegel immerhin verhältnismäßig große Ausmaße besitzt, nur für verhältnismäßig großbrennweitige Okulare, also nur für kleine Vergrößerungen brauchbar. Wollen wir auch sehr kurzbrennweitige

Okulare, also große Vergrößerungen, zur Beobachtung benutzen, so müssen wir das Okular konstruktiv etwas abändern, etwa so wie es Abb. 6 zeigt[1]). Zwischen das Okular Ok und die Fadenkreuzebene M wird ein Hilfslinsensystem O_1O_2 zwischengeschaltet, das M nach F im Verhältnis 1:1 abbildet. Das in F entstehende Bild wird durch das Okular Ok betrachtet. Zwischen den beiden Linsen O_1 und O_2 des Hilfssystems besteht paralleler Strahlengang, in den unter 45° zur optischen Achse des Fernrohrs eine halbdurchlässig versilberte, ebene Glasplatte P zwischengebracht ist, die von der Seite her Licht erhält, das als Parallelstrahlenbündel auf sie trifft, dadurch daß die Lichtquelle L sich im Brennpunkt einer dritten Linse O_3 befindet. Die Linse O_3 bildet dann die Lichtquelle L auf die Fadenkreuzebene M ab. Es ist günstig ein 4-Volt-Lämpchen zu verwenden, dessen Glashülle mattiert ist.

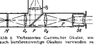


Abb. 6. Verbessertes GAUSSsches Okular, um auch kurzbrennweitige Okulare verwenden zu können.

Das GAUSSsche Okular wurde von ABBE verbessert und vor allem so umkonstruiert, daß ein Spalt eingebaut werden konnte. Das Grundsätzliche des ABBEschen Autokollimationsokulars ist aus Abb. 7 und 8 ersichtlich. Abb. 7 ist ein Längsschnitt, Abb. 8 eine Aufsicht auf die Anordnung in der Brennebene.



Abb. 7. Längsschnitt durch ein ABBEsches Autokollimationsokular mit Beleuchtungsprisma P und veränderlichem Spalt Sp.



Abb. 8. Aufsicht auf die Spaltebene eines ABBEschen Autokollimationsokulars mit Einstellfaden F und Mikrometerschraube S zur Einstellung der Spaltbreite.

In dieser befindet sich an Stelle des Fadenkreuzes vom GAUSSschen Okular ein Spalt Sp, der mit Hilfe der Mikrometerschraube S auf jede gewünschte Spaltbreite eingestellt werden kann. Die Beleuchtung erfolgt mittels eines kleinen 45°-Prismas P, dessen unter 45° geneigte Fläche voll versilbert ist, und das das durch eine Öffnung im Rohr einfallende Licht auf den Spalt wirft. Das von den zurückkehrenden Strahlen wieder in der Brennebene entworfene Spaltbild kann nun aber nicht mehr mit dem Spalt selbst in Deckung gebracht werden, sondern wird in Abb. 8 in die rechte Gesichtsfeldhälfte zu liegen kommen. Zur Einstellung können wir dann entweder die über das Prisma P nach rechts hinaus geeignet verlängerten Spaltbacken verwenden, wie dies ABBE zuerst getan hat, oder wir benutzen einen Faden, der die genaue Fortsetzung des Spaltes darstellt. Der Spalt selbst liegt in der linken Hälfte des Gesichtsfeldes, während sein rechtes Ende mit dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes zusammenfällt (vgl. dazu Ziff. 16).

[1]) F. KOHLRAUSCH, Lehrb. d. prakt. Physik S. 281, Abb. 120. 1923.

9. Die Justierung des Spektrometers. Von der gebrauchsfertigen Justierung eines Spektrometers sind verschiedene Bedingungen zu erfüllen.

Zunächst sind beide Fernrohre auf Unendlich einzustellen, so daß zwischen beiden ein paralleler Strahlengang besteht. Diese Unendlichstellung eines Fernrohres kann erfolgen durch parallaxenfreies[1]) Einstellen der Einstellmarke auf einen sehr weit entfernten Gegenstand, zum Beispiel eine Wolke, oder, was zweckmäßiger ist, mit Hilfe des oben beschriebenen Autokollimationsokulars. In diesem Falle bringen wir vor das Objektiv einen guten Planspiegel, der das vom Spalt des Okulars ausgehende Licht wieder in das Objektiv zurückwirft und zu einem Spaltbild vereinigt. Dieses Spaltbild und die Einstellmarke dürfen keine Parallaxe gegeneinander zeigen. Ist solche vorhanden, müssen wir das Objektiv so lange verschieben, bis keine Parallaxe mehr festgestellt werden kann; denn dann und nur dann ist das Fernrohr auf unendlich eingestellt, und die vom Spalt kommenden Strahlen treten als Parallelstrahlenbündel aus dem Objektiv aus.

Um ein Spaltrohr, das kein Autokollimationsokular besitzt, auf Unendlich einzustellen, benutzen wir das bereits auf Unendlich eingestellte Beobachtungsfernrohr und richten dieses nach dem Spaltrohr. Die Lage des im Beobachtungsfernrohr erscheinenden Spaltbildes wird so lange geändert dadurch, daß das Objektiv des Spaltrohrs gegenüber dem Spalt verschoben wird, bis zwischen Spaltbild und Einstellmarke keine Parallaxe mehr festzustellen ist.

Sache des Mechanikers ist es, Spalt und Einstellmarke parallel zur Achse des Teilkreises auszurichten.

Die zweite Bedingung, die ein zur Messung verwendbares Spektrometer erfüllen muß, ist die, daß die optischen Achsen der Fernrohre auf der Drehungsachse des Teilkreises senkrecht stehen. Um dies zu erreichen, benutzen wir eine planparallele Glasplatte, die an Stelle des Prismas auf den ABBEschen Halter oder auf den Prismentisch aufgebracht wird. Wir stellen zuvörderst das Beobachtungsfernrohr senkrecht zu dieser Platte und beobachten das von der Platte ins Fernrohr zurückgeworfene Spaltbild (Autokollimationsbild). Drehen wir nun den Hilfskreis K (Abb. 4) um 180° und kann auch jetzt das Autokollimationsbildchen durch einfaches Drehen des Hilfskreises an die gleiche Stelle im Okular wie vorher gebracht werden, dann ist die Glasplatte parallel zur Drehungsachse des Teilkreises und die optische Achse des Fernrohrs senkrecht zur Glasplatte und damit auch senkrecht zur Drehachse des Teilkreises. Sollte dies nicht der Fall sein, so kann die richtige Justierung dadurch erzielt werden, daß die eine Hälfte der Abweichung durch Drehen an der für die Glasplatte wirksamen Justierschraube S_2 und die andere Hälfte durch Drehen der für die Fernrohrachse wirksamen Justierschraube S_6 behoben wird. Durch mehrmaliges Drehen der planparallelen Glasplatte um 180° und gleichzeitiges Nachjustieren an beiden genannten Schrauben wird schließlich eine einwandfreie Ausrichtung des Beobachtungsfernrohres senkrecht zur Drehungsachse des Teilkreises erreicht.

Die zu benutzende Planplatte braucht nun aber keineswegs eine streng planparallele Platte zu sein. Es genügt den Anforderungen auch eine mit einem kleinen Keilfehler behaftete Planplatte, solange die in einem solchen Falle auftretenden beiden Autokollimationsbildchen noch gleichzeitig im Gesichtsfeld erscheinen, so daß durch geeignetes Drehen der Platte in einer ihrer ebenen Endflächen die beiden Bildchen auf gleiche Höhe gebracht werden können, worauf wir die Ausrichtung in ganz gleicher Art und Weise, wie oben beschrieben, durchführen können.

---

[1]) Vgl. ds. Bd. XVIII, Artikel H. KESSLER, Prüfung der opt. Instr. Ziff. 68.

Hierauf gestaltet sich die Senkrechtstellung des Spaltrohrs zur Umdrehungsachse sehr einfach, indem wir dieses durch Nachdrehen der Schraube S_1 so ausrichten, daß das Bild des Spaltes im Beobachtungsfernrohre am gleichen Orte steht wie das oben benutzte Autokollimationsbildchen.

10. Die Justierung des Prismas. Das Prisma wird auf das Tischchen oder auf den ABBEschen Halter H (Abb. 4) aufgebracht. Dabei müssen wir, um eine einwandfreie, den theoretischen Voraussetzungen genugende Messung durchführen zu können, verlangen, daß die brechende Kante parallel mit der Umdrehungsachse des Teilkreises verläuft. Dies wird dann und nur dann der Fall sein, wenn die mit Hilfe des Beobachtungsfernrohrs von beiden Prismenflächen zu erhaltenden Autokollimationsbildchen in der gleichen Höhe durchs Gesichtsfeld laufen. Ein sich notwendig machendes Nachrichten kann beim Prismentisch mit Hilfe der Schrauben, beim ABBEschen Halter durch Drehen der das Prisma tragenden Hulse H erreicht werden.

Beim Fehlen eines Autokollimationsokulars können wir uns dadurch helfen, daß wir die beiden unter einem kleinen Winkel zueinander stehenden Spalt- und Beobachtungsfernrohre benutzen, welche Anordnung auch bei der Messung des brechenden Winkels Verwendung finden kann (Ziff. 11).

11. Die Messung des brechenden Prismenwinkels. Allen Verfahren zur Ermittelung der Brechzahl ist die Messung des brechenden Prismenwinkels gemeinsam, während der wesentliche Unterschied nur der ist, wie die einzelnen Methoden das Problem der Ermittlung des ablenkenden Winkels, im erweiterten Sinne aufzufassen, lösen. Der Besprechung der einzelnen Verfahren sei deshalb noch ein Abschnitt uber die zum brechenden Winkel fuhrenden Wege vorangestellt. Als grundsatzlich verschieden liegen hier zwei Möglichkeiten vor, insofern als das eine Verfahren mit Autokollimation arbeitet, also nur ein Fernrohr braucht, während bei der zweiten Moglichkeit Spalt- und Beobachtungsfernrohr zu Hilfe genommen werden.

Bei allen Spektrometern, die noch kein Autokollimationsokular besitzen, kommt nur die Verwendung der beiden Rohre in Frage, wobei wieder zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden können. Im einen Falle können wir Spaltrohr und Prisma festhalten, während das mit dem Teilkreis fest verbundene Beobachtungsfernrohr gedreht wird (Abb. 9). Der das justierte Prisma tragende Hilfskreis K (Abb. 4) wird so gedreht, daß die brechende Kante des Prismas ungefähr vor der Mitte des Objektivs O_1 vom Spaltrohr steht, so daß die parallel aus diesem austretenden Strahlen nahezu unter gleichen Einfallswinkeln, was aber durchaus nicht unbedingt erfüllt sein muß, auf die beiden Prismenflächen auftreffen, wo sie reflektiert werden. In dieser Lage ziehen wir die Klemmung S_4 an, so daß das Prisma zum Spaltrohr in unveränderlicher Lage bleibt. Im Beobachtungsfernrohr wird dann einmal die Einstellmarke auf das von der Fläche I und dann auf das von der Fläche II reflektierte Spaltbild eingestellt, wodurch ein Winkel ψ gemessen wird, aus dem sich

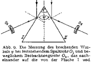


Abb. 9. Die Messung des brechenden Winkels φ bei feststehendem Spaltrohr O_1 und beweglichem Beobachtungsrohr O_2, das nacheinander auf die von der Fläche I und dann auf die von der Fläche II reflektierten, von O_1 kommenden Parallelstrahlen eingestellt wird. Der dadurch beobachtete Winkel ψ ist gleich dem doppelten brechenden Winkel φ des Prismas.

der brechende Winkel durch die einfache Beziehung $\varphi = \psi/2$ berechnen läßt. Dieses Verfahren liefert in den meisten Fällen unsichere Ergebnisse, in der Hauptsache wohl deshalb, weil die an den Flächen *I* und *II* stattfindenden Reflexionen nur dann gute Bilder des Spaltes im sorgfältig auf Unendlich eingestellten Beobachtungsfernrohr liefern, wenn die Flächen einwandfrei eben sind. Denn sind die Flächen auch nur wenig kugelig, so ist bei dem in diesem Falle sehr schrägen Einfall der Lichtstrahlen auf die reflektierende Fläche das zu beobachtende Bild stark astigmatisch und dadurch infolge der auftretenden Parallaxe zur Messung ungeeignet, was die Meßgenauigkeit ganz erheblich herabdrückt.

Im zweiten Falle werden Spalt und Beobachtungsrohr unter einem möglichst spitzen Winkel zueinander unveränderlich aufgestellt (Abb. 10). Der Winkel muß deshalb so spitz als möglich gewählt werden, weil wir nur dadurch die besprochenen Nachteile des schrägen Einfalls auf ein Minimum bringen können. Das Prisma wird mit dem Teilkreis zusammengeklemmt und so lange gedreht, bis die an der Fläche *I* reflektierten Strahlen ein Bild in Deckung mit der Einstellmarke des Beobachtungsfernrohrs entwerfen. Darauf drehen wir das Prisma weiter, bis das gleiche mit dem von der Fläche *II* entworfenen Bilde der Fall ist. Um dies zu erreichen, müssen wir das Prisma um einen Winkel ϱ verdrehen. Der brechende Winkel ist dann einfach $\varphi = 180 - \varrho$. Diese Methode hat Ähnlichkeit mit der nun noch zu besprechenden Autokollimationsmethode.



Abb. 10. Die Messung des brechenden Winkels φ erfolgt, indem Spalt-(O_1)- und Beobachtungs-(O_2)-Rohr unter einem spitzen Winkel zueinander fest eingestellt werden. Durch geeignetes Drehen des Prismas wird erreicht, daß im Beobachtungsrohr O_2 nacheinander die durch Strahlenreflexion an den Flächen I und II bedingten Spaltbilder im Fadenkreuz einstehen. Dabei muß das Prisma um den Winkel ϱ gedreht werden, so daß der gesuchte brechende Winkel $\varphi = 180 - \varrho$ wird.

Wie schon gesagt, haftet all den Methoden, bei denen das bei schrägem Einfall reflektierte Bild beobachtet wird, der Nachteil an, daß bei nicht besonders einwandfrei eben polierten Prismenflächen die Meßgenauigkeit mit wachsendem Einfallswinkel immer schlechter wird. Die Autokollimationsmethode, der der in sich zurückkehrende Strahl, also der senkrechte Einfall, entspricht, leidet nicht unter diesem Mangel. Bei sehr kleinem Einfallswinkel äußert sich eine möglicherweise vorhandene Kugelgestalt der Prismenfläche nur darin, daß die zurückkehrenden Strahlen nicht mehr parallel, sondern je nachdem schnittstrebig oder schnittflüchtig sind, was zur Folge hat, daß eine Vereinigung aller Strahlen nicht im Brennpunkt, sondern inner- oder außerhalb desselben auf der Achse stattfindet, wodurch eine gewisse Parallaxe zwischen der Einstellmarke und dem Spaltbild bedingt sein kann, die Anlaß zu fehlerhaften Einstellungen sein wird. Bei den bei Spektrometern im allgemeinen benutzten Objektiven, deren Brennweiten wohl kaum über 500 mm hinausgehen dürften, meist bei etwa 250 mm liegen, tritt eine merkbare, schädigende Parallaxe aber erst bei verhältnismäßig großen Abweichungen von der Planheit auf, so daß die bei der Autokollimationsmethode an die Planheit der Fläche gestellten Bedingungen geringer und leichter ausführbar sind als die bei schräger Reflexion zu fordernden.

Bei der Autokollimationsmethode können wir zwei Wege einschlagen, die vollständig gleichwertig sind; entweder wir lassen das Fernrohr feststehen und drehen das Prisma, oder umgekehrt.

Der erste Weg ist theoretisch und in der messenden Durchführung gleichartig mit dem oben an zweiter Stelle geschilderten Verfahren und führt auch zu dem gleichen Ergebnis $\varphi = 180° - \varrho$. Dabei wird bei feststehendem Fernrohr und bei beweglichem, mit dem Teilkreis gekoppelten Prisma nacheinander zuerst das von der Fläche *I*, dann das von der Fläche *II* herrührende Autokollimationsbildchen eingestellt. Der dazu notwendige Umdrehungswinkel des Prismas ist ϱ.

Um, wie in Ziff. 7 gesagt, die Genauigkeit der Winkelmessung zu erhöhen, können wir den mehrfachen Winkel messen, was wir an dem eben geschilderten Verfahren weiter ausführen wollen. Nach der Einstellung auf Fläche *II* klemmen wir den Teilkreis fest (Abb. 4) durch Anziehen der Klemmung K_2, lösen die Klemmung K_1 und drehen das Prisma ohne den Teilkreis, bis wieder Fläche *I* einsteht. Jetzt wird wieder Klemmung K_1 angezogen und darauf Klemmung K_2 gelockert. Wir drehen nun das Prisma mit dem Teilkreis bis Fläche *II* zum zweitenmal einsteht. Die Differenz dieser Endstellung gegen die Anfangsstellung ist der doppelte Winkel 2ϱ. Dieses Verfahren kann so oft, als gewünscht, wiederholt werden. Es empfiehlt sich, es so oft zu tun, bis der vervielfachte Winkel etwa eine volle Teilkreisumdrehung in Anspruch nimmt.

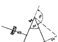


Abb. 11. Die Messung des brechenden Winkels φ erfolgt bei feststehendem Autokollimationsfernrohr, indem wir durch Drehen des Prismas die an den Flächen I und II zu erhaltenden Autokollimationsbildchen nacheinander im Fadenkreuz einstehen lassen. Dabei wird das Prisma um den Winkel ϱ gedreht, aus dem sich der brechende Winkel als $\varphi = 180 - \varrho$ ergibt.

Beim zweiten Weg lassen wir das Prisma feststehen und drehen das mit dem Teilkreis zusammengeklemmte Beobachtungsfernrohr in die beiden Stellungen, in denen das von Fläche *I* bzw. *II* herrührende Autokollimationsbildchen mit der Einstellmarke einsteht (Abb. 12). Der dazu nötige Drehungswinkel, genommen um die brechende Kante herum, ist ϱ, so daß auch hierbei für den brechenden Winkel sich die Beziehung $\varphi = 180 - \varrho$ ergibt.



Abb. 12. Die Messung des brechenden Winkels φ erfolgt bei feststehendem Prisma, indem durch Beobachten des Autokollimationsbildchens das Autokollimationsfernrohr so eingestellt wird, daß seine Achse zunächst auf der Seite I des Prismas senkrecht steht. Durch eine geeignet große Drehung des Fernrohrs wird es senkrecht zur Fläche II gestellt. Dabei muß das Fernrohr um den Winkel ϱ gedreht werden, woraus der brechende Winkel als $\varphi = 180 - \varrho$ folgt.

β) Die grundlegenden Meßverfahren.

12. Die Methode der Minimalablenkung nach FRAUNHOFER. Zur Ermittelung des Ablenkungswinkels des Lichtstrahls oder eines damit zusammenhängenden Winkels sind die verschiedensten Wege begangen worden. Am bekanntesten ist das FRAUNHOFERsche Verfahren der Minimalablenkung.

Dieses Verfahren ist nicht nur das älteste, sondern wohl auch das am meisten in Anwendung gebrachte Verfahren. Es wurde von FRAUNHOFER[1]) erfunden und von ihm bei seinen klassischen Messungen der Brechungszahlen und Dis-

[1]) J. v. FRAUNHOFER, Denkschriften, München Bd. 5, S. 193. 1817; Ges. Schriften, herausgeg. von LOMMEL. 1888; Gilberts Ann. Bd. 56, S. 264—313. 1817.

persionen verwendet. Die Methode beruht darauf, daß der in einem Hauptschnitt des Prismas (Abb. 13) verlaufende Strahl einer bestimmten Wellenlänge λ symmetrisch das Prisma durchsetzt, d. h. daß der Einfalls- und Austrittswinkel einander gleich sind: $\alpha = \beta$. Ist δ der Ablenkungswinkel, dann gelten die einfachen Beziehungen

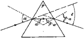


Abb. 13. Verfahren der Minimalablenkung nach FRAUNHOFER. Der minimal abgelenkte Strahl durchsetzt das Prisma symmetrisch. Es ist dann

$$n_\lambda = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

$$\varphi = 2\alpha'; \qquad \delta = 2(\alpha - \alpha')$$

und

$$\sin\alpha = n_\lambda \cdot \sin\alpha', \tag{13}$$

woraus sich für die Brechungszahl die Bestimmungsgleichung

$$n_\lambda = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{14}$$

ergibt. Für diesen Fall des symmetrischen Strahlengangs ist die Ablenkung δ zugleich ein Minimum, was bedeutet, daß wir hierbei im Vergleich zu den Ablenkungen bei allen anderen Einfallswinkeln die kleinstmögliche Ablenkung des verwendeten Prismas vorliegen haben. Dieses Merkmal wird bei der Einstellung benutzt, indem wir bei feststehendem Spaltkollimator versuchen, durch Drehen des Prismas dieses für die gewünschte Linie in die Minimumstellung zu bringen, was wir daran erkennen, daß beim Drehen des Prismas in einer Richtung das Spaltbild sich zunächst im gleichen Sinne mitdreht, dann aber von einer bestimmten Stellung ab beim gleichsinnigen Weiterdrehen des Prismas eine rückläufige Bewegung ausführt. Dieser Umkehrpunkt ist die Stellung der Minimalablenkung. Im Umkehrpunkt wird das Prisma festgehalten und das Beobachtungsfernrohr auf die gerade im Minimum befindliche Linie eingestellt. Um den Ablenkungswinkel δ zu bestimmen, können wir zwei Wege einschlagen. Entweder wir suchen nun noch die Einstellung des Beobachtungsfernrohrs auf das direkte Spaltbild („gerade Durchsicht") und bekommen so den einfachen Ablenkungswinkel. Oder wir drehen das Prisma so, daß die Ablenkung nach der anderen Seite von der „geraden Durchsicht" aus erfolgt und suchen dort nochmals die Minimumstellung durch Beobachtung des Umkehrpunktes, wodurch wir die Einstellung des Beobachtungsfernrohrs auf das direkte Spaltbild vermeiden und den doppelten Ablenkungswinkel erhalten (Abb. 14). Dieses letztgenannte Verfahren ist dem erstgenannten vorzuziehen, da wir dadurch den Ablenkungswinkel bei sonst gleichen Verhältnissen nur mit etwa dem halben Meßfehler der ersten Methode behaftet auffinden.

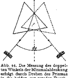


Abb. 14. Die Messung des doppelten Winkels der Minimalablenkung erfolgt durch Drehen des Prismas in die beiden zur geraden Durchsicht symmetrischen Stellungen.

Der brechende Winkel des Prismas wird nach einer der in Ziff. 11 genannten Methoden bestimmt. Über seine zulässige Größe werden wir uns klar, wenn wir

beachten, daß die Gleichung (13) insbesondere für den Austritt nur so lange erfüllt werden kann, als α' nicht den Grenzwinkel der Totalreflexion übersteigt, der im äußersten Falle gerade erreicht sein darf, d. h. es muß

$$n \cdot \sin\alpha' \equiv n \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \leqq 1$$

sein. Daraus erhalten wir als Grenzbedingung für den Winkel φ:

$$\varphi \leqq 2 \cdot \arcsin\frac{1}{n}. \tag{15}$$

Diese dadurch festgelegte **oberste Grenze für den brechenden Winkel** liegt für ein gering brechendes Glas (Kronglas) bei etwa 80°, für ein stark brechendes Glas (schweres Flintglas) bei etwa 70°. Im allgemeinen wird als brechender Winkel für die Beobachtung der Minimalablenkung ein solcher von etwa 60° gewählt, so daß die Messung nicht zu nahe beim streifenden Ein- und Austritt erfolgt; denn je schräger der Einfall auf eine ebene Fläche ist, desto besser muß die Planheit der Fläche sein, soll ein gutes Bild erhalten werden.

Aus der Gleichung (14) bekommen wir durch Differentiation als größten bei dieser Methode in den Brechungszahlen zu machenden Fehler

$$\Delta n = \frac{\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi+\delta}{2} \cdot \Delta\delta + \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \Delta\varphi}{2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}}, \tag{16}$$

worin $\Delta\varphi$ der Meßfehler des brechenden Winkels und $\Delta\delta$ der Beobachtungsfehler bei der Bestimmung des Ablenkungswinkels ist. Den brechenden Winkel werden wir im allgemeinen mit einem guten, mittelgroßen Spektrometer ($f = 250$ mm) auf $\Delta\varphi = \pm 1''$ ermitteln können, während schon bei großen brechenden Winkeln die gleiche Meßgenauigkeit für die Bestimmung der Maximalablenkung δ kaum möglich ist. Hier werden wir mit dem doppelten oder dreifachen Fehler rechnen müssen. Legen wir einen brechenden Winkel von $\varphi = 60°$ zugrunde, so entspricht diesem bei einem mittleren $n_D = 1{,}60$ ein Ablenkungswinkel δ von etwa 45°. Unter diesen Umständen ist der **Meßfehler** Δn:

bei	$\Delta\delta = \pm 1''$	$\Delta\delta = \pm 2''$	$\Delta\delta = \pm 3''$
$\Delta\varphi = 1''$	$\pm 0{,}000007$	$\pm 0{,}000009$	$\pm 0{,}000013$

Bei der Methode der Minimalablenkung wird somit die Brechzahl im allgemeinen mit einer Genauigkeit von **einer** Einheit der fünften Dezimale zu ermitteln sein.

Je kleiner der brechende Winkel wird, desto unsicherer wird das Aufsuchen der Minimumstellung, und für sehr kleine Winkel wird sie auch tatsächlich wertlos, da für diese kleinen Winkel die Ablenkung für kleine Einfallswinkel praktisch unabhängig von diesen wird. Für kleine Winkel, es kommen nur Winkel kleiner als 1° in Frage, können wir den Winkel φ, im Bogenmaß gemessen $\varphi' = \varphi \cdot 2\pi/360$, praktisch gleich seinem Sinus setzen. Wir bekommen demnach für solche kleine Prismen für die Brechzahl die Bestimmungsgleichung

$$n = \frac{\delta' + \varphi'}{\varphi'} = \frac{\delta + \varphi}{\varphi}, \tag{17}$$

woraus sich für die Ablenkung selbst die Beziehung

$$\delta = (n - 1) \cdot \varphi \tag{18}$$

ableitet, wobei nun aber die Winkel δ und φ in beliebigem Maß gemessen werden können.

Die Methode erfordert, daß fur jede Wellenlänge die Beobachtung der Ablenkung und die Berechnung der Brechzahl n_λ besonders durchgeführt wird. Aus den so gefundenen Brechzahlen n_λ werden erst die Dispersionen errechnet.

PULFRICH[1]) weist darauf hin, daß die Methode der minimalen Ablenkung als Spezialfall einer ganz allgemeinen Methode (vergl. auch Ziff. 17) betrachtet werden kann. Lassen wir den Strahl (Abb. 15) unter einem beliebigen Winkel α einfallen, so erfährt er eine bestimmte Ablenkung δ. Wir bringen das Beobachtungsfernrohr in die Austrittsrichtung und klemmen es darin fest. Drehen wir nun das Prisma um eine zu seiner brechenden Kante parallele Achse (Spektrometerachse) so weit, daß wieder ein Spaltbild im Beobachtungsfernrohr einsteht, dann ist der Ablenkungswinkel wieder derselbe und wir haben nur Einfalls- und Austrittswinkel miteinander vertauscht. Ist der Winkel, um den wir das Prisma bei dieser Beobachtung drehen müssen ϱ, so erhält PULFRICH durch eine etwas weitläufige Ableitung für die gesuchte Brechzahl die Formel



Abb. 15. Die Ablenkung δ des Strahls bei beliebigem Einfallswinkel α. Dabei läßt sich jeder gewünschte Winkel α einstellen, wenn das zunächst auf gerade Durchsicht eingestellte Beobachtungsfernrohr um den Winkel $\xi = 180° - 2\alpha$ gedreht und das Prisma so eingestellt wird, daß die an der Eintrittsfläche unter dem Winkel α reflektierten Strahlen im Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs ein Bild des Spaltes entwerfen. (Vgl. Ziff. 17.)

$$n = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\varrho}{2}}{\cos\frac{\alpha'-\beta'}{2}}, \tag{19}$$

worin die Winkeldifferenz $(\alpha' - \beta')$ gegeben ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha'-\beta'}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varrho}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta+\varphi}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \tag{20}$$

Beachten wir, daß für den Fall der Minimalablenkung der Drehungswinkel $\varrho = 0$ wird, so folgt aus der Gleichung (20) $\alpha' = \beta'$, und da in Gleichung (19) der zweite Faktor gleich 1 wird, geht diese in den bekannten Ausdruck der Gleichung (14) über.

13. Die Vorrichtung zur selbsttätigen Einstellung des Minimums der Ablenkung nach LANGLEY. Bei Messungen nach vorstehendem Verfahren, vor allem in den Gebieten der unsichtbaren Wellenlängen, ist es von Vorteil, wenn wir das Minimum der Ablenkung durch eine geeignete Vorrichtung selbsttätig für jede Wellenlänge erhalten können. Für den Bau einer solchen Einrichtung müssen wir das Folgende beachten.

Da eintretender und austretender Strahl (Abb. 16) sich in einem Punkte B der Winkelhalbierenden des brechenden Winkels schneiden und zu dieser symmetrisch liegen, also mit ihr gleiche Winkel einschließen, können wir zu den folgenden Betrachtungen uns das Prisma durch die Winkelhalbierende BD (Abb. 16) des brechenden Winkels ersetzt denken. Dann ist ABC der Gang eines minimal abgelenkten Lichtstrahls von der Wellenlänge λ. Drehen wir bei festgehaltener Einfallsrichtung AB das Prisma, also auch seine Winkelhalbierende BD um den Winkel δ nach BD', dann bildet der in dieser Stellung minimal abgelenkte Strahl BC' einer Wellenlänge λ' mit der Winkelhalbierenden BD' den Winkel $\beta + \delta$. Das auf die Richtung BC eingestellte

[1]) C. PULFRICH, Winkelmannsches Handb. d. Physik Bd. VI, S. 595. 1906.

Beobachtungsfernrohr muß somit bei der Einstellung in die Richtung des Strahls BC' um den Winkel 2δ im gleichen Sinne wie das Prisma gedreht werden. Eine selbsttätige Erhaltung des Minimums der Ablenkung werden wir folglich erreichen, wenn wir eine mechanische Vorrichtung bauen, durch die bei Drehung des Prismas das Beobachtungsfernrohr gleichzeitig eine doppelt so große gleichsinnige Drehung erfährt.

Die Verwirklichung dieses Gedankens hat LANGLEY[1]) durchgeführt. Zu diesem Zwecke werden am Spektrometer (Abb. 17) auf dem Arm des Spaltrohrs P_1 bzw. des Beobachtungsrohrs B zwei Punkte P_1 bzw. P_2, die gleichen Abstand von der Drehachse A des Teilkreises besitzen, festgelegt. Längs der Winkelhalbierenden des zwischen den beiden Armen bestehenden Winkels β, die als Gleitstange C mit Schlitz ausgebildet ist und durch die Drehachse A des Prismentisches T, mit der sie fest verbunden ist, geht, kann ein Punkt P_3 hin und her verschoben werden. Dieser Punkt P_3 ist sowohl mit P_1 als auch P_2 durch feste gleich lange Stangen verbunden, die in P_1 bzw. P_2 Drehpunkte besitzen. Drehen wir nun den Prismentisch T um den Winkel δ (Abb. 17), so gleitet der Punkt P_3 auf der Gleitschiene C nach der Drehachse zu, weil der Abstand P_1P_3 durch die angebrachte Stange konstant gehalten wird. Dabei wird dann aus dem gleichen Grunde durch die Stange P_3P_2 der Arm des Beobachtungsrohres B selbsttätig in gleicher Richtung um den doppelten Winkel 2δ gedreht; denn, da die beiden Dreiecke $\Delta P_1AP_3'$ und $\Delta P_2'AP_3'$ kongruent sind, sind auch die Winkel bei A einander gleich. Es ist $\sphericalangle P_2AP_3' = \beta + \delta$, somit $\sphericalangle P_1AP_2' = 2\beta + 2\delta = \sphericalangle P_1AP_2 + \sphericalangle P_2AP_2'$, woraus, da $\sphericalangle P_1AP_2 = 2\beta$ ist, die Beziehung $\sphericalangle P_2AP_2' = 2\delta$ folgt.

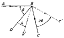


Abb 16 Die schematische Darstellung der Minimalablenkung für zwei verschiedene Lagen des Prismas und dementsprechend für zwei verschiedene Wellenlängen Wird dabei das Prisma um den Winkel $DBD' = \delta$ gedreht, dann muß das Beobachtungsfernrohr um den Winkel $CBC' = 2\delta$ gedreht werden



Abb. 17. Die LANGLEYsche mechanische Vorrichtung zur selbsttätigen Einstellung des Minimums der Ablenkung für alle Wellenlängen. Eine Gleitstange C ist mit der Drehachse A des Spektrometertisches T fest verbunden. Der bewegliche Punkt P_3 ist durch zwei gleich lange Stangen mit den Punkten P_1 und P_2, die auf den Spektrometerarmen gleichweit von der Drehachse entfernt liegen, als Drehpunkten verbunden. Drehen wir die Gleitstange C um den Winkel δ nach C', so wird durch das Gestänge der Arm B des Beobachtungsfernrohr selbsttätig um den Winkel 2δ in die Lage B' gebracht. Für diesen Fall wird eine längere Wellenlänge sich im Minimum befinden als vorher.

Diese mechanische Vorrichtung ist bei großen Spektrometern unter Umständen recht umfangreich und schwerfällig. Sie läßt sich

[1]) S. P. LANGLEY, Wied. Ann. Bd. 19, S. 226—244, 384—400. 1883; Ann. chim. phys. (6) Bd. 9, S. 433—506. 1886.

in kleineren Ausmessungen und sicherer arbeitend schaffen dadurch, daß wir den Punkt P_1 nicht auf den Arm des Spaltrohrs legen, sondern ihn auf einem Arm anbringen, der um die Teilkreisachse beliebig drehbar und in jeder gewünschten Lage feststellbar ist.

Die Anordnung kann naturgemäß auch so getroffen werden, daß der Arm des Beobachtungsrohrs feststeht, während der Arm des Spaltrohrs sich dreht.

14. Die FUCHS-WADSWORTHsche Anordnung zur selbsttätigen Einstellung der Minimal-Ablenkung. Während bei dem LANGLEYschen Verfahren eines der beiden Fernrohre des Spektrometers gedreht werden muß, bleiben bei dem von FUCHS[1]) 1881 in einem Spezialfall und von WADSWORTH[2]) 1894 in voller Allgemeinheit mitgeteilten Verfahren beide Fernrohre in fester Lage zueinander stehen. Gemäß dieser Methode wird dem austretenden, minimal abgelenkten Strahl BC (Abb. 18)

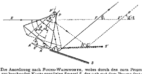


Abb. 18. Die Anordnung nach FUCHS-WADSWORTH, wobei durch den zum Prisma beliebig geneigten, zur brechenden Kante parallelen Spiegel S, der sich mit dem Prisma fest verbunden dreht, die minimal abgelenkten Strahlen aller Wellenlängen in gleicher Richtung (parallel $C'F$) unter dem Winkel ξ gegen die ursprüngliche Einfallsrichtung EB reflektiert werden.

ein ebener Spiegel S (Glasspiegel mit Vorderflächenversilberung zur Vermeidung von Doppelbildern) parallel zur brechenden Kante, aber unter beliebiger Neigung zum Strahl, in den Weg gestellt, wobei nur verlangt wird, daß bei Drehung des Prismas der Spiegel seine Lage diesem gegenüber unverändert beibehält, d. h. daß der Winkel α des Spiegels gegen die Winkelhalbierende BA des brechenden Winkels erhalten bleibt. Dies ist leicht zu erreichen, wenn Prisma und Spiegel auf den Prismentisch des Spektrometers zusammen fest und unveränderlich aufgebracht sind.

Der austretende Strahl BCF bildet mit dem eintretenden Strahl EB einen Winkel ξ, dessen Größe wir leicht durch die beiden aufeinanderfolgenden Winkelbeziehungen

$$\text{in } \triangle ABC: \gamma = 180 - \alpha - \beta$$

$$\text{in } \triangle BCF: \xi = 180 - (180 - 2\beta) - (180 - 2\gamma)$$

als

$$\xi = 180 - 2\alpha \tag{21}$$

ermitteln. Der Winkel ξ ist demnach unabhängig von dem Winkel β zwischen dem einfallenden Strahl und der Winkelhalbierenden, d. h. er ist stets der gleiche, einerlei welche Wellenlänge gerade in Minimalablenkung steht. Denn drehen wir das Prisma um den Winkel δ (Abb. 18), so ändert sich dabei nur β in $(\beta + \delta)$,

[1]) FR. FUCHS, ZS. f. Instrkde. Bd. 1, S. 352–353. 1881.

[2]) F. L. O. WADSWORTH, Phil. Mag. (5), Bd. 38, S. 337–351. 1894.

während α unverändert erhalten bleibt. Die in beiden Fällen minimal abgelenkten Strahlen CF und $C'F'$ sind also parallel. Sie besitzen allerdings eine Parallelversetzung gegeneinander. Diese läßt sich jedoch vermeiden, wenn wir den Punkt A, d. h. die Schnittgerade der Spiegelebene mit der winkelhalbierenden Ebene des brechenden Winkels, mit der Drehachse des Teilkreises zusammenfallen lassen. Haben wir das Beobachtungsfernrohr für eine im Minimum befindliche Linie einmal eingestellt, so wird beim Drehen des Prismas die jeweils im Fadenkreuz einstehende Linie gerade im Minimum der Ablenkung sein.

Aus Gleichung (21) können wir leicht die Spezialfälle ablesen, wenn ξ ein Vielfaches von 45° ist. Der von FUCHS angegebene Fall, daß der austretende Strahl dem eintretenden parallel ist, tritt für $\alpha = 90°$ ein, d. h. wenn die Spiegelebene auf der winkelhalbierenden Ebene senkrecht steht.

Bei Verwendung der FUCHS-WADSWORTHschen Methode zur Messung von Brechzahlen können wir naturgemäß, da ja alle Linien die gleiche Ablenkung dabei erfahren, nicht mehr die bekannte Gleichung (14) der Minimalablenkung zur Rechnung verwenden. Am zweckmäßigsten ist es, den jeweiligen Einfallswinkel zu messen und die Formel des senkrechten Austritts [Gleichung (23), Ziff. 15] zugrunde zu legen, dabei beachtend, daß darin als brechender Winkel nur der halbe des minimalablenkenden Prismas zu nehmen ist:

$$n_\lambda = \frac{\sin\alpha_\lambda}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{22}$$

Um den Einfallswinkel für die einzelnen Wellenlängen nicht immer wieder von neuem bestimmen zu müssen, gehen wir von einer Bezugslinie λ_0 aus, deren Einfallswinkel α_0 für ihre Minimalstellung wir für sich ermitteln, und messen dieser Linie gegenüber die Drehungen δ_λ des Prismas, die notwendig sind, um die anderen Linien im Fadenkreuz des Fernrohrs einstehen zu lassen. Der Einfallswinkel der beobachteten Farbe λ ist dann $\alpha_\lambda = \alpha_0 \pm \delta_\lambda$; $\pm$, je nachdem $\lambda \lesseqgtr \lambda_0$ ist

15. Die Methode des senkrechten Austritts oder des senkrechten Einfalls von MEYERSTEIN. Diese beiden Methoden sind theoretisch gleichwertig. MEYERSTEIN[1]) selbst verwendet allerdings nur den senkrechten Austritt (Abb. 19) aus dem Prisma. Beobachtet wird die Ablenkung δ, die der Strahl dabei erfährt. Aus der Abb. 19 lassen sich die Beziehungen ablesen:

$$\alpha' = \varphi; \quad \alpha = \alpha' + \delta; \quad \sin\alpha = n \cdot \sin\alpha',$$

aus denen wir für die Brechzahl zu der einfachen Beziehung

$$n = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin\varphi} \tag{23}$$

gelangen. Die von MEYERSTEIN angegebene Methode des senkrechten Austritts verlangt, daß das Prisma fest mit dem Beobachtungsfernrohr gekoppelt werden kann, nach dem seine Austrittsfläche vorher mit Hilfe einer Autokollimationsmethode senkrecht zur Achse des Beobachtungsfernrohrs justiert worden ist. Diese Verbindung muß dann um eine vertikale Achse meßbar drehbar sein, so daß beim Einstellen auf die einzelnen Linien, ausgehend von der Einstellung der geraden



Abb 19. Das Verfahren von MEYERSTEIN. Der Strahl fällt unter einem solchen Winkel α ein, daß er senkrecht aus dem Prisma wieder austritt, dabei um den meßbaren Winkel δ aus seiner ursprünglichen Lage abgelenkt. Es ist die gesuchte Brechzahl $n = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin\varphi}$.

[1]) M. MEYERSTEIN, Pogg. Ann. Bd. 98, S. 91—98. 1856.

Durchsicht, nacheinander die Ablenkungswinkel δ_λ für die einzelnen Wellenlängen gemessen werden können.

Diesem Verfahren vorzuziehen wegen der leichteren experimentellen Durchführung ist die optische Umkehrung des Strahlengangs (Abb. 20). Wir lassen den Strahl senkrecht eintreten, was wir dadurch erreichen, daß wir die Eintrittsfläche des Prismas mit Hilfe einer Autokollimationsmethode senkrecht zur optischen Achse des Spaltrohrs einstellen und nun bei unveränderlich feststehendem Prisma die Ablenkungswinkel δ_λ für die einzelnen Wellenlängen durch Einstellen des meßbar zu drehenden Beobachtungsfernrohres in bekannter Weise ausmessen. Die der Berechnung von n_λ dienende Beziehung ist die gleiche wie die oben abgeleitete Formel (23). Dieses Verfahren des senkrechten Eintritts des Strahls läßt sich auch in gleicher Weise durchführen wie die ABBEsche Methode des in sich zurückkehrenden Strahls (Ziff. 16), wir brauchen das dort angegebene Ausmeßverfahren nur sinngemäß hierher zu übertragen. Dieses letztere Verfahren wird insbesondere auch dann von Vorteil sein, wenn es sich um die Bestimmung von Brechungszahlen im Ultraviolett (Ziff. 60)[1] handelt, wo die ABBEsche Methode versagt.



Abb. 20. Das Verfahren, bei dem der Strahl senkrecht in das Prisma eintritt, um aus dem Prisma unter dem Winkel δ gegen seine ursprüngliche Richtung auszutreten. $n = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin\varphi}$.

Der brechende Winkel φ, den die Methode erfordert, ist der halbe des bei der Minimalablenkung notwendigen Winkels, also etwa 30° für gewöhnliches Kron und etwa 20° für stark brechendes Flint.



Abb. 21. Das ABBEsche Verfahren. Der aus dem Autokollimationsfernrohr O austretende Strahl fällt unter einem solchen Winkel α auf das Prisma, daß er von dessen Rückseite in sich zurückgeworfen wird. Es wird $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$.

16. Die Methode des in sich zurückkehrenden Strahls nach ABBE. Bei diesem Verfahren, das in seiner Grundlage, schon von O. LITTROW erdacht, von ABBE[2]) aber bis zur Vollendung weiter ausgebildet worden ist, wird der in das Prisma eintretende Strahl (Abb. 21) an der Rückseite des Prismas so reflektiert, daß er auf dem gleichen Wege zurückkehrt, auf dem er angekommen ist.

Im Brennpunkt F des Fernrohrobjektivs O (Abb. 22) befindet sich ein Lichtspalt, verwirklicht durch ein Paar S'GRAVESANDsche Schneiden. Die von hier ausgehenden Lichtstrahlen werden durch das Objektiv O parallel gemacht, treffen auf die Eintrittsfläche des Prismas, werden gebrochen, treffen auf die Rückseite des Prismas und werden hier teilweise durchgelassen, teilweise reflektiert. Uns interessieren nur die reflektierten Strahlen, weshalb wir, um eine möglichst große Intensität der reflektierten Strahlen zu bekommen, die Rückseite des Prismas versilbern. Die reflektierten Strahlen treffen wieder auf die Vorderfläche, werden hier gebrochen und durch das Objektiv O wieder in dessen Brennebene zu einem Bilde B vereinigt, das je nach der Lage der Rückseite

[1]) H. TROMMSDORF: Die Dispersion Jenaer Gläser im ultravioletten Strahlungsgebiet. Dissertation. Jena. 1901.

[2]) E. ABBE, Jenaische ZS. f. Naturwiss. Bd. 8, S. 96—174. 1874; Ges. Abhandlungen Bd. II, S. 87—123. Jena: G. Fischer. 1906; S. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 9, S. 361—363. 1889; C. PULFRICH, Wied. Ann. Bd. 45, S. 609—665. 1892.

des Prismas zum eintreffenden Strahl mehr oder weniger weit vom Lichtspalt entfernt, links oder rechts von demselben, liegt. Durch geeignete Drehung des Prismas können wir es erreichen, daß die Strahlen auf der Rückseite des Prismas senkrecht (Abb. 21) einfallen, also in sich reflektiert werden, weshalb dann das von den reflektierten Strahlen im Fernrohr erzeugte Bild sich mit dem Spalte in F decken wird. Für diesen Fall allein ist also der Eintrittswinkel des Lichtstrahls ins Prisma gleich seinem Austrittswinkel.

Ein Vergleich dieser ABBEschen Beobachtungsweise durch Autokollimation mit der von FRAUNHOFER vorgeschlagenen (Ziff. 12) läßt uns das Gemeinsame beider Verfahren erkennen. Es werden alle ausschlaggebenden Bedingungen bei beiden Verfahren die gleichen, wenn wir statt des Prismas mit dem brechenden Winkel φ im ABBEschen Verfahren für das FRAUNHOFERsche Verfahren ein Prisma mit einem doppelt so großen brechenden Winkel 2φ wählen, wie dies in Abb. 21 in dem gestrichelten Teil der Abbildung angedeutet ist. Beide Verfahren stellen das Prisma so ein, daß Gleichheit im Eintritts- und Austrittswinkel besteht, der, unter der über den brechenden Winkel gemachten Voraussetzung, bei beiden Verfahren auch derselbe ist (Abb. 21). Während aber bei der FRAUNHOFERschen Anordnung die Gleichheit beider Winkel nur indirekt, nämlich durch das Kriterium der Minimalablenkung herbeigeführt werden kann, wird dieselbe hier direkt durch die Koinzidenz des zurückkehrenden Strahls mit dem eintretenden erhalten.

Gegenüber dem FRAUNHOFERschen Verfahren hat somit diese ABBEsche Anordnung den Vorteil der einfacheren praktischen Durchführbarkeit. Außerdem ist aber ein Vorteil auch der, daß unter sonst gleichen Umständen beim ABBEschen Verfahren das Prisma nur das halbe Material wie beim FRAUNHOFERschen beansprucht.

Beachten wir, daß $\alpha' = \varphi$ ist, so erhalten wir durch Anwendung des Brechungsgesetzes auf die Eintrittsfläche für die Brechzahl n die Bestimmungsgleichung

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}. \tag{24}$$

Um n zu berechnen, müssen wir somit φ und α experimentell bestimmen.

Ersterer wird wieder in bekannter Weise nach einer der in Ziff. 11 entwickelten Methoden ermittelt. Über die obere für den Wert des brechenden Winkels zulässige Grenze erhalten wir Aufschluß, wenn wir beachten, daß auch hier für den Winkel α' höchstens bis zum Grenzwinkel der Totalreflexion gegangen werden kann, d. h. es muß sein $n \cdot \sin\varphi \lesseqgtr 1$ oder

$$\varphi \lesseqgtr \arcsin\frac{1}{n}. \tag{25}$$

Im allgemeinen wird hier der Winkel je nach der Stärke der Brechung zwischen 30° und 20° gewählt.

Für den größtmöglichen theoretischen Meßfehler des Verfahrens erhalten wir aus der Gleichung (24) durch Differentiation

$$\Delta n = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\alpha \cdot \Delta\alpha + \cos\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \Delta\varphi}{\sin^2\varphi}, \tag{26}$$

worin $\Delta\varphi$ die Meßgenauigkeit bei der Ermittelung des brechenden Winkels und $\Delta\alpha$ die für den Einfallswinkel bedeutet. Bei Durchführung des Verfahrens macht es keine Schwierigkeiten, für beide Winkel die gleiche Meßgenauigkeit zu erzielen, die bei einem mittelgroßen Spektrometer etwa $\Delta\varphi = \Delta\alpha = \pm 1''$, bei Messung des vervielfachten Winkels noch günstiger sein wird. Einem mittleren

$n_0 = 1{,}6$ entspricht bei einem brechenden Winkel von $\varphi = 30°$ ein Einfallswinkel von etwa $\alpha = 33°$, weshalb wir für einen solchen Fall mit einem maximalen theoretischen Fehler von zwei Einheiten in der fünften Dezimale bei Ermittelung der Brechzahl rechnen können, der allerdings vielfach noch etwas günstiger sein wird.

Um den Wert des Eintrittswinkels α experimentell zu finden, stellen wir (Abb. 21) das Beobachtungsfernrohr durch Autokollimation zunächst auf die Eintrittsfläche ein, d. h. wir suchen die Richtung des Einfallslotes, dann drehen wir das Beobachtungsfernrohr, bis das von den in das Prisma eintretenden, an der Rückseite des Prismas reflektierten Strahlen entworfene Spaltbild sich mit dem Spalte selbst deckt. Der Drehungswinkel ist der gesuchte Winkel α.

Um diese Autokollimationseinstellungen auf Eintrittsfläche und Rückseite des Prismas durchzuführen, ist es notwendig, ein besonders konstruiertes, sog. Autokollimationsokular am Beobachtungsfernrohr zu benutzen, dessen Bau aus (Ziff. 8, Abb. 7 u. 8) ersichtlich ist. Abbe legt den Spalt in die obere Hälfte des Gesichtsfeldes, während er in der unteren Hälfte des Gesichtsfeldes einen Faden, der die unmittelbare Fortsetzung des Spaltes bildet, als Einstellmarke benutzt.

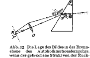


Abb. 22 Die Lage des Bildes in der Brennebene des Autokollimationsfernrohrs, wenn der gebrochene Strahl von der Rückfläche des Prismas nicht genau in sich reflektiert wird

Martens[1]) hält wegen der Krümmung der Spektrallinien durch das Prisma dieses Übereinanderliegen von Spalt und Einstellfaden nicht für ratsam. Er empfiehlt deshalb ein Nebeneinanderliegen der beiden, wodurch aber (vgl. Abb. 22, die diesen Fall schematisch darstellt) eine Korrektion des beobachteten Winkelwertes α notwendig wird, um den wahren Winkelwert α_0 zu erhalten. Ist d der Abstand von Spalt und Einstellmarke in mm, f die Brennweite des Beobachtungsobjektivs in mm und setzen wir voraus, daß als brechender Winkel ein solcher von $\varphi = 30°$ in Frage kommt, dann ist die am beobachteten Winkel α anzubringende Korrektion für eine mittlere Brechungszahl $n = 1{,}55$ nach Martens durch die Beziehung gegeben:

$$\alpha - \alpha_0 = 0{,}117 \cdot \left(\frac{d}{f}\right)^2. \tag{27}$$

Nach Martens soll die aus dieser Formel errechnete Korrektion aber auch für alle anderen von 1,55 verschiedenen Brechungszahlen mit hinreichender Genauigkeit verwendet werden können.

Bei Nebeneinanderliegen von Spalt und Einstellmarke wird also α und damit auch die Brechzahl stets zu groß bestimmt. Für die Brechzahl selbst ist, wenn n_0 die richtige Brechzahl und n die ermittelte darstellt, die an n anzubringende Korrektion:

$$n - n_0 = \frac{n}{8} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) \cdot \left(\frac{d}{f}\right)^2. \tag{28}$$

Für den oben angegebenen mittleren Fall nimmt diese Korrektion den Wert an:

$$n - n_0 = 0{,}1508 \cdot \left(\frac{d}{f}\right)^2. \tag{29}$$

[1]) F. F. Martens, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 3, S. 10—17. 1901.

Praktisch gut durchführbar als Abstand zwischen Spalt und Einstellmarke ist etwa noch $d = 2$ mm. Nehmen wir dazu noch eine Brennweite $f = 280$ mm, wie sie bei guten Spektrometern etwa üblich ist, so erhalten wir als an der Brechzahl im vorliegenden Falle anzubringende Korrektion: $n - n_0 = 0{,}0000077$, d. h. rund acht Einheiten in der sechsten Dezimale, eine Korrektion, die bei genauen Messungen allerdings schon eine nicht gut zu vernachlässigende Rolle spielt.

Nach meinen Erfahrungen ist aber der von MARTENS beanstandete Mangel beim Übereinanderliegen von Spalt und Faden gar nicht störend, solange der Beobachtende darauf achtet, daß er die Einstellungen immer nur an den Teilen des Spaltbildes, die in der Mitte des Gesichtsfeldes liegen, vornimmt; denn es entsprechen ja, wenn wir die Abbildung geometrisch, rechnerisch oder zeichnerisch durchführen, gerade die in der Mitte des Gesichtsfeldes liegenden, also axialen Teile des Spaltbildes den axialen Teilen des Originalspaltes, so daß also für diese Teile die durch das Prisma hervorgerufene Krümmung der Spektrallinien praktisch keine Rolle spielt.

Die Messung der beiden Winkel φ und α kann in drei Einstellungen des Autokollimationsfernrohres durchgeführt werden: 1. Einstellung des Fernrohrs direkt auf die Rückseite des Prismas, 2. Einstellung des Fernrohrs direkt auf die Eintrittsfläche des Prismas; 3. Einstellung des Fernrohrs auf das von der Rückseite durch den in sich zurückkehrenden, gebrochenen Strahl entworfene Bild einer Spektrallinie. Die Winkeldifferenz zwischen 1 und 2 ist der den brechenden Winkel φ zu 180° ergänzende Winkel $(180° - \varphi)$; die Winkeldifferenz zwischen 2 und 3 ist der gesuchte Eintrittswinkel α.

Diese Messung kann für jede einzelne Spektrallinie gesondert durchgeführt werden, so daß dann die Dispersionen als Differenzen der Brechungszahlen errechnet werden können.

ABBE hat daneben aber noch ein Verfahren ausgebildet, um die Dispersionen nicht nur schneller, sondern auch mit größerer Genauigkeit unmittelbar auszumessen. Zu dem Zwecke bestimmen wir beim obigen Autokollimationsverfahren mit Hilfe einer in Winkelwerten geeichten Mikrometerschraube, an deren Teilung $0{,}1' = 6''$ abgelesen, $0{,}01' = 0{,}6''$ geschätzt werden können, indem wir die Linien nacheinander im Beobachtungsfernrohr einstehen lassen, die Winkeldifferenzen δ_λ der einzelnen Linien gegen die F-Linie (486,14 mμ)[1], von der wir vorher die oben beschriebene Messung des Einfallswinkels α_F durchgeführt haben. Wir wissen dann, daß für die einzelnen Linien λ die zugehörigen Einfallswinkel

$$\alpha_\lambda = \alpha_F \mp \delta_\lambda \tag{30}$$

sind; $\mp$ je nachdem $\lambda \gtrless \lambda_F$ ist. Zur Berechnung der Brechungszahlen erhalten wir deshalb aus (22) nacheinander die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} n_\lambda &= \frac{\sin(\alpha_F \mp \delta_\lambda)}{\sin\varphi} \\ \text{und} \qquad n_F &= \frac{\sin\alpha_F}{\sin\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

woraus wir für die Teildispersion der Linie λ gegen die Linie F den Wert

$$n_\lambda - n_F = \frac{\sin(\alpha_F \mp \delta_\lambda) - \sin\alpha_F}{\sin\varphi} \tag{32}$$

[1] Es ist für das Verfahren an und für sich gleichgültig, welche Linie als Bezuglinie verwendet wird. Da es aber üblich ist, die Dispersionen alle in bezug auf die F-Linie anzugeben, wird diese hier als Bezuglinie gewählt.

folgern. Durch trigonometrische Umformung und Beachtung der Tatsache, daß die Winkel δ_λ so klein sind, daß wir $2 \cdot \sin\frac{\delta}{2} = \sin\delta$ oder gar gleich δ im Bogenmaß setzen können, ergibt sich schließlich für die Berechnung der Teildispersionen die einfache, nur durch rein logarithmische Rechenoperationen durchzuführende Formel:

$$n_\lambda - n_F = \mp \frac{\sin\delta_\lambda \cdot \cos(\alpha_F \mp \delta_\lambda)}{\sin\varphi}, \tag{33}$$

worin $\mp$ zu setzen ist, je nachdem $\lambda \gtrless \lambda_F$ ist.

Eine kleine Abänderung der Methode stammt von MARTENS[1]). Benutzen wir (Abb. 23) einmal die Fläche II und dann die Fläche I als Reflexionsfläche, so finden wir, indem wir nacheinander das Beobachtungsfernrohr auf die von diesen beiden Flächen reflektierten Spektren einstellen, als Winkeldifferenz der beiden Fernrohreinstellungen für jede Wellenlänge einen bestimmten Winkel γ, der mit dem Einfallswinkel α in der aus der Abb. 23 abzulesenden Beziehung



Abb. 23. Die Einstellung des Autokollimationsfernrohrs von beiden Seiten auf den in sich zurückkehrenden Strahl. Die beiden Strahlenrichtungen bilden den Winkel γ miteinander, aus dem sich der Einfallswinkel α als $\alpha = 90° - \frac{\gamma - \varphi}{2}$ berechnet.

$$\alpha = \left(90 - \frac{\gamma - \varphi}{2}\right)$$

steht, weshalb die Bestimmungsgleichung in diesem Falle die Form

$$n = \frac{\cos\frac{\gamma - \varphi}{2}}{\sin\varphi} \tag{34}$$

annimmt. Die Methode selbst ist aber keineswegs einfacher als die von ABBE angegebene.

17. Die Methode des bekannten Einfallswinkels nach RYDBERG-MARTENS. Die Methode wurde zuerst von RYDBERG[2]) 1828 bekanntgegeben und von GRAILICH[3]) 1858 benutzt. Während RYDBERG jedoch noch davon ausging, daß er nicht einen beliebigen Einfallswinkel, sondern einen solchen wählte, für den eine bestimmte Linie im Minimum stand, hat MARTENS[4]) bei der Neubelebung dieser Methode dem Einfallswinkel die vollste Allgemeinheit zugestanden. Ein beliebig einfallender Strahl, dessen Einfallswinkel α ist, durchsetzt das Prisma und erfährt die Ablenkung δ (Abb. 15). Der Einfallswinkel α ist für alle Wellenlängen der gleiche. Beachten wir, daß der direkte Strahl mit dem an der Eintrittsfläche reflektierten Strahl, um die brechende Kante des Prismas herum gemessen, den Winkel ξ einschließt, daß also zwischen diesem Winkel ξ und dem Einfallswinkel α die Beziehung $\xi = 180 - 2 \cdot \alpha$ besteht, so können wir auf Grund dieser Formel jeden gewünschten Einfallswinkel α fest einstellen. Zu diesem Ende bringen wir das Beobachtungsfernrohr zunächst auf gerade Durchsicht. Aus obiger Beziehung rechnen wir uns den zu einem vorgegebenen Einfallswinkel α gehörigen Winkel ξ aus und drehen das Beobachtungsfernrohr um die brechende Kante herum um diesen Winkel. In dieser Lage halten wir das Fernrohr fest. Nunmehr drehen wir das Prisma so lange, bis das an der Eintrittsfläche reflektierte Bild des Spaltes im Beobachtungsfernrohr einsteht.

[1]) F. F. MARTENS, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 3, S. 10—17. 1901.
[2]) F. RYDBERG, Pogg. Ann. Bd. 14, S. 45—57. 1828.
[3]) JOS. GRAILICH, Kristallographisch-optische Untersuchungen, S. 21—23. Wien-Olmütz 1858.
[4]) F. F. MARTENS, Ann. d. Phys. Bd. 6, S. 603—640. 1901; Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 3, S. 10—17. 1901.

Der Einfallswinkel ist dann genau gleich dem gewünschten Winkel α. Zur Ableitung der Berechnungsformeln gehen wir aus von den aus der Abb. 15 abzulesenden Winkelbeziehungen $\varphi = \alpha' + \beta'$ und $\delta = \beta - \beta' + \alpha - \alpha'$ mit der Folgerung $\beta = \varphi + \delta - \alpha$, die wir in das an beiden brechenden Flächen angewandte Brechungsgesetz einführen:

$$n \cdot \sin\alpha' = \sin\alpha\,,$$

$$n \cdot \sin(\varphi - \alpha') = \sin(\varphi + \delta - \alpha)\,.$$

Addieren und subtrahieren wir diese beiden letzten Gleichungen unter Beachtung der für $(\sin x_1 \pm \sin x_2)$ gültigen trigonometrischen Beziehungen, so erhalten wir

$$n \cdot 2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\left(\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \cdot \sin\frac{\varphi+\delta}{2} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\varphi+\delta}{2}\right),$$

$$n \cdot 2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\left(\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\frac{\varphi+\delta}{2} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\varphi+\delta}{2}\right),$$

woraus wir durch Division beider Seiten zu einer Hilfsgleichung

$$\operatorname{tg}\left(\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi+\delta}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\varphi+\delta}{2}\right) \tag{35}$$

kommen, aus der wir den Winkel α' berechnen können, um mit seiner Hilfe aus

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \tag{36}$$

die gewünschte Brechungszahl zu errechnen.

Die Methode hat den Vorteil, daß die Rechnung durch rein logarithmisch durchzuführende Rechenoperationen zum Ziel gebracht werden kann. Sie hat ferner den weiteren Vorteil, daß zu einem einmal eingestellten Einfallswinkel α nacheinander die Ablenkungswinkel δ_λ für alle gewünschten Wellenlängen durch ein einfaches Nachdrehen des Beobachtungsfernrohrs gemessen werden können. Dadurch arbeitet dieses Rydberg-Martenssche Verfahren schneller als die Methode der minimalen Ablenkung. Besonders vorteilhaft wird diese Arbeitsweise, wie wir sehen werden, bei der Messung der Brechungszahlen im ultravioletten Strahlengebiet (Ziff. 60).

18. Die Methode des streifenden Eintritts nach Kohlrausch. Abweichend von den bisher besprochenen Methoden der Messung der Brechzahl am Prisma wird bei dem nun zu behandelnden Verfahren ein anderes Einstellmerkmal verwendet insofern, als auf eine Grenze zwischen Hell und Dunkel eingestellt wird. Das von Kohlrausch[1]) vorgeschlagene Verfahren gründet sich auf die Erscheinung, die zu beobachten ist, wenn ein Lichtstrahl streifend aus Luft in das optische Mittel eintritt oder, was gleichartig und gleichwertig ist, wenn der Lichtstrahl in diesem Mittel an Luft unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion zurückgeworfen wird.

Lassen wir ein Lichtbüschel in Luft (Abb. 24), ausgehend von einer einfarbigen Lichtquelle, auf die eine Fläche eines Meßprismas auftreffen, so werden in dem Büschel, wenn die Lichtquelle nur ausgedehnt genug ist, Strahlen aller möglichen Einfallswinkel sein. Wenn aber der Einfallswinkel α von 0 bis 90° wächst, dann wächst auch der jeweilige zugehörige Brechungswinkel α', und zwar nimmt er, ausgehend von 0° zu, bis er für einen Einfallswinkel von 90°

[1]) F. Kohlrausch, Wied. Ann. Bd. 16, S. 603–609. 1882; F. F. Martens, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 3, S. 10–17. 1901. Vergl. dazu auch H. Kessler, Refraktometrie. Abderhaldensches Handb. d. biol. Arbeitsmeth. Abt. II. Phys. Meth. Teil 2. S. 817–906. 1925.

einen ganz bestimmten Grenzwert i erreicht hat. Da die Brechzahl $n > 1$ ist, muß dabei nach dem Brechungsgesetz stets $\alpha' < \alpha$ sein. Ist nun der Einfallswinkel gleich 90°, d. h. haben wir den Grenzfall des „**streifenden Eintritts**" des Strahls in das optische Mittel n, so wird also auch der hierzugehörige Brechungswinkel i, den wir den „Grenzwinkel der Brechung" nennen wollen, kleiner als 90° sein. Er wird bestimmt aus der Gleichung, die aus (1) folgt:

$$n = \frac{\sin 90}{\sin i} = \frac{1}{\sin i}; \qquad \sin i = \frac{1}{n}. \tag{37}$$

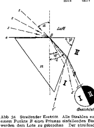


Abb. 24. Streifender Eintritt. Alle Strahlen eines in einem Punkte B eines Prismas einfallenden Büschels werden dem Lote zu gebrochen. Der streifend eintretende Lichtstrahl 4 wird unter dem Grenzwinkel i der Brechung, der gleich dem Grenzwinkel der Totalreflexion ist, gebrochen. Das Gesichtsfeld des Beobachtungsrohres ist durch eine scharfe Kante, Grenzlinie der Brechung, in ein rechtes dunkles (II) und ein linkes helles (I) Feld geschieden.

Denken wir uns einmal alle Strahlen in einem Punkte B auf die Prismenfläche auftreffend (Abb. 24), dann liegen die zugehörigen gebrochenen Strahlen alle in dem Winkelraum I, weil alle Brechungswinkel $\alpha' < i$ sind. In den Winkelraum II gelangt also kein einziger Strahl. Bringen wir nun unser mit einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr bewaffnetes Auge in die Richtung des Grenzstrahles 4', so sehen wir das Gesichtsfeld in zwei Felder I und II aufgeteilt. Das Feld I, das dem Winkelraum I entspricht, ist erhellt durch die gebrochenen Strahlen, während das dem Winkelraum II entsprechende Feld II vollständig dunkel ist. Die Trennungskante der beiden Felder ist scharf und entspricht dem Grenzwinkel i der Brechung.

Die Erscheinung der Totalreflexion erhalten wir, wenn wir das einfarbige Lichtbüschel nicht von Luft in das Mittel eintreten, sondern aus dem Mittel in Luft austreten lassen (Abb. 25). Um dies möglich zu machen, stellen wir die Lichtquelle vor die dritte, mattierte, sonst nicht in Benutzung kommende Prismenfläche. Die Lichtstrahlen fallen dann unter allen möglichen Winkeln auf die Eintrittsfläche des Prismas ein. Nach dem Brechungsgesetz wird ein jeder solcher Strahl beim Übertritt aus dem dichteren Mittel n in Luft vom Einfallslote weg gebrochen. Zu einem bestimmten Einfallswinkel α gehört also immer ein größerer Winkel α'; das bedeutet, daß der Brechungswinkel bereits 90° ist, d. h. daß der Strahl streifend austritt, während der dazugehörige Winkel i ganz sicher noch kleiner als 90° ist. Lassen wir den Einfallswinkel α größer als i werden, bis 90° wachsen, so werden alle diese Strahlen gemäß dem Reflexionsgesetze wieder in das Mittel n zurückgeworfen, „total reflektiert", weshalb wir den Winkel i den „Grenzwinkel der Totalreflexion" nennen. Seine Bestimmungsgleichung $\sin i = 1/n$ ist die gleiche wie die für den Grenzwinkel

der Brechung. Wir können daraus schließen, daß für ein und dasselbe optische Mittel n der Grenzwinkel der Totalreflexion und der Grenzwinkel der Brechung identisch sind. Es ist also auch die Lage der Grenzlinie der Totalreflexion in beiden Fällen die gleiche, und die Messung kann damit sowohl im gebrochenen als auch im reflektierten Lichte durchgeführt werden. Denken wir uns nunmehr alle Strahlen von den Einfallswinkeln 0 bis 90° wieder in dem Punkte B auf die Eintrittsfläche des Prismas auftreffend (Abb. 25), so werden die unter 0° bis i° eintreffenden Strahlen gebrochen. Ein gewisser Prozentsatz der Strahlungsintensität, der sich mit Hilfe der FRESNELschen Formeln berechnen läßt, wird aber auch schon reflektiert, weshalb der Winkelraum I von einer gewissen, wenn auch geringeren Intensität erfüllt sein wird, so daß im Beobachtungsfernrohr, dessen Achse in die Richtung des Grenzstrahls 4'' gebracht worden ist, das Feld I jetzt nicht vollständig dunkel ist, wie es eigentlich sein müßte, sondern dem beobachtenden Auge leicht aufgehellt erscheint (Abb. 25). Die Strahlen der Einfallswinkel i° bis 90° werden alle totalreflektiert. Das Feld II des Gesichtsfeldes weist also maximale Helligkeit auf. Die Trennungskante ist scharf und entspricht dem Grenzwinkel der Totalreflexion und somit nach dem oben Gesagten auch dem Grenzwinkel der Brechung. Der wesentliche Unterschied bei diesen beiden Beobachtungen ist der, daß im zweiten Falle Hell und Dunkel in den beiden Gesichtsfeldhälften gegenüber dem ersten Falle gerade vertauscht sind. Ein zweiter Unterschied ist der schon erwähnte, daß das dunkle Feld der Abb. 25 gegenüber dem dunklen Felde der Abb. 24 nicht unerheblich heller ist. Dadurch wird die Grenzlinie zwar nicht weniger scharf, aber etwas undeutlicher, weil dabei die Kontraste zwischen Hell und Dunkel geringer geworden sind. Dies hat meßtechnisch zur Folge, daß die Einstellung auf den Grenzwinkel der Brechung leichter und bequemer auszuführen ist als die Einstellung auf den Grenzwinkel der Totalreflexion, was unter Umständen auch die Genauigkeit der Methode beeinflußt. Vorzuziehen ist jedenfalls die erstere.

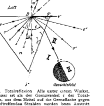


Abb. 25. Totalreflexion. Alle unter einem Winkel, der kleiner ist als der Grenzwinkel i der Totalreflexion, aus dem Mittel auf die Grenzfläche gegen Luft auftreffenden Strahlen werden beim Austritt aus dem optischen Mittel vom Lote weggebrochen. Alle unter einem größeren Winkel einfallenden Strahlen werden totalreflektiert. Eine scharfe Kante, Grenzlinie der Totalreflexion, teilt das Gesichtsfeld in eine rechte helle (II) und eine linke verdunkelte (I) Hälfte.

Über die Grenzlinie können wir hinsichtlich ihrer Form noch eine wichtige Feststellung machen. Im allgemeinen werden wir bereits im verhältnismäßig kleinen Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres eine deutlich erkennbare Krümmung der Grenzlinie wahrnehmen, und zwar erscheint sie durchgebogen in das dunkle Feld II hinein (Abb. 28). Diese Durchbiegung ist eine wirkliche, deren Grund aus folgender Überlegung zu erkennen ist. Wir denken uns die

Lichtstrahlen in dem Punkte B (Abb. 24) von allen Seiten her einfallend, alle nach diesem Punkte B hin gerichtet. Diese Strahlen, die vor dem Eintritt in das optisch dichtere Mittel einen Kegel von 180° Öffnungswinkel ausfüllen, werden nach der Brechung nur noch einen Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel i, dem Grenzwinkel der Totalreflexion, ausfüllen, wenn der Körper ein isotroper, ein einfachbrechender ist, der in allen Richtungen die gleiche Brechkraft besitzt. Eine zur Eintrittsebene parallele Ebene wird somit von diesem gebrochenen Lichtkegel in einer Kreislinie, der **Grenzkurve der Totalreflexion**, geschnitten, die ein helles Feld umschließt, während außerhalb Dunkelheit herrscht. Die im Fernrohr zu beobachtende Grenzlinie ist nur ein Teil dieser Grenzkurve (vgl. dazu auch Ziff. 45).

Für die rechnerische Erfassung des Verfahrens genügt es für den Fall des streifenden Eintritts, den Verlauf eines Strahles durch das Prisma hindurch zu verfolgen. Wir müssen zwei Möglichkeiten in Betracht ziehen, die sich in den Abb. 26 und 27 darstellen. Bei gleichem brechenden Winkel φ, aber verschieden

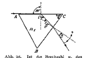


Abb. 26. Ist die Brechzahl n_2 des Prismas so groß, daß der Grenzstrahl von der brechenden Kante C weggebrochen wird, so ist $i = \varphi - \beta$ und die Brechzahl selbst wird

$$n_1 = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{1 + \sin^2\beta + 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi}.$$

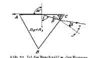


Abb 27. Ist die Brechzahl n_2 des Prismas so viel kleiner als n_1, daß der Grenzstrahl der brechenden Kante C zu gebrochen wird, so ist $i = \varphi + \beta$, und die Brechzahl selbst wird

$$n_2 = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{1 + \sin^2\beta - 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi}.$$

großer Brechzahl, z. B. $n_2 < n_1$, ist es möglich, daß der austretende Grenzstrahl der Totalreflexion entweder von der brechenden Kante weg (Abb. 26) oder ihr zu gebrochen wird (Abb. 27). Beide Male gelten die Grundgleichungen des angewendeten Brechungsgesetzes

$$1 = n \cdot \sin i, \tag{38}$$

$$n \cdot \sin\beta' = \sin\beta; \tag{39}$$

nur die Beziehungen zwischen den Brechungswinkeln und den brechenden Winkeln sind verschieden insofern, als, je nachdem der Fall der Abb. 26 oder der Abb. 27 vorliegt,

$$i = \varphi \mp \beta' \tag{40}$$

ist. Diesen Wert setzen wir in (38) ein, lösen dieses trigonometrisch auf und formen (39) geeignet um, wodurch wir zu den beiden Gleichungen

$$n^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\beta' = 1 \pm 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi + \sin^2\beta \cdot \cos^2\varphi, \tag{41}$$

$$n^2 \cdot \cos^2\beta' = n^2 - \sin^2\beta \tag{42}$$

kommen, aus denen wir durch Einsetzen von (42) in (41) erhalten

$$n^2 \cdot \sin^2\varphi = 1 + \sin^2\beta \pm 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi \tag{43}$$

oder

$$n = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{1 + \sin^2\beta \pm 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi}\,. \tag{44}$$

Für die trigonometrische Rechnung etwas günstiger wird die Schlußformel, wenn wir von Gleichung (43) ausgehend rechts $\cos^2\varphi$ addieren und subtrahieren. Wir erhalten dann die etwas einfacher aussehende Beziehung:

$$n^2 = 1 + \left(\frac{\cos\varphi \pm \sin\beta}{\sin\varphi}\right)^2. \tag{45}$$

Aus der Formel (45) ist ersichtlich, daß wir zur Berechnung der gesuchten Brechzahl den brechenden Winkel φ und den Brechungswinkel β kennen müssen. Ersteren erhalten wir auf den bekannten, in Ziff. 11 dargelegten Wegen. Den Brechungswinkel β erhalten wir dadurch, daß wir in das auf dem Spektrometer justierte Prisma entweder das Licht streifend eintreten lassen, indem wir die einfarbige Lichtquelle in der Verlängerung der Eintrittsfläche des Prismas aufstellen, oder indem wir das Licht totalreflektieren lassen, was wir erreichen können, wenn wir die Lichtquelle so aufstellen, daß ihr Licht durch die dritte, mattierte Prismenfläche AB einfallen kann. Wir messen dann den Winkel β, indem wir das auf Unendlich eingestellte Fernrohr, mit schrägstehendem Fadenkreuz als Einstellmarke, einmal durch Autokollimation senkrecht zur Austrittsfläche BC, also in deren Flächennormale, stellen und aus dieser Stellung so weit verdrehen, bis die Grenzlinie der Totalreflexion (Abb. 28) genau durch den Schnittpunkt des Fadenkreuzes geht. Dabei kann das Prisma feststehen während das mit dem Teilkreis gekoppelte Fernrohr gedreht wird, oder das Fernrohr bleibt stehen und das Prisma mit dem Teilkreis wird gedreht. Der erstere Fall wird im allgemeinen der für die Beobachtung bessere sein, weil dabei die wenigsten Schwierigkeiten in der Beleuchtung sich bemerkbar machen werden. Den so bestimmten Brechungswinkel β können wir bei Verwertung des richtigen Vorzeichens der Formel (44) oder (45) zur Berechnung benutzen. Wir können den Formeln die einheitliche Form



Abb. 28. Das Gesichtsfeld im Beobachtungsfernrohr mit auf die Grenzlinie der Totalreflexion eingestelltem Fadenkreuz.

$$n = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \sqrt{1 + \sin^2\beta - 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi} \tag{46}$$

und

$$n^2 = 1 + \left(\frac{\cos\varphi - \sin\beta}{\sin\varphi}\right)^2 \tag{47}$$

geben, wenn wir festsetzen, daß der Winkel $\beta \gtreqless 0$ zu rechnen ist, je nachdem er vom Einfallslote aus gerechnet nach der brechenden Kante zu oder von ihr weg liegt (Abb. 27 und 26).

Im allgemeinen wird, wenn wir den Winkel φ nur groß genug wählen, der Winkel $\beta < 0$ sein. Diesen Fall können wir also benutzen, um über die obere für den Winkel φ zulässige Grenze Unterlagen zu bekommen. Der **größte noch zulässige Winkel** φ wird der sein, bei dem der Grenzstrahl der Totalreflexion gerade streifend aus dem Prisma an der Fläche BC austritt; es ist dann $\beta = 90°$, weshalb wir für den größtzulässigen Winkel φ_{max} aus (43) die Bestimmungsgleichung

$$n^2 \cdot \sin^2\varphi_{max} = 2 \cdot (1 + \cos\varphi_{max})$$

oder nach Anwendung verschiedener trigonometrischer Formeln

$$\sin^2 \frac{\varphi_{max}}{2} = \frac{1}{n^2}$$

erhalten. Für den brechenden Winkel φ können wir daraus folgern, daß er der Ungleichung

$$\varphi \lesseqgtr 2 \cdot \arcsin \frac{1}{n} \tag{48}$$

genügen muß. Für ein hochbrechendes Flintglas ($n_D = 1,70$) finden wir daraus als oberste Grenze einen brechenden Winkel von etwa 70°, für ein niedrig brechendes Kronglas ($n_D = 1,50$) einen solchen von etwa 80°. Die Maximalwerte stimmen also mit denen der Minimalablenkung überein und werden wir auch hier im allgemeinen wie dort mit 60° Prismen am vorteilhaftesten arbeiten.

Die Methode wurde hier zunächst zur Messung der Brechungszahl für einfarbiges Licht entwickelt. Sie läßt sich in gleicher Weise durchführen für ein aus mehreren Linien bestehendes Licht, wie z. B. für das Licht einer mit Wasserstoff gefüllten Geisslerschen Röhre u. ä. Wir beobachten dann im Gesichtsfelde des Fernrohres so viele Grenzlinien, als Einzelfarben vorliegen (vgl. dazu Ziff. 35 das zu Abb. 48–51 Gesagte), auf die wir nacheinander einstellen. Wir können dabei für jede einzelne Linie den Grenzwinkel ε direkt am Teilkreis ausmessen. Wir können aber auch die Differenzwinkel zwischen den einzelnen Linien mikrometrisch (vgl. Ziff. 37) und damit mit größerer Genauigkeit ausmessen, wodurch die Dispersionsmessung für sich ausgeführt wird, ähnlich dem in Ziff. 16 beschriebenen Abbeschen Verfahren. Ein Nachteil der Methode ist der, daß benachbarte Linien, die sehr eng nebeneinander liegen nur schlecht oder gar nicht aufgespalten werden können. Es hilft dabei auch keine stärkere Fernrohrvergrößerung, da eine solche nur die Schärfe der Grenzlinie verschlechtert. Dies ist auch der Grund dafür, daß wir bei diesem Verfahren nur geringe Fernrohrvergrößerungen in Anwendung bringen. Zu achten ist bei dieser Methode besonders noch darauf, daß die einzelnen Prismenflächen, insbesondere die Eintrittsfläche AC, gut plan sind, weil schon geringe Abweichungen von der Planheit bereits recht erhebliche systematische Fehler bedingen können.

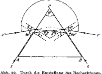


Abb. 29. Durch die Einstellung des Beobachtungsfernrohrs auf die Grenzlinie, wenn das Licht nacheinander auf beiden Prismenflächen streifend eintritt, wird der Winkel ε gemessen, aus dem sich der Ausfallswinkel als $\beta = \frac{\varepsilon + \varphi}{2} - 90$ berechnet, weshalb dann für den Grenzwinkel i der Totalreflexion die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg}\left(i - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{\varepsilon + \varphi}{2}$$

gilt, mit dem sich die Brechungszahl n aus der Gleichung $1 = n \cdot \sin i$ herleiten läßt.

19. Die Abänderung der Kohlrauschschen Methode des streifenden Eintritts nach Martens. Da die Formel (47), Ziff. 18, für logarithmische Rechnung immer noch nicht einfach genug ist, hat Martens[1]) versucht, eine Umänderung des Verfahrens ausfindig zu machen, so daß nur logarithmische

[1]) F. F. Martens, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 3, S. 10–17. 1901.

Rechnungen notwendig sind. Zu dem Zwecke mißt er nicht den Brechungswinkel β, sondern einen Winkel ε, zu dem er folgendermaßen kommt. Lassen wir einmal den Strahl auf der Prismenfläche AC und darauf auf der Prismenfläche BC streifend eintreten (Abb. 29), so konnen wir das Beobachtungsfernrohr nacheinander auf die Grenzlinie 1' und dann auf die Grenzlinie 2' einstellen. Drehen wir dabei das Fernrohr um die brechende Kante herum um den Winkel ε, so besteht zwischen den Winkeln folgende Beziehung:

$$\varepsilon = 2\beta + (180 - \varphi); \qquad \beta = \frac{\varepsilon + \varphi}{2} - 90$$

und anderseits [Ziff. 18, Gleichung (40)]:

$$\beta' = \varphi - i\,.$$

Setzen wir die Werte für β und β' in die Gleichungen (38) und (39), Ziff. 18, ein, und subtrahieren und addieren wir diese beiden Gleichungen, so bekommen wir die beiden Gleichungen:

$$n \cdot \sin i - n \cdot \sin(\varphi - i) = 1 + \cos\frac{\varepsilon + \varphi}{2}$$

$$n \cdot \sin i + n \cdot \sin(\varphi - i) = 1 - \cos\frac{\varepsilon + \varphi}{2}\,,$$

die nach trigonometrischer Umformung

$$n \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\left(i - \frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\frac{\varepsilon + \varphi}{2}$$

$$n \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\left(i - \frac{\varphi}{2}\right) = \sin^2\frac{\varepsilon + \varphi}{2}$$

liefern, woraus wir durch Division fur den Grenzwinkel i der Totalreflexion die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg}\left(i - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotg}^2\frac{\varepsilon + \varphi}{2} \tag{49}$$

folgern, um mit dem so ermittelten Winkel i auf Grund der Gleichung (38), Ziff. 18, die gewünschte Brechzahl n zu errechnen.

γ) Die Messung der Brechungszahlen bei stark absorbierenden Stoffen und Pulvern.

20. Die Messung der Brechzahl von wenig lichtdurchlässigen Körpern, z. B. an Metallprismen nach KUNDT. Je stärker absorbierend ein Stoff ist, desto schwieriger wird es, die Brechzahlmessung nach den genannten Prismenmethoden durchzuführen. Wir können uns nur dadurch helfen, daß wir den Prismenwinkel immer kleiner und kleiner wählen.

Bei Metallen, die nur noch in ganz dünnen Schichten Licht durchlassen, macht die Herstellung der Prismen besondere Schwierigkeiten. KUNDT[1]) hat eine besondere Methode zur Erzeugung solcher Metallprismen von kleinem brechendem Winkel, der in der Regel nur zwischen 15'' und 35'' beträgt, ausgebildet. In der Hauptsache benutzt er ein elektrolytisches Verfahren. Über einem horizontal liegenden schmalen Glasstreifen aus sog. Platinglas (platiniertem Glas) wird in der Mitte, dicht darüber, lotrecht die entsprechende Metallelektrode aufgestellt, aber so, daß sie die Glasplatte nicht berührt, daß also keine metallische Leitung vorliegt (Abb. 30). In die Winkelräume zwischen den beiden Platten

[1]) A. KUNDT, Berl. Ber. Bd. 2, S. 255–272, 1387–1394. 1888; Wied. Ann. Bd. 34, S. 469–489. 1888; Bd. 36, S. 824–833. 1888; Mathem. u. naturw. Mitt. Bd. 2, S. 171–138. 1888; Bd. 9, S. 875–882. 1888; A. PFLÜGER, Wied. Ann. Bd. 58, S. 493–499. 1896; H. E. J. G. DU BOIS u. H. RUBENS, ebenda Bd. 41, S. 507–524. 1890; Bd. 47, S. 203–207. 1892; D. SHEA, ebenda Bd. 47, S. 178–202. 1892.

wird eine kapillare Schicht der Zersetzungsflüssigkeit gebracht und die Elektrolyse durch einen Strom von geeigneter Stärke durchgeführt. Die Metallplatte ist Anode. Unter diesen Umständen schlägt sich auf der Glasplatte ein Doppelkeil aus dem betreffenden Metall nieder, dessen größte Dicke unmittelbar an der Metallanode liegt. Das Verfahren liefert allerdings nicht mit Sicherheit brauchbare Prismen, weil von der freien Fläche eine für Autokollimation gute Planheit verlangt wird. Die brauchbare Ausbeute beträgt etwa 2% aller derart angefertigten Prismen. Daneben können Doppelprismen (z. B. aus Platin, das sich elektrolytisch nicht abscheiden läßt) auch durch Glühzerstäubung des betreffenden Metallbleches, das über die Mitte einer Glasplatte senkrecht aufgestellt und durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht wird, hergestellt werden. Auch auf chemischem Wege oder durch Kathodenzerstäubung im Vakuum können solche Metallprismen gewonnen werden.

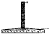


Abb. 30. Die Anordnung zur Erzeugung KUNDTscher Metallprismen. In der Mitte über dem platinierten Glasstreifen steht lotrecht die entsprechende Metallelektrode, die aber mit der Glasplatte nicht in Berührung sein darf. An die Metallplatte wird der positive Pol einer elektrischen Stromquelle gelegt, an die platinierte Glasplatte der negative. Die Leitung zwischen den beiden Elektroden wird durch eine verbindende Schicht einer geeigneten Flüssigkeit hergestellt. Auf der Glasplatte schlägt sich dann ein Doppelkeil des Metalls nieder.

Stets erfordert aber die KUNDTsche Meßmethode solcher Prismen eine Auswahl. KUNDT hat dazu ein besonderes Kollimierverfahren ausgebildet.

Die Messung selbst erfolgt am Spektrometer mit Teilkreis und Mikrometerschraube, dessen Ablesegenauigkeit nicht geringer als 1″ bis 2″ sein soll, oder mit Hilfe eines Okularmikrometers, dessen Trommelteil einen ähnlichen Winkelwert wiedergibt. Das Prisma wird mit der Basis senkrecht zu den aus dem Spaltrohr austretenden Strahlen aufgestellt. Im Beobachtungsfernrohr beobachten wir dann zwei Bilder, deren Winkelabstand (Abb. 31) gleich dem Ablenkungswinkel δ ist. Um den brechenden Winkel φ zu finden, stellen wir durch Autokollimation auf die zur Basis geneigten Prismenflächen ein (Abb. 31) und erhalten dadurch als Winkelabstand der beiden Autokollimationsbilder unmittelbar den brechenden Winkel φ.



Abb. 31. Der Strahlengang im KUNDTschen Doppelprisma aus Metall bei senkrechtem Lichteinfall. Durch die beiden entgegengesetzt ablenkenden Prismen entstehen im beobachtenden Fernrohr zwei Spaltbilder, die um den Winkel δ auseinanderliegen. Das nacheinander erfolgende Senkrechtstellen des Fernrohrs durch Autokollimation auf die zur Basis geneigten Prismenflächen liefert den brechenden Winkel φ.

Da wir senkrechten oder wenigstens nahezu senkrechten Einfall des Lichtes haben, und da außerdem die Winkel meist sehr klein sind, so daß sie mit ihrem Sinus gleichgesetzt werden können, können wir zur Rechnung die Formel (17), Ziff. 12, benutzen, die dann lautet:

$$n = \frac{\varphi + \delta}{\varphi}. \tag{50}$$

Weicht der Einfall des Lichtes vom senkrechten ab, ist der Einfallswinkel also α und sind die Winkel φ und δ so groß, daß sie nicht gleich ihrem Sinus selbst gesetzt werden können, so berechnet sich die Brechzahl aus der Formel

$$n = \frac{\sin(\varphi + \delta - \alpha) + \sin\alpha \cdot \cos\varphi}{\sin\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}. \tag{51}$$

Nach DU BOIS u. RUBENS[1]) und SHEA[2]) hat diese Berechnungsweise der Brechzahlen der Metalle jedoch nur so lange Gültigkeit, als wir uns nicht zu weit vom senkrechten Einfall entfernen; denn nur für Einfallswinkel kleiner als 30 bis 40° gilt für Metalle das SNELLIUSsche Brechungsgesetz. In der Tat gilt für größere Einfallswinkel bei den Metallen das SNELLIUSsche Sinusgesetz nicht mehr, sondern die als $n = \sin\alpha/\sin\alpha'$ definierte Brechzahl ist dann abhängig vom Einfallswinkel[3]).

Die Methode kann auch zur Messung der Temperaturabhängigkeit der Brechzahlen der Metalle ausgebaut werden[4]).

21. Die Messung der Brechzahl in Gebieten von Absorptionsstreifen (anomale Dispersion). Das Verfahren der gekreuzten Prismen nach KUNDT. Zeigt ein Körper im durchgehenden Lichte starke Absorptionsstreifen, so gilt nach KUNDT[5]) folgendes Gesetz, das auch insbesondere von KETTELER-HELMHOLTZ (Ziff. 2) theoretisch begründet worden ist: Mit wachsender Wellenlänge nimmt bei Annäherung an den Absorptionsstreifen die Brechzahl sehr stark ab, um vor dem Streifen ein Minimum zu erreichen. Innerhalb des Absorptionsgebiets steigt mit wachsender Wellenlänge die Brechzahl von diesem Mindestwert aus in sehr steiler Kurve stetig bis zu einem Höchstwerte an, um dann jenseits des Streifens wieder mit weiter wachsender Wellenlänge von diesem Höchstwerte aus stetig abzunehmen. Bei jedem Absorptionsstreifen wiederholt sich diese Anomalie im Verlauf der Dispersionskurve. Der Verlauf der Ablenkung eines solchen anomal zerstreuenden Prismas wird also auch ein dementsprechender sein (Abb. 32c).

Um die Dispersionskurve innerhalb eines Absorptionsstreifens festzustellen, gehen wir nach KUNDT[5]) folgendermaßen vor. Den Spalt eines Spektrometers stellen wir horizontal. Das parallel aus dem Spaltrohr austretende Licht wird durch ein Prisma mit wagerecht liegender Kante oder durch ein wagerecht liegendes Strichgitter, die sich dicht hinter dem Spaltrohrobjektiv, nicht auf dem Prismentisch, befinden, zu einem lotrecht stehenden Spektrum der Linien der verwendeten Lichtquelle auseinandergezogen. Legen wir quer über den Spalt einen Draht, so ist dieses Spektrum von einem senkrecht zu den Spektrallinien verlaufenden geraden Strich durchzogen (Abb. 32a). Dabei muß das Beobachtungsfernrohr geneigt werden.

Wir bringen den zu untersuchenden Körper in Prismenform bei lotrechtstehender brechender Kante auf den Prismentisch, wodurch jede Stelle des senkrechten Spektrums gemäß der entsprechenden Brechkraft dieses Prismas eine Ablenkung in wagerechter Richtung erfährt. Ist der untersuchte Körper ein

---

[1]) H. L. F. G. DU BOIS u. H. RUBENS, Wied. Ann. Bd. 41, S. 507–524. 1890; Bd. 47, S. 203–207. 1892.

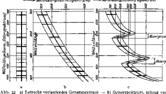
[2]) D. SHEA, Wied. Ann. Bd. 47, S. 178–202. 1892.

[3]) W. VOIGT, Wied. Ann. Bd. 24, S. 144–160. 1885; P. DRUDE, ebenda Bd. 42, S. 666 bis 673. 1891; H. A. LORENTZ, ebenda Bd. 46, S. 254–259. 1892.

[4]) A. KUNDT, Wied. Ann. Bd. 36, S. 824–833. 1888; A. PFLÜGER, ebenda Bd. 58, S. 493–499. 1896.

[5]) A. KUNDT, Pogg. Ann. Bd. 142, S. 163–171; Bd. 143, S. 149–152, 259–269; Bd. 144, S. 128–137. 1871; Bd. 145, S. 67–80, 164–166. 1872.

normalbrechender, z. B. Kronglas, so wird die Ablenkung durch ein Prisma aus solchem Glase mit kleiner werdender Wellenlänge größer. Das zunächst senkrechte Spektrum wird deshalb jetzt z. B. von links oben nach rechts unten (Abb. 32b) verlaufen, wobei die Form des Verlaufs, die in der Durchbiegung des „geraden" senkrechten Strichs am deutlichsten zum Ausdruck kommt, ganz von den Dispersionsverhältnissen des untersuchten Prismas abhängt, bei einem normalbrechenden Körper aber jedenfalls stetig sich ändert. Ist das Prisma aus einem anomal zerstreuenden Körper hergestellt, so werden die einzelnen Linien des Spektrums entsprechend dem anomalen Verlauf der Dispersionskurve dieses Körpers abgelenkt, wir bekommen ein Bild ähnlich dem von Abb. 32c, wo zwei Absorptionsstreifen im Gelb und Blau angenommen sind. Der erste



a b c

Abb. 32 a) Lotrecht verlaufendes Gitterspektrum. — b) Gitterspektrum, schräg verschoben durch ein gekreuzt zum Gitter stehendes, normal zerstreuendes Prisma. — c) Gitterspektrum, verzerrt durch ein zum Gitter gekreuzt stehendes, anomal zerstreuendes Prisma.

Höchstwert der Ablenkung wird erreicht beim Beginn des gelben Absorptionsstreifens, innerhalb dessen die Ablenkung steil bis zu einem Mindestwert abnimmt, um dann unmittelbar hinter dem Absorptionsstreifen wieder größer zu werden und beim Beginn des zweiten Absorptionsstreifens im Blau einen zweiten Höchstwert zu erreichen. Im Absorptionsgebiet selbst findet wieder ein schnelles Abnehmen bis zu einem Mindestwert statt, worauf dann die Ablenkung abermals zunimmt. Der „gerade" Strich ist dementsprechend verzerrt.

Durch gleichzeitiges Drehen des Beobachtungsfernrohres und des Prismentisches können wir für jede Linie feststellen, wann ihr Schnittpunkt mit der verzerrten „geraden" Linie gerade im Minimum einsteht. Durch Drehen des Prismas nach der anderen Seite der geraden Durchsicht ermitteln wir in gleicher Weise die zweite, zur ersten symmetrische Minimumstellung und haben so den doppelten Ablenkungswinkel gemessen. Die Rechnung erfolgt nach der bekannten Formel (14) der Minimalablenkung.

Die Größe des brechenden Winkels richtet sich ganz nach der Stärke der Absorption. Er schwankt zwischen 25 bis 30° für stark verdünnte Lösungen und einigen Minuten für stark absorbierende Körper.

22. Die Messung der anomalen Dispersion von stark absorbierenden Farbstoffen nach PFLÜGER. Bei der Messung der Brechzahl von festen Körpern,

die starke Absorptionsgebiete besitzen, ist es notwendig, diese in Prismenform von möglichst kleinen brechenden Winkeln zu bringen, damit bei Verwendung starker Lichtquellen noch genügend Licht hindurchgelassen wird.

Nach PFLÜGER[1]) stellen wir uns zu diesem Zwecke dünne Doppelprismen in folgender Weise her. Aus einer Glasröhre mit einem Durchmesser von etwa 30 bis 50 mm schneiden wir uns Stücke heraus, die wir auf eine ebene Glasplatte auflegen. In die dadurch entstehenden keilförmigen Zwischenräume zwischen Platte und Glasrohr tragen wir mit einem Pinsel eine alkoholische Lösung von bestimmter geeigneter Konzentration des zu untersuchenden Farbstoffes ein. Infolge der Kapillarität verbreitet sich die Lösung längs der ganzen Berührungslinie der beiden Glasstücke. Das Ganze wird vorsichtig auf etwa 50 bis 60° C erwärmt, damit der Alkohol schnell verdunstet. Zurück bleiben zwei dünne Keile, deren brechende Kante die Auflagelinie des Rohrstückes ist (Abb. 33).

Die Beobachtung wird ganz ähnlich wie bei der KUNDTschen Methode für Metallprismen (Ziff. 20) durchgeführt, deren Berechnungsgleichung auch hier gilt.

Als Lichtquelle verwenden wir am besten einen lichtstarken Monochromator, der uns spektral wohl definiertes Licht liefert, oder Lichtquellen mit sehr hellen Linien. Innerhalb eines Absorptionsstreifens werden die Spaltbilder infolge der außerordentlichen Steilheit der Dispersionskurve in diesem Gebiete etwas verwaschen.

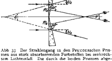


Abb. 33. Der Strahlengang in den PFLÜGERschen Prismen aus stark absorbierenden Farbstoffen bei senkrechtem Lichteinfall. Die durch die beiden Prismen abgelenkten Strahlen liefern zwei Spaltbilder, deren Winkelabstand als δ gemessen wird. Die Autokollimationseinstellung auf die beiden zur Basis geneigten Prismenflächen liefert den brechenden Winkel φ.

Wie bei Metallen, dürfen wir auch bei allen stark absorbierenden, für die im Absorptionsstreifen liegenden Wellenlängen metallisch reflektierenden Körpern nur bei sehr kleinen Einfallswinkeln beobachten, weil im Absorptionsgebiet das SNELLIUSsche Brechungsgesetz, d. h. die Unabhängigkeit der Brechzahl vom Einfallswinkel nicht mehr gilt.

23. Die Messung der Brechzahl von Pulvern. CHRISTIANSENsches Verfahren. Die Brechzahl von Pulvern zu messen, bereitet einige Schwierigkeiten. CHRISTIANSEN[2]) gibt ein Verfahren an, wonach aus dem Pulver und einer Flüssigkeit (z. B. Benzol und Schwefelkohlenstoff), die nahezu die gleiche Brechungszahl hat, eine ungesättigte Mischung hergestellt wird, die, in ein Hohlprisma gefüllt, auf dem Spektrometer beobachtet wird. Dabei kommt CHRISTIANSEN auf Grund seiner Versuche zu der Anschauung, daß sich solche Pulver-Flüssigkeit-Mischungen „unter Umständen" wie optisch homogene Mischungen zweier Flüssigkeiten (z. B. Alkohol + Wasser) verhalten. Unter diesen „Umständen" versteht CHRISTIANSEN offenbar die Voraussetzung, daß die Brechungszahlen von Pulver und Mischungsflüssigkeit auf etwa 1 bis 4 Einheiten der vierten Dezimale einander gleich sind; denn nur, wenn so geringe Differenzen vorliegen, ist durch die Mischung hindurch ein Spaltbild zu erhalten,

[1]) A. PFLÜGER, Wied. Ann. Bd. 56, S. 412—432. 1895; Bd. 58, S. 670—673. 1896.
[2]) C. CHRISTIANSEN, Wied. Ann. Bd. 23, S. 298—306. 1884; Bd. 24, S. 439—446. 1885.

das mit wachsender Angleichung der Brechungszahl der Flüssigkeit an die des Pulvers, gleichgültig ob von größerer oder kleinerer Brechzahl kommend, immer heller und klarer wird, um im Augenblick der Gleichheit der beiden Brechzahlen am hellsten zu sein. Hat das Pulver die Brechzahl n_1, die Flüssigkeit die Brechzahl n_2, während ihre Volumen v_1 bzw. v_2 sind, und beobachten wir bei der Spektrometermessung als Brechzahl der Mischung N, dann besteht zwischen diesen Größen die lineare Beziehung

$$(v_1 + v_2) \cdot N = v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 , \tag{52}$$

aus der sich das unbekannte n_2 ausrechnen läßt. Um unabhängig von der Bestimmung der Volumen zu werden, wird die Brechzahl der Flüssigkeit um einige Einheiten der vierten Dezimale in n_2' unter Beibehaltung der gleichen Volumen geändert und die Brechzahl N' dieser Mischung ermittelt. Es gilt dann:

$$(v_1 + v_2) N' = v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2' . \tag{53}$$

Aus den beiden Gleichungen (52) und (53) erhalten wir dann die Bestimmungsgleichung der gesuchten Brechzahl des Pulvers als

$$n_1 = \frac{N + N'}{2} - \frac{N - N'}{2} \cdot \frac{(n_2 + n_2') - (N + N')}{(n_2 - n_2') - (N - N')} . \tag{54}$$

LE BLANC[1]), der die CHRISTIANSENsche Methode nachprüft, findet die CHRISTIANSENschen Beobachtungen nicht bestätigt. Er hält es für ausgeschlossen, daß das lineare Mischungsgesetz (52) gilt. Doch teilt er keine Messungen mit. Dafür gibt er ein anderes Verfahren unter Benutzung des PULFRICHschen Refraktometers (Ziff. 39) an, das eine zuverlässige Ermittelung der Brechzahl von Pulvern erlaubt. Die von CHRISTIANSEN vorgeschlagene Messung am Spektrometer hält er nur dann für richtig, wenn das Spaltbild der größten Helligkeit zur Messung verwendet wird, wenn also die Brechzahlen von Flüssigkeit und Pulver einander gleich sind.

δ) Die Messung der Brechungszahlen bei Flüssigkeiten.

24. Die Messung der Brechzahl von Flüssigkeiten im Hohlprisma. Steht uns eine genügend große Menge der zu messenden Flüssigkeit zur Verfügung, so sind wir in der Lage, indem wir die Flüssigkeit in ein geeignetes Hohlprisma füllen, alle die besprochenen Methoden am Prisma auch hierauf anzuwenden. Ein solches Hohlprisma stellen wir uns her, indem wir ein Vollprisma, im allgemeinen aus Glas (Abb. 34), senkrecht zur brechenden Kante durchbohren und die dadurch entstehende Hohlung auf beiden Seiten durch aufgesetzte planparallele Platten vollkommen dicht abschließen. Durch eine zweite, seitliche Bohrung kann die Flüssigkeit eingefüllt werden. Sind die Seitenflächen des Prismas sehr gut abgeschliffen und poliert, so haften bei richtigem Aufschieben die Planparallelplatten schon allein durch Adhäsion. Das einwandfreie Aufbringen der Verschlußplatten ist neben der guten Planparallelität das wichtigste zu erfüllende Erfordernis eines solchen Hohlprismas. Es ist insbesondere darauf zu achten, daß die Platten durch die anpressende Vorrichtung nicht verspannt werden, da dies sehr schlechte Spaltbilder zur Folge hat, die die Meßgenauigkeit dann ganz wesentlich herabdrücken. Die Verschlußplatten müssen einwandfrei parallel sein, weil nur in diesem Falle die Platten die Richtung der der Messung dienenden Strahlen nicht verändern; denn Strahlen, die eine Planparallelplatte durchsetzen, erleiden nur eine Parallelverschiebung, also keine Richtungs-



Abb. 34. Ein Hohlprisma für Flüssigkeiten.

[1]) M. LE BLANC, ZS. f. phys. Chem. Bd. 10, S. 433—449. 1892.

änderung. Die Prüfung der Platten auf Planheit kann am Spektrometer mit Hilfe der beiden auf unendlich eingestellten Fernrohre erfolgen. Stellen wir die Fernrohre unter einem rechten Winkel zueinander und drehen wir die auf das Spektrometertischchen gestellte Platte, so daß die an einer der Flächen reflektierten Strahlen im Beobachtungsrohr ein Spaltbild entwerfen, so darf dieses bei guter Planheit der Fläche erstens gegenüber der Einstellmarke keine Parallaxe und zweitens keinen Astigmatismus aufweisen, weil sonst die Fläche unzweifelhaft von der Planheit abweicht, z. B. kugelig usw. ist. Auch die Parallelität läßt sich am Spektrometer selbst prüfen, wenn wir ein Autokollimationsokular zu Hilfe nehmen und die Platte senkrecht zur optischen Achse des Beobachtungsfernrohres aufstellen. Bei guter, brauchbarer Planparallelität der Platte fallen die beiden von Vorder- und Hinterfläche derselben herrührenden Spaltbilder in ein Bild zusammen; es darf auch nicht der geringste Ansatz zu einem Doppelbild vorhanden sein.

Die Brechzahlen der Flüssigkeiten ändern sich sehr stark mit der Temperatur, weshalb es notwendig ist, daß wir die Temperatur der Flüssigkeit während der Messung möglichst genau ermitteln, zu welchem Zwecke wir vorteilhaft an dem Hohlprisma ein in den Hohlraum ragendes, den Strahlengang aber nicht störendes Thermometer anbringen.

Um bei höheren Temperaturen messen zu können, empfiehlt es sich, ein widerstandsfähiges Hohlprisma aus Quarzglas[1] zu verwenden, das von einem Kupfermantel umgeben ist, der durch eine Chromnickeldrahtwicklung elektrisch geheizt wird.

Als brechende Winkel sind die bei den einzelnen Methoden für feste Körper jeweils angegebenen Winkel zu verwenden, also im allgemeinen 60° bzw. 30°. Die Genauigkeit ist die gleiche wie bei festen Körpern.

25. Die Messung der Brechzahlen von Flüssigkeiten mit dem Eykmanschen Refraktometer. Im Prinzip handelt es sich um die Methode des beliebigen Einfallswinkels nach Rydberg-Martens (Ziff. 17). Nach dem Vorschlage von Eykman[2]) werden Spaltrohr und Beobachtungsfernrohr in fester Lage zueinander angeordnet, weil dadurch das Anbringen eines Erhitzungsgefäßes, das das Hohlprisma umschließt, wesentlich vereinfacht und erleichtert wird. Der Lichtstrahl muß also für alle Fälle die gleiche, konstant bleibende Ablenkung δ (Abb. 15, Ziff. 12) erfahren, für die Eykman einen Winkel von 40° wählt. Das die zu untersuchende Flüssigkeit aufnehmende Hohlprisma steht auf einem Prismenträger, der fest mit dem Teilkreis des Spektrometers verbunden ist. Bei der Messung drehen wir das Prisma so lange, bis das abgelenkte Spaltbild mit der Einstellmarke des Beobachtungsfernrohres einsteht. Es gibt zwei Stellungen des Prismas, in denen die gleiche Ablenkung vorliegt. Was im einen Falle Einfallswinkel ist, ist im anderen Falle Austrittswinkel und umgekehrt (Abb. 15).

Zur Berechnung gilt das Gleichungssystem:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\sin\varphi}{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\sin(\varphi + \delta - \alpha)}{\sin\alpha} + \cos\varphi}. \tag{55}$$

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}. \tag{56}$$

[1]) F. R. v. Bichavsky u. H. E. Merwin, Journ. Opt. Soc. Amer. Bd. 5, S. 441 bis 443. 1921; Phys. Ber. Bd. 3, S. 98. 1922.

[2]) F. Eykman, Recueil de trav. chim. des Pays Bas. Bd. 13, S. 13, 157, 268. 1894; Bd. 14, S. 185. 1895; Bd. 15, S. 52. 1896; C. Leiss, Die optischen Instrumente der Firma R. Fuess, deren Beschreibung, Justierung und Anwendung. Leipzig: W. Engelmann 1899; ZS. f. Instrkde. Bd. 19, S. 65–74. 1899.

Da die Ablenkung konstant gleich einem bekannten Winkel, nach Eykman 40°, ist, ist zwecks Benutzung der Formel (55) und (56) nur noch die Kenntnis der Winkel φ und α erforderlich. Zur Messung dieser Winkel sind aber nur drei Einstellungen notwendig, indem das mit dem Teilkreis gekoppelte Prisma in drei bestimmte Lagen gedreht wird, wobei am vorteilhaftesten der Spaltkollimator mit einem Autokollimationsokular (Ziff. 8) zu versehen ist. Das Prisma wird so gedreht, daß zuerst die optische Achse des Spaltkollimators senkrecht auf der Austrittsfläche, dann senkrecht auf der Eintrittsfläche des Prismas steht. Die dritte Ablesung des Teilkreises erfolgt, wenn das Prisma den eintretenden Strahl genau um den festen konstanten Winkel δ ablenkt. Aus diesen drei Ablenkungen können wir in bekannter Weise (Ziff. 11) den brechenden Winkel φ und den Eintrittswinkel α ermitteln.

Um bei der Messung Zeit zu sparen, können wir Hohlprismen von bekannten brechenden Winkeln wählen, für die wir uns auf Grund der Formel (55) und (56) Tabellen ausarbeiten, aus denen wir zu dem dann allein zu messenden Einfallswinkel α gleich die zugehörige, gesuchte Brechzahl n entnehmen können. Eykman[1]) und Leiss haben solche Tabellen berechnet.

In der Hauptsache dient das Eykmansche Refraktometer zur Ermittelung der Temperaturabhängigkeit der Brechzahlen. Zur Erzeugung konstanter Temperaturen werden die Dämpfe siedender Flüssigkeiten, die den Heizmantel durchströmen, verwendet (Xylol: 137,5° C; Wasser: 98,8°).

Wenn das Gerät auch im besonderen für die Messung der Brechzahlen von Flussigkeiten bestimmt ist, so können wir damit doch auch feste Körper untersuchen, wenn diese nur einen solchen brechenden Winkel besitzen, daß sicher eine Ablenkung von δ erzielt werden kann.

26. Die Messung der Brechzahl einer Flüssigkeit mit dem Pulfrichschen Refraktometer mit veränderlichem brechenden Winkel. Zugrunde liegt diesem Refraktometer die Methode des streifenden Eintritts nach Kohlrausch (Ziff. 18) bei senkrechtem Austritt. Die Anordnung ist teilweise aus Abb. 35 zu ersehen. Pulfrich[2]) verwendet einen Flüssigkeitstrog, dessen Bodenplatte eine genaue planparallele Platte B ist, auf die ein abgeschliffener Glaszylinder dicht aufgeschoben werden kann. Dieser Trog steht auf dem Tisch eines Goniometers, dessen Beobachtungsfernrohr um eine durch die freie Vorderfläche des Glaskörpers G gehende, wagrecht liegende Achse meßbar drehbar ist. Der Glaskörper G ist eine Planparallelplatte, die an dem drehbaren Fernrohr fest angebracht ist, so daß die Achse des Fernrohres senkrecht die Plattenoberfläche durchstößt. Beim Drehen des Fernrohres dreht sich diese Planparallelplatte G ebenfalls mit und bildet dadurch mit der Oberfläche der Grundplatte B, je nach der Ein-



a b

Abb. 35. Das Pulfrichsche Refraktometer mit veränderlichem brechenden Winkel ist ein Verfahren des streifenden Ein- und senkrechten Austritts. — a) Durch Verwendung eines Autokollimationsfernrohrs wird die Richtung des Einfallslotes ermittelt. — b) Durch Verdrehen des Beobachtungsfernrohrs aus dieser Lotrichtung heraus, bis die Grenzlinie der Totalreflexion bei streifendem Lichteinfall einsteht, finden wir den Grenzwinkel i der Totalreflexion für die in dem Trog befindliche Flüssigkeit und damit deren Brechzahl $n = \frac{1}{\sin i}$.

[1]) Siehe Referat in ZS. f. angew. Chem. Bd. 23, S. 1815. 1910.
[2]) C. Pulfrich, ZS. f. Instrkde. Bd. 19, S. 335. 1899.

stellung des Fernrohres, verschiedene brechende Winkel, deren brechende Kanten parallel zur Drehungsachse des Fernrohres liegen. Lassen wir also (Abb. 35b) den Lichtstrahl in die Grundplatte B streifend eintreten, so tritt er aus der Platte B in die in den Trog eingefüllte Flüssigkeit unter dem Grenzwinkel i der Totalreflexion ein. Wir drehen dann das Beobachtungsfernrohr so lange, bis die Grenzlinie im Fadenkreuz des auf Unendlich eingestellten Fernrohres einsteht. Es tritt dann der Strahl senkrecht aus dem Prisma in den Glaskörper G ein. Dabei wird die Voraussetzung gemacht, daß die freie Fläche der Planparallelplatte G ganz in die Flüssigkeit eintaucht. Damit dies gut zu ermöglichen ist, ist der Glaskörper G in einer dafür günstigen Form ausgebildet. Stellen wir nun noch das Fernrohr durch Autokollimation, das Okular muß dazu ein GAUSSsches oder ABBEsches Okular sein (Ziff. 8), senkrecht auf die Oberfläche der Grundplatte B (Abb. 35a) ein, so gibt der zwischen den Einstellungen liegende Winkel unmittelbar den Grenzwinkel i der Brechung für die eingefüllte Flüssigkeit an, mit dem wir dann wieder, wie bei der KOHLRAUSCHschen Methode, Gleichung (37), die gesuchte Brechzahl der Flüssigkeit aus der einfachen Formel

$$n = \frac{1}{\sin i} \tag{57}$$

berechnen können, da die Planparallelgrundplatte B auf die Brechung ohne Einfluß ist und nur eine Parallelverschiebung des Strahls hervorruft.

Das Verfahren wäre als die Methode des streifenden Eintritts und senkrechten Austritts zu bezeichnen. Das letztere wird eben dadurch ermöglicht, daß wir den brechenden Winkel so lange ändern können, bis tatsächlich ein senkrechter Austritt des Lichtes aus dem Flüssigkeitsprisma erfolgt. Durch diese Einrichtung des veränderlichen Winkels gestattet das Gerät die Messung der Brechzahlen von Flüssigkeiten in jeder beliebigen Lage, nach oben vollständig unbegrenzt. Für Brechzahlen $n > 2$ empfiehlt es sich dabei allerdings, das Licht nicht aus Luft streifend in die Flüssigkeit eintreten zu lassen, sondern aus der Grundplatte B mit der bekannten Brechzahl n_0, in welchem Falle wir naturgemäß einen anderen Grenzwinkel der Brechung i' bekommen, mit dem wir aus der Gleichung [vgl. Formel (5) Ziff. 4]:

$$n = \frac{n_0}{\sin i'} \tag{58}$$

das gesuchte n berechnen.

Die Methode arbeitet nicht so genau wie die andern Methoden mit großen brechenden Winkeln, da das verwendete Goniometer nur eine Winkelmeßgenauigkeit von $\pm 1'$ erlaubt. Die Meßgenauigkeit der Brechzahlen wird verschieden sein, je nach der Größe des brechenden Winkels; mit wachsender Brechzahl wächst auch der Meßfehler. PULFRICH gibt folgende Tabelle der Meßgenauigkeiten:

n	1,30	1,50	1,70	1,90	2,10	2,30
Grenzwinkel i	50° 17′	41° 49′	36° 02′	31° 45′	28° 26′	25° 46′
Meßgenauigkeit dn in Einheiten der 4. Dezimale	±3,1	±4,9	±6,8	±8,9	±11,3	±13,9

Eine Quelle der Ungenauigkeit ist der offene Trog, der Temperaturschwankungen und ein Verdunsten der Flüssigkeit geradezu begünstigt.

Auch die Dispersionsbestimmung läßt sich nach diesem Verfahren durchführen, indem wir mit Hilfe einer in Winkelwerten geeichten Mikrometerschraube die Winkeldifferenzen $\Delta i_\lambda = i_\lambda - i_D$ ausmessen und zu dem für die Natriumlinie beobachteten Grenzwinkel der Brechung i_D vorzeichenrichtig hinzufügen.

27. Die Messung der Brechzahl von Flüssigkeiten mit Hilfe von Doppelprismen. Der grundlegende Gedanke aller hierhergehörigen Verfahren ist der, daß zwei Prismen vom gleichen brechenden Winkel, aber entgegengesetzt gerichteter Ablenkung hintereinandergeschaltet werden, wobei das eine Prisma aus dem zu untersuchenden, das andere aus einem ungefähr gleich stark brechenden Mittel besteht.

Es handelt sich also im Grunde genommen um eine Differenzmessung. Diese ist von praktischer Bedeutung insbesondere für die Messung von Flüssigkeiten geworden, weil sie gewisse bedeutsame Vorteile bietet.

Hinsichtlich der Höhe der zu messenden Brechzahl ist das Verfahren keinerlei Einschränkung unterworfen und kann deshalb sowohl für die stark brechenden Flüssigkeiten als auch für Gase und Dämpfe Verwendung finden (Ziff. 30). Da ferner die Brechzahlen der beiden zu vergleichenden Flüssigkeiten in den meisten Fällen nahezu die gleiche Temperaturabhängigkeit besitzen, sind diese Verfahren praktisch so gut wie unabhängig von Temperatureinflüssen, weil bei geeigneter Konstruktion der Doppelprismen angenommen werden darf, daß in beiden Prismen gleiche Temperatur herrscht. Außerdem ist die Ablenkung, die ein Lichtstrahl erfährt, wie wir noch sehen werden [Gleichung (60)], nur abhängig von der Differenz der beiden Brechzahlen, aber nicht von den absoluten Werten der Brechzahlen.

Die beiden brechenden Winkel dieser Doppelprismen werden im allgemeinen einander gleich gewählt (Abb. 36), so daß die Ein- und Austrittsfläche einander streng parallel sind. Der Strahl tritt senkrecht in das erste Prisma ein, trifft also unter einem Einfallswinkel gleich dem brechenden Winkel auf die Trennungsfläche der beiden Prismen auf, erfährt hier eine Ablenkung und tritt unter einem Winkel δ gegen die Eintrittsrichtung aus dem zweiten Prisma aus. Wir erhalten dann für den Fall $n_1 > n_2$ die Beziehungen (Abb. 36):



Abb. 36. Der Strahlengang in einem Doppelprisma aus zwei verschiedenen optischen Mitteln mit parallelen Endflächen bei senkrechtem Eintritt des Strahles für den Fall, daß $n_2 < n_1$ ist.

$$\left.\begin{aligned} n_1 \cdot \sin\varphi &= n_2 \cdot \sin\alpha', \\ \varphi &= \alpha' - \beta', \\ n_2 \cdot \sin\beta' &= \sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Beachten wir, daß n_1 und n_2 einander sehr nahe liegen, dann sind die Winkel β' und δ sehr kleine Winkel, deren Kosinus gleich Eins und deren Sinus gleich dem Winkel im Bogenmaß selbst gesetzt werden kann. Führen wir $\alpha' = \varphi + \beta'$ in die erste Gleichung ein, so erhalten wir schließlich die Formel

$$(n_1 - n_2) = \delta \cdot \frac{2\pi}{360} \cdot \operatorname{cotg}\varphi, \qquad (60)$$

die die Differenz der beiden Brechzahlen auch vorzeichenrichtig wiedergibt, wenn wir nur festsetzen, daß der Ablenkungswinkel $\pm$ zu nehmen ist, je nachdem in bezug auf die brechende Kante des zweiten Prismas die Ablenkung der brechenden Kante zu oder von ihr weg gerichtet (Abb. 36) erfolgt. Im Falle gleicher Brechzahlen der beiden Flüssigkeiten ist die Ablenkung $\delta = 0$; das Doppelprisma wirkt dann wie eine planparallele Platte.

Zwecks Messung bringen wir ein solches Doppelprisma auf den Tisch eines Spektrometers. Da n_1 und n_2 im allgemeinen sehr nahe zusammenliegen, ist der Winkel δ sehr klein, so daß wir ihn entweder mikrometrisch mit Hilfe der Alhidadenschraube oder mittels eines Okularmikrometers ausmessen können.

Das Beobachtungsfernrohr steht dabei in nahezu gerader Durchsicht zum Spaltrohr. Meist reicht das Gesichtsfeld aus, um das direkte und das abgelenkte Spaltbild gleichzeitig zu sehen, weshalb unter Umständen auch eine geeichte Okularteilung zur Ablesung genügt.

Auf diesem Grundprinzip beruhen verschiedene Apparate und Methoden, so das Oleorefraktometer nach AMAGAT und JEAN[1]), das Wasserrefraktometer nach BERGET[2]), das JOBINsche[3]) Refraktometer, das Refraktometer nach SELLERIO[4]), das SONDÉNsche Liquoskop[5]) und das Identimeter nach TRANNIN[6]). Um von der Bestimmung des Nullpunktes unabhängig zu sein, sind diese Geräte in der Regel so eingerichtet, daß die Flüssigkeiten in den beiden Hohlprismen leicht miteinander vertauscht werden können, wodurch die gleiche Ablenkung in entgegengesetzter Richtung erzielt wird. In solchen Fällen wird demnach der doppelte Ablenkungswinkel δ ermittelt, was zu einer besseren Genauigkeit des Verfahrens beiträgt.

Hierher gehört auch das ABBEsche[7]) Differentialrefraktometer, das gegenüber den obenerwähnten Geräten den Vorteil einer einfacheren Form und einer erhöhten Meßgenauigkeit aufweist. Das Beobachtungsfernrohr ist mit einem Autokollimationsokular versehen. Das Spaltrohr ist durch einen Planspiegel (Abb. 37) ersetzt, der so justiert ist, daß das nicht abgelenkte Autokollimationsbildchen auf der Null der Ableseskala, in der Mitte des Gesichtsfeldes, einsteht. Ist das Hohlprisma mit den beiden miteinander zu vergleichenden Flüssigkeiten gefüllt, so erfährt der durchtretende, am Spiegel reflektierte Strahl, beim abermaligen Durchtritt durch das Doppelprisma, nochmals eine Ablenkung von etwa doppelter Größe. Die Unabhängigkeit vom Nullpunkte, die sonst durch Vertauschen der beiden Flüssigkeiten erreicht wird, erzielt ABBE durch sein bereits 1881 angegebenes gekreuztes Doppelprisma (Abb. 37). Zwei Doppelprismen werden mit zueinander über Kreuz stehenden Scheidewänden übereinander aufgestellt. Die beiden vorderen Kammern stehen miteinander in Verbindung, ebenso die beiden hinteren Kammern. Dieses gekreuzte Doppelprisma hat zur Folge, daß im unteren Doppelprisma die Ablenkung zwar gleich stark, aber in entgegengesetzter Richtung wie im oberen Prisma erfolgt, und daß wir im Beobachtungsfernrohr zwei Autokollimationsbildchen sehen, die etwa um den vierfachen Ablenkungswinkel voneinander abstehen, der um so größer ist, je größer der Unterschied in der brechenden Kraft der beiden Flüssigkeiten ist. Die Meßgenauigkeit beläuft sich auf einige Einheiten der fünften Dezimale.

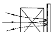


Abb. 37. Das ABBEsche gekreuzte Doppelprisma für Autokollimationsbeobachtung, wodurch der vierfache Ablenkungswinkel gemessen wird.

Da es vielfach angenehmer ist, als Vergleichsmittel nicht eine Flüssigkeit zu verwenden, sind DUPRÉ, CHAPPUIS und FÉRY dazu übergegangen, das Hohlprisma für die Vergleichsflüssigkeit durch ein festes

[1]) Zuerst veröffentlicht in einer Monographie, Compiègne 1888; außerdem F. JEAN, Braine d'Alleud. 12 Seiten 8°. 1899; ZS. f. Instrkde. Bd. 11, S. 29. 1891; H. O. G. ELLINGER, Journ. f. prakt. Chem. Bd. 44, S. 152—159. 1891.

[2]) A. BERGET, C. R. Bd. 180, S. 680—681. 1925.

[3]) A. JOBIN, Französ. Patent Nr. 308 097 vom 13. Febr. 1901.

[4]) A. SELLERIO, Cim. (N. S.) Bd. 1, S. 311—334. 1924; Phys. Ber. Bd. 6, S. 1303. 1925.

[5]) K. SONDÉN, ZS. f. analyt. Chem. Bd. 30, S. 196—199. 1891; Beibl. d. Ann. Bd. 15, S. 418. 1891; ZS. f. Instrkde. Bd. 11, S. 267. 1891.

[6]) E. DOUMER, Journ. de phys. (2) Bd. 9, S. 191—193. 1890; C. R. Bd. 110, S. 40 bis 42. 1890.

[7]) E. ABBE, ZS. f. Instrkde. Bd. 11, S. 267. 1891. Ausführlich beschrieben im Katalog „Optische Meßinstrumente" der Firma Carl Zeiß, Jena, S. 14—16. 1893.

Glasprisma vom gleichen brechenden Winkel zu ersetzen. Jetzt wird im allgemeinen der Ablenkungswinkel nicht mehr so klein sein, wie es zur Ableitung der Formel (58) vorausgesetzt worden ist. Setzen wir voraus, daß das Licht stets in das Prisma mit der zu untersuchenden Flüssigkeit senkrecht eintritt, so erhalten wir nunmehr aus den Gleichungen nach einfacher trigonometrischer Umrechnung zur Berechnung der gesuchten Brechzahl n_1 die Formel

$$n_1 = \operatorname{cotg}\varphi \cdot \sin\delta + \sqrt{n_2^2 - \sin^2\delta}\,, \tag{61}$$

wobei das Vorzeichen von δ, wie im Anschluß an die Formel (60) gesagt, zu wählen ist. Etwas günstiger für rein logarithmische Durchrechnung wird diese Formel, wenn wir einen Hilfswinkel γ einführen, der durch die Gleichung

$$\cos\gamma = \frac{\sin|\delta|}{n^2} \tag{62}$$

definiert ist. Die Gleichung (61) läßt sich dann leicht in die Formel

$$n_1 = \frac{n_2 \cdot \cos(\gamma \mp \varphi)}{\sin\varphi} \tag{63}$$

überführen, in der das —-oder +-Zeichen zu verwenden ist, je nachdem $\delta \gtrless 0$ ist.

DUPRÉ[1]) verwendet bei seinem Refraktometer nur den Fall senkrechten Ein- oder Austritts des Strahls auf der Seite des stärker brechenden Mittels, also den Fall $n_1 > n_2$; $\delta > 0$. Der Apparat selbst ist im wesentlichen nichts anderes als ein vereinfachtes Spektrometer mit feststehendem Spaltrohr, beweglichem Beobachtungsfernrohr und einem etwa auf einen Sextanten verkürzten Teilkreis. Die Beobachtung erfolgt bei einfarbigem Lichte durch zwei Einstellungen: 1. Einstellung des Beobachtungsfernrohrs bei senkrechtem Eintritt des Strahls in das stärker brechende Mittel und 2. Einstellung bei senkrechtem Austritt des Strahls aus dem stärker brechenden Mittel. Das Spektrometertischchen ist so konstruiert, daß diese Bedingungen ohne Hilfsbeobachtungen von selbst mechanisch erfüllt werden. Die Differenz der beiden Einstellungen ist der doppelte Ablenkungswinkel 2δ. Die Rechnung können wir uns durch ein für allemal aufgestellte Tabellen und Kurven erleichtern. Die Genauigkeit liegt in der vierten Dezimale.

In etwas anderer Weise gehen CHAPPUIS[2]) und FÉRY[3]) vor, indem sie nicht den Ablenkungswinkel bestimmen, sondern indem sie ihn einfach aufheben. Das Doppelprisma ist wieder ein ähnliches wie bei DUPRÉ: ein Hohlprisma, das bei CHAPPUIS durch ein auf der einen Seite angesetztes Glasprisma von gleichem brechenden Winkel, bei FÉRY durch zwei beiderseits an das Hohlprisma angesetzte Glasprismen vom halben brechenden Winkel zu einem Trog mit parallelen Außenwänden ergänzt ist. Spaltrohr und Beobachtungsfernrohr stehen fest in gerader Durchsicht aufeinander eingestellt. Zwischen beiden befindet sich der Doppelprismentrog. Um die Ablenkung aufzuheben, rückgängig zu machen, wäre daran zu denken, den brechenden Winkel des Vergleichsprismas veränderlich zu machen und ihn so lange zu ändern, bis der das Doppelprisma durchsetzende Strahl in der Tat keine Ablenkung erfährt.

Diese Veränderung des brechenden Winkels beim Glasprisma erreicht CHAPPUIS dadurch, daß er dem abgelenkten Strahl ein Diasporameter nach

---

[1]) PH. PELLIN, Journ. de phys. (2) Bd. 8, S. 411—415. 1889; Beibl. d. Ann. Bd. 14, S. 35. 1899; ZS. f. Instrkde. Bd. 10, S. 108. 1890.

[2]) J. CHAPPUIS, C. R. Bd. 114, S. 286—288. 1892; Beibl. d. Ann. Bd. 16, S. 425. 1892.

[3]) C. FÉRY, C. R. Bd. 113, S. 1028—1030. 1891; Beibl. d. Ann. Bd. 16, S. 273. 1892; ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 288. 1892; C. CHÉNEVEAU, Journ. de phys. Bd. 5, S. 649. 1906; ZS. f. Instrkde. Bd. 26. S. 349. 1906.

GOVI in den Weg schiebt, das aus gleichem Glase wie das feste Prisma angefertigt ist und mit dem festen Prisma zusammen ein Glasprisma von meßbar veränderlichem Winkel bildet. Sind Brechzahl und brechender Winkel der im Hohlprisma enthaltenen Flüssigkeit n_2 und φ_2, beim veränderlichen Glasprisma n_1 und φ_1, so gilt in diesem Falle die einfache Beziehung $n_1 \cdot \sin\varphi_1 = n_2 \cdot \sin\varphi_2$, aus der sich das gesuchte n_1 berechnen läßt. Die erreichbare Meßgenauigkeit beträgt etwa vier bis fünf Einheiten der vierten Dezimale.

Dementgegen benutzt FÉRY eine halbierte plankonvexe Zylinderlinse, die mit ihrer Zylinderachse parallel zur brechenden Kante des Doppelprismas steht und senkrecht dazu verschoben werden kann. Diese halbe Zylinderlinse ist nichts anderes als ein veränderliches Prisma, dessen brechender Winkel, wenn wir die Linse von ihrem Scheitel bis zum Linsenrand an einem schmalen, parallel zur brechenden Kante und parallel zur Achse des Zylinders stehenden Spalt vorbeischieben, von 0° an kontinuierlich bis zu einem Maximalwert wächst, der von der Krümmung der Linse abhängt. Dabei erfährt ein durchtretender Lichtstrahl jeweils eine Ablenkung, die bei dünnen Linsen der Verschiebung der Linse proportional ist. Die Verschiebung der Linse wird an einer Teilung abgelesen, die unmittelbar in Brechzahlen geteilt ist und bei der ein Intervall 25 Einheiten der vierten Dezimale bedeutet. Dabei wird ein Nonius zu Hilfe genommen, der eine Einheit der vierten Dezimale festzustellen ermöglicht. Das Hohlprisma kann auch so angefertigt werden, daß die beiden Hälften einer plankonvexen Zylinderlinse so zusammengesetzt werden, daß ihre Planflächen das Hohlprisma einschließen.

28. Die Messung der Brechzahl von stark absorbierenden Flüssigkeiten im Hohl-Biprisma nach CHRISTIANSEN und MARTENS. Stark absorbierende Flüssigkeiten lassen sich in Hohlprismen von großem brechenden Winkel nicht mehr messen. Deshalb haben schon KUNDT[1]) und CHRISTIANSEN[2]) solche stark gefärbten Flüssigkeiten in einfachen spitzen Hohlprismen gemessen, deren brechender Winkel etwa 1° und weniger beträgt. Um die Genauigkeit zu erhöhen, wendet CHRISTIANSEN auch schon ein Hohl-Biprisma von kleinem brechenden Winkel an, das später von MARTENS[3]) wieder aufgenommen wird und auch dann zur Messung geeignet ist, wenn nur geringe Flüssigkeitsmengen zur Verfügung stehen.

Das MARTENSsche Hohl-Biprisma ist in Abb. 38 schematisch wiedergegeben. Von einer Glasröhre von etwa 20 bis 30 cm Innendurchmesser wird ein Ring R abgeschnitten, dessen Endflächen genau parallel abgeschliffen und plan poliert werden. Auf diese Endflächen werden zwei planparallele Quarzplatten P_1 und P_2 aufgeschoben, die so aus einem Kristall herausgeschnitten sind, daß die Achsenrichtung senkrecht auf die Flächen, also parallel zur Achse des Ringes R liegt (in der Abb. 38 durch die Strichelung verdeutlicht). Dadurch erhalten wir einen planparallelen Trog, in den wir nur noch ein Quarz-Biprisma P mit den beiden brechenden Winkeln φ, die wir beliebig groß wählen können, einbringen. Auch



Abb. 38. Das MARTENSsche Hohl-Biprisma für stark absorbierende Flüssigkeiten. In den Hohlraum zwischen zwei an ihrem Rande mit einem Glaszylinder R verkittete Quarzplatten P_1 und P_2 wird ein Biprisma P aus Quarz gebracht, wodurch ein Hohl-Biprisma mit den gleichen brechenden Winkeln φ entsteht.

[1]) A. KUNDT, Pogg. Ann. Bd. 145, S. 67–80. 1852.
[2]) C. CHRISTIANSEN, Wied. Ann. Bd. 19, S. 257–283. 1883.
[3]) F. F. MARTENS, Ann. d. Phys. Bd. 6, S. 603–640. 1901.

für dieses Biprisma aus Quarz wird die Lage der Achse entsprechend der der Verschlußplatte gewählt, wie es durch die Schraffur zum Ausdruck gebracht ist. Zwischen dem Biprisma P und der Verschlußplatte P_2 entstehen dann zwei prismatische Hohlräume von gleichem brechendem Winkel φ wie das Quarz-Biprisma und mit gemeinsamer brechender Kante. In diese prismatischen Hohlräume wird die zu messende Flüssigkeit gebracht. Für stark absorbierende Flüssigkeiten hat es sich als praktisch erwiesen, als brechenden Winkel einen solchen von etwa 1° zu wählen. MARTENS selbst nimmt 1° 10'. Dieses Doppelprisma setzen wir auf das Tischchen eines Spektrometers zwischen Spalt- und Beobachtungskollimator und lassen das Licht ungefähr senkrecht zu den Abschlußplatten eintreten, das demnach parallel zur optischen Achse des verwendeten Quarzes eintritt, so daß als Brechzahl im Quarz die des ordentlichen Strahles n_0 in Frage kommt. Durch diese Anordnung, wonach die ablenkenden Prismen in ihren brechenden Kanten zusammenstoßen, wird erreicht, daß wir eine Ablenkung der eintreffenden Strahlen nach verschiedenen Seiten, und zwar eine doppelt so große Ablenkung erhalten denn bei einem Prisma. Betrachten wir die Ablenkung (Abb. 39) auf einer Seite, so können wir diese als dadurch zustande gekommen auffassen, daß einmal eine Ablenkung durch das Quarzprisma erfolgt, die aber dann wieder durch die durch das Flüssigkeitsprisma bedingte Ablenkung, je nachdem $n \lesseqgtr n_0$ ist, teilweise rückgängig gemacht bzw. ins Gegenteil verkehrt wird. Die Abschlußplatte P_2 übt keine ablenkende Wirkung aus, sondern verursacht nur eine Parallelverschiebung des Strahls. Es ist genau so, als ob der Strahl aus der Flüssigkeit unmittelbar in Luft austreten würde. Beachten wir, daß wir es mit kleinen brechenden Winkeln zu tun haben, daß an Stelle des Sinus der Winkel selbst im Bogenmaß gesetzt werden kann, so bekommen wir, falls $n > n_0$ ist, die Beziehungen



Abb. 39. Der Strahlengang im MARTENSschen Hohl-Biprisma bei senkrechtem Eintritt der parallelen Lichtstrahlen, wobei zwei nach verschiedenen Seiten abgelenkte Spaltbilder beobachtet werden, deren Winkelabstand δ gemessen wird, um bei bekannter Brechzahl n_0 des Hilfsprismas und bei bekanntem brechenden Winkel φ des Hohl-Biprismas die gesuchte Brechzahl der Flüssigkeit als $n = n_0 \pm \frac{\delta}{2\varphi}$ zu berechnen, je nachdem $n \gtrless n_0$ ist, und unter der Voraussetzung, daß es sich um genügend kleine Winkel handelt

$$n_0 \cdot \varphi = n \cdot \alpha',$$

$$n \cdot \beta' = \frac{\delta}{2},$$

und

$$\beta' = \varphi - \alpha',$$

woraus durch Substitution folgt:

$$\varphi \cdot (n - n_0) = \frac{\delta}{2}. \tag{64}$$

Diese Beziehung sagt aus, daß die Ablenkung proportional der Differenz der beiden Brechungszahlen ist. Für die gesuchte Brechzahl der Flüssigkeit selbst erhalten wir:

$$n = n_0 + \frac{\delta}{2\varphi}. \tag{65}$$

Ist $n < n_0$, so erfolgt die Ablenkung entgegengesetzt wie in Abb. 39 und wir bekommen $\beta' = \alpha' - \varphi$, und die Gleichungen (64) und (65) nehmen die Form an

$$\varphi \cdot (n_0 - n) = \frac{\delta}{2}$$

und

$$n = n_0 - \frac{\delta}{2\varphi}. \tag{66}$$

Im ersten Falle erfolgt die Ablenkung von der brechenden Kante weg, im zweiten der brechenden Kante zu. Beide Fälle lassen sich in den Gleichungen (64) und (65) zusammenfassen, wenn wir festsetzen, daß der Winkel δ positiv zu rechnen ist, wenn die beiden austretenden Strahlen schnittflüchtig sind, von der brechenden Kante weg abgelenkt werden; daß er negativ zu nehmen ist, wenn sie schnittstrebig der Kante zu gebrochen werden. Dies läßt sich bei Beobachtung der beiden im Beobachtungsfernrohr sichtbaren Spaltbilder leicht entscheiden. Steht die brechende Kante lotrecht, so werden wir zwei horizontal auseinanderliegende Spaltbilder wahrnehmen. Blenden wir durch Einschieben eines undurchsichtigen Schirmes vor dem Objektiv des Beobachtungsfernrohres das rechte Prisma ab und verschwindet dabei das rechte Spaltbild, so sind die Strahlen schnittflüchtig und damit der Ablenkungswinkel δ positiv; verschwindet aber das linke Spaltbild, so sind die Strahlen schnittstrebig und damit der Ablenkungswinkel δ negativ.

An sich ist es gleichgültig, welches durchsichtige Material zum Hilfs-Biprisma P verwendet wird. Da diese Methode aber auch zur Ermittelung der Brechzahlen im ultravioletten Lichtwellengebiet (Ziff. 60) Verwendung finden kann und soll, ist es von Vorteil, den ultraviolettdurchlässigen und in diesem Gebiet in Hinsicht auf seine Brechzahlen gut bekannten Quarz dazu zu benutzen.

Was die Ausführung der Messung selbst, also die Bestimmung des Ablenkungswinkels δ anlangt, so kann wohl unmittelbare Beobachtung und Ausmessung der Winkel mit Hilfe einer geeichten Albidadenmikrometerschraube in bekannter Weise stattfinden. Dem vorzuziehen ist aber die photographische Durchführung der Messung, insbesondere im Hinblick auf das ultraviolette Gebiet.

Um eine solche Winkelmessung photographisch auszuführen, ersetzen wir das gewöhnliche Beobachtungsfernrohr des Spektrometers durch einen Photo-Kollimator, wobei in der Brennebene des gut korrigierten Objektivs, dessen Brennweite f genau bekannt sein muß, eine photographische Platte eingeschaltet werden kann. Belichten wir bei lotrecht stehender brechender Kante des Hohl-Biprismas, dessen brechenden Winkel wir kennen und das wir vorher in bekannter Weise justiert haben, so bekommen wir im Photogramm zwei von der Mitte aus nach rechts bzw. links verlaufende Reihen von senkrecht stehenden Spaltbildern, zwei Spektren. Wir messen die Abstände l zusammengehöriger Spaltbilder, die also gleicher Wellenlänge entsprechen, unter dem Komparator aus. Der gesuchte Ablenkungswinkel δ_2 läßt sich dann aus der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{l}{2f} \tag{67}$$

leicht berechnen.

Das Verfahren liefert die Brechzahl mit einer Sicherheit von einigen Einheiten in der dritten Dezimale, weil der brechende Winkel φ nur sehr klein gewählt werden kann, da je zwei in einer Reihe liegende Spektren auf die Platte kommen müssen. Dafür hat diese Methode aber den großen Vorteil, daß eben infolge der geringen Schichtdicke der zur Verwendung kommenden Flüssigkeit

noch Stoffe sich messen lassen, bei denen andere Methoden infolge zu starker Absorption versagen.

ε) Die Brechzahlmessungen von Gasen im Prisma.

29. Die Messung der Brechzahlen von Gasen in Hohlprismen. Die brechende Kraft der Gase ist sehr gering. Doch kann ihre Messung im Hohlprisma immer noch mit einiger Sicherheit erfolgen, wenn der brechende Winkel nur groß genug gewählt wird, etwa 100 bis 150°. Die Schwierigkeit bei der Anwendung der prismatischen Methode auf Gase besteht nicht nur in der genauen Ermittelung des sehr kleinen Ablenkungswinkels, sondern vor allem in der leichten Veränderlichkeit der Gase mit Druck und Temperatur, was eine ganz sorgfältige Messung und Berücksichtigung von Druck und Temperatur sowohl bei dem im Hohlprisma befindlichen Gase selbst als auch bei der umgebenden Luft verlangt.

Seit den grundlegenden Versuchen von BIOT und ARAGO[1]), denen sich die Untersuchungen von ARAGO und PETIT[2]), DULONG[3]), LE ROUX[4]) u. a. anschlossen, hat dieses Verfahren keine prinzipiellen Änderungen durchgemacht, nur technisch wurde es vervollkommnet.

Die Beobachtungsmethode ist die nach RYDBERG-MARTENS (Ziff. 17) mit beliebigem Einfallswinkel.

Um die Druckverhältnisse verändern zu können, wird das Hohlprisma einerseits an eine Pumpe, anderseits an einen Gasbehälter, der unter Druck gesetzt werden kann, angeschlossen. Ein Manometer dient zur Druckmessung.

DULONG führt die Messung verschiedener Gase auf einen Vergleich mit einem bekannten Gase zurück, indem er zunächst die Ablenkung des Vergleichsgases im Hohlprisma bestimmt, darauf das zu untersuchende Gas einfüllt und dieses bei der gleichen Temperatur unter einen solchen Druck p_1 setzt, daß die Ablenkung gleich der des Vergleichsgases ist. Für diesen Zustand ist dann die Brechzahl des Gases gleich der des Vergleichsgases, das in dem Anwendungszustand die Brechzahl n_1 hat. Nun gilt aber nach LANDOLT das Gesetz von der Konstanz der spezifischen Brechung: $(n-1):d=$ konst., worin d die Dichte bedeutet. Um die Brechzahl n_0 des Gases beim Normaldruck p_0 zu bekommen, wird deshalb von der Gleichheit

$$\frac{n_1-1}{d_1}=\frac{n_0-1}{d_0} \quad \text{oder} \quad \frac{n_1-1}{n_0-1}=\frac{d_1}{d_0} \tag{68}$$

ausgegangen, in der der Quotient der Dichten durch den Quotienten p_1/p_0 der zugehörigen Drucke ersetzt werden kann:

$$\frac{n_1-1}{n_0-1}=\frac{p_1}{p_0}, \tag{69}$$

d. h. bei ein und demselben Gase, dessen Temperatur konstant bleibt, verhalten sich die zu verschiedenen Drucken gehörigen Lichtbrechungsvermögen direkt wie die Drucke selbst. Es ist also die Möglichkeit gegeben, aus der Gleichung (69) die gesuchte Brechzahl n_0 zu berechnen:

$$n_0=1+\frac{p_0}{p_1}\cdot(n_1-1). \tag{70}$$

---

[1]) J. B. BIOT u. D. F. J. ARAGO, Mém. de la Classe des Scienc. math. et phys. de l'Inst. nat. Bd. 7, prem. sem. 1806; S. 301. 1806; sec. sem. 1807, S. 39. 1808; Gilb. Ann. Bd. 25, S. 345—392. 1807; Bd. 26, S. 36—114. 1807.

[2]) D. F. J. ARAGO u. A. TH. PETIT, Ann. chim. phys. (2) Bd. 1, S. 1—16. 1816.

[3]) P. L. DULONG, Ann. chim. phys. (2) Bd. 31, S. 154—181. 1826.

[4]) F. P. LE ROUX, C. R. Bd. 51, S. 171—172. 1860.

30. Die Messung der Brechzahl von Gasen im Doppelprisma nach Ketteler. Das Haber-Lowesche Gasrefraktometer. Dieses Hintereinanderbeobachten nach Dulong für die beiden Gase birgt Fehlerquellen in sich, die nur schwer zu kontrollieren und zu vermeiden sind. Deshalb ist das von Ketteler[1]) angegebene Verfahren vorzuziehen, das jedenfalls die Möglichkeit bietet, alle störenden Temperaturschwankungen auszuschalten. Ketteler benutzt ein Doppelprisma (Abb. 40), ähnlich dem für Flüssigkeiten beschriebenen (Ziff. 27). In einem durch zueinander parallele und in sich selbst planparallele Glasplatten A_1 und A_2 abgeschlossenen Raum wird ein gasdichtes Hohlprisma P eingebaut, so daß zwei prismatische Räume R_1 und R_2, die untereinander in Verbindung stehen, übrigbleiben und einen brechenden Gesamtwinkel gleich dem des Hohlprismas haben. Diese beiden Räume können entweder mit der äußeren Luft oder einer Pumpe und einem Manometer verbunden werden. Das Hohlprisma P besitzt in ähnlicher Weise Anschlußmöglichkeiten an äußere Luft, Manometer, Luftpumpe und Einlasser für Gas oder Dampf. Wir haben somit zwei prismatische Kammern R_{12} und P. Pumpen wir die eine der Kammern luftleer, während sich in der anderen das zu untersuchende Gas befindet, so erhalten wir ein Spektrum des durchtretenden Lichtes entsprechend der zerstreuenden Wirkung des Gases. Enthält dagegen jeder der beiden Räume Gas, dann heben sich die zerstreuenden Wirkungen beider ganz oder teilweise auf, weshalb unter Umständen das beobachtete Bild achromatisch sein kann.

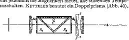


Abb. 40. Das Doppelprisma von Ketteler zur Brechzahlmessung von Gasen. Die aus dem Spaltrohr parallel austretenden Strahlen durchsetzen das Doppelprisma und liefern in dem auf gerade Durchsicht eingestellten Beobachtungsrohr ein Spaltbild, dessen seitliche Verschiebung gegenüber der Nullage ein Maß für den Ablenkungswinkel δ ist. Der im allgemeinen nur wenige Minuten betragende Keil F aus einem stark zerstreuenden Glase dient dazu, das Spektrum aufzuspalten und die Einzellinien für die Messung der an sich geringen Farbenzerstreuung der Gase besser zugänglich zu machen. Durch Drehung des Keils um 180° (von Lage 1 nach Lage 2) werden die verdoppelten Dispersionswinkelwerte geliefert.

Zur Beobachtung dient ein Spektrometer, auf dessen Tisch das Doppelprisma justiert ist. Vom Spaltkollimator tritt das Licht senkrecht durch die Glasplatte A ein. Die verwendeten Glasplatten müssen alle gut planparallel sein, damit sie keine ablenkende, sondern nur parallelversetzende Wirkung haben. Das Beobachtungsfernrohr ist in gerader Durchsicht auf das Spaltrohr eingestellt, damit der austretende Lichtstrahl, der eine Ablenkung erfahren hat, ein Bild seitlich der optischen Achse entwerfen wird. Da bei Gasen die Ablenkung sehr gering ist, wird im allgemeinen das abgelenkte Bild noch im Gesichtsfeld liegen, weshalb sein Winkelabstand vom Nullbild, d. h. die Ablenkung, mit Hilfe eines Okularmikrometers ausgemessen werden kann. Wird die Ablenkung größer, z. B. mehrere Minuten, so werden wir dann allerdings die Alhidadenmikrometerschraube zur Ausmessung benutzen müssen. Durch Umdrehen des Tisches um 180° und Einstellung des dann nach der anderen Seite abgelenkten Spaltbildes können wir den doppelten Ablenkungswinkel ermitteln und dadurch die Einstellung auf das Nullbild vermeiden.

[1]) E. Ketteler, Theoretische Optik, S. 487–525. Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn 1885.

Zur Ableitung der Formel denken wir uns das Doppelprisma durch die winkelhalbierende Ebene des brechenden Winkels φ in zwei gleiche Hälften geteilt (Abb. 41), die durch eine parallele Luftzwischenschicht voneinander getrennt werden, die keine ablenkende Wirkung auf den Strahl ausübt.

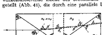


Abb. 41. Der Strahlengang im KETTELERschen Gas-Doppelprisma, das zur Ableitung der Gleichung in zwei gleiche Hälften geteilt ist.

In Abb. 41 ist der Strahlengang dargestellt. Für die linke Hälfte des Doppelprismas erhalten wir für die Ablenkung δ_1, gemessen im Bogenmaß, ähnlich wie in Ziff. 27, Gleichung (60), unter der Beachtung, daß die Brechzahl des Gases in R_{12} gleich n_1 und die des Gases in P gleich $n_2 > n_1$ sein soll, als Bestimmungsgleichung

$$n_2 - n_1 = \delta_1 \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}. \tag{71}$$

Für die zweite, rechte Hälfte des Trogs ist dann δ_1 der Einfallswinkel, und wir bekommen nacheinander, wenn wir an Stelle des Sinus der kleinen Winkel gleich den Winkel selbst, gemessen im Bogenmaß, einführen

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1 = n_2 \cdot \beta', \\ &\gamma' - \beta' = \frac{\varphi}{2}; \qquad \gamma' = \frac{\varphi}{2} + \beta', \\ &n_2 \cdot \sin\gamma' = n_1 \cdot \sin\gamma, \\ &\gamma - \varepsilon = \frac{\varphi}{2}; \qquad \varepsilon = \gamma - \frac{\varphi}{2}, \\ &n_1 \cdot \varepsilon = \delta. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Dieses System von Gleichungen führt zunächst durch Einsetzen der Winkelwerte in die dritte Gleichung und unter der Berücksichtigung, daß der Kosinus eines kleinen Winkels nur wenig von der Eins abweicht, also gleich Eins gesetzt werden kann, zu der Gleichung

$$(n_2 - n_1) \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = (n_1 \cdot \varepsilon - n_2 \cdot \beta') \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

und deshalb weiter zu

$$n_2 - n_1 = (\delta - \delta_1) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}. \tag{73}$$

Durch Addition von (71) und (73) ergibt sich als endgültige Bestimmungsgleichung für die gesuchte Brechzahl n_2

$$n_2 - n_1 = \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}, \tag{74}$$

worin δ im Bogenmaß (= Winkelmaß $\times\ 2\pi/360$) zu nehmen ist. Diese Formel gibt auch den Fall wieder, daß $n_2 < n_1$ ist, wenn wir nur beachten, daß $\delta \gtrless 0$ zu nehmen ist, je nachdem die Ablenkung von der brechenden Kante des mittleren Prismas P weg oder ihr zu erfolgt (Abb. 41).

Die Spektren der Gase betragen nur einige Winkelsekunden, weshalb sie zu einer genauen Messung der Dispersion am Doppelprisma nicht genügend aufgespalten sind. Um die Linien weiter auseinander zu ziehen, damit sie der

Messung besser zugänglich sind, setzen wir dicht vor das Beobachtungsfernrohr (Abb. 40) ein spitzes Flintglasprisma F, dessen brechender Winkel etwa 1° beträgt, während seine brechende Kante zu der des Gasprismas parallel verläuft. Ohne zwischengeschaltetes Gasprisma liefert das Flintprisma allein ein Linienspektrum, dessen Winkelabstände der einzelnen Linien voneinander wir mit genügender Genauigkeit feststellen können, die wir sozusagen als Nullage auffassen. Schalten wir nunmehr das Gasprisma ein, bei luftleerer Kammer R_{12}, so tritt eine zerstreuende Zusatzwirkung ein. Lagen die brechenden Kanten von Gas- und Flintprisma auf der gleichen Seite (Abb. 40, Lage 2 des Flintprismas F), so addieren sich die Wirkungen und die Linienabstände verbreitern sich dementsprechend; liegen die brechenden Kanten aber auf verschiedenen Seiten (Abb. 40, Lage 1 des Flintprismas F), so subtrahieren sich die Wirkungen, die Linienabstände verringern sich. Die Differenz, gebildet aus den verbreiterten und verengerten Linienabständen, gibt die doppelten, durch das Gasprisma bedingten Dispersionswinkelwerte, die in bekannter Weise mit dem für eine der Linien gemessenen Ablenkungswinkel zusammen die Ablenkungswinkel für die einzelnen Wellenlängen liefern, die in obiger Bestimmungsgleichung (74) eingesetzt werden.

Ändern wir das Kettelersche Verfahren in ein Autokollimationsverfahren um, indem wir das Spaltrohr durch einen Spiegel S (Abb. 42) ersetzen, der die aus dem Doppelprisma austretenden Lichtstrahlen wieder durch dieses hindurch in das Beobachtungsfernrohr zurückwirft, so kommen wir zum Haber-Löweschen[1]) Gasrefraktometer, bei dem der Ablenkungswinkel verdoppelt wird, weshalb das Gerät eine sehr hohe Meßgenauigkeit aufweist, die auch deshalb so günstig ist, weil eine sehr große Objektivbrennweite von 750 mm und zur Beobachtung nicht ein gewöhnliches Okular, sondern ein Mikroskop M verwendet wird. Die Innenkante des durch eine Lichtquelle lichtempfangenden Autokollimationsprismas P dient als Marke, deren Lage bei leerem und bei gasgefülltem Prisma mit Hilfe der in der Brennebene angebrachten Skala T festgestellt wird, deren Intervall 0,02 mm beträgt, also einem Winkelwert von 0,096″ entspricht. Eine genaue Ausmessung erfolgt mittels einer meßbar verstellbaren, mit Meßtrommel versehenen Mikrometerschraube s, die den Spiegel S um eine vertikale Achse dreht. Dadurch läßt sich eine Ablesegenauigkeit von $\pm 0{,}005$ mm Verschiebung der Kante erzielen, was bei den vorhandenen Apparatabmessungen einem noch meßbaren Unterschied von ± 3 Einheiten in der siebenten Dezimale bei der Brechzahl entspricht. Bei dem Nachweis der Kohlensäure in Luft bedeutet dies eine Feststellung des Kohlensäuregehaltes bis auf $\pm 0{,}2$% CO_2 genau. Versuchs- und Vergleichsgas müssen sich dabei unter den gleichen Temperatur- und Druckverhältnissen befinden, wenn wir diese nicht rech-

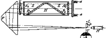


Abb 42. Das Gasrefraktometer nach Haber-Löwe, bei dem unter Zuhilfenahme eines Autokollimationsprismas P und eines Spiegels S die Ablenkung verdoppelt wird.

[1]) F. Haber, ZS. f. Elektrochem. Bd. 13, S. 460—463. 1907; L. Stuckert, ebenda Bd. 16, S. 37—92. 1910.

nerisch (Ziff. 29) berücksichtigen wollen. Um das Gerat handlicher und kürzer zu machen, wird der Strahlengang durch ein 90°-Prisma P' gebrochen.

31. Die Messung der Brechzahl von Gasen nach v. Lang. v. Lang[1]) verwendet seine sehr sinnreich durchgeführte Methode ursprunglich zur Messung der Abhängigkeit der Brechzahl der Luft von der Temperatur. Das Verfahren läßt sich jedoch auch zur Messung der Brechzahlen von Gasen überhaupt verwenden.

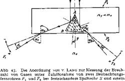


Abb 43. Die Anordnung von v. Lang zur Messung der Brechzahl von Gasen unter Zuhilfenahme von zwei Beobachtungsfernrohren F_1 und F_2 bei feststehendem Spaltrohr S und einem in einem planparallelen Trog feststehenden Prisma ABC, an dem die auf die Prismenkante A treffenden Parallelstrahlen nach zwei verschiedenen Seiten reflektiert werden, um beim Austritt aus der Glaskammer gebrochen zu werden.

Auf dem Tisch eines Spektrometers, das mit zwei beweglichen Beobachtungsfernrohren F_1 und F_2 und einem Spaltrohr S ausgerustet ist, befindet sich ein gasdichter Trog (Abb. 43), der von parallelen Wanden P_1 und P_2 begrenzt wird. Der Trog ist so justiert, daß die vom Spaltrohr S kommenden Strahlen senkrecht zu P_1 eintreten. Sie treffen innerhalb des Troges auf die Seitenflachen eines Prismas ABC, dessen brechender Winkel φ etwa 60° ist und dessen Winkelhalbierende um den kleinen Winkel ϱ gegen die Einfallsrichtung der Strahlen verdreht ist, werden dort reflektiert und treten an der zweiten Begrenzungsebene P_2 des Trogs aus diesem aus, um in die Fernrohre F_1 und F_2 einzutreten.

Befindet sich im Trog Luft, die gleiche wie in dessen Umgebung, so geht der Strahl ungebrochen weiter. Die beiden Beobachtungsfernrohre F_1 und F_2 werden auf diese nicht abgelenkten Strahlenrichtungen, die die Nullstellungen abgeben, eingestellt. Wird nun die Luft im Trog erwärmt oder durch ein zu messendes Gas ersetzt, so erfährt der Strahl beim Austritt aus dem Trog eine Ablenkung. Die Bilder in den Beobachtungsfernrohren wandern aus den Nullstellungen heraus. Wir messen die eingetretene Ablenkung für jedes der beiden Bilder als δ_1 und δ_2. Ist die Brechzahl im Trog n_1, die der umgebenden Luft n_0, so erhalten wir für den links verlaufenden Strahl der Reihe nach die Gleichungen

$$\alpha_1 = \varphi + 2\varrho,$$
$$n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_0 \cdot \sin(\alpha_1 - \delta_1),$$

aus denen wir bei Beachtung, daß δ_1 ein sehr kleiner Winkel ist, schließlich die Beziehung

$$\delta_1 = \frac{n_0 - n_1}{n_0} \cdot \mathrm{tg}\,(\varphi + 2\varrho) \tag{75}$$

[1]) V. v. Lang, Wiener Ber. (2) Bd. 69, S. 451–468. 1874.

ableiten, wobei δ_1 im Bogenmaß $\left(= \text{Winkelmaß} \times \frac{2\pi}{360}\right)$ zu nehmen ist. Auf ähnliche Weise gewinnen wir eine zweite Beziehung

$$\delta_2 = \frac{n_0 - n_1}{n_0} \cdot \operatorname{tg}(\varphi - 2\varrho). \tag{76}$$

Wenn wir nun beim Versuch den Verdrehungswinkel ϱ des Prismas auf ein Minimum herabdrucken, was experimentell sehr leicht ausführbar ist, so ist der Einfluß von ϱ auf das rechnerische Ergebnis vernachlässigbar gering, weshalb wir die Gleichungen (75) und (76) zu einer vereinigen konnen, die uns die Differenz der beiden Brechzahlen liefert als

$$n_0 - n_1 = \frac{\delta}{2} \cdot n_0 \cdot \operatorname{tg}\varphi, \tag{77}$$

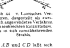


Abb 44. v. Langsches Verfahren, dargestellt als zweifach angewendetes Verfahren des senkrechten Eintritts bzw. des in sich zuruckkehrenden Strahls.

wenn $\delta = \delta_1 + \delta_2$ zu setzen ist. Die Formel gibt die Verhältnisse auch vorzeichenrichtig wieder, wenn wir $\delta \gtrless 0$ wählen, je nachdem die Ablenkung vom Troge weg oder ihm zu erfolgt.

Die Methode ist im Grunde nichts anderes als das doppelt angewendete Verfahren des senkrechten Eintritts (Ziff. 15) bei Verwendung eines auf allen drei Seiten durchsichtigen sehr spitzen Hohlprismas (Abb. 44). Bei Verwendung versilberter Abschlußplatten AB und CD laßt sich auch das Abbesche Verfahren des in sich zuruckkehrenden Strahles (Ziff. 16) anwenden.

ζ) Die Brechzahlmessungen von Kristallen am Prisma.

32. Die Messung der Brechzahlen von Kristallen. Doppelbrechung. Die Messung der Brechzahlen von Kristallen und insbesondere von doppeltbrechenden Kristallen kann am Prisma durchgeführt werden, doch ist diese verhältnismäßig umständliche Methode durch die noch zu besprechenden bequemeren Verfahren mit Hilfe der Totalreflexion (Ziff. 45) bei Verwendung eines stärker brechenden Mittels wohl vollständig verdrängt worden.

Sind wir aber gezwungen, die Brechzahlen doppeltbrechender Mittel am Prisma auszumessen, so erleichtern wir uns die Erkennung des ordentlichen und außerordentlichen Strahls dadurch, daß wir zwischen Beobachtungsokular und Auge ein Nicolsches Prisma bringen, dessen Stellung wir so wählen, daß einmal nur der ordentliche und dann nur der außerordentliche Strahl von ihm durchgelassen wird.

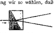


Abb. 45. Das Wollaston-Prisma, das einen eintretenden Strahl in zwei schnittfluchtige Strahlen zerlegt, die senkrecht zueinander polarisiert sind.

Angenommen noch, vor allem wenn wir die Brechzahlen im Ultravioletten durch photographische Aufnahmen ermitteln wollen, ist die von Martens[1]) angegebene Verwendung eines Wollaston-Prismas (Abb. 45), dessen Einzelprismen etwa einen Winkel von 7° besitzen können, und das wir vor das Objektiv des Beobachtungsfernrohres vorsetzen, das dann den horizontalschwingenden Strahl um einen kleinen Winkel nach oben, den vertikalschwingenden ähnlich nach unten ablenkt, so daß wir im Gesichtsfeld zwei untereinanderliegende Spektren erhalten, die sich gegenseitig nicht mehr stören.

1) F. F. Martens, Ann. d. Phys. Bd. 6, S. 603–640. 1901.

η) Die Abhängigkeit der Brechungszahlen von der Temperatur, gemessen am Prisma.

33. Das Verfahren nach MICHELI-MARTENS. Im Prinzip lassen sich alle beschriebenen Verfahren der Messung am Prisma auch zur Feststellung der Temperaturabhängigkeit der Brechzahlen gebrauchen, indem wir die Messung einfach bei verschiedenen Temperaturen wiederholen, ganz gleich ob es sich um feste, flüssige oder gasförmige Körper handelt. Im allgemeinen werden wir uns die verschiedenen Temperaturen durch Umhüllen des Prismas mit genügenden Erhitzungs- und Abkühlungsvorrichtungen herstellen.

Ein besonderes Meßverfahren zur Ermittelung der Temperaturabhängigkeit gibt MICHELI[1]) an. Nach ihm verwenden wir die RYDBERG-MARTENSsche Methode des beliebig einfallenden Strahls (Ziff. 17), beobachten nun aber nicht mit dem Auge, sondern photographieren, und zwar machen wir zunächst bei bekanntem Einfallswinkel und einer gewissen Spalthöhe eine Aufnahme bei tiefer Temperatur (Abb. 46, Spektrum mit den längeren Linien). Wir erwarmen darauf das Prisma bis zur gewünschten Temperatur, verkleinern etwas die Höhe des Spaltes und machen, ohne daß an Photorohr und Plattenstellung etwas geändert worden ist, mit diesem gekürzten Spalt bei der hohen Temperatur eine zweite Aufnahme in das erste Spektrum hinein, so daß auf diese Weise zwei Spektren ineinander liegen (Abb. 46), deren Linienzusammengehörigkeit wir infolge der verschiedenen Höhe des Spaltes leicht feststellen können. Wir messen auf der photographischen Platte unter einem Längenkomparator die Verschiebung aus, die jede Linie durch die Temperaturerhöhung erlitten hat, und können dann, wenn wir S den Abstand der Platte vom hinteren Hauptpunkt des abbildenden Objektivs kennen — er kann, wie wir später Ziff. 60 sehen werden, experimentell-photographisch ermittelt werden —, die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Änderung $\Delta\delta$ des Ablenkungswinkels, die ein kleiner Winkel ist, aus der Gleichung

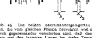


Abb. 46 Die beiden übereinandergelagerten Spektren, die vom gleichen Prisma herrühren und nur dadurch gegeneinander verschoben sind, daß das Spektrum mit den längeren Linien bei tiefer Temperatur, das mit den kürzeren Linien bei höherer Temperatur aufgenommen wurde. Die Verschiebung x_1 ist ein Maß für die Temperaturabhängigkeit der Brechzahl dieses Prismas.

$$\Delta\delta = \frac{x}{S} \tag{78}$$

im Bogenmaß berechnen. Je nachdem die Verschiebung der Linien bei hoher Temperatur in Richtung der kleineren oder größeren Wellenlängen erfolgt, ist der Winkel $\Delta\delta \gtrless 0$ zu nehmen. Den zugehörigen Ablenkungswinkel bei tiefer Temperatur ermitteln wir zweckmäßig nach dem MARTENSschen[2]) noch zu besprechenden Verfahren (Ziff. 60), das wir gleichzeitig mit dem eben angegebenen durchführen können.

34. Das Verfahren von PULFRICH. Für das sichtbare Wellenlängengebiet am bequemsten praktisch und rechnerisch durchführbar ist das von PULFRICH[3]) für

[1]) F. J. MICHELI, Ann. d. Phys. (4) Bd. 7, S. 772—790. 1902; F. F. MARTENS, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 6, S. 308—311. 1904.

[2]) F. F. MARTENS, Ann. d. Phys. (4) Bd. 6, S. 603—640. 1901.

[3]) C. PULFRICH, Wied. Ann. Bd. 45, S. 609—665. 1892.

feste Körper angegebene Verfahren, das sich an das ABBEsche Verfahren des in sich zurückkehrenden Strahles (Ziff. 16) anschließt. Dazu wird dem Meßprisma BAC eine besondere Form gegeben, indem noch eine dritte Fläche BC so angeschliffen wird (Abb. 47), daß ihre Schnittkanten B und C parallel zur brechenden Kante A sind und daß die an ihr unmittelbar reflektierten, aus dem Fernrohr kommenden Strahlen zu einem noch im Gesichtsfelde des Fernrohrs liegenden weißen Spaltbild vereinigt werden, wenn das Fernrohr durch Autokollimation auf das prismatische Spektrum eingestellt ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Fläche BC angenähert senkrecht zum eintretenden Strahl steht. Dieses so erhaltene Spaltbild wird stets die gleiche Lage zum Prisma aufweisen, ganz einerlei, bei welcher Temperatur wir beobachten. Es kann also als feste unveränderliche Marke aufgefaßt werden, die wir praktisch so legen, daß sie außerhalb des zu messenden Spektrums am roten Ende liegt.

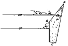


Abb. 47. Die PULFRICHsche Form eines Prismas zur Messung der Temperaturabhängigkeit der Brechzahl. Der an der Fläche BC in sich zurückgeworfene Strahl liefert eine für alle Temperaturen unveränderliche Marke. Die Winkelabstände aller Linien werden gegenüber dieser Marke gemessen. Die Änderung dieser Winkelabstände mit der Temperatur ist ein Maß für die gleichzeitig stattfindende Brechzahländerung.

Messen wir bei tiefer Temperatur t_1° C das Spektrum aus, so werden die den einzelnen Spektralfarben λ entsprechenden Spaltbilder gewisse mikrometrisch ausmeßbare Winkelabstände von dieser Marke besitzen. Bringen wir mittels geeigneter Heizvorrichtung das Prisma auf eine hohe Temperatur t_2° C, so wird die Marke zwar unverändert stehenbleiben, die einzelnen Linien werden aber ihr gegenüber eine Verschiebung erleiden. Wir messen abermals die nun bestehenden Winkelabstände mikrometrisch aus. Die Differenz der beiden bei den verschiedenen Temperaturen festgestellten Winkelabstände einer Linie λ von der Marke gibt die durch die Temperaturänderung $(t_2 - t_1)$° C bedingte Änderung $\Delta\alpha$ des bei t_1° C bestimmten Winkels α_λ (Ziff. 16) an.

Das Prisma wird zur Messung so auf den Spektrometertisch gestellt, daß die Kante B sich etwa in der Drehachse befindet. Da dadurch für die beobachteten Spaltbilder immer nur eine Hälfte des Objektivs zur Bildentstehung beiträgt, muß während der Messung streng darauf geachtet werden, daß während der ganzen Dauer einer Versuchsreihe keine Änderung in der Einstellung des Beobachtungsokulars erfolgt, weil sonst dadurch, verbunden mit einer Änderung in der Akkommodation des beobachtenden Auges, scheinbare Verschiebungen der beiden einzustellenden Spaltbilder gegeneinander hervorgerufen werden, deren Betrag unter Umständen größer sein kann als der tatsächlich auftretende Unterschied.

Vor der hierhergehörigen, eigentlichen Messung wird zweckmäßig bei der tiefen Temperatur (Zimmertemperatur) t_1° C am gleichen Prisma eine vollständige Messung nach dem ABBEschen Verfahren durchgeführt, die uns die notwendigen Winkel liefert (Ziff. 16).

Bezeichnen wir die Brechzahlen bei t_1° C mit n_{t_1}, bei t_2° C mit n_{t_2}, während $\Delta\alpha$ die durch Temperaturerhöhung erfolgte Änderung des Eintrittswinkels α vorstellt, so bekommen wir für die Brechzahl einer jeden Wellenlänge λ gemäß Formel (31) (Ziff. 16) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \text{bei } t_1\text{° C:} \quad n_{t_1} &= \frac{\sin(\alpha_p \mp \delta)}{\sin\varphi} \\ \text{bei } t_2\text{° C:} \quad n_{t_2} &= \frac{\sin(\alpha_p \mp \delta + \Delta\alpha)}{\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \mp \text{, je nachdem } \lambda \lessgtr \lambda_p\,,$$

woraus wir, da $\Delta\alpha$ ein sehr kleiner Winkel ist, als gesamte Temperaturänderung der relativen Brechzahl für eine mittlere Temperatur $t = (t_2 + t_1)/2°$ C

$$n_{t_2} - n_{t_1} = \frac{\sin\Delta\alpha \cdot \cos(\alpha_\nu \mp \delta)}{\sin\varphi} \tag{79}$$

erhalten. Die gesuchte Änderung der relativen Brechzahl bei 1° Temperaturerhöhung bei der mittleren Temperatur t ist dann

$$\Delta n = \frac{n_{t_2} - n_{t_1}}{t_2 - t_1}, \tag{80}$$

eine Größe, deren Kenntnis im allgemeinen genügt.

Um daraus die Änderung ΔN der absoluten Brechzahl N für 1° Temperaturerhöhung zu bekommen, können wir leicht folgende Formel

$$\Delta N = \Delta n + n_{t_1} \cdot \Delta\mathfrak{N}_L \tag{81}$$

ableiten, worin $\Delta\mathfrak{N}_L$ die Änderung der Brechzahl der Luft für 1° Temperaturzunahme, sich auf Grund des Satzes von der Konstanz der spezifischen Brechung $(n-1)/d =$ konst. berechnen läßt aus der Beziehung

$$\Delta\mathfrak{N}_L = -(\mathfrak{N}_0 - 1) \cdot \frac{\alpha}{[1+\alpha t] \cdot [1 + \alpha(t+1)]} \cdot \frac{b}{760}. \tag{82}$$

Dabei bedeutet t die mittlere Temperatur $(t_2 + t_1)/2$, $\alpha = 0{,}00367$ den Ausdehnungskoeffizienten der Luft, b den Barometerstand in mm Hg und $\mathfrak{N}_0$ die Brechzahl der Luft für 0° C und 760 mm Hg. $\mathfrak{N}_0$ kann für alle Farben mit genügender Genauigkeit $\mathfrak{N}_0 = 1{,}000294$ gesetzt werden, so daß die Gleichung (82) auch geschrieben werden kann:

$$\Delta\mathfrak{N}_L = -0{,}00014197 \cdot \frac{b}{\{1 + \alpha(2t+1) + \alpha^2(t \cdot [t+1])\}}. \tag{83}$$

Zur Erleichterung der Rechnung ist es vorteilhaft, für verschiedene Drucke und Temperaturen die zugehörigen Werte von $\Delta\mathfrak{N}_L$ in einer Zahlentafel zusammenzustellen.

b) Die Verfahren, bei denen die Messung durch Beobachtung des Grenzwinkels der Totalreflexion unter Zuhilfenahme eines Körpers von bekannter höherer Brechungszahl erfolgt.

35. Die allgemeinen Grundlagen der Messung bei Beobachtung des Grenzwinkels der Totalreflexion. Das Verfahren wurde ursprünglich schon von LAPLACE[1]) vorgeschlagen und später von WOLLASTON[2]) angewandt. Es besteht darin, daß der zu untersuchende Körper, sei es eine Flüssigkeit oder ein fester Körper, in guten optischen Kontakt mit der einen ebenen Begrenzungsfläche eines Prismas von bekannter Brechungszahl n_0, die größer als die Brechungszahl n des untersuchten Mittels sein muß, gebracht wird. Der Fall ist dann ähnlich dem in Ziff. 18 behandelten mit dem Unterschied, daß, anstatt wie dort an Luft, im vorliegenden Falle die Lichtstrahlen an dem zu untersuchenden Mittel totalreflektiert werden. Lassen wir die Strahlen durch das Mittel streifend in das Hilfsprisma eintreten oder die Lichtstrahlen aus dem optisch dichteren Mittel des Hilfsprismas kommend an dem optisch dünneren Mittel reflektieren, so erhalten wir in ganz gleicher Weise wie dort die Erscheinung der „Grenzlinie der Brechung bzw. der Totalreflexion", wie dies in den Abb. 48 und 49 dargestellt ist. Dieser Grenz-

[1]) P. S. LAPLACE, Méc. cel. Bd. 4, S. 241. 1800.
[2]) W. WOLLASTON, Phil. Trans. 1802, S. 365—381; Gilb. Ann. Bd. 31, S. 252, 398. 1834.

linie entspricht der Grenzwinkel i, den wir messen können und der in beiden Fällen der gleiche ist. Wenden wir auf diese Grenzfälle das Brechungsgesetz in der Form von Gleichung (3) an, so erhalten wir, da der Einfallswinkel bzw. Brechungswinkel 90° ist,

$$n = n_0 \cdot \sin i \tag{84}$$

zugleich als Bestimmungsgleichung für die gesuchte Brechzahl n. Auf dieser Grundgleichung bauen sich alle hierhergehörigen Methoden und Apparate auf[1].

Verwenden wir einfarbiges Licht, so werden wir, wie aus Ziff. 48 schon bekannt ist, im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohrs eine Grenzlinie sehen, die im Falle des streifenden Eintritts (Abb. 48) ein vollständig dunkles Feld II von einem ganz hellen Feld I trennt, während sie im Falle der Totalreflexion (Abb. 49) ein weniger dunkles, leicht aufgehelltes Feld I von einem ganz hellen Felde II scheidet.



Abb. 48. i ist der Grenzwinkel der Brechung, der bei streifendem Eintritt des Lichts aus einem geringer brechenden n in ein höher brechendes ($n_0 > n$) Mittel auftritt. Das Gesichtsfeld ist in eine vollkommen dunkle (II) und in eine helle (I) Hälfte geteilt.

Diese beiden Möglichkeiten des Lichteinfalles sind von praktischer Bedeutung insofern, als wir mit streifendem Eintritt des Lichtes arbeiten werden, solange der Untersuchungsstoff genügend lichtdurchlässig ist. Absorbiert der zu messende Körper aber das Licht stark, dann greifen wir vorteilhaft zur Methode der totalen Reflexion des aus dem dichteren Mittel auf das dünnere Mittel auftreffenden Lichtes. Da nun im letzteren Falle infolge der teilweise reflektierten Strahlung kleineren Einfallswinkels die Grenzlinie nur als Trennungslinie eines hellen und eines weniger hellen, nicht absolut dunklen Feldes auftritt, ist diese nicht so scharf ausgeprägt wie im ersten Falle und deshalb auch nicht so günstig wie die „Grenzlinie der Brechung" für die Erzielung größter Meßgenauigkeit.



Abb. 49. i ist der Grenzwinkel der Totalreflexion, der auftritt, wenn das Licht aus einem höher brechenden Mittel n_0 auf ein geringer brechendes ($n < n_0$) auffällt. Das Gesichtsfeld ist in eine helle (II) und in eine verdunkelte, schwach aufgehellte (I) Hälfte geteilt.

Anders wird nun die zu beobachtende Erscheinung aussehen, wenn wir ein Licht verwenden wollen, das sich aus mehreren Einzelwellenlängen zusammensetzt, wie z. B. bei Verwendung einer Wasserstoff- oder Heliumröhre, einer Quecksilberlampe o. ä. als Lichtquelle. Dann werden die Verhältnisse etwas verwickelter. Wir wollen den Fall betrachten, daß wir mit dem Licht einer mit Wasserstoff gefüllten GEISSLERschen Röhre arbeiten, wie dies bei

[1]) Eine ausführliche Beschreibung der folgenden Verfahren und Apparate wird gegeben in dem Artikel von H. KESSLER: Refraktometrie. ABDERHALDENsches Handb. d. biol. Arbeitsmeth. Abt. II. Phys. Meth. Teil 2. S. 817—906. 1925.

den meisten refraktometrischen Arbeiten bis jetzt üblich ist. Das Spektrum des Wasserstoffs hat bekanntlich die drei kennzeichnenden, hellen Linien:

FRAUNHOFERsche Bezeichnung	Wellenlänge	Farbe
C	656,23 mμ	rot (r)
F	486,14 mμ	grün (gr)
G'	434,05 mμ	violett (v)

Für jede dieser Linien bekommen wir eine Grenzlinie, die z. B. bei streifendem Eintritt (Abb. 48) ein in der betreffenden Farbe erscheinendes Feld I von einem dunklen Felde II scheidet. In Abb. 50 ist dies für die einzelnen Linien veranschaulicht. Da C am schwächsten, F schon stärker und G' am stärksten gebrochen wird, werden die Grenzwinkel i_λ mit abnehmender Wellenlänge abnehmen: $i_C > i_F > i_G$, d. h. die Grenzlinie für C wird im Gesichtsfelde des Fernrohrs höher, der ebenen Begrenzungsfläche des höher brechenden Hilfskörpers n_0 näher liegen als die für F und diese wieder höher als die für G' (Abb. 50). Bei der Beobachtung selbst werden wir jedoch die Einzellinien nicht zeitlich hintereinander verwenden, sondern zu gleicher Zeit. Die in Abb. 50 einzeln dargestellten Erscheinungen für die einzelnen Farben werden übereinandergelagert sein, wie dies in Abb. 51 zu sehen ist. Diese Übereinanderlagerung hat zur Folge, daß vollständig dunkel nur das Dunkelfeld II_r bleibt, weil nur für dieses schmale oberste Feld alle drei Farben zugleich ein dunkles Feld liefern (Abb. 51, $II_{r\,gr\,v}$). Das restliche Dunkelfeld II_{gr} wird vom Rot-Hellfelde I_r aufgehellt, während das restliche Dunkelfeld II_v teils vom Rot-Hellfeld I_r, teils aber auch sowohl von diesem als auch von dem Grün-Hellfeld I_{gr} überlagert wird. Da sich nun auch noch die Farben selbst teilweise überlagern, werden sich an den einzelnen Stellen die betreffenden Mischfarben bilden. Die im Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohrs wahrzunehmende Erscheinung wird demnach die folgende sein: Zunächst in der Nähe der ebenen Begrenzungsfläche des Hilfskörpers n_0 gegen den zu messenden Körper n vollkommene Dunkelheit (Abb. 51, $II_{r\,gr\,v}$), dann aufeinanderfolgend: Grenzlinie für Rot — Rot allein — Grenzlinie für Grün — Mischfarbe aus Rot und Grün — Grenzlinie für Violett — Mischfarbe aus Rot, Grün und Violett.



Abb. 50. Das Gesichtsfeld im Fernrohr bei Beobachtung der Grenzlinie für Totalreflexion bei streifendem Lichteinfall für die einzelnen Farben C, F, G'. Die Grenzlinie trennt für jede einzelne Farbe ein oberes dunkles Feld II von einem unteren, in der betreffenden Farbe beleuchteten Felde I.

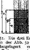


Abb. 51. Die drei Erscheinungen der Abb. 50 übereinandergelagert ergeben in den Teilen, wo sich Farbe über Farbe legt, Mischfarben, wodurch die Grenzlinien weniger scharf werden.



Abb. 52. Um die Kontraste bei den Grenzlinien zu deren schärferer Hervorhebung zu verstärken, wird eine auf einen kleinen Winkelraum in der Nähe des streifenden Eintritts sich beschränkende Abblendung des einfallenden Lichtes vorgenommen. Dadurch werden die hellen Felder I für jede der Farben auf einen kleinen Winkelbereich in der Nähe der Grenzlinie beschränkt, die auf ihrer andern Seite an vollständige Dunkelheit grenzt.

Durch diese Übereinanderlagerung sind die Kontraste zwischen den bei den Grenzlinien aneinanderstoßenden Feldern sehr gering, jedenfalls wesentlich ungünstiger geworden als bei einfarbigem Lichte, wo vollkommene Dunkelheit der hellen Farbe gegenübersteht. Das hat zur Folge, daß eine genaue Einstellung auf die Grenzlinien bei der besagten Übereinanderlagerung sehr erschwert ist. Wir werden deshalb versuchen müssen, die Kontraste bei den Grenzlinien so günstig als möglich zu gestalten. Dies gelingt, wenn wir in bestimmter Weise das eintretende Licht durch eine vorgesetzte Blende geeignet abgrenzen, so daß nur die Strahlen des wirklich streifenden Eintritts und solche, deren Einfallswinkel ganz dicht bei 90° liegt, zur Wirkung gelangen. Durch diese Maßnahme werden die hellen Felder I_r, I_{gr} und I_b auf einen kleinen Winkelbereich in der Nähe der Grenzlinie beschränkt. Die Dunkelfelder II_{gr} und II_b werden also nur für diesen kleinen Winkelbereich durch Rot bzw. Grün aufgehellt, während sie gerade für die ihrer Grenzlinie benachbarten Teile vollkommen dunkel bleiben. Diese im Beobachtungsfernrohr festzustellende Erscheinung ist in Abb. 52 wiedergegeben. Indem wir das Beobachtungsfernrohr nacheinander auf die einzelnen Grenzlinien einstellen, können wir entweder die Grenzwinkel i_λ unmittelbar jeden für sich oder in ähnlicher Weise wie beim prismatischen Spektrum die Dispersionswinkel $(i_F - i_\lambda)$ ausmessen.

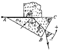


Abb. 53. Der Strahlengang beim WOLLASTON-KOHLRAUSCHschen Verfahren. Der von A her aus dem Mittel n streifend in das Prisma ABC mit der Brechzahl n_0 eintretende Strahl wird unter dem Grenzwinkel i der Brechung gegen das Einfallslot im Prisma mit dem brechenden Winkel φ weiterlaufen. Treten die Strahlen von der mattierten Fläche AB aus ein, so werden sie teilweise total reflektiert, der Grenzstrahl verläuft ebenfalls unter dem Grenzwinkel i der Totalreflexion innerhalb des Prismas. An der Fläche BC tritt der Grenzstrahl unter dem Winkel β aus, weshalb für n die Bestimmungsgleichung gilt

$$n = \sin\varphi \cdot \sqrt{n_0^2 - \sin^2\beta} \pm \cos\varphi \cdot \sin\beta,$$

$\pm$, je nachdem der Grenzstrahl der brechenden Kante C zu oder von ihr weg gebrochen wird.

36. Die Methode nach WOLLASTON-KOHLRAUSCH. WOLLASTON[1]) bediente sich bei der Ausführung der Methode eines Prismas von der Brechzahl n_0, dessen brechender Winkel 90° betrug. KOHLRAUSCH[2]), der das Verfahren wieder aufgegriffen hat (Ziff. 18), macht diese Einschränkung nicht mehr. Das Prisma (Abb. 53) kann von beliebig brechendem Winkel φ sein. Dem zu untersuchenden Mittel mit der Brechzahl n wird eine ebene Fläche angeschliffen und poliert, die mit der Eintrittsfläche AC des Prismas in optischen Kontakt gebracht wird. Dies erreichen wir dadurch, daß wir zwischen die Prismenfläche AC und den zu prüfenden Körper einen Tropfen einer bestimmten Flüssigkeit bringen und den Körper n so andrücken, daß die Flüssigkeitsschicht planparallel wird. Wir erkennen das Vorhandensein genügender Planparallelität daran, daß die in dieser Flüssigkeitsschicht auftretenden NEWTONschen Interferenzfransen immer breiter und breiter werden, bis schließlich nur eine Interferenzfarbe sichtbar ist. Eine solche Schicht wirkt nur wie eine planparallele Platte. Die Brechungszahl dieser Flüssigkeit muß vorteilhaft etwas größer sein als die des untersuchten Körpers. In Frage kommen hauptsächlich Monobromnaphthalin $n_D = 1{,}66$, Kaliumquecksilberjodidlösung (spezifisches Gewicht 3,1) $n_D = 1{,}72$, Schwefel gelöst in Methylenjodid $n_D = 1{,}78$, Bariumquecksilberjodidlösung (spezifisches

[1]) W. WOLLASTON, Phil. Trans. 1802, S. 365—381.
[2]) F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. Bd. 16, S. 603—609. 1882.

Gewicht 3,6) $n_D = 1{,}79$[1]) und Phosphor gelöst in Methylenjodid $n_D = 1{,}94$. Zur Berechnung der Brechungszahlen dienen die folgenden Formeln

$$n = n_0 \cdot \sin i; \qquad i = \varphi \pm \beta'; \qquad n_0 \cdot \sin \beta' = \sin \beta,$$

aus denen wir nach Substitution und trigonometrischer Umformung die Schlußformel

$$n = \sin\varphi \cdot \sqrt{n_0^2 - \sin^2\beta} \pm \cos\varphi \cdot \sin\beta \tag{85}$$

erhalten. Dabei ist das positive Zeichen zu verwenden, wenn, vom Ausfallslote aus gerechnet, die Ablenkung des Strahls nach der brechenden Kante zu, das negative, wenn die Ablenkung von ihr weg erfolgt (Fall der Abb. 53). Für ein Prisma mit einem brechenden Winkel von 90° wird $\cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = 1$, so daß wir für diesen Sonderfall, der vielfache Anwendung findet, zu der einfachen Endgleichung

$$n = \sqrt{n_0^2 - \sin^2\beta} \tag{86}$$

gelangen. Um n zu berechnen, brauchen wir folglich nur den Austrittswinkel β zu messen.

Die Beobachtung kann in bekannter Weise auf einem Spektrometer oder Goniometer erfolgen. Sie kann dabei sowohl im total reflektierten Lichte als bei streifendem Eintritt des Lichtes stattfinden. Im ersten Falle muß die dritte Fläche AB des Prismas durchscheinend sein. Im zweiten Falle muß der untersuchte Körper, gleichgültig ob Flüssigkeit oder fester Körper, auf der Seite des Lichteinfalls von einer ebenen Fläche begrenzt sein, die senkrecht zur Anlagefläche dieses Körpers steht (Abb. 53). Außerdem müssen diese beiden Ebenen in einer scharfen, nichtschartigen Kante aneinanderstoßen, wenn die zu beobachtende Grenzlinie scharf sein und gute Einstellungen liefern soll.

Um Flüssigkeiten bequem auf die Eintrittsfläche aufzubringen, wird die Anordnung des Prismas zweckmäßig so getroffen, daß die Eintrittsfläche und damit die brechende Kante wagerecht zu liegen kommt. Als Behälter für die Flüssigkeit wird auf die Eintrittsfläche ein zylindrisches Gefäß aufgekittet.

Die Fernrohrvergrößerung braucht nicht groß gewählt zu werden, weil dadurch doch kein weiterer Nutzen erzielt wird, da durch größere Vergrößerung nur eine unschärfere Grenzlinie bedingt wird. Die durch die erhöhte Vergrößerung zu erhaltende bessere Winkelmeßgenauigkeit wird deshalb durch die Verschlechterung der Einstellung auf die unschärfer gewordene Grenzlinie wieder herabgedrückt.

37. Das PULFRICHsche Refraktometer. Um die Ausführung dieses WOLLASTONschen Verfahrens bei der praktischen Arbeit günstig zu gestalten, hat PULFRICH[2]) ein besonderes Gerät gebaut, das sog. PULFRICHsche Refraktometer, wie es heute insbesondere in chemischen Laboratorien zur Bestimmung der Brechungszahlen von Flüssigkeiten weiteste Verbreitung gefunden hat, da mit ihm bei in den meisten Fällen genügender Genauigkeit mit größerer Schnelligkeit und bei einfacherer Handhabung als bei einer der prismatischen Methoden gearbeitet werden kann.

PULFRICH benutzt einen Körper aus hochbrechendem Glase mit einem brechenden Winkel von 90°. Es gilt also Gleichung (86). Dieser Hilfskörper

[1]) Vgl. dazu auch das darüber Gesagte bei C. PULFRICH, Das Totalreflektometer, S. 64. Leipzig 1890.

[2]) C. PULFRICH, ZS. f. Instrkde. Bd. 8, S. 47–53. 1888; Bd. 13, S. 267–273. 1893; Bd. 15, S. 389. 1895; Das Totalreflektometer für Chemiker. Leipzig 1890; W. A. ROTH u. F. EISENLOHR, Refraktometrisches Hilfsbuch, S. 22. Leipzig 1911.

ist auf einem Goniometer mit vertikalem Teilkreis so aufgebracht, daß die horizontale Achse des Teilkreises in der Lichteintrittsebene des Hilfskörpers liegt, auf die der zu messende Stoff in geeigneter Form aufgebracht wird. Das Beobachtungsfernrohr ist auf den Teilkreis am Rande desselben festmontiert, so daß seine optische Achse parallel zur Teilkreisachse läuft. Außerdem ist die optische Achse des Beobachtungsrohres durch einen unter 45° Neigung vorgesetzten Spiegel um 90° geknickt. Sie durchstößt dadurch bei der Drehung des Fernrohrs die Eintrittsebene des Hilfskörpers in einem Punkte der Drehungsachse des Teilkreises. Das Beobachtungsrohr ist mit einem Autokollimationsokular versehen. Der für die auf Grund der Formel (86) durchzuführende Rechnung notwendige Winkel β wird gemessen durch ein erstes Einstellen des Beobachtungsrohres auf die Grenzlinie der Totalreflexion und durch ein zweites Einstellen des Fernrohrs mit Hilfe der Autokollimation senkrecht zur Austrittsfläche des Hilfsprismas.

Zur Erleichterung der Rechnung können wir uns, da das Hilfsprisma und damit das n_0 immer das gleiche bleibt, Tabellen ausrechnen, aus denen zu jedem Winkel β die zugehörige Brechzahl n des untersuchten Körpers entnommen werden kann. Diese Tabellen werden von der liefernden Firma zu jedem Hilfsprisma mitgegeben.

Neben dem Teilkreis, der Winkel bis auf 1′ abzulesen gestattet, besitzt das Gerät noch eine mikrometrische Feinverstellung, mit der kleinere Winkel auf 0,1′ genau gemessen werden können. Diese Einrichtung dient dazu, um die Dispersion mit erhöhter Genauigkeit auszumessen. Wir verwenden dabei in ähnlicher Weise wie beim ABBEschen Verfahren des in sich zurückkehrenden Lichtstrahls (Ziff. 16) eine der Linien als Bezugslinie (z. B. die D-Linie), von der aus wir die Winkeldifferenzen $\Delta\beta_\lambda$ für die anderen Linien messen, die wir dann vorzeichenrichtig zu dem für sich allein ermittelten Winkel β_D der Bezugslinie addieren: $\beta_\lambda = \beta_D \pm \Delta\beta_\lambda$; $\pm$, je nachdem die Wellenlänge kleiner oder größer als die Wellenlänge der D-Linie ist. Durch Einsetzen dieses Wertes β_λ in die Formel (86) unter Verwendung der für die gleiche Farbe λ dem Hilfskörper eigenen, bekannten Brechzahl $n_{0,\lambda}$ können wir die Brechzahl n_λ des untersuchten Körpers für die verwendete Farbe λ berechnen. Auch hier läßt sich die Rechnung vereinfachen, wenn wir die dem Gerät beigegebenen Tabellen benutzen.

Zu beachten ist bei der Durchführung einer Messung mit diesem Refraktometer die Berücksichtigung der Änderung der Brechungszahlen des Vergleichskörpers mit einer Änderung der Temperatur[1]), was besonders dann von Wichtigkeit ist, wenn bei höheren Temperaturen gemessen wird. Um bei höheren Temperaturen messen zu können, werden Prismen mit geeigneter Heizeinrichtung gebaut.

Der Apparat gibt die Brechungszahlen mit einer Genauigkeit von etwa ± 1 Einheit der vierten Dezimale wieder, die sich etwas verbessern läßt, wenn wir Differenzmessungen (Ziff. 38) gegen ein gut bekanntes Normalplättchen vornehmen, während sich für die Dispersionen schon an und für sich eine günstigere Meßgenauigkeit von ± 2 bis 3 Einheiten der fünften Dezimale erzielen läßt.

Der Apparat eignet sich sowohl zur Messung der Brechzahl von festen als auch von flüssigen Körpern. Die festen Körper werden in der in Ziff. 35 erwähnten Weise vorbereitet und auf die horizontal liegende Meßfläche aufgeschoben. Um bei Flüssigkeiten die für einen richtigen Lichteinfall zu erfüllende

[1]) Ein ausführlich durchgeführtes Meßbeispiel dieses Verfahrens ist zu finden in H. KESSLER, Refraktometrie. ABDERHALDENsches Handb. d. biol. Arbeitsmethoden, Abt. II, Phys. Meth. Teil 2, S. 876–877. 1926.

Bedingung herzustellen, werden auf die Hilfsprismen geeignete zylinderförmige Tröge aufgekittet.

Im allgemeinen wird beim PULFRICHschen Refraktometer streifender Lichteintritt benutzt, doch kann der Hilfskörper auch so ausgebildet werden, daß bei reflektiertem Lichte beobachtet werden kann.

38. Die Differenzmessungen am PULFRICHschen Refraktometer. Das OSTWALDsche Differenzprisma. Liegen Stoffe vor, deren Brechzahlen nur wenig voneinander verschieden sind, wie das z. B. zwischen Lösungen und ihrem Lösungsmittel oft der Fall ist, so können diese Differenzen in der Brechzahl am PULFRICHschen Refraktometer mit der erhöhten Meßgenauigkeit von ± 2 bis 3 Einheiten in der fünften Dezimale bestimmt werden.

Feste Körper werden zu diesem Zwecke zusammengekittet und gleichzeitig mit den beiden zueinander senkrecht stehenden ebenen Flächen versehen. Sie werden zusammen auf die Meßfläche gebracht. Das Licht lassen wir zweckmäßig durch eine vorgesetzte verschiebbare Spaltblende zuerst in den einen, dann in den andern Körper eintreten, wodurch vermieden wird, daß sich die Erscheinungen im Beobachtungsfernrohr gegenseitig stören. Der zwischen den beiden zu beobachtenden Grenzlinien vorhandene Winkelabstand wird mit Hilfe der Mikrometerschraube festgestellt: $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_0$, wenn β_0 zu dem Normalkörper mit der Brechzahl n_0, β_1 zu dem zu untersuchenden Körper mit der Brechzahl n_1 gehört. Den zu dem bekannten Normalkörper n_0 gehörigen Austrittswinkel β_0 berechnen wir uns mit Hilfe von Gleichung (86), oder wir entnehmen ihn aus der Tabelle zu dem bekannten Werte n_0. Es ist dann $\beta_1 = \beta_0 \pm \Delta\beta$, $\pm$, je nachdem die Einstellungen für den zu untersuchenden Körper bei größeren oder bei kleineren Werten liegen. Zu diesem Winkel β_1 wird das fragliche n_1 in der Tabelle aufgesucht.

Um Flüssigkeiten vergleichen zu können, hat OSTWALD ein besonders eingerichtetes Prisma vorgeschlagen, auf dessen Meßfläche ein Trog aufgekittet ist, der durch eine parallel zu den einfallenden Lichtstrahlen verlaufende Scheidewand aus schwarzem, undurchlässigem Glase in zwei sowohl mechanisch als optisch voneinander vollkommen getrennte Teile zerlegt wird. Die eine Troghälfte wird mit der Normalflüssigkeit, die andere mit der zu prüfenden Flüssigkeit gefüllt. Die Beobachtung und Rechnung erfolgt in gleicher Weise wie für feste Körper.

Der Vorteil solcher Differenzmessungen ist neben den dadurch zu erzielenden höheren Meßgenauigkeiten die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Temperatur, da im allgemeinen die zu vergleichenden Flüssigkeiten gleichen oder wenigstens nahezu gleichen Temperaturkoeffizienten besitzen, wenn wir nur darauf achten, daß nicht etwa einseitige Erwärmung stattfindet.

39. Die Messung der Brechzahl pulverisierter fester Körper mit dem PULFRICHschen Refraktometer nach LE BLANC. Die Möglichkeit, die Brechzahl von Pulvern, die von nicht zu undurchsichtigen festen Körpern herrühren, zu bestimmen, beruht auf der Benutzung einer von LE BLANC[1]) festgestellten charakteristischen Erscheinung. Nach LE BLANC betten wir das Pulver, ähnlich wie dies CHRISTIANSEN (Ziff. 23) bei seiner prismatischen Methode tut, in eine Flüssigkeit von nahezu gleicher Brechungszahl ein. Eine solche Flüssigkeit stellen wir uns durch Mischung zweier Flüssigkeiten her, wovon die eine eine höhere, die andere eine niedrigere Brechzahl als das Pulver besitzt, und die sich beide gut miteinander vermischen lassen. Als solche Flüssigkeiten eignen sich:

[1]) M. LE BLANC, ZS. f. phys. Chem. Bd. 10, S. 433–449. 1892.

1. Die hochbrechenden Flüssigkeiten: Schwefelkohlenstoff $n_D = 1{,}6291$; α-Monochlornaphthalin $n_D = 1{,}6339$; α-Monobromnaphthalin $n_D = 1{,}6626$.

2. Die niedrigbrechenden Flüssigkeiten: Aceton $n_D = 1{,}35886$; Äthylalkohol $n_D = 1{,}36232$; Äthyläther $n_D = 1{,}35210$; Benzol $n_D = 1{,}50144$ und Toluol $n_D = 1{,}4992$.

In den Flüssigkeitstrog des Refraktometers bringen wir die niedrig brechende Flüssigkeit und geben zunächst so viel von der hochbrechenden zu, daß die Brechungszahl der Mischung nahezu gleich der des Pulvers ist. Es ist zweckmäßig, die Mischung zunächst niedrigerbrechend zu halten, als das Pulver vermutlich sein wird. Verwenden wir als niedrigbrechende Flüssigkeit eine leichtflüchtige, wie z. B. Aceton, so wird aus der Mischung durch Umrühren allmählich Aceton verdampfen, und wir bekommen eine sich stetig verändernde, immer stärker brechende Mischung, was für die Beobachtung vorteilhaft ist. In die Mischung bringen wir etwa zwei Messerspitzen voll des Pulvers ein und rühren mit einem Thermometer um, das gleichzeitig der Temperaturmessung dient. Zunächst werden wir im Beobachtungsfernrohr noch keine Grenzlinie wahrnehmen können. Wir setzen deshalb unter stetem Umrühren tropfenweise von der höherbrechenden Flüssigkeit zu, bis wir eine Aufhellung im unteren Teile des Gesichtsfeldes feststellen können. Bei stetig wachsender Brechzahl der Mischung können wir dann folgende charakteristische, bei Wiederholung immer wieder auftretende Erscheinung feststellen. Die Grenze zwischen Hell und Dunkel, die zunächst noch unscharf ist, wird schärfer und schärfer. Kurz bevor die Grenzlinie ihre größte Schärfe erreicht, erscheint sie etwas ausgefranst. Es macht auf uns den Eindruck, als ob kurze, kleine Büschel und Fäserchen aus dem dunkeln, oberen Teile des Gesichtsfeldes in den hellen, unteren Teil herunterhängen würden. Erhöht sich nunmehr die Brechzahl der Mischung durch fortschreitende Verdunstung der niedrigbrechenden Flüssigkeit nur ganz wenig, so erscheint die Grenzlinie mit einem Male messerscharf. Geht die Verdunstung weiter, so tritt vorerst keine Verschlechterung der Grenzlinie auf, vielmehr können wir beobachten, daß in der hellen Gesichtsfeldhälfte unmittelbar neben der scharfen Grenzlinie ein intensiv heller, schmaler Streifen erscheint, der gegen den hellen Teil des Gesichtsfeldes durch eine feine dunkle Linie abgegrenzt wird. Bei weitersteigender Brechzahl der Mischung verbreitert sich dieser helle Streifen etwas, wobei aber immer noch die scharfe Grenzlinie bestehen bleibt, bis schließlich eine allgemeine Verschwommenheit Platz greift. Nach Le Blanc haben wir auf Grund seiner Versuche als Punkt der Gleichheit der Brechungszahl der Mischung und des Pulvers die Mittelstellung zwischen dem Punkte, wo die Grenzlinie zuerst messerscharf wird, und dem Punkte, wo gerade die erste Spur des intensiv hellen Streifens sichtbar wird, zu betrachten. In diesen beiden kritischen Punkten erfolgt die Einstellung des Fadenkreuzes auf die Grenzlinie. Der Mittelwert aus den beobachteten Austrittswinkeln $\beta_m = (\beta_1 + \beta_2)/2$ ist der gesuchte, der Brechzahl des Pulvers entsprechende Austrittswinkel, zu dem wir aus der Tabelle des verwendeten Refraktometerprismas die gesuchte Brechzahl selbst entnehmen, deren Ermittelung mit diesem Verfahren bis auf etwa ± 2 Einheiten der vierten Dezimale erfolgen kann. Daß das von Le Blanc angegebene Kriterium das Richtige ist, läßt sich neben der experimentellen Bestätigung aus der von W. König[1]) mitgeteilten Erklärung der Erscheinung erkennen, die besagt: „Die beobachtete Erscheinung dürfte sich wohl aus der Totalreflexion erklären, die an den Pulverteilchen eintreten muß, sobald die umgebende Flüssigkeit einen stärkeren Brechungsexponenten

[1]) M. Le Blanc, ZS. f. phys. Chem. Bd. 10, S. 447. 1892.

hat als das Pulver. Das auffallende Licht wird an den ganz ungleichförmig gestalteten Pulverteilchen nach allen Richtungen reflektiert, solange das Pulver und die Flüssigkeit verschiedene Brechungsexponenten haben. Ist der Brechungsexponent der Flüssigkeit größer als der des Pulvers, so wird diese Reflexion für einen größeren Bereich der Richtungen eine totale sein. Das von den Pulverteilchen nach unten reflektierte Licht fällt auf die Prismenfläche und gelangt durch das Prisma hindurch in das Beobachtungsfernrohr. Diese Strahlen fallen natürlich in denjenigen Teil des Gesichtsfeldes, der von den durch die Flüssigkeit gebrochenen Strahlen sowieso erhellt wird. Findet an den Pulverteilchen totale Reflexion statt, so werden alle am Pulver reflektierten Strahlen von streifender Inzidenz an bis zu dem betreffenden Grenzwinkel hell erscheinen. Es wird sich daher im Gesichtsfelde an der Grenze zwischen Hell und Dunkel eine Schicht größerer Intensität in den hellen Teil hinein bis zu einer zweiten scharfen Grenze erstrecken, und von dieser an die Intensität die gewöhnliche ohne Pulver wahrnehmbare sein. Diese helle Schicht tritt auf, sobald der Brechungsexponent der Flüssigkeit bei



Abb 54. Das Abbesche Refraktometer. Die Flüssigkeit wird zwischen das Meßprisma MP und das Hilfsprisma HP gebracht. Das System der beiden Prismen wird so lange gedreht, bis die Grenzlinie der Totalreflexion im Fadenkreuz des Fernrohrs F einsteht. An der Teilung T wird dann mit Hilfe einer Strichmarke, die sich, mit den Prismen fest verbunden, mitdreht, die gesuchte Brechzahl unmittelbar abgelesen.

allmählichem Zusatz des stärkerbrechenden Mittels größer als der des Pulvers geworden ist. Ist der Unterschied sehr klein, so liegt die zweite Grenze dicht an der ersten, und letztere erscheint als eine intensiv helle Linie. Vermehrt sich der Unterschied, so erweitert sich jene Schicht, aber die Erscheinung wird schnell verwaschen, weil bei größeren Differenzen der Brechungsexponenten das Licht die Mischung von Pulver und Flüssigkeit überhaupt nicht mehr auf größeren Strecken zu durchsetzen vermag".

Bei gröberen Pulvern ist das Auftreten der kritischen Punkte ein ausgeprägteres und darum schärfer erfaßbares als bei feineren Pulvern.

40. Das Abbesche Refraktometer. Während Pulfrich bei seinem Refraktometer für Chemiker (Ziff. 37) zur Durchführung der Wollastonschen Methode für das Vergleichsprisma einen brechenden Winkel von 90° wählte, wird beim Abbeschen Refraktometer[1], das in der Hauptsache zur schnellen Messung der Brechzahlen n_D von Flüssigkeiten dient, ein kleinerer brechender Winkel gewählt (Abb. 54). Für ein solches Abbesches Refraktometer gilt somit die Gleichung (85). Dabei wird die Flüssigkeit nur in dünner Schicht auf die Eintrittsfläche des Vergleichs-(Meß-)Prismas aufgebracht. Um dies zu erleichtern, wird auf das eigentliche Meßprisma (MP) ein zweites reines Hilfsprisma (HP) aufgesteckt, dessen Fassung so eingerichtet ist, daß zwischen MP und HP ein planparalleler Zwischenraum von etwa 0,10 mm Dicke bleibt. Dieser Zwischenraum muß von der zu untersuchenden Flüssigkeit ausgefüllt sein. Dies erreichen wir leicht

[1] E. Abbe, Jenaische ZS. f. Naturwiss. Bd. 8, S. 96–174. 1874; Ges. Abhandlungen Bd. II, S. 124–163. Jena: Gustav Fischer 1906; C. Pulfrich, ZS. f. Instrkde. Bd. 18, S. 107. 1898.

dadurch, daß wir bei entferntem HP auf das Prisma MP einen Tropfen der Flüssigkeit bringen und diesen durch Auflegen des Hilfsprismas HP auseinanderquetschen. Lassen wir nun zerstreutes Licht in das Hilfsprisma HP, das aus dem gleichen Glase und von gleichem brechenden Winkel φ wie das Meßprisma MP ist, eintreten, so werden gewisse Strahlen beim Austritt aus HP in die Flüssigkeitsschicht streifend in diese eintreten, also auch streifend auf das Meßprisma MP einfallen, um unter dem Grenzwinkel i der Brechung (Totalreflexion) abgelenkt zu werden. Die aus MP austretenden Strahlen geben in dem Beobachtungsfernrohr das bekannte Bild der Grenzlinie der Totalreflexion, auf die das Fernrohrfadenkreuz (Abb. 28) eingestellt wird. Das Okular ist mit einem Autokollimationsprisma versehen, gestattet also die Einstellung des Fernrohrs in Richtung der Senkrechten der Austrittsfläche des Prismas und damit die Messung des Winkels β, wenn die Fernrohrlage an einem Teilkreis abgelesen werden kann.

Um das Gerät so einfach als möglich zu gestalten, ist der Teilkreis durch eine Teilung T ersetzt, auf der die Brechzahlen gleich in Einheiten der dritten Dezimale abgelesen, in Einheiten der vierten Dezimale geschätzt werden können. Die Teilung reicht von $n_D = 1{,}30$ bis etwa $n_D = 1{,}70$. Der brechende Winkel wird so berechnet, daß die Austrittswinkel β (Abb. 54) für diese beiden äußersten Brechungszahlen zwar entgegengesetzt gerichtet, aber etwa vom Ausfallslote aus gleich groß sind. Dies ist für einen brechenden Winkel von etwa 64° der Fall.

Die Teilung T der Brechungszahlen ist mit dem Beobachtungsfernrohr starr verbunden und steht fest. Das Doppelprisma HP, MP ist um den Punkt D drehbar und trägt eine Alhidade, die eine Ablesemarke über der Teilung T bei Bewegung des Prismas entlang führt. Die genaue Einjustierung dieser Ablesemarke erfolgt mittels einer Flüssigkeit von bekannter Brechkraft (z. B. destilliertes Wasser bei 20° C: $n_D = 1{,}33291$) oder mit Hilfe eines Justierplättchens aus bekanntem Glase. Die Meßgenauigkeit beträgt etwa zwei Einheiten der vierten Dezimale.

Neben seiner für den praktischen Gebrauch großen Handlichkeit hat das Abbesche Refraktometer den weiteren großen Vorteil, daß zu seiner Benutzung keine einfarbige Lichtquelle nötig ist. Wir können an ihm bei jedem Lichte, Tages- oder Lampenlicht, das ein kontinuierliches Spektrum aufweist, arbeiten. Würden wir mit einem solchen Instrument ohne weiteres mit weißem Lichte arbeiten, so würden wir allerdings keine scharfe Grenzlinie erhalten, da dem der Umstand hindernd in den Weg treten würde, daß die Totalreflexion im allgemeinen nicht für alle Farben so stattfindet, daß die in das Beobachtungsfernrohr gelangenden Strahlen alle unter demselben Winkel β aus dem Meßprisma MP austreten. Die Grenzlinie wird in diesem Falle einen mehr oder minder breiten roten oder blauen Farbsaum aufweisen. Um diese Dispersion der Grenzlinie unwirksam zu machen, ist in dem über das Objektiv hinaus verlängerten Fernrohrtubus, also zwischen Objektiv und Kathetenfläche des Prismas MP, der sog. Kompensator (Abb. 55) eingebaut. Er besteht aus zwei für die D-Linie geradsichtigen Amicischen Prismen P und R, von denen jedes für sich in eine Hülse gefaßt ist. Die Hülsen tragen beide gleichartige Zahnkränze Z, in die ein Trieb M eingreift derart, daß beim Drehen von M die Prismen gleichförmig, d. h. stets gleiche Winkel durchlaufend, um die Fernrohrachse in entgegengesetztem Sinne gedreht werden können. Eine solche Prismenkombination verhält sich in allen Stücken wie ein einziges für die D-Linie geradsichtiges Prisma mit unveränderlichem Hauptschnitt aber veränderlicher Dispersion innerhalb desselben. Gehen wir von der Stellung aus, daß die brechenden

Kanten der beiden Amicischen Prismen zwar parallel, aber auf verschiedenen Seiten der optischen Achse liegen, und verdrehen wir die Prismen gegeneinander, bis die brechenden Kanten, wie dies Abb. 55 zeigt, parallel und auf der gleichen Seite der optischen Achse liegen, so durchläuft die Dispersion des Kompensators alle Werte von Null bis zum doppelten Betrage eines einzigen Amicischen Prismas. Weist also bei der Beobachtung im weißem Lichte die Grenzlinie die oben erwähnte Dispersion auf, so wird es uns immer möglich sein, eine Stellung des Kompensators zu finden, die gerade die gleich große, aber entgegengesetzte Dispersion besitzt. Dadurch sind wir also in der Lage, die Dispersion der Grenzlinie zu vernichten, zu kompensieren. Die Grenzlinie erscheint dann farblos, und zwar, da wir für die D-Linie geradsichtige Amicische Prismen verwenden, ist sie gerade farblos für die D-Linie, und nur für diese, d. h. wir messen mit dem Instrument die Brechzahl n_D. Durch die Verwendung des Kompensators sind wir aber auch noch imstande, die **mittlere Dispersion** $(n_F - n_C)$ der Flüssigkeit zu berechnen. Dafür ist die Verdrehung z der beiden Amicischen Prismen gegeneinander ein Maß. Wir lesen z ab mit Hilfe einer feststehenden Strichmarke an der mit einer Teilung versehenen Trommel des Triebes M (Abb. 55) und verwenden dann zur Errechnung der mittleren Dispersion $(n_F - n_C)$ die dem Refraktometer beigegebene, auf die theoretisch abgeleiteten Formeln[1]) gegründete Dispersionstafel.



Abb. 55. Das Amicische Prismenpaar (PR), das vor dem Objektiv des Abbeschen Refraktometers eingeschaltet wird, gestattet die farbige Grenzlinie für die D-Linie zu achromatisieren. Durch Verdrehen der beiden geradsichtigen Prismen P und R gegeneinander können wir bei Erhaltung der Geradsichtigkeit für die D-Linie jede gewünschte Dispersion zwischen Null und der doppelten Dispersion eines einzelnen Amicischen Prismas herstellen.

Um Meßergebnisse an den zu prüfenden Flüssigkeiten, die im allgemeinen bei Temperaturveränderungen sehr starke Änderungen in der Brechkraft erleiden, miteinander vergleichen zu können, muß die Beobachtungstemperatur bekannt und bei Reihenmessungen insbesondere möglichst konstant sein. Eine genügende Temperaturkonstanz wird erzielt bei Verwendung heizbarer Prismen. Dabei sind die Glasprismen, einem Vorschlage Wollnys folgend, in doppelwandige Metallgehäuse eingebettet, durch die wir Wasser von bestimmter konstant bleibender Temperatur fließen lassen, wozu wir vorteilhaft eine Vorrichtung verwenden, die der von Pulfrich[2]) eigens dafür konstruierten Heizspirale mit Wasserdruckregler entspricht. Für höhere Beobachtungstemperaturen müssen wir am Ergebnis eine Korrektion wegen der Brechzahländerungen im Vergleichskörper anbringen, die allerdings für Temperaturen, die nicht mehr als $\pm 20°$ von der Normaltemperatur 20° C abweichen, unter 1 Einheit der vierten Dezimale liegt, also vernachlässigbar klein ist.

Sehr dunkle Flüssigkeiten, die kein Licht mehr durchlassen, werden im reflektierten Licht beobachtet (Abb. 56), indem der Lichteinfall durch die mattierte Fläche C erfolgt.

---

[1]) E. Abbe, Ges. Abhandlgn. Bd. 2. S. 130–136. 1906.
[2]) C. Pulfrich, ZS. f. Instrkde. Bd. 18, S. 49–52. 1898.

Nach Entfernung des Hilfsprismas HP lassen sich auch feste und plastische Körper an diesem Refraktometer messen (Abb. 57). Die festen Körper werden zunächst mit einer Planfläche versehen und auf die Hypothenuse des Meßprismas MP unter Verwendung eines Tropfens einer der hochbrechenden Flüssigkeiten aufgeschoben. Die plastischen Körper werden so angedrückt, daß sie ohne Luftblasen dicht an der Fläche anliegen. Die Messung erfolgt auch hier im allgemeinen im reflektierten Lichte. Doch kann sie auch bei streifendem Eintritt stattfinden, wenn der zu messende Körper senkrecht zur Anlagefläche eine angeschliffene Ebene (Abb. 57) besitzt.



Abb. 56. Der Strahlengang im ABBEschen Refraktometerprisma MP, wenn an das Meßprisma plastische oder feste Körper n angepreßt werden.

41. Das Butter- und das Zuckerrefraktometer. Für besondere Zwecke werden dem ABBEschen Refraktometer vereinfachte bzw. geeignetere Formen gegeben.

Bei Untersuchungen an Butter, Fetten und Ölen wurde ermittelt, daß deren Brechungszahlen, die Aufschluß über die Reinheit des vorliegenden Stoffes geben, innerhalb eines kleinen Bereiches von $n_D = 1{,}4179$ bis $n_D = 1{,}4922$ liegen. Nach WOLLNYS[1]) Vorschlag wird deshalb ein Gerät gebaut, daß nur eine über diesen Bereich gehende Okularskala besitzt, deren Teilung in Brechungszahlen geeicht ist. Da außerdem die verschiedenen Fettsorten ungefähr die gleiche Dispersion aufweisen, kann der ABBEsche Doppelkompensator (Abb. 55) durch ein fest eingebautes, einfaches, geeignet gewähltes, für D geradsichtiges AMICIsches Prisma ersetzt werden.

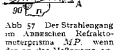


Abb 57 Der Strahlengang im ABBEschen Refraktometerprisma MP, wenn der an das Meßprisma angelegte, zu messende feste Körper n mit zwei unter einem rechten Winkel zueinanderstehenden ebenen Flächen versehen ist

Das gleiche ist der Fall für die von SCHÖNROCK[2]) untersuchten Zuckersäfte verschiedenster Konzentration, wie sie in der Zuckerindustrie vorkommen. Deshalb war es auch hierfür möglich, ein vereinfachtes Refraktometer[3]) zu bauen, an dessen Okularskala unmittelbar die für den Fortgang des Einkochens in der Zuckertechnik wichtige Zahl der Trockensubstanzprozente abgelesen werden kann.

42. Das Eintauchrefraktometer. Eine weitere vereinfachte Form des ABBEschen Refraktometers ist das PULFRICHsche[4]) Eintauchrefraktometer (Abb. 58), das hauptsächlich zu Messungen an wässerigen Lösungen gedacht ist. Die Einrichtung geht aus der Abb. 58 hervor. Die Objektivbrennweite ist so gewählt, daß bei einer Schätzgenauigkeit von $^1/_{10}$ Teilstrich der Okularteilung eine Meßgenauigkeit von etwa 4 Einheiten der fünften Dezimale im n_D erzielt wird. Diese erhöhte Meßgenauigkeit gegenüber dem ABBEschen Refraktometer hat zur Folge, daß der Meßbereich verhältnismäßig klein wird. Es kann deshalb das Meßprisma P durch einfache Handgriffe gegen andere mit anschließendem Meßbereich ausgewechselt werden. Es liegen folgende Prismen vor:

[1]) R. WOLLNY, Milchwirtschaftl. Ver. Korrespondenzbl. Bd. 15, Nr. 39. 1891; H. KESSLER, Refraktometrie. ABDERHALDENsches Handb. d. biol. Arbeitsmethoden, Abt. II, Phys. Meth. Teil 2, S. 838—844. 1926.

[2]) O SCHÖNROCK, ZS. f. Instrkde. Bd. 31, S. 192. 1911; Bd. 32, S. 205. 1912; ZS. d. Ver. d. D. Zuckerind. (Techn. Teil) Bd. 61, S. 425. 1911.

[3]) O. SCHÖNROCK u. F. LÖWE, ZS. f. Instrkde. Bd. 33, S. 305—308. 1913; H. KESSLER, l. c. S. 844—848.

[4]) C. PULFRICH, ZS. f. angew. Chem. Bd. 12, S. 1168. 1899; H. KESSLER, l. c. S. 850 bis 864.

Prisma Nr.	Meßbereich in n_D
1	von 1,325 bis 1,367
2	„ 1,366 „ 1,396
3	„ 1,395 „ 1,421
4	„ 1,419 „ 1,449
5	„ 1,445 „ 1,473
6	„ 1,468 „ 1,492

Da die mit diesem Gerät im allgemeinen zu messenden wässerigen Lösungen oder sonstigen Flüssigkeiten geringe und nahezu gleiche Dispersion besitzen, können wir auch hier den Abbeschen Doppelkompensator (Abb. 55) durch ein einziges, geeignet gewähltes, für D geradsichtiges Amicisches Prisma A (Abb. 58) ersetzen, das unveränderlich eingebaut ist.

Wenn nur geringe Flüssigkeitsmengen zur Verfügung stehen, kann ähnlich wie beim Abbeschen Refraktometer ein Hilfsprisma aufgeschoben werden, so daß die zu untersuchende Flüssigkeit nur den zwischen den beiden Prismen verbleibenden Raum von etwa 0,1 mm Schichtdicke auszufüllen braucht. In dieser Form findet das Eintauchrefraktometer Anwendung in der klinischen Eiweißbestimmung, indem damit die Brechungszahl des Blutserums gemessen wird. Den Zusammenhang zwischen Refraktometerzahl, d. h. Okularskalenteil, wo die Grenzlinie einsteht, bzw. Brechzahl mit den vorhandenen Eiweißprozenten gibt eine von Reiss[1]) ermittelte Zahlentafel.

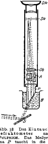


Abb. 58. Das Eintauchrefraktometer nach Pulfrich. Das Meßprisma P taucht in die in ein Becherglas B gefüllte, zu messende Flüssigkeit. An einer Okularteilung, die in Brechzahlen geteilt ist, wird die Lage der Grenzlinie der Totalreflexion abgelesen.

43. Die Verfahren unter Zuhilfenahme der Totalreflexion an einer planparallelen Platte. Sehr nahe verwandt mit dem Abbeschen Refraktometer bei Verwendung des Hilfsprismas und damit einer planparallelen Flüssigkeitsschicht sind die im folgenden zu besprechenden Verfahren.

Nach Wiedemann[2]) und Terquem u. Trannin[3]) stellen wir uns zunächst eine planparallele Luftplatte her, indem wir zwei planparallele Glasplatten P_1 und P_2 unter Zwischenlegen von gleichdicken Glimmerblättchen an den Rändern dicht abschließen. Diese Luftplatte LL tauchen wir in die zu untersuchende Flüssigkeit (Abb. 59), die sich in einem planparallelen Trog T befindet, der zwischen Spaltrohr und Prisma eines Spektrographen in den parallelen Strahlengang eingeschaltet ist. (Es kann natürlich auch mit einfarbigem Lichte ohne Spektrograph und Spaltrohr beobachtet werden.) Der Trog und sein Inhalt wirkt wie eine planparallele Platte, weshalb wir, solange der Einfallswinkel α auf die Luftplatte LL noch sehr klein ist, im Beobachtungsrohr ein ungestörtes Spektrum wahrnehmen werden, weil alle Wellenlängen in die Luftplatte eintreten, da noch für keine der Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht ist. Die Luftplatte ist an einer lotrecht stehenden Goniometerachse parallel zu dieser befestigt und

[1]) E. Reiss, Verh. d. 76. Vers. D. Naturf. u. Ärzte, Breslau, S. 36. 1904; Beiträge z. chem. Physiol. u. Pathol. Bd. 4, S. 150. 1903; H. Kessler, l. c. S. 858 u. 859.

[2]) E. Wiedemann, Arch. sc. phys. et nat. Bd. 51, S. 340. 1874; Pogg. Ann. Bd. 158, S. 375—386. 1876.

[3]) A. Terquem u. H. Trannin, Journ. de phys. théor. et appliquées Bd. 4. S. 232 bis 238. 1875; Pogg. Ann. Bd. 157, S. 302—309. 1876. Vgl. dazu auch E. Ketteler, Wied. Ann. Bd. 33, S. 353—381, 506—534. 1888.

kann demzufolge meßbar zur Einfallsrichtung verdreht werden. Lassen wir den Einfallswinkel α wachsen, so werden wir zunächst eine Stelle erreichen, wo er gerade gleich dem Grenzwinkel der Totalreflexion für Blau, das den kleinsten Grenzwinkel besitzt, sein wird. Die blauen Strahlen werden also von der Luftplatte totalreflektiert und treten deswegen im Spektrum nicht mehr auf. Beim gleichsinnigen Weiterdrehen der Luftplatte LL werden auf diese Weise alle Wellenlängen nacheinander aus dem Spektrum verschwinden. Wir beobachten somit beim Drehen der Luftplatte das Auftreten eines dunkeln Feldes, das bei scharfer Kante gegen den hellen Teil des Spektrums sich immer weiter gegen Rot vorschiebt. Die Kante entspricht der Grenzlinie der Totalreflexion und der zugehörige Einfallswinkel dem Grenzwinkel für die Linie, bei der die Kante im Spektrum gerade einsteht. Es gibt zwei Stellungen der Luftplatte, die symmetrisch zum einfallenden Strahle liegen, für die dies der Fall ist. Der Winkel zwischen diesen beiden Stellen ist der doppelte Grenzwinkel $2i$ für die untersuchte Flüssigkeit beim Übergange des Lichtes aus ihr in Luft. Somit ist die Brechzahl der Flüssigkeit unmittelbar gegeben durch:

$$n = \frac{1}{\sin i}. \tag{87}$$



Abb. 59. Die WIEDEMANNsche Luftplatte LL wird zur Messung der Brechzahl von Flüssigkeiten benutzt. Zwischen zwei planparallelen Glasplatten P_1 und P_2 ist eine planparallele Luftschicht LL eingeschlossen. Diese Platte wird in die in einem planparallelen Trog T, der auf dem Tisch eines Spektrographen steht, befindliche Flüssigkeit n getaucht. Für jede Stellung der Platte, der ein bestimmter Einfallswinkel α entspricht, werden bis zu einer bestimmten *Farbe*, deren Grenzwinkel i der Totalreflexion mit α identisch ist, alle kürzeren Wellenlängen totalreflektiert. Drehen wir die Platte von kleinen Einfallswinkeln α ausgehend zu größeren hin, so beobachten wir, daß sich dabei im Spektrum die Grenzlinie der Totalreflexion immer weiter vom Blau ausgehend gegen Rot vorschiebt.

Das Verfahren hat den großen Vorzug, daß es unabhängig von der Größe der Brechzahl des untersuchten Mittels ist. Die Genauigkeit liegt in der vierten Dezimale.

Würden wir eine bekannte hochbrechende Flüssigkeit n_0 verwenden und die Luftplatte bei diesem Verfahren durch eine planparallele Schicht aus dem zu untersuchenden optischen Mittel (fester, flüssiger oder gasförmiger Körper), das niedriger bricht, ersetzen, so wären wir dadurch in der Lage, in ähnlicher Art und Weise die Brechzahl n dieses Mittels zu messen: $n = n_0 \cdot \sin i$.

QUINCKE[2]) benutzt diese Methode, um planparallele Kristallplatten zu untersuchen. Er ersetzt dabei aber den planparallelen Flüssigkeitstrog durch zwei hochbrechende gleiche Glasprismen n, wobei dann allerdings der Einfluß des brechenden Winkels φ dieser Prismen berücksichtigt werden muß, weshalb er die Schlußformel für die Brechzahl n_0 der Kristallplatte

$$\left.\begin{aligned} \sin i' &= \frac{\sin i}{n} \\ n_0 &= n \cdot \sin(\varphi + i') \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

erhält.

[2]) G. QUINCKE, Aus der Festschr. d. naturf. Ges. zu Halle. 1879; Proc. Roy. Soc. Edinbourgh Bd. 9, S. 567–570. 1878; ZS. f. Krist. Bd. 4, S. 540–542. 1880.

44. Die Messung der Brechungszahlen einer Flüssigkeit nach der HALLWACHSschen Differentialdoppeltrogmethode. Um eine größere Genauigkeit bei der Ermittelung der Brechzahl, insbesondere von Lösungen zu erzielen, wählt HALLWACHS[1]) den Vergleich mit einer zweiten Flüssigkeit (insbesondere mit dem Lösungsmittel), die eine ähnlich liegende Brechzahl besitzt. Im Prinzip ist das Verfahren auch wieder das von WOLLASTON-KOHLRAUSCH (Ziff. 36), wobei aber diesmal der zu untersuchende Körper in einem Prisma von 90° brechendem Winkel sich befindet, während das Licht, aus der bekannten geringer brechenden Flüssigkeit kommend, streifend in die höher brechende Untersuchungsflüssigkeit eintritt.

Der HALLWACHSsche Doppeltrog, wie er in Abb. 60 in einem horizontalen Schnitt dargestellt ist, ist ein einfacher Glastrog, der durch eine Scheidewand P_3 in zwei voneinander unabhängige Hälften geteilt wird. Der Trog wird vorn und hinten durch zwei gut planparallele Platten P_1 und P_2 verschlossen. Die Scheidewand P_3 muß ebenfalls planparallel sein und außerdem mit der Hinterwand P_2 des Trogs einen Winkel von genau 90° einschließen. In der Troghälfte I befindet sich die geringer brechende Flüssigkeit (z. B. das Lösungsmittel) mit der Brechzahl n_0, in der Troghälfte II die stärker brechende Flüssigkeit (z. B. die Lösung) mit der Brechzahl n. Tritt das Licht streifend zu P_3 durch die Flüssigkeit n_0 ein, so wird der Strahl durch die planparallele Glasscheidewand P_3 nur parallel zu sich selbst versetzt, er würde also, wenn in II die Flüssigkeit I wäre, wieder streifend austreten; d. h. er tritt streifend aus der Flüssigkeit I in die Flüssigkeit II ein; es ist genau so, als ob beide Flüssigkeiten in unmittelbarer Berührung miteinander stünden. Deshalb geht der Lichtstrahl nach Eintritt in die Flüssigkeit n unter dem Grenzwinkel der Brechung i weiter, trifft unter dem Winkel β auf die Trogverschlußplatte P_2, die auch nur eine parallele Verschiebung des Strahls, aber keine Brechung bedingt, und wird infolge des Übertritts aus der Flüssigkeit in Luft um einen bestimmten Winkel β gegen die Normale auf P_2 abgelenkt. Wir bestimmen den Winkel β.

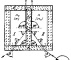


Abb. 60. Der Strahlengang im Differentialdoppeltrog nach HALLWACHS. Der Strahl tritt aus dem mit der Vergleichsflüssigkeit n_0 gefüllten Trog I durch die Parallelplatte P_3 hindurch streifend in den mit der Prüfungsflüssigkeit n gefüllten Trog II ein. Er wird unter dem Grenzwinkel i der Totalreflexion abgelenkt und tritt unter dem Winkel β gegen die Flächennormale zu P_2 aus. Es ist

$$n^2 - n_0^2 = \sin^2\beta\,.$$

Setzen wir diesen Trog auf einen Spektrometertisch, so daß die Platten P_1 und P_3 parallel zur Drehachse des Spektrometers stehen, so können wir mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs einmal die Grenzlinie der Totalreflexion ins Fadenkreuz einstellen und dann durch Autokollimation an der Platte P_2 die Richtung der Normalen auf P_2 feststellen. Um eine scharfe Grenzlinie zu bekommen, ist von dem Trog zu fordern, daß die Kanten, in denen die Scheidewand P_3 mit der Eintrittsplatte P_1 zusammenstößt, vollkommen scharf sind. Vom Kitten herrührende Reste müssen peinlichst entfernt werden. Um einen Keilfehler der Verschlußplatte P_2 und kleine Fehler im 90°-Winkel zwischen P_2 und P_3 unschädlich zu machen, messen wir nicht

[1]) W. HALLWACHS, Wied. Ann. Bd. 50, S. 577–589. 1893.

den einfachen Winkel β, sondern den doppelten Winkel 2β, indem wir die Flüssigkeiten vertauschen und dadurch auch die Ablenkung nach der anderen Seite feststellen. Während dieses Umfüllen vor sich geht, muß der Trog unverändert seine Lage behalten. Bei geeigneter Konstruktion des Spektrometers können wir uns dieses Umfüllen ersparen, wenn wir den Trog, an den in diesem Falle allerdings besonders hohe Anforderungen hinsichtlich der Genauigkeit seiner Ausführung gestellt werden, um genau 180° drehen.

Zur Ermittelung der Rechnungsformel beachten wir, daß nacheinander die Gleichungen gelten (Abb. 60)

$$n_0 = n \cdot \sin i, \qquad i + \beta' = 90°; \qquad n \cdot \sin\beta' = \sin\beta,$$

aus denen wir durch Umformung erhalten

$$n^2 - n_0^2 = \sin^2\beta \tag{89}$$

oder

$$n = n_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\sin^2\beta}{n_0^2}}. \tag{90}$$

Da diese Formel für die Rechnung etwas umständlich ist, können wir eine vorteilhaftere, lineare Formel auffinden, wenn wir beachten, daß nach dieser Methode vielfach Lösungen mit ihren Lösungsmitteln verglichen werden, also Flüssigkeiten, deren Brechzahlen in den meisten Fällen einander sehr nahe liegen, oder deren Differenz ungefähr bekannt ist. Durch Auflösen der linken Seite von (89) folgt:

$$n - n_0 = \frac{\sin^2\beta}{n + n_0}. \tag{91}$$

Wir verwenden zunächst den näherungsweise bekannten Wert von n zur Bildung von $(n + n_0)$ und rechnen damit einen zweiten Näherungswert n aus. Um den genauen Wert von n zu erhalten, ist dieses Näherungsverfahren zwei- bis dreimal mit dem jeweils ermittelten Näherungswerte von n fortzuführen.

Die mit dem HALLWACHSschen Doppeltrog zu erzielende Meßgenauigkeit ist bei vorsichtigem Arbeiten eine der best zu erzielenden. Einem Winkel von $\beta = 1°$ entspricht (s. nebenstehende Tabelle):

bei n	eine Brechzahldifferenz von $(n - n_0)$
1,33	0,00012
1,50	0,00010

Da wir auf einem Spektrometer leicht eine Einstellung der Grenzlinie bis auf ± 1′ genau erzielen können, so können wir bei dieser Doppeltrogmethode mit einer Meßgenauigkeit von ± 2 Einheiten der sechsten Dezimale rechnen.

Um diese hohe Meßgenauigkeit aber auch wirklich zu erzielen, müssen wir sorgfältig darauf achten, daß die Temperatur in beiden Troghälften die gleiche ist. Aus diesem Grunde lassen wir in jede der beiden Kammern durch den Abschlußdeckel hindurch je ein in 0,02° C geteiltes Thermometer tauchen. Nach Angaben von RIMBACH und WINTGEN[1]) erhielten sie bei einer Temperaturkonstanz von 0,1° C genügend gute Ergebnisse.

45. Über die Grenzkurven der Totalreflexion für isotrope und doppeltbrechende Körper. (Brechzahlmessungen an Kristallen). Wie wir in Ziff. 35 gesehen haben, ist die Grenzkurve der Totalreflexion für isotrope Körper eine Kreislinie, weil der Grenzwinkel der Totalreflexion nach allen Richtungen immer der gleiche ist. Nur der Durchmesser dieser Kreislinie, in ein und derselben zur Eintrittsebene parallelen Schnittebene gemessen, wird für die verschiedenen brechenden optischen Mittel ein verschiedener sein, je nach der

[1]) E. RIMBACH u. R. WINTGEN, ZS. f. phys. Chem. Bd. 74, S. 233. 1910.

Größe ihres Grenzwinkels der Totalreflexion bzw. ihrer Brechzahl. Nehmen wir an (Abb. 61), daß die Schnittebene *SE* von der Eintrittsebene *EE* den Abstand $a = 1$ habe, und bedenken wir, daß $n = n_0 \cdot \sin i$ ist, so erhalten wir als Radius r der Grenzkurve für ein optisches Mittel n:

$$r = \operatorname{tg} i. \tag{92}$$

Je benachbarter also die beiden Brechzahlen n und n_0 einander liegen, desto größer wird der Durchmesser $2r$ werden, der im Falle $n = n_0$ unendlich groß wird.

Von so einfacher Kreisliniennatur sind nun aber die Grenzkurven von doppeltbrechenden Körpern nicht, da die Brechzahl mit der Richtung sich ändert. Dies hat zur Folge, daß die Grenzwinkel i der Totalreflexion der in B eintreffenden Strahlen von der Einfallsrichtung der Strahlen abhängen und mit dieser sich im allgemeinen kontinuierlich ändern zwischen einem maximalen und einem minimalen Wert, der der größten bzw. der kleinsten Brechzahl entspricht. Es werden demnach im allgemeinen für solche Stoffe wegen der Doppelbrechung (o- und e-Strahl) zwei Grenzkurven vorhanden sein, die sich gegenseitig umschließen oder durchschneiden. Ihre Form und Lage zueinander hängt von der Größe und Art der Doppelbrechung in dem untersuchten Kristall ab und auch von der Lage der zur Messung benutzten Ebene zu den optischen Kristallachsen. Dabei soll die selbstverständliche Abhängigkeit von der Brechzahl n_0 des höher brechenden Vergleichskörpers, weil diese für die Erscheinung selbst nicht grundlegend in Frage kommt, außer Betracht bleiben. Unter diesen Umständen besitzen die Grenzkurven eine große Ähnlichkeit mit den Schnittkurven der parallel der untersuchten Kristallfläche durch die Fresnelsche Wellenfläche bzw. Indexfläche des untersuchten Kristalls gelegten Schnittebenen.



Abb. 61. Die Grenzkurve der Totalreflexion. Alle aus dem Mittel n in B einfallenden Strahlen werden im Mittel n_0 so gebrochen, daß sie innerhalb des durch den Grenzwinkel i als halbem Öffnungswinkel definierten Kegels liegen. Ein Schnitt dieses Kegels durch die zur Eintrittsebene *EE* parallele Ebene *SE* liefert die in sich geschlossene Grenzkurve der Totalreflexion, die für isotrope Körper ein Kreis ist.

Eingehend sind die Formen der Grenzkurven von de Senarmont[1]) und Liebisch[2]) für die meisten vorkommenden Fälle, fußend auf den geometrischen Gesetzen der Doppelbrechung, behandelt worden. Erst später[3]) gelang es, die Ergebnisse der Theorie im Experiment mit Hilfe geeigneter Totalreflektometer zu prüfen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind:

1. Die Beobachtung der Größt- und Kleinstwerte für den Grenzwinkel der Totalreflexion an einer beliebig durch den Kristall gelegten Schnittfläche ergibt ohne weiteres die Hauptbrechungszahlen des untersuchten doppeltbrechenden Kristalls.

2. Bei **einachsigen** Kristallen beobachten wir neben einem Kreise als Grenzkurve für den ordentlichen Strahl, dessen Radius der Hauptbrechzahl

[1]) H. de Senarmont, C. R. Bd. 42, S. 65. 1856; Pogg. Ann. Bd. 97, S. 605. 1856.

[2]) Th. Liebisch, N. Jahrb. f. Min. Bd. 1, S. 245. 1885; Bd. 2, S. 52, 203. 1886; Physikalische Kristallographie S. 404—427. 1891.

[3]) W. Kohlrausch, Wied. Ann. Bd. 6, S. 86. 1879; Bd. 7, S. 427. 1879; J. Danker, N. Jahrb. f. Min., Beil. Bd. 4, S. 265. 1885; C. Pulfrich, ebenda Bd. 5, S. 182. 1887; Winkelmannsches Handb. Bd. VI, S. 609. 1906; J. Norrenberg, Dissert. Bonn 1888; Wied. Ann. Bd. 34, S. 843. 1888.

des ordentlichen Strahls entspricht, noch eine Ellipse als Grenzkurve für den außerordentlichen Strahl. Dabei ist die eine der beiden Hauptachsen dieser Ellipse für alle durch den Kristall gelegten Ebenen konstant und entspricht der außerordentlichen Hauptbrechzahl. Die andere Haupthalbachse ändert sich mit der Lage des Schnittes und kann unter Umständen zur Ermittelung der Lage dieser Schnittebene zur optischen Achse benutzt werden.

3. Bei zweiachsigen Kristallen beobachten wir im allgemeinen zwei Ellipsen als Grenzkurven. Ganz gleichgültig wie die Meßfläche im Kristall orientiert ist, von den vier Halbachsen der Ellipsen sind stets drei konstant und entsprechen den Hauptbrechzahlen, während die vierte Halbachse mit der Schnittlage sich ändert. Wenn wir also noch eine zweite Fläche anderer Schnittlage messen, können wir auf Grund der Übereinstimmung der erhaltenen Zahlenwerte entscheiden, welches die Hauptbrechzahlen sind.

Dabei ist noch keine Rücksicht genommen auf den Polarisationszustand der einzelnen Kurven, der bei zweiachsigen Kristallen besonders schwierig zu behandelnde Erscheinungen liefert, die von KETTELER[1]), NORRENBERG[2]), PULFRICH[3]) bearbeitet worden sind.

Was nun die Beobachtung dieser Grenzkurven selbst betrifft, so sind dafür besondere Totalreflektometer mit einer Drehvorrichtung für den Kristall gebaut worden, die erlauben, den Grenzwinkel für jede Einfallsrichtung für sich zu bestimmen. Indem wir durch Betätigung der Drehvorrichtung die Grenzlinien aller Einfallsrichtungen nacheinander durch das Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohrs wandern lassen, können wir leicht den Größt- und Kleinstwert der Grenzkurve erkennen, mit dessen Hilfe wir dann die gesuchten Hauptbrechzahlen berechnen können.

Die Drehung des Kristalls kann in zweierlei Art und Weise bewirkt werden. Bei Einbettung des Kristalls in eine höherbrechende Flüssigkeit, wie beim KOHLRAUSCHschen Totalreflektometer (Ziff. 46), wird der Kristallträger so eingerichtet, daß eine Drehung des Kristalls um eine Achse senkrecht zur Reflexionsebene des Kristalls möglich ist. Bei Verwendung eines höher brechenden festen Glaskörpers, wie beim PULFRICHschen Totalreflektometer und beim ABBEschen Kristallrefraktometer (Ziff. 47), wird der Vergleichskörper, auf dem der Kristall fest aufliegt, senkrecht zur Auflagefläche drehbar eingerichtet, woraus sich dessen besondere, von den bisher geschilderten Vergleichsprismen abweichende Form erklärt.

46. Das Totalreflektometer von KOHLRAUSCH. Beim Gebrauch des von KOHLRAUSCH[4]) angegebenen Totalreflektometers (Abb. 62) wird der Grenzwinkel ε durch Reflexion der Lichtstrahlen an dem zu untersuchenden Körper n, der in eine höher brechende Flüssigkeit n_0 eingebettet ist, ermittelt. Die Flüssigkeit, meist Schwefelkohlenstoff, befindet sich in einer zylindrischen Glasflasche, von der ein Stück der Seitenwand durch eine aufgekittete planparallele Verschlußplatte ersetzt ist. Eine zu dieser Platte parallele, von oben in die Flüssigkeit hineinragende lotrechte Achse, die mit einem Teilkreis fest verbunden ist, besitzt an ihrem Ende eine Halte- und Orientiervorrichtung für den Kristall. Ein auf Unendlich eingestelltes Beobachtungsfernrohr ist fest eingebaut, so daß seine optische Achse senkrecht zur planparallelen Verschlußplatte steht und damit auch genau senkrecht zur Drehachse des Teilkreises. Die aus dem Gefäß durch die planparallele Platte austretenden Strahlen erleiden somit keine Richtungsänderung.

[1]) E. KETTELER, Wied. Ann. Bd. 28, S. 230, 520. 1886.
[2]) J. NORRENBERG, (Fußn. 3 S. 698).
[3]) C. PULFRICH, Das Totalreflektometer, S. 100—107. Leipzig 1890.
[4]) F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. Bd. 4, S. 1—33. 1878; Bd. 6, S. 86. 1879; Bd. 16, S. 609. 1882.

Die zur Reflexion benutzte Kristallfläche müssen wir parallel zur Drehachse ausrichten. Lassen wir dann von links (1) Licht einfallen, so können wir eine Stellung I des Kristalls finden, wo die Grenzlinie der Totalreflexion gerade im Fadenkreuz des Fernrohrs einsteht. Bringen wir nun die Lichtquelle — es eignet sich dazu besonders eine Natriumflamme, deren Leuchtfläche eine genügend große Ausdehnung besitzt — auf die rechte Seite (2) und wiederholen, indem wir Teilkreis mit Kristall entgegen dem Uhrzeigersinne drehen, die Einstellung auf die Grenzlinie, so müssen wir, um in Stellung I' zu kommen, gerade um einen Winkel drehen, der gleich dem doppelten Grenzwinkel ist, wodurch wir unmittelbar diesen Winkel i gefunden haben, der, in die Gleichung

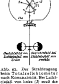


Abb. 62. Der Strahlengang beim Totalreflektometer nach Kohlrausch. Bei Lichteinfall von links (I) muß die Kristallplatte n in die Lage I gebracht werden, damit die Grenzlinie der Totalreflexion im Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs einsteht. Um auch bei Lichteinfall von rechts (2) ein Einstehen der Grenzlinie zu erhalten, muß die Platte n um den doppelten Grenzwinkel ($2i$) in die Lage I' gedreht werden. Es ist $n = n_0 \cdot \sin i$.

$$n = n_0 \cdot \sin i \tag{93}$$

eingesetzt, die gesuchte Brechzahl ergibt.

Zur Feststellung der **Meßgenauigkeit** führen wir die Differentiation dieser Formel durch:

$$dn = \sqrt{n_0^2 - n^2} \cdot di + \frac{n}{n_0} \cdot dn_0 . \tag{94}$$

Nehmen wir an, daß wir als Flüssigkeit Schwefelkohlenstoff ($n_0 = 1,62$) verwenden, dessen Brechzahl auf $dn_0 = \pm 0,0001$ bekannt sei, während wir den Grenzwinkel mit einem Einstellfehler von etwa $di = \pm 0,01°$ bestimmen können, so erhalten wir folgende Meßgenauigkeiten für die Brechzahl:

	für $n =$		
	1,50	1,55	1,60
dn	$\pm 2,0$	$\pm 1,9$	$\pm 1,5$

Einheiten der vierten Dezimale.

Die erwähnte, schon von Kohlrausch verwandte Vorrichtung, um den Kristall zur Ermittelung der Größt- und Kleinstwerte des Grenzwinkels zu drehen, wurde von Klein[1]) und Groth[2]) noch vervollkommnet.

Der Apparat hat den großen Nachteil, daß er stets größere Mengen der hochbrechenden Flüssigkeit braucht, und daß die Brechzahl dieser Flüssigkeit sehr stark mit der Temperatur und durch sonstige physikalisch chemische Vorgänge sich ändern kann. Jedenfalls ist eine genaue Temperaturbeobachtung und eine jedesmalige Neubestimmung ihrer Brechzahl n bei zuverlässigen Messungen unvermeidlich. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, greifen wir mit Soret[3]) zu dem Kunstgriff, über dem Kristall noch ein bekanntes Glas in die Flüssigkeit zu bringen und abwechselnd den Grenzwinkel i für den Kristall n und den Grenzwinkel i_0' für das Glasplättchen n_0' zu bestimmen. Auf diese Weise können wir auf die Brechzahl der Flüssigkeit verzichten; denn zur Berechnung der gesuchten Brechzahl haben wir nun die Beziehung:

$$n = n_0' \cdot \frac{\sin i}{\sin i_0'} . \tag{95}$$

[1]) C. Klein, N. Jahrb. f. Min. Bd. 2, S. 880. 1879.
[2]) P. Groth, Physikalische Kristallographie, S. 704—711. Leipzig: W. Engelmann 1905.
[3]) Ch. Soret, C. R. Bd. 95, S. 517—520. 1882; Beibl. d. Ann. Bd. 6, S. 870—872. 1882.

Bei bekannter Brechzahl n eines Hilfsplättchens können wir das Gerät auch zur Ermittelung der Brechzahl einer unbekannten Flüssigkeit verwenden, wenn diese höher bricht als das Hilfsplättchen.

47. Das ABBEsche Kristallrefraktometer. Wie schon in Ziff. 45 gesagt, verlangt der Wunsch den Vergleichskörper zu drehen, eine besondere Form dieses Körpers. Er muß ein Rotationskörper sein, der symmetrisch zur Drehachse liegt.

PULFRICH[1]) hat eine Lösung gefunden, indem er den Vergleichskörper als achsenparallelen Glaszylinder ausbildet. Dieser hat die Eigenschaft, daß die von der Kreislinie abweichenden Grenzkurven teilweise nur verschwommen wahrgenommen werden können, während für die Größt- und Kleinstwerte des Grenzwinkels allerdings gute Schärfe vorhanden ist. Durch Vorsetzen einer Plankonkavlinse von gleicher Krümmung wie der Zylinder vor das Beobachtungsfernrohr läßt sich für dieses PULFRICHsche Totalreflektometer die allgemeine Schärfe der Grenzkurve wieder herstellen.

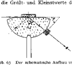


Abb. 63. Der schematische Aufbau und Strahlengang im ABBEschen Kristallrefraktometer, das im allgemeinen aus einer Halbkugel aus hochbrechendem Glase n_0 und einem Beobachtungsfernrohr besteht, dem eine plankonkave Linse vom gleichen Halbmesser und aus gleichem Glase wie die Halbkugel vorgesetzt ist, um den Strahlengang telezentrisch zu machen. Die optische Achse des Fernrohrs geht durch den Mittelpunkt der Halbkugel, durch den außerdem eine ebene Fläche gelegt ist, auf die das zu untersuchende Prüfstück n aufgelegt wird. Wenn wir das Fernrohr um den Kugelmittelpunkt drehen und nacheinander auf die Grenzlinie bei Lichteinfall von links und von rechts einstellen, so erhalten wir dadurch den zweifachen Grenzwinkel $2i$

Soll der ganze Verlauf der Grenzkurve scharf sein, so wird aus dioptrischen Gründen als Vergleichskörper am besten eine Halbkugel gewählt, wie es ABBE[2]) bei seinem Kristallrefraktometer (Abb. 63) tut. Die Halbkugel ist so am Apparat eingebaut, daß die wagerechte Achse des Goniometers in der durch den Mittelpunkt der Halbkugel gelegten Ebene durch diesen Mittelpunkt hindurchgeht, während die ebenfalls durch den Mittelpunkt gehende Drehachse der Kugel lotrecht zu dieser Ebene steht, die als Auflagefläche für den zu untersuchenden Körper dient.

Wir können dabei sowohl im reflektierten als auch bei streifend eintretendem Lichte beobachten. Um die aus der Halbkugel austretenden Strahlen telezentrisch und damit erst der Beobachtung zugänglich zu machen, setzt ABBE vor das Beobachtungsfernrohr eine Plankonkavlinse. (Abb. 63) vom gleichen hochbrechenden Glase wie die Halbkugel und mit einem Radius, der so gewählt ist, daß zwischen der Halbkugel und der Hohlfläche der Vorsatzlinse eine nur einige Zehntel Millimeter dicke gleichmäßige Luftschicht sich befindet. Dadurch wird erreicht, daß der Apparat wie ein Prisma mit veränderlichem brechendem Winkel φ (Abb. 63) wirkt, dessen Austrittsfläche stets senkrecht zur Fernrohrachse steht (vgl. Ziff. 26). Die Vorsatzlinse wird zweckmäßig mit der Frontlinse des Fernrohrobjektivs zu einer Linse vereinigt.

[1]) C. PULFRICH, Wied. Ann. Bd. 30, S. 193, 317, 487. 1887; Bd. 31, S. 724. 1887; Bd. 34, S. 326. 1888; Bd. 36, S. 561. 1889; Das Totalreflektometer. Leipzig: W. Engelmann 1890.

[2]) S. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 10, S. 246–255, 269–275. 1890; W. FEUSSNER, ebenda Bd. 14, S. 87. 1894; C. VIOLA, ZS. f. Krist. Bd. 30, S. 417. 1898.

Der Grenzwinkel i wird unmittelbar ausgemessen. Zu seiner Beobachtung stellen wir hintereinander bei von links, dann bei von rechts einfallendem einfarbigen Lichte das Fadenkreuz auf die Grenzlinie ein. Die Differenz beider Teilkreisablesungen ist der doppelte Grenzwinkel. Zur Rechnung ist wieder die Gleichung (93) zu verwenden.

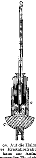


Abb 64. Auf die Halbkugel G des Kristallrefraktometers kann zur Aufnahme zu messender Flussigkeiten ein Trog aufgeschoben werden, durch dessen Verschlußstopsel ein Thermometer in die Flussigkeit taucht.

Um für verschiedene Wellenlängen die Grenzwinkel des untersuchten Körpers zu bekommen, brauchen wir nur eine entsprechende mehrfarbige Lichtquelle zu verwenden. Im Gesichtsfeld haben wir dann die in Ziff. 35 behandelte Erscheinung von mehreren Grenzlinien (Abb. 50, 51 u. 52), deren Winkelabstände δi wir mikrometrisch ausmessen und zu dem für eine Normallinie ermittelten Grenzwinkel i vorzeichenrichtig hinzufügen.

Die Fehlergleichung ist dieselbe wie (94). Sie liefert, wenn wir mit einem Vergleichskörper $n_0 = 1{,}75$, einer Winkelmeßgenauigkeit von $di = 20''$ und einem $dn_0 = 0{,}00005$ rechnen, den Meßfehler dn in Einheiten der vierten Dezimale:

	für n =				
	1,00	1,20	1,40	1,60	1,70
dn	$\pm 1{,}4$	$\pm 1{,}3$	$\pm 1{,}1$	$\pm 0{,}7$	$\pm 0{,}4$

Neben seinem Hauptverwendungszweck der Messung von Kristallen kann das Abbesche Kristallrefraktometer naturgemäß auch zur Messung von anderen festen Körpern und von Flüssigkeiten dienen. Letztere werden in einen auf die Meßfläche P der Halbkugel G aufgeschobenen zylindrischen Trog R (Abb. 64) gefüllt.

Einen großen Vorteil weist dieses Abbesche Verfahren mit der Halbkugel noch dadurch auf, daß es erlaubt, durch Anwendung einer Abblendung am Kristallbilde im Beobachtungsfernrohr, auch an kleinen und mangelhaften Kristallflächen noch gute Meßergebnisse zu erzielen[1]).

c) Die Verfahren, die mit Hilfe von Interferenzen Unterschiede oder Änderungen in den Brechzahlen feststellen.

48. Die theoretischen Grundlagen. Allen Interferenzverfahren gemeinsam ist die Tatsache, daß ein vorhandenes Interferenzstreifensystem eine Wanderung durchmacht, wenn sich die Brechzahl des von dem einen Teil der interferierenden Strahlen durchsetzten optischen Mittels ändert.

Zwei von einer Lichtquelle kommende, auf irgendeines der bekannten Verfahren parallel gemachte und einen Gangunterschied aufweisende Lichtbündel *1* und *2* (Abb. 65) durchsetzen jedes für sich eines der beiden optischen Mittel, die miteinander verglichen werden sollen und die gleiche Dicke und zunächst

[1]) C. Pulfrich, ZS. f. Krist. Bd. 30, S. 568. 1899; ZS. f. Instrkde. Bd. 19, S. 4–18, 79–81. 1899; C. Leiss, ebenda Bd. 19, S. 77–79. 1899.

auch die gleiche Brechungszahl n_0 besitzen. Im Beobachtungsfernrohr erscheint ein System von Interferenzfransen. Ändern wir nun in einem der beiden zwischengeschalteten Mittel (z. B. auf Seite des Lichtbündels 2) die Brechzahl langsam in einer Richtung dadurch, daß wir z. B. erwärmen oder den Druck ändern oder bei Gasen das ursprünglich auch auf dieser Seite vorhandene Vergleichsgas durch ein anderes verdrängen, so ändert sich auf dieser Seite 2 die optische Weglänge des Strahls und der Gangunterschied zwischen den beiden interferierenden Strahlen ändert sich dementsprechend mit gleicher Geschwindigkeit in einer Richtung, was zur Folge hat, daß die Streifen im Gesichtsfeld nach einer gewissen Seite hin vorbeiwandern. Ist der Zustand auf der geänderten Seite 2 konstant geworden, so bleiben auch die Streifen wieder stehen. War die Brechzahl vor der Änderung auf beiden Seiten n_0 und ist sie nun nach der Änderung auf der Seite 2 gleich n, während sie auf Seite 1 die alte geblieben ist, und ist ferner die bei dem benutzten einfarbigen Lichte von der Wellenlänge λ vorbeigewanderte Streifenzahl z, so ist die Änderung des optischen Weges bei einer Dicke der durchstrahlten Schichten von l einerseits $n \cdot l - n_0 l = (n - n_0) \cdot l$. Anderseits entspricht der Wanderung um einen Streifen eine Änderung im optischen Weg von genau einer Wellenlänge λ. Wir erhalten folglich die Beziehung



Abb. 65. Von den beiden zur Interferenz gelangenden Lichtbündeln 1 u. 2 durchsetzt jeder für sich eines der beiden miteinander zu vergleichenden optischen Mittel

$$(n - n_0) \cdot l = z \cdot \lambda, \qquad (96)$$

aus welcher Gleichung wir die einzige Unbekannte, die Differenz der Brechzahlen $(n - n_0)$ oder die Brechzahl n selbst bei bekanntem n_0 berechnen können.

49. Der Interferenzrefraktor von Jamin. Um die beiden einen Gangunterschied aufweisenden Lichtbündel zu erzeugen, schlägt Jamin[1]) folgenden Weg ein. Eine gut planparallele Platte (Abb. 66) aus optisch homogenem Glase, deren Dicke zwar beliebig, aber möglichst groß ist, wird in zwei Teile gleich großer Abmessungen zerschnitten. Diese beiden Platten P_1 und P_2 werden genau parallel zueinander aufgestellt, so daß die Verbindungslinie ihrer Mitten mit der Plattenebene einen Winkel bildet. Trifft nun auf die erste Platte P_1 ein aus dem Unendlichen kommender Lichtstrahl auf, so wird er an der Vorderfläche I in zwei aufgespalten. Der Strahl S_1 entsteht durch unmittelbare Reflexion eines Teils der einfallenden Intensität. Ein zweiter Teil dieser Intensität dringt unter Brechung in die Platte ein, wird an der Hinterfläche II reflektiert, trifft wieder auf die Vorderfläche I, wird hier teils austreten, teils nochmals in das Glas zurückgeworfen werden, usw. — Die an der Vorderfläche I austretenden Strahlen laufen alle parallel und gleichgerichtet mit dem erstreflektierten Strahl S_1 weiter. Ihre Intensität nimmt mit der Zahl ihrer Reflexionen in geometrischer Progression ab. Für die später zu beobachtende Interferenzerscheinung kommt aber neben dem unmittelbar reflektierten Strahl S_1 nur noch der erste Parallelstrahl S_2 in Frage. Diese beiden Strahlen sind voneinander um einen gewissen Abstand entfernt, der proportional mit der Dicke der Platte wächst. Sie treffen im weiteren Verlaufe auf die zweite Platte P_2 und erleiden hier ähnlich wie der Urstrahl an Platte P_1 Reflexionen und Brechungen, wodurch jeder für sich in zwei Strahlen, S_1' und S_1'' bzw. S_2' und S_2'' zerlegt wird. Da P_1 und P_2 genau parallel stehen und gleich dick sind, fallen die beiden Strahlen S_1' und S_2'' zusammen und haben den gleichen optischen

[1]) J. Jamin, Cosmos 1856 S. 277, Nr. 10; Pogg. Ann. Bd. 98, S. 345—349. 1856; C. R. Bd. 42, S. 482—485. 1856.

Weg zurückgelegt, besitzen also keinen Gangunterschied. Sie besitzen außerdem, infolge der gleichen Anzahl von gleichartigen Reflexionen und Brechungen, gleiche Intensität. Solange die Platten P_1 und P_2 genau parallel zueinander stehen, werden sich die Intensitäten addieren und wir werden keine Interferenzstreifen sehen. Sobald wir aber einer der beiden Platten eine kleine Neigung gegen die andere erteilen, bekommen die beiden Strahlen S_1'' und S_2' einen kleinen Gangunterschied, weshalb wir bei Abblendung der Strahlen S_1' und S_2'' beim Blicken durch die Blende nach der Platte P_2 ein System von Interferenzstreifen wahrnehmen werden. Es ist dies die unter dem Namen der Brewsterschen[1]) Streifen bekannt gewordene Interferenzerscheinung an zwei zueinander unter sehr spitzem Winkel geneigten dicken Platten.

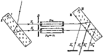


Abb. 66. Der Strahlengang im Jaminschen Interferenzrefraktor. Zwei aus einer planparallelen Platte herausgeschnittene Platten P_1 und P_2 stehen nahezu parallel, unter einem ganz spitzen Winkel zueinander geneigt. Ein einfallender Strahl wird durch P_1 in zwei parallele Strahlen S_1 und S_2 zerlegt, die jeder für sich von P_2 wieder in je zwei parallele Strahlen S_1' und S_1'' bezw. S_2' und S_2'' zerlegt werden. S_1' und S_2'' werden abgeblendet. S_1'' und S_2' liefern ein Interferenzstreifensystem und sind von gleicher Intensität. Bringen wir in den Strahlengang zwischen P_1 und P_2, sowohl von S_1 als auch von S_2, das gleiche optische Mittel n_0 in gleicher Länge, so nimmt das Interferenzstreifensystem eine bestimmte Lage ein. Ändert sich auf der Seite von S_2 allmählich die Brechzahl von n_0 nach n, so wandert das Streifensystem, und die Zahl z der Streifen, die an einer festen Marke vorbeiwandern, ist ein Maß für die Brechzahländerung, insofern als

$$(n - n_0)\, l = z \cdot \lambda$$

ist, wenn l die Länge der durchstrahlten Schicht und λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist.

Je nach der Neigung der Platten zueinander werden die Interferenzfransen eine entsprechende Lage haben. Durch geeignetes Justieren der einen Platte sind wir also in der Lage, die Streifen breit oder eng, wagerecht oder lotrecht oder schräg, ganz nach Belieben, einzustellen.

Die Intensität der Erscheinung können wir verstärken, wenn wir die Rückseiten *II* und *IV* der Platten voll versilbern.

Für sehr geringe Neigungen der Platten gegeneinander treten die Brewsterschen Streifen auch bei Benutzung weißen Lichtes auf. Doch ist dies nur dann der Fall, wenn bei lotrecht stehenden Plattenebenen die Streifen wagerecht liegen, weil nur für diese Lage einer lotrechten gegenseitigen Neigung der Platten der Fall vorkommen kann, daß für zwei interferierende Strahlen der Gangunterschied Null wird. Neben einem farblosen, achromatischen Streifen, der weiß oder schwarz sein kann, liegen dann links und rechts, symmetrisch nach beiden Seiten, farbig gesäumte Streifen, etwa 12 bis 15, deren verschiedenartiges Aussehen ein Wiedererkennen der Streifen, insbesondere des achromatischen Streifens, erleichtert. Ein solcher farbloser Streifen kann naturgemäß nur an einer solchen Stelle der übereinandergelagerten Streifensysteme der verschiedenen Wellenlängen auftreten, wo für alle diese Wellenlängen der Gangunterschied gleichzeitig Null oder $\lambda/2$ beträgt, weshalb der farblose Streifen je nachdem weiß oder schwarz sein kann.

[1]) D. Brewster, Trans. Edinbg. Roy. Soc. Bd. 7. 1815; O. Lummer, Wied. Ann. Bd. 24, S. 417—439. 1885.

Die Streifen besitzen einen verhältnismäßig großen Abstand voneinander und sind daher ohne jedes optische Hilfsmittel wahrzunehmen. Doch werden wir bei Messungen ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr mit Okularstrichkreuz verwenden, um die bei der Messung auftretende Streifenwanderung bequem auszählen zu können.

Durch eine Doppelblende B (Abb. 66) mit geeigneten Ausschnitten sondern wir die beiden Strahlenbündel S_1 und S_2 voneinander ab. In den Weg eines jeden dieser beiden Lichtbündel bringen wir zunächst zwei optisch gleichwirkende Körper. Dadurch wird noch keine Änderung im Streifensystem stattfinden. So wie wir aber die Brechungsverhältnisse des einen Körpers ändern (Ziff. 48), während die des andern unverändert bleiben, ändern wir damit den zwischen den beiden Strahlenbündeln bestehenden Gangunterschied, dessen Änderung wir durch Ermittelung der eingetretenen Streifenverschiebung zahlenmäßig finden können.

Bei stetig sich ändernder Brechzahl des einen Körpers werden wir im einfarbigen Lichte λ beobachten und als Maß der Änderung des in Gleichung (96) eingehenden Gangunterschieds $z \cdot \lambda$ die Anzahl z der am Fadenkreuz des Beobachtungsrohres vorbeiwandernden Streifen einfach auszählen. In dieser Art und Weise können wir beobachten, wenn wir durch stetige Temperaturänderung[1]) oder durch stetige Druckänderung[2]) die betreffende Abhängigkeit der Brechzahlen eines Mittels finden wollen, weil nur in solchen Fällen eine stetige Streifenwanderung auftritt, die allein das Auszählen ermöglicht.

Sowie aber eine unstetige Änderung vorgenommen wird dadurch, daß z. B. eine Lösung durch eine andere ersetzt wird, sind wir nicht mehr in der Lage, die hierdurch bedingte Verschiebung der Interferenzfransen zählend zu verfolgen. Hier müssen wir im weißen Licht beobachten und den dabei auftretenden achromatischen Streifen als Nullmarke verwenden. Zunächst stellen wir diesen auf das Fadenkreuz ein, nehmen dann die Änderung des zu messenden Mittels vor und beobachten nun, daß der horizontal liegende achromatische Streifen eine bestimmte Versetzung erfahren hat, die wir dadurch auszahlen, daß wir bei einfarbigem Lichte die eine Platte des Interferenzrefraktors mikrometrisch um eine horizontale Achse drehen, bis wieder bei weißem Lichte der achromatische Streifen im Fadenkreuz einsteht. Um uns diese Auszählung zu erleichtern, können wir entweder den schon von Jamin selbst angegebenen Plattenkompensator (Ziff. 51) oder den Aragoschen Glaskeilkompensator (Ziff. 52) in den Strahlengang zwischen den beiden Spiegeln einschalten. Die so ermittelte Streifenzahl ist aber nicht die richtige. An ihr ist gemäß den von Siertsema[3]) gemachten Angaben eine Korrektion anzubringen, deren Ursache in der Verschiedenheit der Dispersion des zu untersuchenden Mittels von der des Vergleichskörpers (und der Glasplatten des Refraktors bzw. Kompensators) zu suchen ist, wodurch der achromatische Streifen im Interferenzstreifensystem an anderer Stelle auftritt denn bei gleicher Dispersion. Je größer der Gangunterschied der beiden Büschel

[1]) J. Jamin, C. R. Bd. 43, S. 1191—1194. 1856; Pogg. Ann. Bd. 100, S. 478—479. 1857.

[2]) J. Jamin, Ann. chim. phys. (3) Bd. 52, S. 163—171. 171—188. 1858; E. Ketteler, Pogg. Ann. Bd. 124, S. 390—406. 1865; Theoretische Optik, S. 471—485. Braunschweig: Fr. Vieweg u. Sohn 1885; L. Lorenz, Wied. Ann. Bd. 11, S. 70—103. 1880; Vidensk. Selsk. Skrifter (5. Reihe) Bd. 8, S. 205. 1869; Bd. 10, S. 485. 1875; K. Prytz, Wied. Ann. Bd. 11, S. 104—120. 1880; G. Quincke, ebenda Bd. 19, S. 401—435. 1883; Bd. 44, S. 774—777. 1891; L. Zehnder, ebenda Bd. 34, S. 91—121. 1888; W. C. Röntgen u. L. Zehnder, ebenda Bd. 44, S. 24—51. 1891.

[3]) L. H. Siertsema, Dissert. Groningen 1890; Beibl. d. Ann. Bd. 14, S. 801. 1890; W. Hallwachs, Gött. Nachr. 1892, Nr. 9; Wied. Ann. Bd. 47, S. 380—398. 1892. L. Stuckert, ZS. f. Elektrochem. Bd. 16, S. 45—57. 1910.

ist, desto größer ist diese Verschiebung des achromatischen Streifens, der also in einer bestimmten Richtung über das Fransensystem wegwandert, wobei er von einem schwarzen über einen weißen wieder in einen schwarzen achromatischen Streifen usf. übergeht. Im allgemeinen liegt die Verschiebung des achromatischen Streifens gegenüber seiner Nullage in Richtung der für das zu untersuchende Mittel auftretenden Streifenwanderung. Sie wird in dieser Wanderungsrichtung oder entgegengesetzt liegen, je nachdem die Dispersion des untersuchten Mittels größer oder kleiner als die Dispersion des Vergleichsmittels ist. Diese Verschiebung des achromatischen Streifens ist die an dem Auszählungsergebnis anzubringende Korrektion, die abzuziehen oder zuzuzählen ist, je nachdem die Verschiebung in oder entgegen der Streifenwanderungsrichtung erfolgt. Den tatsächlichen Wert dieser Korrektion müssen wir durch Hilfsversuche ermitteln. Wir gehen aus von der Null-Lage des farblosen Streifens bei in beiden Strahlenbüscheln eingeschaltetem gleichem Vergleichskörper. Da es sich bei diesen Messungen um solche an Gasen oder Lösungen handelt, wird der Vergleichskörper demnach Luft oder das Lösungsmittel sein. Wir ändern auf der Seite des zu untersuchenden Körpers die Verhältnisse in ganz geringen Abstufungen nach der festzustellenden Größe hin und beobachten, um wieviele einfarbige Streifen das System gewandert ist, wenn der achromatische Streifen gerade von schwarz über weiß wieder in schwarz übergegangen ist. Dies wird dann der Fall sein, wenn der achromatische Streifen gerade eine Eigenwanderung um *eine* Streifenbreite ausgeführt hat. Indem wir langsam so weiter vorgehen, ermitteln wir die zu jeder beobachteten Streifenverschiebung des ganzen Systems gehörige als Korrektion anzubringende Eigenwanderung des farblosen Streifens, deren Richtung und damit Vorzeichen die Beobachtung mitliefert. Bruchteile einer Streifenbreite, um die der achromatische Streifen wandert, bedingen keinen Wechsel der Nullmarke und erfordern also auch keine Korrektion, die somit nur in *ganzen* Streifenbreiten stattfindet.

Bezüglich des Aufbaues des Jaminschen Interferenzrefraktors ist zu sagen, daß er auf sehr stabilem, erschütterungsfreiem Unterbau ruhen muß, und daß die Platten und sonstigen die Interferenzstreifen bedingenden Teile und das Beobachtungsfernrohr so sicher eingebaut sein müssen, daß keine die Lage der Interferenzen beeinflussenden Änderungen ohne den Willen des Beobachters von selbst vor sich gehen können. Die Streifengüte ist sehr stark abhängig von Temperaturschwankungen und Luftschlieren. Um ein durch diese bewirktes Zittern der Streifen zu vermeiden, wird der Refraktor temperaturkonstant und geschützt gegen Luftströmungen eingebaut.

Beachten wir alle Vorsichtsmaßregeln, so können wir mit dem Jaminschen Interferenzrefraktor eine Meßgenauigkeit von einigen Einheiten in der siebenten Dezimale erzielen.

50. Die Interferenzrefraktoren von Zehnder und Mach. Um beim Jaminschen Refraktor für die beiden interferierenden Büschel S_1 und S_2 einen größeren Abstand zu bekommen, was für die meisten Anwendungen eine bequemer zu bauende und zu handhabende Anordnung der Träger der zu vergleichenden optischen Mittel zur Folge hat, ist die Zuhilfenahme von zwei Spiegeln von Vorteil, die zu gleicher Zeit von Zehnder und Mach durchgeführt wurde.

Die Anordnung der Spiegel Sp_1 und Sp_2 aus schwarzem Glase nach Zehnder[1]) ist aus der Abb. 67 zu ersehen. P_1 und P_2 sind die beiden Jaminschen Platten, die jetzt aber nicht versilbert sind. Zur Interferenz gelangen die beiden Strahlen S_1 und S_2. Daneben laufen aber noch andere interferenzfähige, durch Reflexion

[1]) L. Zehnder, ZS. f. Instrkde. Bd. 11, S. 275—285. 1891.

an der Rückfläche der Platten auftretende Strahlen (in Abb. 67 gestrichelt), die unbedingt abgeblendet werden müssen, weil sie sonst störend wirken.

Diese störenden Spiegelbilder können aber vermieden werden, wodurch gleichzeitig auch ein größeres Gesichtsfeld erreicht wird, wenn wir die MACHsche Anordnung (Abb. 68) benutzen. MACH[1]) ersetzt die beiden JAMINschen Platten P_1 und P_2 durch planparallele Luftschichten $L_1 L_2$, die genau gleich (und zwar nur etwa 0,001 mm) dick und zwischen zwei geeignet vorgerichteten Glaskörpern eingeschlossen sind. Das Licht fällt nahe unter dem Winkel der totalen Reflexion ein, weshalb die beiden Strahlenbündel S_1 und S_2 nahezu gleiche Intensität besitzen. Die Hilfsspiegel Sp_1 und Sp_2 sind wieder aus schwarzem Glase.

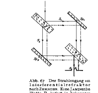


Abb. 67. Der Strahlengang im Interferentialrefraktor nach ZEHNDER. Eine JAMINsche Platte P_1 liefert in bekannter Weise zwei interferenzfähige Strahlen S_1 und S_2, die, damit sie wieder zusammenkommen, durch zwei vorderflächenversilberte Spiegel Sp_1 und Sp_2 im rechten Winkel geknickt und durch eine zweite JAMINsche Platte P_2 zur Interferenz gebracht werden. Der Vorteil dieser Anordnung ist der, daß in den Gang der Teilstrahlen die zu vergleichenden optischen Mittel in größeren seitlichen Ausmaßen gebracht werden können.

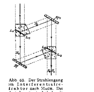


Abb. 68. Der Strahlengang im Interferentialrefraktor nach MACH. Die Anordnung ist ähnlich wie beim ZEHNDERschen Interferentialrefraktor (Abb. 67). Der Hauptunterschied ist der, daß die JAMINschen Glasplatten P_1 und P_2 durch Luftplatten $L_1 L_2$ ersetzt sind, die zwischen zwei besonders gestalteten prismatischen Glaskörpern liegen.

51. Die Plattenkompensator von JAMIN. Zwei gleich große Glasplatten G_1 und G_2 (Abb. 69) werden aus einer guten Planparallelplatte aus optisch einwandfreiem Glase herausgeschnitten. Nach JAMIN[2]) werden diese auf der Drehachse eines Teilkreises nebeneinander befestigt, so daß sie einen kleinen Winkel 2ε miteinander bilden. Wird beim Einbau zwischen den beiden JAMINschen Platten im Interferenzrefraktor die Platte G_1 vom Strahlenbündel S_1, die Platte G_2 vom Bündel S_2 durchsetzt, so weisen diese Strahlen hernach,

[1]) L. MACH, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 89. 1892; Wiener Ber. (IIa) Bd. 101, S. 5. 1892; Bd. 102, S. 1035. 1893; Bd. 106, S. 34. 1897; Bd. 107, S. 851. 1898.

[2]) J. JAMIN, Ann. chim. phys. (3) Bd. 52, S. 163—171. 1858; G. QUINCKE, Pogg. Ann. Bd. 132, S. 29—75, 204—224. 1867.

je nach der Stellung (Neigung) der betreffenden Platte zur Strahlenrichtung, bestimmte Gangunterschiede auf. Sind die beiden Platten G_1 und G_2 zur Strahlenrichtung gleich, wenn auch entgegengesetzt, geneigt, d. h. ist ihr Einfallswinkel ε, so durchsetzen S_1 und S_2 gleiche Glasdicken und erleiden demzufolge gleiche Verzögerung. Drehen wir die Achse in einer bestimmten Richtung (z. B. im Uhrzeigersinn) um einen gewissen Winkel, so durchsetzt der eine Strahl (S_2) seine Platte in anderer Richtung und kleinerer Dicke als der zweite Strahl (S_1) die seine. Die beiden Strahlen werden also einen Gangunterschied aufweisen, und die im Gesichtsfelde des Jaminschen Refraktors sichtbaren Interferenzfransen werden deshalb bei einer Drehung dieses Kompensators kontinuierlich zu wandern beginnen. Wir sind somit dadurch in den Stand gesetzt, bei feststehenden Jaminschen Platten jede gewünschte Streifenverschiebung im Gesichtsfelde meßbar vorzunehmen. Dazu eichen wir uns den Teilkreis des Kompensators unmittelbar in Streifenbreiten, indem wir bei Verwendung einfarbigen Lichtes, von der Null-Lage des Kompensators (der Symmetriestellung) ausgehend, die Streifen abzählen, die am Fadenkreuz vorbeiwandern, wenn wir den Kompensator aufeinanderfolgend um bestimmte kleine Winkel weiterdrehen. Die Eichkurve zeigt, daß mit wachsendem Drehungswinkel der Kompensatorwert in Streifenbreiten beschleunigt wächst.



Abb. 69 Der Plattenkompensator nach Jamin besteht aus zwei Platten G_1 und G_2 gleicher Dicke, die auf einer gemeinsamen Achse nebeneinander, in festem, unveränderlichem Winkel zueinander geneigt, angebracht sind. Wir bringen diese beiden Platten in den Strahlengang des Jaminschen Interferentialrefraktors (Abb. 66), so daß der Strahl S_1 die Kompensatorplatte G_1, der Strahl S_2 die Platte G_2 durchsetzt. Nur in symmetrischer Stellung der beiden Kompensatorplatten werden gleiche Glasdicken durchsetzt. Wird der Kompensator etwas gedreht, so werden ungleiche, aber leicht bestimmbare Glasdicken von den beiden Strahlen durchsetzt, weshalb durch Drehung des Kompensators den beiden interferierenden Strahlen S_1 und S_2 ein genau bekannter Gangunterschied erteilt werden kann.

52. Der Keilkompensator nach Arago. Nach einer Mitteilung von Arago[1]) können wir mit einem Babinetschen Kompensator, dessen Keile aus Glas hergestellt sind (Abb. 70), und den wir dem einen Strahlenbündel des Interferenzrefraktors in den Weg stellen, jeden gewünschten Gangunterschied herstellen, wenn wir den einen Keil K_2 längs des feststehenden Keils K_1 meßbar entlanggleiten lassen, wodurch eine meßbar veränderliche Glasdicke gewonnen wird. Das andere Strahlenbündel durchsetzt gleichzeitig eine planparallele Platte P aus



Abb. 70. Der Keilkompensator nach Arago besteht aus einem Doppelkeil K_1 und K_2, der in den Gang von S_1, und einer Parallelplatte P, die als Kompensation in den Gang von S_2 im Jaminschen Interferentialrefraktor eingeschaltet wird. Durch Verschieben des Keils K_2 wird dem Strahl S_1 ein bekannter Gangunterschied gegenüber dem Strahle S_2 erteilt.

[1]) D. F. J. Arago, C. R. Bd. 10, S. 813. 1840; J. Wallot, Ann. d. Phys. (4) Bd. 11, S. 355—396. 1903.

dem gleichen Glase wie die Keile und von einer Dicke, die gleich der Dicke der beiden Keile zusammen in einer mittleren Stellung ist, so daß beliebige Gangunterschiede, die je nach Notwendigkeit Streifenverschiebungen nach beiden Seiten vom Nullpunkt aus verursachen, eingestellt werden können. Die gleichmäßige Teilung des Verschiebungsmechanismus wird durch Versuch in Streifenbreiten des benutzten einfarbigen Lichtes geeicht. Die Eichkurve ist eine gerade Linie.

53. Die Brechzahlmessung von Flüssigkeiten am Interferenzrefraktor. Die Verfahren von Borgesius und Wallot. Die Flüssigkeiten, meist Lösungen im Vergleich mit ihrem Lösungsmittel, werden in gleich lange Röhren gefüllt, die durch parallele Glasplatten abgeschlossen werden.

Werden Messungen ein und derselben Flüssigkeit unter verschiedenen Drucken ausgeführt, so bauen wir nach Jamin, um die durch Druckerhöhung in der einen Röhre unter Umständen eintretende Rohrverlangerung zu kompensieren, beide Röhren in einen planparallelen Trog ein, der mit der gleichen Flüssigkeit gefüllt ist[1]. Auch Beobachtungen bei stetiger Temperaturänderung können vorgenommen werden. Um mit Hilfe dieser Messungen bei verschiedenen Drucken bzw. verschiedenen Temperaturen die Brechzahl der untersuchten Flüssigkeit im Normalzustand aufzusuchen, benutzen wir den Satz von der Konstanz des Brechungsvermögens, der nach Lorenz[2] für Flüssigkeiten am besten durch die Formel

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d} = \text{konst.} \tag{97}$$

wiedergegeben wird. Bekannt muß uns dabei die Abhängigkeit der Dichte der untersuchten Flüssigkeit von Druck und Temperatur sein.

Wollen wir Lösungen interferometrisch mit ihren Lösungsmitteln vergleichen, so müssen wir, weil hierbei keine stetigen Änderungen vorliegen, bei gewöhnlicher Anordnung im weißen Lichte beobachten. Dies hat aber zur Folge, daß wir die umständlichen und umfangreichen Hilfsbeobachtungen über die Eigenwanderung des achromatischen Streifens (Ziff. 49) machen müssen. Borgesius[3] hat deshalb eine Methode ausgearbeitet, bei der die Wanderung der Streifen eine kontinuierliche ist, so daß wir im einfarbigen Lichte beobachten können.

In einem größeren Gefäß G mit planparalleler Bodenplatte P (Abb. 71) befindet sich eine Flüssigkeit von bekannter Brechzahl n_0, z. B. das Lösungsmittel. In diese Flüssigkeit tauchen zwei kleinere Tröge T_1 und T_2, die gleich dicke, ebenfalls planparallele Bodenplatten P_1 und P_2 besitzen. Die beiden Tröge sind mit der zu untersuchenden Flüssigkeit n (Lösung) gefüllt, die durch einen die kommunizierende Verbindung herstellenden Heber H in beiden Trögen dauernd auf gleicher Höhe gehalten wird. Der obere Abschluß der Tröge erfolgt durch zwei weitere planparallele, gleich dicke Platten P_3 und P_4, die am Grundgestell in fester Lage unabhängig von den Trögen anmontiert sind. Sämtliche Platten können durch vorgesehene Justierschrauben genau parallel zu einander ausgerichtet werden. Das Wesentliche ist nun der die beiden Tröge bewegende Mechanismus, der so eingerichtet ist, daß bei seiner Betätigung z. B. der Trog T_1 eine an einer Teilung ablesbare Hebung l nach P_1' erfährt, während gleichzeitig die Platte P_2 um die gleiche Strecke nach P_2' gesenkt wird (Abb. 71). Haben wir ein solches

[1] J. Jamin, E. Ketteler, L. Zehnder, G. Quincke, W. C. Röntgen, l. c. Fußnote 2, Ziff. 49.
[2] L. Lorenz u. K. Prytz, l. c. Fußnote 2, Ziff. 49.
[3] A. H. Borgesius, Wied. Ann. Bd. 54, S. 222—243. 1898.

Gefäß in den Strahlengang eines lotrecht stehenden JAMINschen Interferenzrefraktors eingeschaltet, so werden wir, wenn diese Bewegung nur langsam genug erfolgt, eine auszählbare Streifenwanderung beobachten, die ihre Ursache in der Änderung der beiderseitigen optischen Weglängen hat. Sind die Strecken in den Flüssigkeiten bei Beginn der Messung (Abb. 71) links a_0 und a_1, rechts b_0 und b_1, so sind sie nach einer Verschiebung der Troge um l: links $(a_0 + l)$ und $(a_1 - l)$, rechts $(b_0 - l)$ und $(b_1 + l)$. Der bei Beginn des Versuchs durch die Flüssigkeiten bedingte Gangunterschied der beiden interferierenden Strahlen S_1 und S_2 ist somit

$$\Delta w_0 = (n_0 \cdot a_0 + n \cdot a_1) - (n_0 \cdot b_0 + n \cdot b_1) = n_0 \cdot (a_0 - b_0) + n \cdot (a_1 - b_1) \tag{98}$$

während sie nach der vorgenommenen Verschiebung

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= [n_0 \cdot (a_0 + l) + n \cdot (a_1 - l)] - [n_0 \cdot (b_0 - l) + n \cdot (b_1 + l)] \\ &= \Delta w_0 - 2 \cdot l \cdot (n - n_0) \end{aligned} \tag{99}$$

beträgt. Der für die beobachtete Wanderung der Interferenzfransen um z Streifenbreiten maßgebende Gangunterschied Δw ist mithin

$$z \cdot \lambda = \Delta w_0 - \Delta w_1 = 2 \cdot l \cdot (n - n_0),$$

woraus wir als Bestimmungsgleichung für die gesuchte Brechzahldifferenz $\Delta n = (n - n_0)$ die Formel

$$\Delta n = \frac{z \cdot \lambda}{2 \cdot l} \tag{100}$$

erhalten. Die mit diesem BORGESIUSschen Verfahren zu erzielende Meßgenauigkeit läßt sich aus der Fehlergleichung berechnen und beträgt einige Einheiten der sechsten Dezimale.

Eine wesentlich geringere Meßgenauigkeit läßt sich nur erreichen bei dem von WALLOT[1]) angewandten Verfahren, der, einem Vorschlage von ZEHNDER folgend, den ARAGOschen Doppelkeilkompensator in die zu untersuchende Flüssigkeit hineinragen läßt (Abb. 72), so daß einer der interferierenden Strahlen des JAMINschen Interferenzrefraktors hintereinander die Flüssigkeit, den Kompensator und wieder die Flüssigkeit durchsetzt, während der zweite Strahl anstatt durch den Kompensator durch eine einer mittleren Dicke des Keilpaares entsprechende Glasplatte geht. Der bewegliche Keil K_2 des Kompensators wird genau längs seiner Keilfläche AB meßbar mikrometrisch verschoben, wobei die Teilung in Streifenbreiten geeicht ist. Verschieben wir den Keil K_2 aus der Null-Lage um die Strecke l mm, so verdrängt er von der Flüssigkeit eine d mm dicke Schicht und ersetzt diese durch eine gleichdicke Glasschicht. Die dadurch bei Beobachtung im einfarbigen Lichte (λ) bewirkte Streifenwanderung betrage z Streifenbreiten. Ist der Winkel der Keile, der nur ein sehr kleiner Winkel sein darf, gleich φ und sind die Brechzahlen des Keilglases n_0 und der Flüssigkeit n, so ist der die Streifenwanderung bedingende Gangunterschied

$$z \cdot \lambda = n_0 \cdot d - n \cdot d$$

oder

$$z \cdot \lambda = (n_0 - n) \cdot l \cdot \sin\varphi, \tag{101}$$

woraus wir als Gleichung für die gesuchte Brechzahl

$$n = n_0 - \frac{z \cdot \lambda}{d} = n_0 - \frac{z \cdot \lambda}{l \cdot \sin\varphi} \tag{102}$$

erhalten. Dabei sind die Vorzeichen von z und l zu berücksichtigen, wie sie sich

[1]) J. WALLOT, Ann. d. Phys. (4) Bd. 11, S. 355—396. 1903.

aus der Beobachtung ergeben. Für die Beobachtungsgenauigkeit bekommen wir daraus die Fehlergleichung

$$\Delta n = \frac{\lambda}{d} \cdot \Delta z = \frac{\lambda \cdot \Delta z}{l \cdot \sin\varphi}, \tag{103}$$

die uns erkennen läßt, daß mit steigender Verschiebung l des Keils der Fehler geradlinig kleiner wird. Über eine gewisse Verschiebung werden wir aber wegen der mit zunehmender Dicke der durchstrahlten Schicht abnehmenden Interferenzfähigkeit des verwendeten Lichtes (z. B. der D-Linien) nicht hinauskönnen. Für eine eine Schichtdicke $d = 0{,}1$ mm verursachende Keilverschiebung und bei einer Zählgenauigkeit von $\Delta z = 0{,}1$ Streifenbreiten ist bei Verwendung von Natriumlicht die Meßgenauigkeit $\Delta n = 6$ Einheiten der vierten Dezimale, bleibt also ganz erheblich hinter den viel einfacheren Methoden der Totalreflexion zurück.

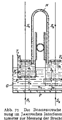


Abb. 71. Die Borgesiussche Anordnung im Jaminschen Interferenzrefraktometer zur Messung der Brechzahl von Flüssigkeiten. Das Refraktometer ist so aufgestellt, daß die beiden parallelen Strahlen in genügendem Abstand voneinander lotrecht verlaufen. In diesen Strahlengang wird ein mit der Flüssigkeit n_0 gefüllter Trog G eingeschaltet, in dem sich zwei mit der zu messenden Flüssigkeit n gefüllte kleinere Tröge T_1 und T_2 befinden, deren Böden P_1 und P_2 durch einen einfachen Mechanismus gleichzeitig um gleiche Strecken l in entgegengesetzter Richtung bewegt werden können, und die infolge der Verbindung durch den Heber H stets gleich hoch gefüllt bleiben. Dadurch wird ein sich stetig ändernder Gangunterschied zwischen S_1 und S_2 bedingt, der eine auszählbare Streifenverschiebung z hervorruft. Es ist

$$n - n_0 = \frac{z \cdot \lambda}{2 \cdot l}.$$

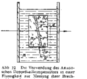


Abb. 72. Die Verwendung des Aragoschen Doppelkeilkompensators in einer Flüssigkeit zur Messung ihrer Brechzahl n im Jaminschen Interferenzrefraktometer. Durch Verschieben des Keils K_2 mit dem Keilwinkel φ und der Brechzahl n_0 längs der Fläche AB um die Strecke l wird eine Flüssigkeitsschicht von der Dicke d verdrängt. Das Streifensystem des Jaminschen Interferenzrefraktors erfährt dabei eine Verschiebung um z Streifenbreiten, weshalb die gesuchte Brechzahl gegeben ist durch

$$n = n_0 - \frac{z \cdot \lambda}{d},$$

wobei $d = l \cdot \sin\varphi$ und λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist.

54. Die Brechzahlmessung von Gasen am Interferenzrefraktor. Zur Messung werden die Gase in ähnliche Röhren wie die Flüssigkeiten gefüllt. Die Brechzahl können wir auch hier wie beim Hohlprisma (Ziff. 29 bis 31) auf zwei Wegen ermitteln, indem wir das Gas entweder mit Luft oder mit sich selbst bei ver-

schiedenen Drucken oder verschiedenen Temperaturen vergleichen. In den letzteren Fällen muß zur Errechnung der Brechzahl im Normalzustand die LORENZsche Formel in Anwendung kommen, die für Gase auch in der in Ziff. 29 angegebenen, von LANDOLT herrührenden, vereinfachten Form (68) bezw. (69) Gültigkeit hat.

55. Eine Interferenzmethode mit Hilfe von TALBOTschen Streifen nach MASCART. Um zwei interferenzfähige Strahlenbündel herzustellen, geht MASCART[1]) folgendermaßen vor. Das aus dem Objektiv des Spaltrohres eines Spektrographen austretende parallele Lichtstrahlenbündel wird (Abb. 73) durch eine FIZEAUsche Doppelplatte F_1 in zwei gleiche Lichtbündel geteilt, die zwar unter sich parallel bleiben, die aber einen größeren Abstand voneinander besitzen. Diese beiden Bündel durchsetzen getrennt zwei durch parallele Planplatten abgeschlossene Röhren, in denen sich bei der Messung die zu vergleichenden Gase oder Flüssigkeiten befinden. Danach werden die beiden Bündel wieder durch eine entgegengesetzt wirkende FIZEAUsche Doppelplatte F_2 zusammengebracht. Im weiteren Verlauf wird das Strahlenbündel durch ein Prisma P zerstreut, weshalb wir im Beobachtungsfernrohr ein reines Spektrum beobachten, das sich von den üblichen Spektren zunächst nicht unterscheidet, solange die FIZEAUschen Doppelplatten aus einer Planparallelplatte hergestellt und so justiert sind, daß kein Gangunterschied zwischen den Strahlenbündeln S_1 und S_2 entsteht. Liegt ein Gangunterschied vor, und zwar derart, daß die stärkere Verzögerung bei dem der brechenden Kante des zerstreuenden Prismas P am nächsten liegenden Strahlenbündel S_1 statthat, was wir z. B. dadurch erreichen können, daß wir eine der FIZEAUschen Doppelplatten etwas verdrehen, dann beobachten wir im Spektrum die sog. TALBOTschen Streifen[2]), d. h. das Spektrum ist durchzogen von in gewissen Abständen auftretenden dunklen Interferenzfransen, die an den Orten der Wellenlängen liegen, für die der Gangunterschied gerade ein ungerades Vielfaches der betreffenden Wellenlänge ist. Bringen wir nun in die beiden gleich langen Röhren von der Länge R das zu untersuchende optische Mittel unter den gleichen



Abb. 73. Die MASCARTsche Anordnung zur Brechzahlmessung mit Hilfe von TALBOTschen Streifen. Die aus dem Spaltkollimator austretenden Parallelstrahlen werden durch eine FIZEAUsche Doppelplatte F_1 in zwei gegeneinander parallel versetzte Strahlenbündel zerlegt, in deren Gang die zu vergleichenden Stoffe in Röhren (R_1 und R_2) eingeschaltet werden. Nach dem Durchtritt durch diese bringt eine der ersten gleichartige, aber entgegengesetzt wirkende FIZEAUsche Doppelplatte F_2 die Strahlenbündel wieder zusammen, die darauf ein Spektrographenprisma P durchsetzen, um im Beobachtungsfernrohr ein Spektrum zu entwerfen, das, wenn ein Gangunterschied in den beiden Bündeln vorhanden ist, von TALBOTschen Streifen überlagert wird, die bei einer einseitigen Brechzahländerung (z. B. in R_2) eine entsprechende Verschiebung erfahren. Wandern z TALBOTsche Streifen am Fadenkreuz vorbei, so ist die

$$\text{Brechzahländerung } \Delta n = \frac{z \cdot \lambda}{R}.$$

[1]) E. E. N. MASCART, C. R. Bd. 78, S. 617–621, 679–682, 801–805. 1874.

[2]) H. F. TALBOT, Phil. Mag. (3) Bd. 10, S. 364. 1837; Pogg. Ann. Bd. 42, S. 224. 1837; G. B. AIRY, ebenda Bd. 53, S. 459–479, 572–589. 1841; Bd. 58, S. 535–549. 1843; O. LUMMER, Die Lehre von der strahlenden Energie. Müller-Pouillets Lehrb. d. Physik Bd. II, 3. Buch, S. 967–969. 1909.

Druck- und Temperaturverhältnissen, so ändert sich die Lage der Streifen nicht. Verursachen wir aber durch eine Zustandsänderung in der Röhre R_1, daß sich die ursprüngliche Brechzahl n in n' ändert, so ändert sich damit der dem Strahl S_1 zuteil werdende Gangunterschied, die TALBOTschen Streifen wandern, und zwar wandern sie dem roten Ende des Spektrums zu, wenn die Brechzahl $n' > n$, dem blauen Ende zu, wenn $n' < n$ wird. Haben wir das Fadenkreuz bei Beginn des Versuchs auf einen TALBOTschen Streifen, dessen Wellenlänge wir kennen, eingestellt, so zählen wir jetzt die am Kreuz vorbeiwandernden TALBOTschen Streifen aus. Finden wir, daß z Streifen vorbeigewandert sind, so gilt für den die Wanderung bedingenden Gangunterschied

$$z \cdot \lambda = R \cdot (n - n'), \tag{104}$$

wobei $z \gtrless 0$ zu nehmen ist, je nachdem die Wanderung nach dem blauen oder roten Ende des Spektrums zu erfolgt. Die Meßgenauigkeit beträgt einige Einheiten der siebenten Dezimale.

Das Verfahren kann für Messungen der Dispersion von Gasen[1]) Anwendung finden. Dabei wird neben der in obiger Art für eine Bezugslinie λ_0 durchgeführten Beobachtung noch eine zweite vorgenommen, indem wir vor und nach der Brechzahländerung die Zahl der TALBOTschen Streifen feststellen, die zwischen der Bezugslinie λ_0 und der zweiten gewünschten Linie λ liegen. Ist die Differenz zwischen diesen beiden Auszählungen m, erfolgten die beiden Beobachtungen bei den Drucken p_1 und p_2 und sind beim Drucke p_2 die Brechzahlen für die beiden Linien n_0' bzw. n_1', so gilt für die Dispersion die Gleichung:

$$\frac{n_1' - n_0'}{n_0' - 1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot \left(1 + \frac{\frac{m}{p_2 - p_1}}{\frac{z}{p_2 - p_1}}\right) - 1. \tag{105}$$

56. Das Interferometer nach RAYLEIGH. Während JAMIN die BREWSTERschen und MASCART die TALBOTschen Streifen bei ihren Interferometern zur Brechzahlmessung zu Hilfe nehmen, benutzt RAYLEIGH[2]) die einfache FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung. Ein mit weißem Lichte beleuchteter Spalt s befindet sich im Brennpunkte eines Objektivs O_1 (Abb. 74). Das austretende Bündel von Parallelstrahlen tritt nach einem längeren Wege in Luft wieder in ein zweites Objektiv O_2 ein und wird in dessen Brennpunkt zu einem Spaltbild vereinigt. Bringen wir nun eine Blende mit zwei



Abb. 74. Die RAYLEIGHsche Anordnung. — a) Ansicht von der Seite. — b) Ansicht von oben. — Das aus dem Spaltrohr austretende Parallelstrahlenbündel wird in zwei Hälften geteilt dadurch, daß in der unteren Hälfte die zur Aufnahme der zu vergleichenden Stoffe bestimmten Kammern G und L eingeschaltet werden. Vor dem Objektiv O_2 des Beobachtungsrohres ist eine Spalt-Doppelblende (s_1 und s_2) angebracht, die verursacht, daß im Brennpunkt von O_2 eine FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung entsteht, die aus zwei übereinander stehenden gleichartigen Streifensystemen besteht. Das obere dient als Nullmarke, gegen die die Wanderung des unteren Streifensystems, welche eintritt, wenn in G oder L eine Brechzahländerung eintritt, bestimmt wird. Beobachtet wird mit Hilfe eines Zylinderokulars Ok, das das Streifensystem zwar auseinanderzieht, aber die Höhe unverändert läßt.

[1]) Das Nähere darüber bei E. E. N. MASCART, C. R. Bd. 78, S. 679–682. 1874.

[2]) Lord RAYLEIGH, Proc. Roy. Soc. London Bd. 59, S. 203. 1896; M. W. TRAVERS, Experimentelle Untersuchungen von Gasen, S. 332–337. Braunschweig: Fr. Vieweg u. Sohn 1905.

parallelen Spalten, jeder 4 mm breit und beide um etwa den halben Objektivdurchmesser voneinander entfernt, parallel zum Spalt s in symmetrischer Lage vor das Objektiv O_2, so erhalten wir im Brennpunkt nicht mehr ein einfaches Spaltbild, sondern eine FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung. Um ein helles Spaltbild nullter Ordnung sind seitlich nach links und rechts die Beugungsbilder verteilt. Dem hellen Spaltbild zunächst liegen zwei schwarze Streifen, die nach der Seite der sich anschließenden Beugungsbilder erster Ordnung schwach farbige Ränder besitzen. Darauf folgen wieder dunkle Streifen, die aber bereits nicht mehr so rein schwarz sind wie die erstgenannten schwarzen Streifen, sondern bereits infolge der Beugungsfarben des vorangehenden ersten und des weiter nachfolgenden zweiten Beugungsbildes stark farbig umsäumt sind. Daran reihen sich weiter an die Beugungsbilder höherer Ordnung. Da der Abstand der beiden schwarzen Streifen nur etwa einige hundertstel Millimeter beträgt, müssen wir die Erscheinung zwecks besserer Einstellungsgenauigkeit mit einem stark vergrößernden Okular *Ok* betrachten. Ein gewöhnliches sphärisches Okular hat aber den Nachteil, daß dann nicht nur die Beugungsbilder weiter auseinander gelegt werden, sondern daß auch die Höhe des Beugungsbildes vergrößert wird, wodurch die Helligkeit der Interferenzerscheinung ganz außerordentlich herabgedrückt wird. Um dies zu vermeiden, benutzen wir mit RAYLEIGH eine Zylinderlinse *Ok*, deren Achse parallel zu den Spalten s, s_1 und s_2 steht, wodurch nur der Abstand und die Breite der Streifen, aber nicht deren Höhe vergrößert wird.

Rufen wir nun in dem Gang eines der den beiden Spalten s_1 bzw. s_2 entsprechenden Bündel eine kleine Verzögerung hervor, so beobachten wir dadurch im Gesichtsfelde eine Wanderung des Beugungsbildes. Die Größe dieser Wanderung ist ein Maß für den sie bedingenden Gangunterschied. Ein Fadenkreuz im Brennpunkt ist aber als Fixpunkt für die Messung dieser Wanderung nicht brauchbar, weil die Zylinderlinse den zu ihrer Achse parallelen Faden nicht sichtbar werden läßt. Die zur messenden Beobachtung notwendige Einstellmarke erreichen wir hier auf andere Weise. Wir teilen das Lichtbündel senkrecht zur Spaltrichtung in zwei Hälften, eine obere und untere, und schalten nur bei der unteren Hälfte die zu vergleichenden optischen Mittel (RAYLEIGH untersucht nur Gase) in ihren Röhren in den Gang der den beiden Spalten entsprechenden Strahlenbündel ein. Sind die Röhren zunächst nur mit Luft gefüllt und sind ihre Verschlußplatten genau gleich dick und planparallel, so rufen sie auf beiden Seiten gleiche Verzögerungen hervor. Das Beugungsbild der unteren Hälfte wird am gleichen Orte liegen wie das der oberen freien Hälfte. Im Gesichtsfeld haben wir die gleiche Erscheinung wie vorher, jetzt allerdings mit dem Unterschiede, daß die beiden Hälften durch eine durch die undurchsichtige Decke der Röhren bedingte schwarze Linie deutlich voneinander getrennt sind.

Füllen wir die eine Röhre, z. B. *G*, mit dem zu untersuchenden Gase, so erteilen wir dadurch dem Lichtbündel, das diese Kammer *G* durchsetzt, einen Gangunterschied gegenüber dem unverändert bleibenden Lichtbündel, das die Kammer *L* durchsetzt. Die Beugungserscheinung in der unteren Hälfte des Gesichtsfeldes wandert von dem unverändert feststehenden Bild der oberen Hälfte weg zur Seite.

RAYLEIGH und seine Nachfahren RAMSAY, TRAVERS und CUNAEUS[1]) kompensieren diese Wanderung dadurch, daß sie in dem untersuchten Gase den Druck so lange ändern, bis das weggewanderte Beugungsbildsystem, was be-

[1]) E. H. J. CUNAEUS, ZS. f. phys. Chem. Bd. 36, S. 232–238. 1901.

sonders gut an den mittleren schwarzen, nahezu farblosen Streifen zu erkennen ist, wieder mit dem feststehenden, das dabei also als Nullmarke dient, genau in Deckung ist. Ist dies der Fall, so wissen wir, daß die Brechungszahlen in *G* und *L* einander gleich sind. Die gesuchte Brechzahl bei normalem Druck läßt sich dann, wie schon früher (Ziff. 29 und 54) gezeigt, aus der Landoltschen Formel berechnen.

57. Das Interferometer für Chemiker nach Löwe. Das Arbeiten mit verschiedenen Drucken macht das Rayleighsche Verfahren für Zwecke der technischen Gasanalyse so gut wie untauglich. Löwe[1]) läßt deshalb vor dem Doppelspalt, nachdem die Lichtbündel die Gaskammern durchsetzt haben, diese in der unteren Hälfte durch die Glasplatten *Pg* und *Pl* eines dem Jaminschen ähnlichen Kompensators (Abb. 75) gehen. Die beiden Platten sind gleich dick und stehen

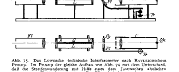


Abb. 75. Das Löwesche technische Interferometer nach Rayleighschem Prinzip. Im Prinzip der gleiche Aufbau wie Abb. 74 mit dem Unterschied, daß die Streifenwanderung mit Hilfe eines dem Jaminschen ähnlichen Plattenkompensators (*Pg*, *Pl*) aufgehoben wird.

unter einem spitzen Winkel geneigt zu den Verschlußplatten der Rohren *G* und *L*. Die hinter der Kammer *G* befindliche Platte *Pg* ist fest eingebaut, während die hinter der Kammer *L* befindliche Platte *Pl* mit Hilfe einer Hebelvorrichtung und Mikrometerschraube mit Trommelteilung meßbar um eine horizontale Achse gedreht wird, wodurch der durch diese Platte *Pl* verursachte Gangunterschied in jeder gewünschten bekannten Größe geändert werden kann. Vor Einfüllen der Versuchsprobe werden durch Drehen der Platte *Pl* die beiden Streifensysteme zur Deckung gebracht und so die Nullstellung der Kompensatorplatte *Pl* festgelegt. Den durch die in *G* eingefüllte Probe hervorgerufenen Gangunterschied, der sich in einer Streifenverschiebung äußert, heben wir dann dadurch auf, daß wir durch Drehen der Kompensatorplatte *Pl* auf der Seite der Kammer *L* (Vergleichsmittel) einen solchen Gangunterschied einführen, daß beide Streifensysteme sich wieder decken. Die Differenz der Trommelablesungen ist ein Maß für den aufgehobenen Gangunterschied. Im allgemeinen wird nun für technische Zwecke die Trommelteilung unmittelbar im Prozentgehalt der festzustellenden Gase oder Flüssigkeiten durch Vorversuche mit bekannten Mischungsverhältnissen bei feststehender 1 m-Rohrlänge geeicht[2]). Die Einstellgenauigkeit beträgt

[1]) F. Haber u. F. Löwe, ZS. f. angew. Chem. Bd. 23, S. 1392—1398. 1910; L. Stuckert, ZS. f. Elektrochem. Bd. 16, S. 43—45. 1910.

[2]) Eine ausführliche Beschreibung und Literaturzusammenstellung hinsichtlich der Anwendungsgebiete des Löweschen Interferometers ist zu finden in F. Löwe, Optische Messungen des Chemikers und des Mediziners. Technische Fortschrittsberichte Bd. 6, S. 137 bis 159. Dresden: Theodor Steinkopf 1925.

1 Teil der in 100 Teile geteilten Trommel. Bei einer 1 m betragenden Kammerlänge bedeutet dies in der Brechungszahl eine Meßgenauigkeit von drei Einheiten in der siebenten Dezimale. Dem entspricht z. B. bei CO_2-Bestimmungen in Luft eine Meßgenauigkeit von etwa $\pm 0{,}04\%$ CO_2.

Um mit diesem Interferometer die Brechungszahlen selbst zu bestimmen, müssen wir ähnlich vorgehen wie beim JAMINschen Interferenzrefraktor bei Beobachtung mit weißem Lichte. Wir eichen uns zunächst die Kompensatorplatte *Pl* durch Beobachtung in einfarbigem Lichte in Streifenbreiten der entsprechenden Wellenlänge. In diesem Falle erscheinen an Stelle des Beugungsbildes mit dem achromatischen Nullstreifen lauter einfarbige über das ganze Gesichtsfeld verteilte Interferenzstreifen, die über den gesamten Meßbereich des Kompensators sichtbar bleiben, wodurch wir in der Lage sind, den Wert eines Trommelteils in Streifenbreiten für die verschiedenen Trommelstellungen zu bestimmen[1]). Ausgehend von der Nullstellung drehen wir dann bei weißem Lichte und eingeschalteter Probe in *G* die Kompensatorplatte *Pl* so lange, bis das bewegliche Streifensystem mit dem feststehenden zur Deckung gebracht ist. Darauf beleuchten wir mit dem einfarbigen Eichlichte von der Wellenlänge λ und stellen für das System der einfarbigen Streifen genau ein. Die Trommelablesung gibt uns den durch die Einschaltung der Probe in *G* eingeführten Gangunterschied z in Streifenbreiten. Ist die Rohrlänge beider Kammern R und sind die Brechzahlen n_L bzw. n_G, so gilt die bekannte Gleichung

$$z \cdot \lambda = (n_G - n_L) \cdot R$$

zur Berechnung der unbekannten Brechzahl n_G. Bei dieser Beobachtung müssen wir darauf achten, daß auch hier an der gemessenen Streifenzahl z eine ganzzahlige Korrektion[2]) wegen der Eigenwanderung des achromatischen Streifens (vgl. Ziff. 49) angebracht werden muß, die ihre Ursache in der Verschiedenheit der Dispersionen von Vergleichsmittel und Kompensatorglas hat.

Um das Gerät kürzer und handlicher zu machen, hat LÖWE[3]) bei seinem Interferometer für Gase und Flüssigkeiten das Autokollimationsprinzip angewandt, indem er an Stelle des Objektivs O_2 (Abb. 74) einen Planspiegel setzte, wodurch die Kammerlänge auf die Hälfte (50 cm) bei gleicher Meßgenauigkeit vermindert werden konnte.

Die LÖWEschen Interferometer finden Anwendung bei der technischen und biologischen Analyse von Gasen und Flüssigkeiten, sowie in der Abwehrfermentforschung und zu serologischen Studien. Der Vorteil dieses RAYLEIGH-LÖWEschen Interferometers gegenüber den anderen interferometrischen Verfahren liegt in seiner ausgezeichneten Stabilität und großen Einfachheit.

d) Einige weniger gebräuchliche Verfahren.

58. Die Brechzahlmessung an einer Planparallelplatte nach DE CHAULNES. Um bei Planparallelschichten, sowohl von festen als auch von flüssigen Körpern, die Brechzahl zu ermitteln, schlägt DE CHAULNES[4]) folgendes Ver-

---

[1]) R. GANS u. M. BOSE, ZS. f. Instrkde. Bd. 36, S. 137—148. 1916; R. GANS, ebenda Bd. 39, S. 316. 1919; E. BERL u. K. ANDRESS, ZS. f. angew. Chem. Bd. 34, S. 370. 1921; F. LÖWE, Opt. Messungen d. Chem. u. d. Mediz. Techn. Fortschrittsber. Bd. 6, S. 142—145. Dresden: Theodor Steinkopf. 1925.

[2]) R. MARC, Chem.-Ztg. 1912, S. 537; R. GANS u. M. BOSE, l. c.

[3]) F. LÖWE, ZS. f. Instrkde. Bd. 30, S. 321—329. 1910; Phys. ZS. Bd. 9, S. 1047. 1910.

[4]) DUC DE CHAULNES, Mem. de l'Acad. des scienc. 1767, S. 431; Hist. de l'Acad. 1767, S. 164.

fahren vor, das später noch oft von verschiedenen anderen Verfassern[1]) benutzt wurde. Mit Hilfe eines Mikroskops, dessen Verschiebung in seiner optischen Achse mikrometrisch oder an einer Längsteilung mit größtmöglicher Genauigkeit gemessen werden kann, wird zunächst auf eine Dingmarke M (Abb. 76), z. B. auf einen Strich auf einem Objektträger eingestellt. Wir bringen zwischen Marke M und Mikroskop die zu untersuchende Planparallelplatte. Dadurch erscheint M höher gehoben nach M'. Um wieder ein scharfes Bild zu bekommen, müssen wir das Mikroskop um eine Strecke $MM' = l$ anheben, die gleich der Strecke AC ist. Ist d die Dicke der Platte, so ist $\operatorname{tg}\alpha = BD:(d - l)$ und $\operatorname{tg}\alpha' = BD/d$. Setzen wir nun voraus, daß die Winkel, und damit BD gegen d, sehr klein sind, so daß der Sinus der Winkel gleich der Tangente gesetzt werden kann, so bekommen wir für die gesuchte Brechzahl n der Platte die angenähert geltende Bestimmungsgleichung

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{d}{d - l}. \qquad (106)$$

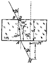


Abb. 76. Die Verschiebung $MM' = l$ des Dingortes M nach M' durch eine eingeschaltete planparallele Platte ist ein Maß für die Brechzahl n dieser Platte. Es ist angenähert $n = d:(d - l)$.

Das Verfahren ist sehr einfach. Es erfordert aber, wenn Genauigkeiten bis auf eine Einheit in der dritten Dezimale erzielt werden sollen, sehr dicke Platten (mindestens 10 mm). Mit der Dicke der Platte wird der Meßfehler kleiner.

59. Das Mikrorefraktometer nach Exner. Die Brechzahl eines optischen Mittels können wir, wie wir schon in Ziff. 23 und 39 gesehen haben, auch dadurch ermitteln, daß wir den zu untersuchenden Körper in eine Flüssigkeit einbetten, die die gleiche Brechzahl besitzt. Zu der Feststellung, wann Gleichheit der Brechzahlen von Körper und Einbettungsflüssigkeit vorliegt, benutzen wir nach Exner[2]) ein bei mikroskopischer Beobachtung des Körpers auftretendes Merkmal. Dabei schieben wir zwischen Mikroskopokular und Auge, das sich in etwa 2 bis 3 cm Abstand vom Okular befindet, an dem Ort der Austrittspupille $A.P.$ des Mikroskops (Abb. 77) eine Messerschneide S von Foucaultscher Art[3]) von einer Seite (in Abb. 77 von unten) her in den Gang der Lichtstrahlen bis gegen die optische Achse vor. Es werden dann die Strahlen abgeblendet, die, wie es den Anschein hat, von Punkten des Gegenstandes her-

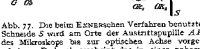


Abb. 77. Die beim Exnerschen Verfahren benutzte Schneide S wird am Orte der Austrittspupille AP des Mikroskops bis zur optischen Achse vorgeschoben. Dadurch erscheint das in einer nahezu gleichbrechenden Flüssigkeit eingebettete Ding G reliefartig mit scharfen Schatten und Lichtern, die sich ändern mit der sich ändernden Brechzahl der Flüssigkeit, und die beim Durchgange durch die Gleichheit der Brechzahlen von Flüssigkeit und Präparat von einer Seite auf die andere umschlagen.

[1]) G. Sabler, Pogg. Ann. Bd. 65, S. 80. 1845; G. Quincke, ebenda Bd. 132, S. 2. 1867; H. C. Sorby, Fortschr. d. Phys. Bd. 34, S. 380—381. 1878; L. Bleekrode, Wied. Ann. Bd. 8, S. 400—407. 1879; G. Stokes, Proc. Roy. Soc. London Bd. 26, S. 386. 1877; H. Hecht, N. Jahrb. f. Min. Bd. 6, Beil. S. 258. 1889.

[2]) S. Exner, Arch. f. mikroskop. Anat. Bd. 25, S. 97—112. 1885; Beibl. d. Ann. Bd. 9 S. 417. 1885.

[3]) Vergl. d. Bd. 18. Art. H. Kessler, Prüfung d. opt. Instr. Ziff. 121.

kommen, die auf der Seite des Schirmes liegen; in Wirklichkeit kann es auch umgekehrt sein, was ganz von der Größe der Brechzahl der Einbettungsflüssigkeit gegenüber der gesuchten abhängt. Das zunächst Wesentliche ist, daß wir den Körper beschattet sehen, er hebt sich reliefartig mit scharfen Schatten und Lichtern vom verdunkelten Grunde ab. Vergroßern wir die Brechzahl der Flüssigkeit, die zunächst niedriger brechend als der Untersuchungskörper sein soll, so wird mit der Annäherung an die Brechzahl des Körpers die Abschattung zwar weniger ausgesprochen, sie ist aber immer noch unverkennbar. Bei weitersteigender Brechzahl der Flüssigkeitsmischung verschwindet an einer gewissen Stelle die Abschattung, um dann bei noch weiter steigender Brechzahl auf die Gegenseite umzuspringen. Nach EXNER ist dieser Umsprung der Abschattung schon bei einer Änderung der Brechzahl um eine Einheit der vierten Dezimale ganz ausgeprägt und sicher zu beobachten. Da, wie durch einen geeigneten Versuch sich leicht ermitteln läßt, die Flüssigkeit immer dann höherbrechend ist, wenn die Abschattung auf der Seite des Schirmes liegt, niedrigerbrechend, wenn sie auf der entgegengesetzten Seite liegt, haben wir damit ein Kennzeichen an der Hand, um jederzeit die für die Änderung der Brechzahl der Flüssigkeit notwendige Richtung festzustellen.

Indem wir uns dem Umsprung der Abschattung einmal von der einen und darauf von der andern Seite nähern, schließen wir die gesuchte Brechzahl in zwei Grenzen ein, deren Mittelwert die gesuchte Brechzahl ergibt. Die Brechzahl der Einbettungsflüssigkeit wird jeweils mit dem PULFRICHschen (Ziff. 38) oder, wenn genügend, auch mit dem ABBEschen Refraktometer (Ziff. 40) ermittelt.

Das EXNERsche Verfahren können wir sowohl auf feste, wie flüssige Körper anwenden. Vorbedingung ist immer nur, daß die Körper durchsichtig sind. Bei Flüssigkeiten müssen wir Vorsicht üben in der Auswahl der Einbettungsflüssigkeiten; diese dürfen sich naturgemäß nicht mit der Untersuchungsflüssigkeit mischen. Das Verfahren ermöglicht auch das Auffinden der Brechungsvermögen von mikroskopischen anatomischen Präparaten, soweit sie durchsichtig sind.

II. Die Meßverfahren für die unsichtbaren Lichtwellengebiete.

60. Die Meßverfahren für das ultraviolette Gebiet. Die Messungen der Brechzahlen für die ultraviolette, besonders photochemisch sehr wirksame Strahlung können mit guter Genauigkeit nur photographisch durchgeführt werden, indem an die Stelle des Auges die photographische Platte tritt. Es kommen deshalb hierfür in der Hauptsache nur die am Prisma arbeitenden Verfahren mit feststehendem Prisma, also unveränderlichem Einfallswinkel in Frage, somit nur das Verfahren des senkrechten Eintritts nach MEYERSTEIN (Ziff. 15) und das des bekannten Einfallswinkels nach RYDBERG-MARTENS (Ziff. 17).

Das MEYERSTEINsche Verfahren wurde wohl zuerst von SIMON[1]) für das ultraviolette Gebiet in Anwendung gebracht. Nachdem der brechende Winkel in bekannter Weise gemessen ist, wird die Eintrittsfläche des Prismas senkrecht zur optischen Achse des Spaltrohrs justiert, und das als photographische Kammer ausgebildete Beobachtungsrohr so eingestellt, daß in der Brennebene des abbildenden Systems, die zugleich Plattenebene ist, das ganze Spektrum auf Plattenlänge vorhanden ist. Vor der Plattenebene befindet sich ein lotrechtstehender

[1]) H. TH. SIMON, Wied. Ann. Bd. 53, S. 541—558. 1894; H. TROMMSDORF: Die Dispersion Jenaer Gläser im ultravioletten Strahlengebiet. Dissert. Jena. 1901.

Faden, dessen Schatten bei der Aufnahme auf die Platte als Bezugsmarke mitphotographiert wird, von der aus nach rechts und links die Linien liegen, deren Abstände x_λ vom Fadenbild wir auf einem Längenkomparator ausmessen. Nach der Aufnahme entfernen wir das Prisma und drehen das Beobachtungsrohr so lange, bis der Faden auf gerader Durchsicht einsteht. Dadurch erhalten wir einen Winkel γ, der dem Ablenkungswinkel für die Lage des Fadenbildes im photographierten Spektrum entspricht. Kennen wir nun den Abstand f der Plattenebene vom hinteren Hauptpunkt des abbildenden Systems, so sind damit auch die Differenzwinkel β_λ der einzelnen Linien gegenüber γ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta_\lambda = \frac{x_\lambda}{f} \tag{107}$$

gegeben. Wir erhalten also die in die Gleichung (23) eingehenden Ablenkungswinkel δ_λ, indem wir diesen Differenzwinkel β_λ zu γ vorzeichenrichtig hinzufügen. Es ist

$$\delta_\lambda = \gamma \pm \beta_\lambda, \tag{108}$$

je nachdem die Linie λ vom Fadenbilde ab nach der Seite der kürzeren oder längeren Wellenlänge liegt.

Die Strecke f können wir dabei experimentell dadurch ermitteln, daß wir nach der ersten Aufnahme das Beobachtungsfernrohr um einen kleinen bekannten Winkel ε (etwa 3°) verdrehen und eine zweite Aufnahme unmittelbar in die erste hinein machen (vgl. Ziff. 33). Aus der dabei feststellbaren Verschiebung ein und derselben Linie auf der Platte wird das unbekannte f berechnet. Sind die Abstände dieser einen Linie vom Fadenbilde der ersten Aufnahme x_1 und x_2 mit den entsprechenden Differenzwinkeln β_1 und β_2, so ist $\varepsilon = \beta_1 - \beta_2$, sowie $\operatorname{tg}\beta_1 = x_1/f$, und $\operatorname{tg}\beta_2 = x_2/f$, weshalb wir aus der trigonometrisch bekannten Beziehung

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{x_1}{f} - \frac{x_2}{f}}{1 - \frac{x_1}{f}\cdot\frac{x_2}{f}}$$

für f die Bestimmungsgleichung

$$f = \frac{x_1 - x_2}{2\cdot\operatorname{tg}\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2\cdot\operatorname{tg}\varepsilon}\right)^2 - x_1\cdot x_2} \tag{109}$$

erhalten, die aber noch vereinfacht werden kann, da unter dem Wurzelzeichen das zweite Glied gegenüber dem ersten bei den angegebenen Versuchsbedingungen sehr klein ist. Wir dürfen nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und kommen so schließlich nach Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung zu der Gleichung:

$$f = \frac{x_1 - x_2}{\operatorname{tg}\varepsilon} - \frac{x_1\cdot x_2}{\frac{x_1 - x_2}{\operatorname{tg}\varepsilon}}. \tag{110}$$

In ähnlicher Weise geht MARTENS[1]) vor bei Verwendung der Methode des bekannten Einfallswinkels, der nach der von ihm gegebenen Vorschrift eingestellt wird (Ziff. 17). Der Photokollimator (Ziff. 33) wird zunächst so eingestellt, daß der gewünschte Teil des Spektrums auf die Platte kommt. Nach der Aufnahme wird er um einen am Teilkreis abzulesenden Winkel γ verdreht,

[1]) F. F. MARTENS, Ann. d. Phys. Bd. 6, S. 603–640. 1901; Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 3, S. 31–35. 1901. Vergl. auch Ziff. 28 und 33.

bis er ungefähr auf gerader Durchsicht steht. Nach Entfernung des Prismas wird das Spaltbild der geraden Durchsicht in das Spektrum hineinphotographiert. γ ist dann der der Lage dieses Spaltbildes im Spektrum entsprechende Ablenkungswinkel. Die Ablenkungswinkel der einzelnen Linien werden darauf in der oben geschilderten Art und Weise gefunden, indem die Abstände x_λ der einzelnen Linien von diesem Spaltbild der geraden Durchsicht aus gemessen und mit Hilfe der bekannten bildseitigen Brennweite f des Aufnahmeobjektivs in Winkelwerte β_λ umgerechnet werden, die zu γ vorzeichenrichtig hinzugefügt werden müssen.

Da für die Körper gleichzeitig meist auch die Brechzahlen für das sichtbare Gebiet ermittelt werden, können wir uns das Mitphotographieren des Fadens bzw. des Spaltbildes der geraden Durchsicht und die Messung des Winkels γ ersparen, wenn wir eine der sichtbaren Linien selbst als Bezugsmarke verwenden und ihren nach dem gleichen Verfahren vorher visuell gemessenen Ablenkungswinkel an Stelle von γ verwenden.

61. Die Verfahren für das ultrarote Gebiet. Da die ultraroten Strahlen ausgesprochene Wärmestrahlen sind, erfolgt ihr Nachweis in der Regel mit einem an die Stelle des Auges tretenden Linearbolometer oder einem CROOKESschen Radiometer. Benutzt wird dazu durchweg[1]) das prismatische Verfahren des minimal abgelenkten Strahls (Ziff. 12) bei Verwendung der LANGLEYschen (Ziff. 13) oder FUCHS-WADSWORTHschen Anordnung (Ziff. 14) zur selbsttätigen Erhaltung der Minimalablenkung. Während bei der Benutzung des gegen Erschütterungen sehr empfindlichen Radiometers nur die letzte Anordnung in Frage kommt, weil bei ihr das Beobachtungsrohr feststeht und nur das Prisma gedreht wird, können wir bei Beobachtung mit Hilfe eines Bolometers beide Anordnungen gebrauchen.

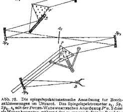


Abb. 78. Die spiegelspektrometrische Anordnung für Brechzahlmessungen im Ultrarot. Das Spiegelspektrometer s_1, Sp_1, Sp_2, s_2 mit der FUCHS-WADSWORTHschen Anordnung P' u. S dient als Monochromator, während das zu messende Prisma P auf dem Tische eines zweiten, mit der LANGLEYschen Anordnung versehenen Spiegelspektrometers s_2, Sp_3, Sp_4, B steht, wobei B das Bolometer ist.

[1]) Es ist dabei abgesehen von einem für allgemeine Verwendung weniger in Frage kommenden von H. CARVALLO (C. R. Bd. 116, S. 1189—1191. 1893) benutzten Interferenzverfahren, das dieser nach der von L. MOUTON (C. R. Bd. 88, S. 967—970, 1078—1082, 1189—1192. 1879) im sichtbaren Gebiet benutzten FIZEAU-FOUCAULTschen Methode auf das Ultrarot ausgedehnt hat.

Das Verfahren wurde von LANGLEY[1]), insbesondere von RUBENS und seinen Schülern[2]), sowie von PASCHEN[3]) ausgebildet. Benutzt wird dazu ein Spektrometer, dessen Objektive durch Hohlspiegel ersetzt werden, die zur Erhohung ihrer Wärmereflexionsfähigkeit oberflächenversilbert sind. Der Spalt s_2 eines solchen Spiegelspektrometers $s_2 Sp_3 Sp_4 B$ (Abb. 78) wird beleuchtet mit bekanntem einwelligem ultrarotem Lichte, das wir nach einer der in Ziff. 4 dargestellten Methoden erhalten haben. Vorteilhaft wird es sein, ein zweites Spiegelspektrometer mit wärmedurchlässigem Prisma oder Gitter zu verwenden, weil wir in diesem Falle bei kontinuierlicher Lichtquelle jede gewünschte Wellenlänge auf den Spalt einstellen können (in Abb. 78 ist dazu ein zweites Spiegelspektrometer $s_1 Sp_1 Sp_2 s_2$ gewählt mit der FUCHS-WADSWORTHschen Prismenanordnung PS).

Die Messung erfolgt in der Weise, daß wir zunächst (im Falle der Abb. 78 ist für das messende Spektrometer die LANGLEYsche Anordnung gewählt) das Beobachtungsrohr so drehen, bis das die Wärmeenergie anzeigende Instrument durch größer werdenden Anschlag anzeigt, daß wir die ungefähre Lage des minimal abgelenkten Spaltes erreicht haben. Vor dieser Lage beginnend, drehen wir das Beobachtungsrohr etwa von 5′ zu 5′ weiter, zu jeder Teilkreisablesung den Ausschlag aufschreibend. Dies Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der Ausschlag wieder abnimmt. Tragen wir die Ausschläge in Abhängigkeit von den Teilkreisablesungen in ein Schaubild ein, so können wir beim Höchstwert der so erhaltenen Kurve, der dem Schwerpunkt der zu messenden Linie entspricht, die Teilkreisablesung für den im Minimum abgelenkten Strahl entnehmen. Drehen wir darauf das Beobachtungsrohr in gerade Durchsicht, so können wir für diese in gleicher Weise, besser aber geschieht es visuell, die zugehörige Teilkreisablesung feststellen, und haben damit als Differenz den gesuchten Ablenkungswinkel δ, der zur Berechnung der gesuchten Brechzahl in die Gleichung (14) eingeht.

B. Die Methoden zur Prüfung von optischen Instrumenten, Linsen, Spiegeln, Mikroskopen, Fernrohren usw.

Von

HEINRICH KESSLER, Jena.

a) Einleitung.

62. Der Gegenstand und das Ziel der Prüfungen an optischen Instrumenten. Wenn wir ein optisches System untersuchen wollen, müssen wir uns stets vorher über die Frage klar sein, was an ihm untersucht werden soll.

Das Nächstliegende bei einer solchen Prüfung ist, ob die vom rechnenden Optiker vorgeschriebenen Konstruktionsdaten von der zu prüfenden optischen

[1]) S. P. LANGLEY, Wied. Ann. Bd. 22, S. 598—612. 1884; Ann. chim. phys. (6) Bd. 9, S. 433—506. 1886.

[2]) H. RUBENS, Wied. Ann. Bd. 45, S. 238—261. 1892; Bd. 51, S. 381—395. 1894; Bd. 53, S. 265—286. 1894; H. RUBENS u. B. W. SNOW, ebenda Bd. 46, S. 529—541. 1892; H. RUBENS u. A. TROWBRIDGE, ebenda Bd. 60, S. 724—739. 1897; A. TROWBRIDGE, ebenda Bd. 65, S. 595—620. 1898; E. ASCHKINASS, Ann. d. Phys. (4) Bd. 1, S. 42—68. 1900.

[3]) F. PASCHEN, Wied. Ann. Bd. 53, S. 301—333. 1894; Bd. 56, S. 762—767. 1895; Ann. d. Phys. (4) Bd. 4, S. 299—303. 1901.

Folge auch wirklich erfüllt sind. Wir werden deshalb in erster Linie die Ermittelung der **Konstruktionselemente** der optischen Folgen: Dicken, Radien und Brechzahlen der einzelnen Linsen und ihre Luftabstände, vornehmen. Die Feststellung und dauernde Kontrolle dieser Grundgrößen der einzelnen Systeme ist ganz besonders wichtig, wenn es gilt, die Herstellung auf Grund der Berechnung zu überwachen.

Kennen wir diese Konstruktionselemente genau, so sind wir auf Grund der in früheren Kapiteln dieses Bandes mitgeteilten Durchrechnungsformeln in der Lage, mit einer oft sehr guten Annäherung an die Wirklichkeit, die Abbildungskonstanten, die Strahlenbegrenzung und den Korrektionszustand der Systeme zu berechnen. Besser wird es aber stets sein, diese Wirkungen der Systeme am fertigen Instrument selbst durch Versuche zu bestimmen.

Die durch ein optisches System bedingte Abbildung ist vollständig eindeutig nach Lage und Maß bekannt, wenn wir die Lage der beiden Brennebenen gegenüber der Linsenfolge und den Wert der Brennweite kennen, wobei wir voraussetzen wollen, daß das optische Mittel des Dingraumes das gleiche wie das des Bildraumes sein soll. Die empirische Bestimmung der **Grundgrößen der Abbildung** verlangt somit die Ermittelung der Schnittweiten und der Brennweite.

Da die Linsen, Prismen und Spiegel stets nur beschränkte Ausmessungen aufweisen, außerdem auch Fassungsränder und absichtlich angebrachte Blenden räumlich einschränkend auf das Büschel der abbildenden Strahlen wirken, trägt zur wirklichen Abbildung nur ein durch diese sog. Blenden abgesonderter Teil der Dingstrahlen bei. Von dieser **Strahlungsbegrenzung** hängen ab die **Apertur** und das **Gesichtsfeld**, und ebenso die **Vergrößerung** und die **Lichtstärke** der optischen Instrumente. Die Meßgenauigkeit aller dieser Verhältnisse wird mehr oder minder stark beeinflußt von dem **Korrektionszustand** der untersuchten optischen Folge. Im besonderen Maße gilt dies für die Grundgrößen der Abbildung, deren Bestimmungsmethoden teilweise auch, unter entsprechender Änderung, zur empirischen Ermittelung des Korrektionszustandes verwendet werden, weshalb diese Verfahren schon im Anschluß an die Bestimmung der Grundgrößen behandelt werden sollen.

b) Die Bestimmung der Konstruktionselemente.

α) Die Ermittelung der Dicken und Luftabstände.

63. Das Messen der Glasdicken und Luftabstände[1]. Bei einer vorliegenden optischen Folge werden zunächst die gegenseitigen Abstände der einzelnen brechenden und spiegelnden Flächen des Systems sowie die Abstände der Blenden von den nächstliegenden optischen Flächen, ermittelt. Am besten geschieht dies mit Hilfe eines ABBEschen Kontakt-Dickenmessers[2], der eine Meßgenauigkeit von $\pm 0{,}002$ bis $\pm 0{,}01$ mm liefert, oder mittels eines Tiefentasters, der im allgemeinen auf $\pm 0{,}1$ mm genau abzulesen gestattet. In den meisten Fällen wird praktisch die letztere Genauigkeit genügen. Auch das Schraubensphärometer (Ziff. 64) kann der Dickenmessung dienen. Daneben kommen noch in Frage: Schublehre, Mikrometerschraube, u. ä.

Neben der mechanischen Ermittelung der Dicke durch das Kontaktverfahren kommt bei Planparallelplatten auch die rein optische Dickenmessung in Frage.

Ist die Brechzahl n der Platte bekannt und beobachten wir zwischen den Einstellungen eines Mikroskops auf die beiden Grenzflächen der Platte von der

[1] Vgl. ds. Handb. Bd. II: F. GÖPEL, Längenmessung.
[2] C. PULFRICH, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 307–315. 1892.

unbekannten Dicke d die Verschiebung l' des Mikroskops in seiner optischen Achse, so ist nach DE CHAULNES[1]) die Dicke der Platte:

$$d = n \cdot l'. \tag{1}$$

Die Brechzahl n läßt sich nach einem geeigneten Verfahren, z. B. mit dem ABBEschen Refraktometer[2]) auf einfache Weise und doch genügend genau bestimmen.

Auch die Interferenz des Lichtes kann zur Auffindung der Dicke einer solchen Platte Verwendung finden, indem wir im KÖSTERSschen[3]) Interferenzkomparator mit Hilfe NEWTONscher Interferenzstreifen entweder durch eine Relativmessung die Dickenunterschiede der Platten gegenüber einem bekannten Parallelendmaß ermitteln oder durch eine Absolutmessung die Dicke unmittelbar in Wellenlängen auswerten.

β) Die Ermittelung der Radien.

64. Das Messen der Radien auf mechanischem Wege. Die Sphärometer. Die Bestimmung der Flächenradien kann auf mechanischem und optischem Wege erfolgen. Dem mechanischen Verfahren dienen die Sphärometer, deren Einrichtung es gestattet, die Pfeilhöhe der betreffenden Linsenflächen für eine Kugelhaube von bekanntem Durchmesser zu messen.

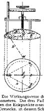


Abb. 79. Die Wirkungsweise des Schraubensphärometers. Die drei Fußpunkte A, B, C bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen (s) Dreiecks, in dessen Schwerpunkt F die Spitze der Meßschraube aufsteht. Durch Aufstellen des Sphärometers nacheinander auf eine Planfläche und auf die zu messende Kugelfläche mit dem Radius R, wobei durch Drehen der Meßschraube deren Spitze jeweils immer gerade in Berührung mit der Auflagefläche gebracht wird, kann die Pfeilhöhe h der Kugelhaube bestimmt werden, deren Grundkreis durch die drei Fußpunkte A, B, C des Sphärometers geht. Es ist

$$R = \frac{s^2}{6h} + \frac{h}{2}.$$

Ein solches Sphärometer älterer Konstruktion (Abb. 79) besitzt drei mit Spitzen versehene Füßchen A, B, C, die in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge s angeordnet sind. Die messende Mikrometerschraube, die ebenfalls in einer Spitze endigt, ist gegenüber den Füßchen A, B, C so justiert, daß beim Aufstellen auf eine ebene Platte die Spitze der Meßschraube, die sehr feingängig ist, im Schwerpunkt des Basisdreiecks aufsteht. Diese Justierung muß genau sein. Die Ablesung der Meßschraube erfolgt an einer linearen Höhenteilung und einer Kreisteilung. Zunächst werden zur Ermittelung des Nullpunktes die vier Spitzen in eine Ebene gebracht, indem das Sphärometer auf einer Planfläche eingestellt wird. Bringen wir nunmehr das Sphärometer auf die zu messende Kugelfläche (Abb. 79), so müssen wir die Meßschraube um den Längen-

---

[1]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 58. Für den vorliegenden Fall ist das l der DE CHAULNESschen Formel (106) $AC = l = d - CD = d - l'$.

[2]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen Ziff. 40.

[3]) W. KÖSTERS, Präzision Bd. 1, S. 2—5. 19—20 u. 39—41. 1922; ZS. f. Feinmech. u. Präz. Bd. 34, S. 55—58. 1926; H. KESSLER, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 389 bis 393 u. 407—411. 1922.

wert h verstellen, damit wieder alle vier Spitzen auf der Kugelfläche gleichzeitig aufliegen. Da der Umkreis des gleichseitigen Dreiecks ABC den Durchmesser $2r = \frac{2}{3} s\sqrt{3}$ besitzt, erhalten wir zur Berechnung des gesuchten Radius R der Kugelfläche die Gleichung:

$$R = \frac{s^2}{6h} + \frac{h}{2}. \tag{2}$$

Um mit einem solchen Sphärometer die Krümmungen von Linsen verschiedener Öffnungen messen zu können, können die drei Eckfüßchen verstellbar eingerichtet werden. Doch leidet darunter meist die Genauigkeit der Messung.

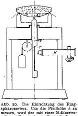


Abb. 80. Die Einrichtung des Ringsphärometers. Um die Pfeilhöhe h zu messen, wird der mit einer Millimeterteilung T versehene Taststift S zunächst an eine auf den Ring $2r$ aufgelegte Planplatte angeschlagen und seine Einstellung mit Hilfe eines Meßmikroskops M abgelesen. Darauf wird die Kugelfläche R auf den Ring aufgelegt und die nunmehrige Anschlagseinstellung des Taststifts festgestellt. Aus der so gefundenen Pfeilhöhe h berechnet sich der gesuchte Kugelradius als

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$

Die Meßgenauigkeit eines solchen einfachen Mikrometerschraubensphärometers ist im allgemeinen entsprechend der verhältnismäßig ungünstigen Meßgenauigkeit der Mikrometerschraube auch nur eine geringe. Sie kann etwas gesteigert werden durch Übertragung der Bewegung des Meßstiftes durch ein Hebelwerk auf einen Zeiger mit Skala[1, 2]), oder durch einen Spiegel- oder Libellen-Fühlhebel[2]). Diese gesteigerte Empfindlichkeit ist insbesondere dann von Vorteil, wenn es sich darum handelt, durch Verschieben des Sphärometers auf der zu prüfenden Fläche deren Abweichung von der Kugelform festzustellen.

Eine etwa verdreifachte Meßgenauigkeit gegenüber der genannten Sphärometerform erreicht ROWELL[3]), indem er die Meßschraube an eine der Dreiecksecken verlegt und die beiden anderen Dreiecksfüßchen zusammen mit der bisherigen Meßspitze unveränderlich einstellt.

Für genauere Messungen wird die die Verschiebung des Taststiftes S messende Mikrometerschraube ersetzt durch einen auf dem Taststift S angebrachten Maßstab T (Abb. 80), dessen Verschiebungen mit Hilfe eines feststehenden Meßmikroskops M ausgemessen werden. Außerdem werden an Stelle der drei Füßchen A, B, C auswechselbare Ringe[4]) von verschiedenen, bekannten Durchmessern $2r$ verwendet, die so vorgerichtet sind, daß damit sowohl hohle als auch erhabene Kugelflächen gemessen wer-

---

[1]) G. PAUS, D. R. P. Nr. 16648, ausgegeben 28. V. 1881.

[2]) A. M. MAYER, Sill. Journ. (3) Bd. 32, S. 61—69. 1886; Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 8, S. 45. 1887; S. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 7, S. 297—301. 1887.

[3]) H. S. ROWELL, Journ. scient. instr. Bd. 2, S. 17—20. 1924; ZS. f. Instrkde. Bd. 45, S. 309. 1925.

[4]) A. M. MAYER, Sill. Journ. (3) Bd. 32, S. 61—69. 1886; Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 8, S. 45. 1887; ZS. f. Instrkde. Bd. 7, S. 297—301. 1887; S. CZAPSKI, ebenda Bd. 7, S. 297—301. 1887 (Mayer und Bamberg); C. PULFRICH, ebenda Bd. 12, S. 307—315. 1892 (Abbe); H. C. LOMB, Dtsch. Mech.-Ztg. Bd. 10, S. 15—17. 1907; Arch. f. Opt. Bd. 1, S. 108. 1908.

den können. Zu dem Ende sind diese Sphärometerringe nicht in scharfer Kante auslaufend, sondern sie sind auf einer ebenen Fläche etwas abgeschliffen, so daß die Hohlflächen auf dem äußeren, die erhabenen Flächen auf dem inneren Durchmesser aufliegen. Diese Kanten müssen allerdings scharf sein und die Durchmesser sind vorher genau zu ermitteln. Die Nullstellung des Taststiftes wird auch hier wieder durch Auflegen einer ebenen Fläche ermittelt, an die der Taststift anschlägt. Die auftretende Verschiebung des Taststiftes, wenn er an die aufgelegte Kugelfläche anschlägt, ist die gesuchte Pfeilhöhe h, die in die der Errechnung des Kugelradius R dienende Formel

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} = \frac{r^2 + h^2}{2h} \qquad (3)$$

eingeht.

Aus dieser Bestimmungsgleichung für R können wir durch einfache Differentiation die Abhängigkeit der Meßgenauigkeit dR von den Genauigkeiten, dr bzw. dh, mit denen wir den Radius r des Ringes bzw. die Pfeilhöhe h bestimmen können, erhalten. Die Teilmeßgenauigkeiten sind

$$\partial R = \pm \frac{r}{h} \cdot dr \qquad \text{und} \qquad \partial R = \pm\left(1 - \frac{R}{h}\right) dh\,,$$

weshalb die Gesamtmeßgenauigkeit

$$dR = \frac{r}{h} \cdot dr + \left(\frac{R}{h} - 1\right) \cdot dh \qquad (4)$$

wird.

Bei Verwendung guter Apparate dürfen wir damit rechnen, sowohl den Radius r als auch die Pfeilhöhe h mit einer Genauigkeit von mindestens $dr = dh = \pm 0{,}003$ mm zu ermitteln. Für diesen Fall erhalten wir etwa folgende Fehlertafel:

Fehlertafel für Sphärometermessungen bei $dr = dh = \pm 0{,}003$ mm. Der Meßfehler dR beträgt in mm:

$R =$ \ $r =$	5 mm	25 mm	50 mm	75 mm	100 mm
5 mm	0,06	—	—	—	—
50 „	1,3	0,06	—	—	—
100 „	2,5	0,12	0,03	0,01	0,01
500 „	12,1	0,50	0,13	0,06	0,04
1000 „	24,1	1,01	0,25	0,11	0,07

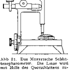


Abb. 81. Das MOFFITsche Schlittensphärometer. Die Linse wird mit Hilfe des Querschlittens zunächst zu dem Taststift zentriert, während die Ausmessung der Pfeilhöhe h durch Verschieben der Linse unter dem Taststift mittels des Längsschlittens geschieht. Der Scheitelpunkt ist Umkehrpunkt für die Einstellung des Taststifts. Von ihm aus verschieben wir den Längsschlitten um eine bestimmte, dem Grundkreisradius r entsprechende Strecke, wobei die Verschiebung des Taststiftes die Pfeilhöhe h ergibt.

Ohne feste Füßchen und Ringe arbeitet das von MOFFIT[1]) angegebene Sphärometer (Abb. 81), bei welchem die hinsichtlich ihrer Krümmung zu messende Linse auf einem Kreuzschlitten ruht, während ein Dickenmessertaststift, mit Maßstab und Mikroskopablesung, mit seinem als Kugel ausgebildeten unteren Ende auf der zu messenden Fläche aufliegt. Durch Verstellen des oberen Querschlittens kann die Linse zum Taststift zentriert werden, während die eigentliche Messung mit Hilfe des unteren Längsschlittens geschieht, dessen Verschiebung durch eine feingängige Mikrometerschraube mit Meßtrommel meßbar erfolgen

[1]) G. M. MOFFIT, Phys. Rev. Bd. 13, S. 261—271. 1919; ZS. f. Instrkde. Bd. 41, S. 28 bis 29. 1921.

kann. Zunächst wird durch Verschieben der Linse unter dem Taststift vorbei der Umkehrpunkt gesucht, der bei erhabenen Flächen der höchsten, bei Hohlflächen der tiefsten Stellung des Taststiftes entspricht. Nunmehr verschieben wir den Längsschlitten nach einer Seite bis nahe zum Linsenrand und beobachten dabei eine bestimmte Schlittenverschiebung, die dem Sphärometerringradius entspricht, und eine Veränderung der Einstellung des Taststiftes, die der Höhe h der Kugelhaube entspricht. Beide Werte in (3) eingesetzt, liefern den gesuchten Krümmungsradius R. Eine gleichgroße symmetrische Verschiebung des Längsschlittens nach der entgegengesetzten Seite liefert einen zweiten Wert für h, der vor der Rechnung mit dem erstgewonnenen gemittelt wird. Der Vorteil dieser Vorrichtung liegt darin, daß wir dabei sozusagen mit beliebig vielen Sphärometerringen arbeiten können, indem wir bei der Randmessung dem Schlitten die verschiedensten Lagen geben, wodurch wir bei geeigneter Verteilung der Werte r über den Linsendurchmesser ein gutes Bild über die Kugelgestalt der Linse gewinnen können. Außerdem können wir mit diesem Gerät bis herab zu den kleinsten Linsen die Radien ermitteln. Zu beachten ist allerdings, daß nach der Fehlergleichung (4) mit abnehmendem r die Meßgenauigkeit für den Radius R schnell schlechter wird.

Für schnelle Messungen, insbesondere zur Messung der Radien an Brillengläsern, werden einfache Sphärometer benutzt, sog. Dioptrienmesser. Dieses sind einfache Dickenmeßuhren, bei denen nach beiden Seiten vom verschiebbaren Meßstift in gleicher Entfernung, die etwa 10 bis 15 mm beträgt, zwei feste Füßchen angebracht sind, deren Spitzen mit der Meßstiftachse zusammen in einer Ebene liegen, die beim Aufsetzen dieses Sphärometers auf eine Kugelfläche mit der Ebene eines größten Kreises dieser Kugelfläche zusammenfallen muß. Der Nullpunkt wird erhalten durch Aufsetzen auf eine Planfläche. Gemessen wird eigentlich auch hierbei die Pfeilhöhe des Kreisbogens, der zwischen den beiden festen Spitzen und der Meßstiftspitze liegt. An der Teilung des Dioptrienmessers wird aber nicht diese abgelesen, auch nicht der dazugehörige Radius, sondern unmittelbar die der Fläche eigene Dioptrienzahl ($\pm$); denn es ist

$$\text{Dioptrie} = \frac{n_D - 1}{\text{Radius in Metern}},$$

wobei als Brechungszahl die des im allgemeinen für Brillengläser verwendeten Spiegelglases $n_D = 1{,}523$ benutzt wird. Wollen wir den Radius selbst wissen, so brauchen wir nur $(n_D - 1) = 0{,}523$ durch die gefundene Dioptrienzahl zu dividieren. Bei öfterem Gebrauch eines solchen Dioptrienmessers zu Radienmessungen empfiehlt es sich, für diesen eine Eichkurve festzulegen, aus der zu jeder Dioptrienzahl gleich der zugehörige Radius entnommen werden kann.

65. Die Messung der Radien durch Spiegelung. Bei dieser Methode stützt sich die Messung nach dem Vorgange von SCHEINER auf die Messung der Größe des Spiegelbildes eines Gegenstandes von bekannter Größe und Entfernung. Das Bild eines im Achsenpunkte O (Abb. 82) senkrecht zur Achse stehenden Gegenstandes von der Größe y in bezug auf den Spiegel Sp liegt in dem Punkte O' und hat die Größe y'. Wir rechnen nach CHARLIERscher Art mit benannten Strecken. Es sei $SO = s$, $SO' = s'$ und $SC = r$ der Kugelradius. Wenden wir dann das Zweistrahlgesetz an, in dem wir darauf achten, daß wir die Achsenstrecken stets vom Scheitel des rechten Winkels aus rechnen, so gilt:

$$y : y' = OC : O'C = (OS + SC) : (O'S + SC) = (-SO + SC) : (-SO' + SC)$$
$$= (-s + r) : (-s' - r). \tag{5}$$

Anderseits gilt für den Spiegel die Abbildgleichung in der Form

$$-\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} - \frac{2}{r}, \tag{6}$$

worin wir, entsprechend dem Brauche in der rechnenden geometrischen Optik, alle Größen in der Einfallsrichtung des Lichtes positiv, entgegen der Einfallsrichtung negativ einsetzen. Diese Gleichung gilt dann sowohl für erhabene als auch für hohle Spiegel, und aus ihr berechnet sich

$$-s' = \frac{s \cdot r}{r - 2s}. \tag{7}$$

Setzen wir diesen Wert in (5) ein, so bekommen wir

$$\frac{y}{y'} = (r - s) : \left(r + \frac{rs}{r - 2s}\right) = \frac{r - 2s}{r}.$$

Wenn wir y' kennen, können wir dann aus dieser Beziehung, da y und s leicht ausgemessen werden können, in voller Allgemeinheit den Radius berechnen als

$$r = \frac{2 \cdot s \cdot y'}{y' - y}. \tag{8}$$

Beschränken wir uns auf den in der Abb. 82 gezeichneten Fall, der im allgemeinen der Beobachtungsfall sein wird, und wollen wir dann nur mit den beobachteten Absolutwerten der Größen rechnen, die wir zum Unterschied von den mit Vorzeichen behafteten Größen in der üblichen Weise zwischen zwei senkrechten Strichen darstellen, so lautet die Formel

$$|r| = \frac{2 \cdot |s| \cdot |y|}{|y| \mp |y'|} \tag{9}$$

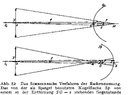


Abb. 82 Das SCHMIDTsche Verfahren der Radienmessung. Das von der als Spiegel benutzten Kugelfläche Sp von einem in der Entfernung $SO = s$ stehenden Gegenstande y entworfene Bild y' wird mit einem in der Entfernung $SO_1 = s_1$ stehenden Fernrohr betrachtet. Um die scheinbare Größe y'' feststellen zu können, wird im Spiegelscheitel S ein geeigneter Maßstab angebracht, der im Gesichtsfeld bei genügend großem Abstande s_1 gleichzeitig mit dem Bilde y' scharf erscheint. Es ist der Radius r der Kugelfläche vorzeichenrichtig gegeben durch die Formel

$$r = \frac{2 \cdot s \cdot y''}{\frac{s + s_1}{s_1} \cdot y'' - y}.$$

Die obere Abbildung gibt den Fall der erhabenen, die untere den Fall der hohlen Kugelfläche wieder.

wobei, je nachdem die Fläche erhaben oder hohl ist, im Nenner das negative oder positive Zeichen verwendet werden muß.

Der einfachste, am schnellsten, aber wohl auch am ungenauesten zum Ziele führende Weg ist der, die Größe von y' mit Hilfe eines auf y' eingestellten Meßfernrohrs zu bestimmen, dessen Teilungswert wir für die verwendete Beobachtungsentfernung besonders ermitteln müssen. In anderer Art und Weise gehen wir nach KOHLRAUSCH[1] vor. Im Spiegelscheitel S wird ein Maßstab dicht vor der Spiegelfläche parallel zum Gegenstand y angebracht. Aus größerer

[1] R. KOHLRAUSCH, Okens Isis. 1840. S. 886.

Entfernung, z. B. vom Punkte O_1 der optischen Achse (Abb. 4) aus, wird das Bild in O' bzw. der Spiegelscheitel mit Hilfe eines Fernrohrs betrachtet. Wenn nun der Abstand des Fernrohrs genügend groß ist, dann werden das Bild und die Maßstabteilung im Gesichtsfelde gleichzeitig scharf erscheinen, und wir können am Maßstabe die scheinbare Größe y'' des Bildes y' ablesen. Wir bezeichnen $SO_1 = s_1$ und erhalten dann das Verhältnis

$$y' : y'' = O'O_1 : SO_1 = (O'S + SO_1) : SO_1 = (-s' + s_1) : s_1 ,$$

das nach Einsetzen des Wertes für s' aus Gleichung (7) übergeht in

$$\frac{y'}{y''} = \left(\frac{s \cdot r}{r - 2s} + s_1\right) : s_1 = \frac{r \cdot (s - s_1) - 2 \cdot s \cdot s_1}{s_1 \cdot (r - 2s)} . \tag{10}$$

Durch Vereinigung der beiden Gleichungen (8) und (10) miteinander erhalten wir eine Beziehung, aus der durch Absonderung von r für dieses die endgültige Bestimmungsgleichung

$$r = \frac{2 \cdot s \cdot y''}{\frac{s + s_1}{s_1} \cdot y'' - y} \tag{11}$$

folgt, worin nunmehr die Größen s, s', y, y'' leicht ausmeß- und ermittelbare Strecken sind, bei denen wir allerdings darauf achten müssen, daß wir sie vorzeichenrichtig einsetzen: $SO = s$ und $SO_1 = s_1 \gtrless 0$, je nachdem sie in oder entgegen der Einfallsrichtung des Lichtes liegen; y und $y'' \gtrless 0$, je nachdem sie aufrecht oder umgekehrt sind. Dann wird auch der aus (11) zu errechnende Radius r vorzeichenrichtig wiedergegeben.

Im allgemeinen werden wir bei der Ausführung dieser Methode den Punkt O_1 mit dem Punkt O zusammenfallen lassen, d. h. wir stellen das Beobachtungsfernrohr in die gleiche Entfernung vom Spiegel wie den Gegenstand, dessen Spiegelbild wir ausmessen wollen. Für diesen Fall wird somit $s_1 = s$, weshalb nunmehr für den gesuchten Radius sich die vereinfachte Formel

$$r = \frac{2 \cdot s \cdot y''}{2y'' - y} \tag{12}$$

ergibt.

Auch aus diesen Beziehungen (11) und (12) können wir unmittelbar die Rechnungsformeln ableiten für den Fall, daß wir nur mit den beobachteten absoluten Werten der Abb. 82 und nicht mit gerichteten Größen rechnen wollen. Es ist dann der gesuchte Radius im ersten Falle

$$|r| = \frac{2 \cdot |s| \cdot |y''|}{|y| \mp \frac{|s| \cdot |s_1|}{|s_1|} \cdot |y''|} , \tag{13}$$

im zweiten Falle

$$|r| = \frac{2 \cdot |s| \cdot |y''|}{|y| \mp 2 \cdot |y''|} , \tag{14}$$

worin $\mp$ zu verwenden ist, je nachdem die Prüffläche erhaben oder hohl ist.

Bei der Durchführung der Methode müssen wir Dinggröße und Dingabstand so groß wählen, daß die vom Ding ausgehenden Strahlen nahezu senkrecht auf die spiegelnde Fläche auftreffen, weil nur dann das ganze Bild im Fernrohr scharf erscheinen wird. Dies ist der Fall, wenn die Bildgröße höchstens etwa $^1/_4$ des Flächenradius beträgt. Um die Möglichkeit zu haben, die Gegenstandgröße zu verändern, wählen wir als Gegenstand am besten einen Maßstab, auf dem wir zwei Lichtpunkte, die die Endpunkte des Gegenstandes darstellen, verschieben können.

Was die Genauigkeit der Methode anbelangt, so muß zur Erzielung einer Meßgenauigkeit von $^1/_{300}$ des Radius das Bild auf $^1/_{160}$ seiner Größe genau ermittelt werden.

66. Das Ophthalmometer nach HELMHOLTZ. Eine besondere Anwendung hat die vorgenannte Methode der Radienmessung gefunden bei der Messung des Hornhautradius des Auges mit dem HELMHOLTZschen[1]) Ophthalmometer. Dieses ist aber auch allgemein anwendbar.

Beim HELMHOLTZschen Ophthalmometer ermitteln wir die Größe y' des Spiegelbildes nicht durch eine Zwischenablesung y'' an einem Maßstabe wie bei der KOHLRAUSCHschen Methode, sondern wir gehen in ähnlicher Weise vor,

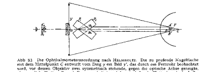


Abb 83 Die Ophthalmometeranordnung nach HELMHOLTZ. Die zu prüfende Kugelfläche mit dem Mittelpunkt C entwirft vom Ding y ein Bild y', das durch ein Fernrohr beobachtet wird, vor dessen Objektiv zwei symmetrisch stehende, gegen die optische Achse geneigte, planparallele Platten P_1 und P_2 vorgeschaltet sind derart, daß jede Platte jeweils die halbe Objektivöffnung überdeckt. Durch eine geeignete mechanische Vorrichtung lassen sich die Platten gleichzeitig um eine gemeinsame zur Zeichenebene senkrechte Achse um gleiche Winkel in entgegengesetzter Richtung drehen. Durch diese Platten, die eine Parallelversetzung der Strahlen bedingen, erhalten wir im Fernrohr zwei sich überdeckende Bilder $A_1'B_1'$ und $A_2'B_2'$ des Spiegelbildchens $y' = A'B'$. Durch geeignetes Drehen der Platten P_1 und P_2 können die Bilder gerade so gelegt werden, daß z. B. A_1' mit B_2' sich deckt. Dem entspricht ein ganz bestimmter Einfallswinkel α, aus dem sich die Größe y' berechnen läßt, als

$$|y'| = \frac{2 \cdot d \cdot \sin(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha'}, \qquad \sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{n},$$

wenn die Dicke d und die Brechzahl n der beiden Platten, die gleich dick und aus dem gleichen Glase sein müssen, bekannt sind.

wie dies in der Astronomie bei der Messung des Abstandes zweier Sterne der Fall ist, indem wir vor dem beobachtenden Fernrohr, das auf das Bild y' eingestellt ist, vor jeder Objektivhälfte je eine Glasplatte zwischenschalten (in Abb. 83 vor der vorn- und zurückliegenden Objektivhälfte). Diese beiden Platten P_1 und P_2 sind aus gleichem Glase hergestellt und genau gleich dick. Sie sind durch eine mechanische Anordnung derart miteinander verbunden, daß sie sich gleichzeitig um eine gemeinsame, zur Zeichenebene senkrechte Achse um gleiche Winkel in entgegengesetzter Richtung drehen lassen. Blicken wir durch eine solche planparallele Platte nach einem Gegenstand, so werden wir diesen aus seiner wirklichen Lage etwas in der Höhe verschoben erblicken. Die Größe dieser Höhenverschiebung ist abhängig von der Schräge, unter der wir die Platte den Sehstrahlen in den Weg bringen. Je größer der Einfallswinkel zur Platte ist, um so größer wird die Verschiebung sein.

[1]) H. HELMHOLTZ, v. Graefes Arch. f. Ophth. Bd. 2, S. 1—74. 1856; Wiss. Abhandlgn. Bd. 2, S. 1—74. 1856; M. MEYERSTEIN, Pogg. Ann. Bd. 111, S. 415—425. 1860; A. KÖNIG, ZS. f. Instrkde. Bd. 3, S. 153—158. 1883.

Ist $ABCD$ (Abb. 84) der Querschnitt durch eine solche Platte, befindet sich der Dingpunkt in Wirklichkeit in O und trifft der Strahl unter dem Winkel α auf diese Platte von der Dicke d auf, so wird er an der Ebene AB dem Einfallslote zugebrochen, um an der Austrittsfläche CD parallel zur Einfallsrichtung wieder in Luft überzutreten. Ein in H befindliches Auge wird den Dingpunkt O als in O_1 befindlich wahrnehmen. Die Verschiebung h, die der Punkt O durch die Parallelplatte scheinbar erlitten hat, können wir berechnen. Es ist (Abb. 84)

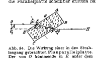


Abb. 84. Die Wirkung einer in den Strahlengang gebrachten Planparallelplatte. Der von O kommende in E unter dem Winkel α einfallende Strahl wird unter dem Winkel α' dem Einfallslote zu gebrochen, trifft unter dem Winkel α' in F auf die Austrittsfläche, die er unter dem Winkel α verläßt. Der Strahl erleidet demnach nur eine Parallelversetzung $OO_1 = h$, die außer vom Winkel α, nur noch von der Dicke d und der Brechungszahl n der Platte abhängt. Sie ist zu berechnen aus den Gleichungen

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{n}\,; \qquad h = \frac{d}{\cos\alpha'}\cdot\sin(\alpha - \alpha')$$

$$h = EF\cdot\sin\beta$$

oder

$$h = \frac{d}{\cos\alpha'}\cdot\sin(\alpha - \alpha')\,, \tag{15}$$

worin α' der aus dem Brechungsgesetz

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{n}$$

zu ermittelnde Brechungswinkel ist.

Arbeiten wir nun am Ophthalmometer so, daß wir die Platten P_1 und P_2 zunächst so einstellen, daß wir nur ein Bild von $A'B'$ im Fernrohr wahrnehmen, was der Fall sein wird, wenn die Platten beide senkrecht zur optischen Achse, also einander parallel stehen, so haben wir damit die Nullstellung der Platten gewonnen. Wir drehen nun die Platten um gleiche Winkel. Dadurch erhalten wir im Fernrohr zwei Bilder, die mit wachsender Drehung immer weiter auseinanderwandern. Durch P_1 (Abb. 83) wird ein Bild in $A_1'B_1'$, durch P_2 ein solches in $A_2'B_2'$ entstehen. Wir drehen die Platten so lange, bis die Bildenden A_1' und B_2' sich gerade berühren; dann wissen wir, daß jedes Bild gerade um $|y'/2|$ versetzt worden ist, daß also eine Gesamtverschiebung von $|y'|$ stattgefunden hat, weshalb wir auf Grund der Formel (15) für die gesuchte Bildgröße die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} |y'| &= \frac{2\cdot d\cdot\sin(\alpha - \alpha')}{\cos\alpha'} \\ \sin\alpha' &= \frac{\sin\alpha}{n} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

erhalten. Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß die Entfernung des Beobachtungsfernrohres vom Bilde y', dessen Größe gemessen werden soll, gar nicht in Betracht kommt. Die gemessene Verschiebung ist unabhängig davon. Zur Rechnung brauchen wir nur die Konstanten des Ophthalmometers, die Brechzahl n der Glasplatten und deren Dicke d, zu kennen, die wir in bekannter Weise auffinden können. Den Einfallswinkel α bestimmen wir durch Versuche. Den Wert des gesuchten Radius bekommen wir durch Einsetzen des gefundenen Wertes in die Gleichung (12).

Um die Bestimmung des Nullpunktes zu vermeiden und um gleichzeitig den Winkel α mit größerer Genauigkeit zu erhalten, werden wir die Koinzidenzeinstellung durch Drehen der Platten nach der anderen Seite, wo sich dann die Bildenden A_2' und B_1' (Abb. 84) berühren werden, wiederholen. Der dabei abgelesene Winkel ist der doppelte Einfallswinkel. Unregelmäßigkeiten können

wir ausschalten, wenn wir nacheinander jede Platte für sich und dann beide zusammen um 180° drehen und jedesmal die Einstellungen wiederholen.

Sollte die Plattendicke d nicht ausreichen, um die zur Koinzidenz erforderliche Verschiebung der Bilder zu erreichen, so stellen wir durch Vorsetzen einer Negativlinse vor das Ophthalmometer ein verkleinertes Bild her, dessen Größe nun in oben beschriebener Weise gefunden werden kann. Bringen wir dann an die Stelle des ausgemessenen Bildes einen Maßstab, so können wir dadurch die wirkliche Bildgröße bestimmen.

Um die Koinzidenzeinstellung zu erleichtern, hat es sich als vorteilhaft erwiesen, als Gegenstand AB folgende Anordnung zu benutzen. Drei Lichtspalte werden seitlich vom Objektiv F des Beobachtungsfernrohrs (Abb. 80) so angebracht, daß die Mitte M der beiden Spalte A von der Fernrohrachse gleichen Abstand hat, wie der dritte Spalt B auf der anderen Seite des Fernrohrs. Bei der Einstellung ist dann das Bild des Spaltes B genau in die Mitte zwischen die beiden Spaltbilder von A zu bringen. Diese Einstellungsart[1]) gewährleistet eine wesentlich bessere Einstellgenauigkeit als die Einstellung auf Berührung.

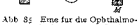


Abb. 85. Eine für die Ophthalmometermethode geeignete Spaltanordnung, die darin besteht, daß auf einer Seite vom Fernrohrobjektiv F ein Doppelspalt A sich befindet, während auf der andern Seite ein einfacher Spalt B angeordnet ist, der von F die gleiche Entfernung besitzt wie die Mitte M des Doppelspaltes A.

67. Das Ausmessen der Bildgröße mittels Theodolits. Wir stellen einen Theodoliten so auf, daß seine Drehachse im Punkte O_1 (Abb. 82) liegt und messen mit seiner Hilfe den Winkel φ, unter dem das Bild y' von diesem Standpunkte aus erscheint[2]). Dann ist

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y'/2}{O'O_1} = \frac{y'/2}{O'S + SO_1} = \frac{y'/2}{-s' + s_1}. \tag{17}$$

Bei Verwendung dieser Formel müssen wir beachten, daß s_1 für die beiden in Abb. 82 gezeichneten Fälle negatives Vorzeichen hat, während anderseits bei der erhabenen Fläche s' und y' positiv, bei der hohlen Fläche s' und y' negativ sind, weshalb der Wert des Bruches für die erhabene Fläche negativ, für die hohle Fläche positiv wird, was sich damit im Einklang befindet, daß der Winkel φ bei der positiven Krümmung als negativ, bei der negativen Krümmung als positiv zu nehmen ist, in Übereinstimmung mit dem bei der geometrischen Durchrechnung[3]) geübten Gebrauch.

Aus (17) folgern wir als gesuchte Bildgröße

$$y' = 2 \cdot (s_1 - s') \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \tag{18}$$

Führen wir für s' noch seinen Wert aus Gleichung (7) in (17) ein, so bekommen wir

$$y' = \frac{2 \cdot (s + s_1) \cdot r - 4 \cdot s \cdot s_1}{r - 2 \cdot s} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \tag{19}$$

Mit diesem Werte gehen wir in die Gleichung (8), die uns dadurch für den gesuchten Radius die Beziehung

$$r = \frac{4 \cdot s \cdot s_1}{2 \cdot (s + s_1) - y \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}} \tag{20}$$

liefert.

[1]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 6.
[2]) B. WANACH, Dtsch. Mechn.-Ztg. Bd. 2, S. 50. 1899.
[3]) Vgl. dazu diesen Bd. XVIII: Artikel W. MERTÉ, Geometrische Optik. Ziff. 18ff.

Aus dieser, ohne Einschränkung gültigen Bestimmungsgleichung für r, können wir ohne Schwierigkeiten unmittelbar die Gleichung abschreiben, die für den meist zur experimentellen Ausführung gelangenden Sonderfall der Abb. 82 gilt, wobei wir dann nur die absoluten Werte der Größen, die wir dabei durch Messung ermitteln, einzusetzen brauchen. Es ist

$$|r| = \frac{4 \cdot |s| \cdot |s_1|}{|y'| \cdot \operatorname{cotg} |\varphi/2| \mp 2 \cdot (|s| + |s_1|)}, \tag{21}$$

$\mp$, je nachdem die Prüffläche erhaben oder hohl ist.

68. Das Messen schwacher Krümmungen. Die Bestimmung der Bildgrößen y' können wir umgehen, indem wir zur Beobachtung des Bildes ein Fernrohr benutzen, das mittels eines in bekannter Entfernung befindlichen Gegenstandes für diese Entfernung scharf eingestellt wurde.

Wenn hier und bei noch folgenden Meßmethoden von Scharfeinstellung gesprochen wird, so wollen wir darunter stets eine solche verstehen, bei der das Bild des beobachteten Gegenstandes gegen ein im Beobachtungsinstrument vorhandenes Fadenkreuz oder eine ähnliche Einstellmarke, die für das Auge als Fixpunkt dient, keine Parallaxe aufweist. Der Nachweis von möglicherweise vorhandener Parallaxe läßt sich dadurch aufbringen, daß der Beobachter mit dem Kopfe etwas hin und her wackelt, sozusagen am linken bzw. rechten Rand der Austrittspupille vorbei das Bild hinsichtlich seiner Lage zur Marke im Sehfeld betrachtet. Läßt sich dabei ein Hin- und Herwandern des Bildes gegen die Marke beobachten, so befindet sich dieses nicht in der gleichen Ebene wie die Einstellmarke. Das Bild ist nicht parallaxenfrei eingestellt. Erst wenn ein solches Lagenwechseln nicht mehr festzustellen ist, ist eine parallaxenfreie Einstellung gesichert. Sehr deutlich wird diese Erscheinung der Parallaxe, wenn wir eine schmale Schlitzblende, z. B. vor dem Objektiv des Beobachtungsfernrohres, rasch hintereinander einmal am äußersten Rande rechts und dann am äußersten Rande links vorschalten, wodurch ein ganz augenfälliges Springen des Bildes gegenüber der Einstellmarke eintritt. Die Einstellung des Beobachtungssystems ist so lange zu ändern, bis diese Erscheinung nicht mehr beobachtet werden kann. Erst dann kann von einer Scharfeinstellung gesprochen werden.

Haben wir in dieser Weise das Beobachtungsfernrohr scharf eingestellt, so betrachten wir damit, ohne die Fernrohreinstellung zu ändern, über die spiegelnde Fläche hinweg (vgl. Abb. 82, wobei wir uns das Fernrohr in O_1 denken können) einen Gegenstand AB, also eigentlich dessen Bild y'. Um dieses Bild scharf zu sehen, muß es vom Fernrohre, für das es nun Gegenstand ist, den Abstand $O_1O' = e$ haben, weshalb wir am einfachsten den Abstand des Gegenstandes vom Spiegel so lange ändern, bis dies der Fall ist. Ist Scharfstellung erreicht, so können wir den Abstand des Gegenstandes vom Spiegel $SO = s$ und den des Fernrohrobjektivs vom Spiegel $SO_1 = s_1$ ausmessen. Es gilt dann einmal die Spiegelgleichung (6) und zweitens die Bedingungsgleichung

$$e = O_1O' = O_1S + SO' = -s_1 + s',$$

aus der wir s' berechnen und in (6) einsetzen, wodurch wir zu der Gleichung

$$r = 2 \cdot s \cdot \frac{e + s_1}{e + s + s_1} \tag{22}$$

kommen, aus der wir den Radius auch vorzeichenrichtig erhalten, wenn wir die einzelnen Größen vorzeichenrichtig, wie in der rechnenden Optik üblich, einsetzen.

Für ein Rechnen mit nur absoluten Werten der beobachteten Größen folgern wir aus (22) die Formel

$$r = 2 \cdot |s| \cdot \frac{|e| - |s_1|}{|s_1| + |s| - |e|}, \tag{23}$$

die den Wert des Radius zugleich mit dem richtigen Vorzeichen liefert.

69. Die Radien-Meßmethode nach WETTHAUER. Jegliche Rechnung können wir umgehen, wenn wir mit WETTHAUER[1]) unserer Beobachtung die Tatsache zugrunde legen, daß das von einer Kugelfläche erzeugte Bild eines feststehenden



Abb. 86. Die WETTHAUERsche Anordnung zur Radiusmessung. Die zu messende Kugelfläche K wird auf einen auf einer Schiene SS gleitenden Schlitten $Schl$ justiert. Beobachtet wird das von der Kugelfläche K entworfene Spiegelbild eines Dings durch das Fernrohr F. Der Schlitten $Schl$ wird so lange verschoben bis beim Drehen der Schiene SS um die Achse D das in F beobachtete Bildchen ruhig stehenbleibt; dann liegt der Mittelpunkt von K gerade in der Drehachse. In gleicher Weise gehen wir vor, nachdem wir den Schlitten auf die andere Seite der Schiene SS gebracht haben. Diese beiden Lagen schließen den doppelten Kugelradius ein.

Gegenstandes seinen Ort nicht ändern wird, wenn wir die Kugelfläche um ihren Mittelpunkt drehen. WETTHAUER hat deshalb eine der Abb. 86 entsprechende Anordnung vorgeschlagen.

Die spiegelnde Kugelfläche K wird auf einem auf der Schiene SS verschiebbaren Schlitten $Schl$ justierbar aufgebracht. Sie erzeugt von einem Gegenstande ein Bild, auf das das mit Fadenkreuz ausgerüstete Beobachtungsfernrohr F scharf eingestellt ist. Die Schiene SS kann um eine senkrechte Achse D gedreht werden. Im allgemeinen wird bei einer solchen Drehung das im Fernrohr wahrnehmbare Bild aus dem Gesichtsfeld herauswandern. Durch Verschieben des Schlittens $Schl$ und durch entsprechendes Neigen der Kugelfläche mit Hilfe der auf dem Schlitten vorgesehenen Justierschrauben können wir erreichen, daß das im feststehenden Fernrohr F zu beobachtende Spiegelbild beim Drehen der Schiene um D seine Lage zum Fadenkreuz unverändert beibehält; es liegt dann der Kugelmittelpunkt der Kugelfläche K auf der Drehachse D. Indem wir in gleicher Weise vorgehen, nachdem der Schlitten auf die andere Hälfte der Schiene SS gebracht worden ist, können wir so bei Anwendung einer geeigneten Ausmessung den zur Kugelfläche gehörigen Durchmesser ermitteln.

70. Die Radienmessung durch Autokollimation, durch Einstellen auf den Kugelmittelpunkt. Bei Hohlflächen können wir den Radius auch ermitteln, indem wir nach einer Autokollimationsmethode beobachten. Dem liegt zugrunde die Tatsache, daß von einem im Mittelpunkt des Spiegels befindlichen Ding, das Bild wieder im Mittelpunkt entsteht. Wir brauchen also nur den Ort aufzusuchen, wo Ding und Bild zusammenfallen. Sein auf irgendeine mechanische Weise auszumessender Abstand vom Spiegel ist gleich dem gesuchten Flächenradius.

Bei sehr großen Radien verwenden wir einen künstlich hergestellten Lichtpunkt, den wir so lange verschieben, bis Zusammenfallen von Bild und Ding erreicht ist.

Wesentlich genauer wird aber die Beobachtung, wenn wir bei Flächenkrümmungen von kleineren Radien ein Autokollimationsokular[2]) zu Hilfe

[1]) A. WETTHAUER, ZS. f. Instrkde. Bd. 41, S. 106—107. 1921.

[2]) Vgl. dazu diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 8.

nehmen und auf einer optischen Bank mit Millimeterteilung arbeiten. In der Brennebene des Okulars bringen wir in einer Hälfte das durch ein kleines Autokollimationsprisma beleuchtete Dingfadenkreuz an, während auf der rechten Hälfte ein Fadenkreuz als Fixpunkt für das Auge angebracht ist. Die spiegelnde Hohlfläche wird so justiert, daß das Bild in der zweiten Gesichtsfeldhälfte beim Einstellfadenkreuz erscheint. Dieses Autokollimationsfadenkreuz wird solange verschoben, bis Bild und Einstellfadenkreuz parallaxenfrei erscheinen; dann geht die Brennebene des Okulars durch den Mittelpunkt des Spiegels, dessen Abstand vom Spiegel wir nun ausmessen können.

Verwenden wir ein GAUSSsches Okular der Art wie Abb. 6 (Ziff. 8) mit der Abänderung, daß wir das Fadenkreuz M nach F als Einstellfadenkreuz bringen und im Brennpunkt der Linse O_2 ein beleuchtetes Dingfadenkreuz vorsehen, so entsteht zunächst ein Fadenkreuzbild in M, das als Ding für die Autokollimation dient. Wir stellen zunächst parallaxenfrei auf das von der Hohlfläche zurückgeworfene Bildchen ein, befinden uns also im Mittelpunkt, dessen relative Lage an der Teilung der optischen Bank mit Hilfe eines Index am Träger des Okulars festgestellt wird. Wir verschieben nun das Okular, um es auf die Spiegelfläche selbst einzustellen. Dies können wir auf zweierlei Weise erreichen. Einmal erhalten wir gerade dann wieder ein Bildchen des Fadenkreuzes im Okular, wenn der Punkt M genau in der spiegelnden Fläche liegt, weil dann die eintreffenden Strahlen unter gleichen Winkeln reflektiert und ins Okular zurückgeworfen werden. Und zweitens können wir auf die spiegelnde Fläche etwas Staub bringen und das Okular scharf auf diese Staubteilchen einstellen, die sich dann genau im Punkte M befinden. Indem wir nunmehr abermals die Indexeinstellung an der optischen Bank ablesen, erhalten wir damit als Differenz der beiden Indexablesungen offenbar die gesuchte Länge des Krümmungsradius der Fläche.

Dieses Verfahren wurde neuerdings von MOFFIT[1]) angegeben, mit dem Unterschiede, daß er an Stelle der verhältnismäßig kurzbrennweitigen Linsen O_1 und O_2 des GAUSSschen Okulars zwei langbrennweitige Fernrohrobjektive und als Ding einen sehr weit entfernten Lichtpunkt verwendet, weshalb er dann nicht dieses optische Beobachtungssystem, sondern die zu messende Fläche verschiebt.

Die langbrennweitigen Fernrohrobjektive haben noch den Vorteil, daß nicht nur hohle Flächen, sondern auch erhabene Flächen gemessen werden können, deren Radien kleiner als die Brennweite des nach der zu messenden Fläche zu liegenden Objektives sind.

71. Die Radienmessung durch Autokollimation bei Verwendung eines Fernrohres[2]). Wir benutzen ein Fernrohr mit Autokollimationsokular[3]), dessen Okularauszug mit einer Millimeterteilung und feststehendem Nonius versehen ist. Mit Hilfe einer vor das Objektiv gesetzten ebenen Platte bringen wir das Fernrohr auf Unendlich[4]), indem wir das Okularfadenkreuz auf das zurückkehrende Autokollimationsbildchen durch Auszugsverschiebung parallaxenfrei einstellen und die Lage des Auszuges am Nonius ablesen. Ersetzen wir nun die Planplatte durch eine Hohlfläche bzw. eine erhabene Fläche vom Radius R, so müssen wir den Okularauszug hineinschieben bzw. herausschieben, bis wieder Scharfeinstellung eintritt. Der Unterschied Δ dieser Noniusablesung gegen die Unendlichkeitsstellung, $\pm$ gerechnet, je nachdem der Fernrohrauszug verlängert

[1]) G. W. MOFFIT, Phys. Rev. Bd. 13, S. 265. 1919; Beibl. d. Ann. d. Phys. Bd. 43, S. 543—544. 1919; ZS. f. Instrkde. Bd. 41, S. 28—29. 1921.

[2]) F. KOHLRAUSCH, Lehrbuch der praktischen Physik, 14. Aufl., S. 313. 1923.

[3]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 8.

[4]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 9.

oder verkürzt werden muß, ist ein Maß für den Radius R. Ist die Brennweite F des Fernrohrobjektivs und ferner der Abstand d des Flächenscheitels der untersuchten Kugelfläche vom vorderen Hauptpunkt des Fernrohrobjektivs bekannt, so ist der gesuchte Radius auch dem Vorzeichen nach gegeben als

$$R = \frac{F^2}{\Delta} + (F - d) = \frac{F \cdot (F + \Delta)}{\Delta} + d. \tag{24}$$

Nur für große Radien kann d vernachlässigt werden. Bei nicht weit getriebener Meßgenauigkeit mag d durch den Abstand des Flächenscheitels von der Eintrittsfläche des Objektivs ersetzt werden. Die Genauigkeit des Verfahrens hängt neben der Einstellgenauigkeit in der Hauptsache von der Größe der Objektivbrennweite ab.

Dieses Verfahren kann dazu verwendet werden, um festzustellen, ob eine Planfläche wirklich eben ist (Ziff. 111).

72. Die Radienmessung mit Hilfe der NEWTONschen Interferenzringe. Wird einfarbiges Licht an zwei hintereinanderliegenden Flächen senkrecht zurückgeworfen und werden diese beiden zurückgeworfenen Strahlenbündel zur Interferenz gebracht, z. B. in einem entgegen der Reflexionsrichtung blickenden Auge oder in einem an die Stelle des Auges gebrachten Mikroskop oder Fernrohr, das auf die reflektierenden Flächen eingestellt ist, so wird zwischen diesen beiden Flächen ein System von abwechselnd hellen und dunkeln Kurven, die sog. NEWTONschen Interferenzfransen, wahrgenommen, die als Kurven gleicher Dicke zu bezeichnen sind, weil für alle Stellen einer solchen schwarzen Kurve überall der gleiche Abstand zwischen den beiden reflektierenden Flächen besteht. Da der Gangunterschied der interferierenden Strahlen sich um λ geändert haben muß, wenn der nächste schwarze Streifen auftreten soll, und da der den Gangunterschied bedingende Weg zwischen den beiden reflektierenden Flächen von dem einen Strahl doppelt zurückgelegt wird, hat sich zwischen zwei aufeinanderfolgenden schwarzen Fransen der Abstand der beiden Flächen gerade um $\lambda/2$ geändert. Zwischen den Orten einer $n$ten und $m$ten Franse besteht also eine Abstandsdifferenz von $(m - n) \cdot \lambda/2$.



Abb. 87. Die Radiusmessung mittels NEWTONscher Ringe. Wird z. B. eine erhabene Fläche R auf eine Planfläche $r = \infty$ aufgelegt, so erkennen wir beim Einblick von oben und bei Benutzung einfarbigen Lichts ein System von abwechselnd hellen und dunkeln Ringen, sog. Interferenzstreifen gleicher Dicke, deren Abstand voneinander ein Maß für den gesuchten Radius R ist. Ist der Radius des $n$ten Ringes ϱ_1, der des $(n + \varkappa)$ten Ringes ϱ_2 und beobachten wir bei der Wellenlänge λ, so ist

$$R = \frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}{\varkappa \cdot \lambda}.$$

Bringen wir eine kugelige Fläche vom Radius R (Abb. 87) auf eine ebene Fläche ($r = \infty$)[1]) und beleuchten wir von oben mit einfarbigem Lichte, so entstehen zwischen der Kugelfläche und der Planfläche kreisrunde Interferenzkurven, die wir am besten durch ein vergrößerndes Instrument betrachten, z. B. durch ein Mikroskop mit Vertikalilluminator, der das einfarbige Licht auf die reflektierenden Flächen wirft. Vom $n_1$ten bis zum $n_2$ten Ringe, die die Durchmesser $2\varrho_1$ und $2\varrho_2$ besitzen, folgen dann $\varkappa = (n_2 - n_1)$ schwarze Ringe auf den $n_1$ten Ring. Die zwischen den Orten dieser beiden Ringe bestehende Abstandsänderung beträgt somit

$$l_2 - l_1 = \varkappa \cdot \frac{\lambda}{2}, \tag{25}$$

[1]) Der Radius der kugeligen Fläche muß ein sehr großer sein, wenn gegen die Planplatte Interferenzringe sichtbar sein sollen.

wenn l_1 und l_2 die bezüglichen Abstände selbst vorstellen (Abb. 87). Diesen Abstandsunterschied $(l_2 - l_1)$ können wir anderseits auch durch den gesuchten Radius selbst ausdrücken. Es ist

$$l = R - \sqrt{R^2 - \varrho^2} = R - R \cdot \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}$$

oder, wenn wir die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatz unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung entwickeln, was zulässig ist, wenn wir voraussetzen, daß ϱ gegen R sehr klein ist, wie dies im allgemeinen für die nach dieser Methode beobachtbaren Radien der Fall ist:

$$l = R - R \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varrho^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{R}.$$

Demnach bekommen wir durch Einsetzen dieses Wertes in (25)

$$\frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}{R} = \varkappa \cdot \lambda. \tag{26}$$

Der gesuchte Radius R ist also gegeben durch die Bestimmungsgleichung:

$$R = \frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}{\varkappa \cdot \lambda}. \tag{27}$$

Die darin durch den Versuch zu bestimmenden Größen der Ringdurchmesser $2\varrho_1$ und $2\varrho_2$ messen wir auf einem ABBEschen Längenkomparator aus, während wir die Differenz der Ordnungszahlen einfach auszählen, beim innersten Ringe mit Null beginnend.

Die gleiche Formel gilt auch für Hohlflächen, die gegen eine ebene Fläche geprüft werden.

Gesuchter Radius R	Bekannter Radius r
erhaben	hohl: $R \gtrless r$
	∞
	erhaben
hohl	hohl
	∞
	erhaben: $R \gtrless r$

Wir können diese Art der Messung eines Kugelradius R gegen einen bekannten Radius r mit Hilfe der NEWTONschen Ringe auch ganz allgemein fassen. Wir müssen dabei nur darauf achten, daß wir theoretisch acht Fälle zu unterscheiden haben (s. nebenstehende Tabelle). Wir bezeichnen den gesuchten Radius R mit $\pm$, je nachdem er erhaben oder hohl ist, während für den bekannten Radius r das Umgekehrte gilt; r ist $\mp$, je nachdem diese Fläche erhaben oder hohl ist. Ist dann ϱ der Radius des der Auflage der beiden Flächen R und r benachbarten Ringes, der also dem kleinsten Flächenabstand entspricht, während ϱ_2 der Radius des dem größeren Flächenabstand entsprechenden Ringes ist, und ist λ die Wellenlänge des verwendeten einfarbigen Lichtes und $\varkappa$ die Differenz der Ordnungszahlen der beiden beobachteten Ringe, so erhalten wir den gesuchten Radius R vorzeichenrichtig aus der Gleichung

$$R = \frac{r}{1 + \frac{r}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} \cdot \varkappa \cdot \lambda} \tag{28}$$

oder

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{\varkappa \cdot \lambda}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}}. \tag{29}$$

wobei nur die Bedingung erfüllt sein muß, daß ϱ/R eine sehr kleine Größe ist, deren vierte Potenz vernachlässigt werden darf. Diese Bedingung hat zur Folge, daß das Verfahren, dem die Formeln (27) und (28) bei der Ausrechnung zugrunde gelegt werden, nur für genügend große Radien angewendet werden darf.

γ) Die Ermittelung der Brechungszahlen.

73. Die Bestimmungsmethoden, um die Brechzahlen der optischen Teile von Instrumenten zu finden. Im allgemeinen werden wir die Brechungszahlen schon vor der Fertigstellung des optischen Systems am Rohglas ermitteln. Dazu kommen die in einem früheren Abschnitt dieses Bandes[1]) behandelten Methoden in Frage.

Für die Bestimmung am fertigen Stück ist die Form desselben ausschlaggebend.

Besitzt das Stück eine Planfläche, so benutzen wir zur Messung das ABBEsche Flüssigkeitsrefraktometer, das Kristallrefraktometer, das KOHLRAUSCHsche Totalreflektometer oder ein ähnliches Gerät.

Liegt eine Planparallelplatte vor, so können wir neben dem Obigen auch nach dem Verfahren von DE CHAULNES vorgehen.

Schwieriger wird die Ermittelung der Brechzahlen, wenn wir es mit Linsen zu tun haben. Im allgemeinen halte ich es hier für die sicherste Methode, den Zylinder der Linse plan anzuschleifen und an dieser Planfläche die Brechzahlen nach einer der bekannten Methoden zu ermitteln. Etwas mehr Umstände bereitet schon die Anwendung der EXNERschen Methode.

Noch schwieriger aber gestaltet sich die Messung an fertigen Linsen nach dem von TSCHERNING[2]) und von ERFLE[3]) nach einem Vorschlage von BREWSTER ausgearbeiteten Eintauchverfahren. In einem Glastrog mit planparallelen Wänden befindet sich ein Flüssigkeitsgemisch[4]), dessen Brechungszahl durch Zusatz einer der gemischten Flüssigkeiten geändert werden kann. Wir können diesen Trog in den parallelen Strahlengang zwischen zwei auf Unendlich eingestellte Fernrohre oder vor ein Fernrohr mit Autokollimationsokular bringen. Im letzteren Falle wird die Hinterfläche des Troges zur Hebung der Intensität des reflektierenden Lichtes am besten versilbert. Beobachtet wird mit einfarbigem Lichte. In beiden Fällen darf sich die Unendlichkeitseinstellung des Beobachtungsfernrohrs nicht ändern, einerlei welche Brechzahl die Flüssigkeit besitzt. Tauchen wir nun die zu prüfende Linse in die Flüssigkeit, so wird das System Trog-Linse im allgemeinen Linsenwirkung aufweisen, die sich dadurch kundgibt, daß das Bild nicht mehr in der Unendlichkeitsstellung scharf erscheint. Wir ändern dann die Brechzahl der Flüssigkeitsmischung durch Zusatz der geeigneten Flüssigkeit so lange, bis das Bild wieder in der Unendlichkeitsstellung scharf ist, bis also keine Linsenwirkung mehr vorliegt. In diesem Falle ist dann die Brechzahl der Linse für die benutzte Farbe gleich der der gerade vorhandenen Flüssigkeitsmischung, die wir am PULFRICHschen Refraktometer, bei Verwendung des Flüssigkeitstroges, messen können. Diese Abstimmung des Gemisches muß für jede gewünschte Wellenlänge wiederholt werden.

CHALMERS[5]) umgeht diese Bestimmung, indem er die Einstellungsdifferenz eines Autokollimationsfernrohres feststellt, wenn die Flüssigkeit nahezu gleiche Brechung wie die Linse besitzt. Bei der Berechnung werden dann aber noch die Linsenradien gebraucht, deren Kenntnis anderseits wieder nicht erforderlich ist, wenn die Messung mit einer zweiten bekannten Flüssigkeit wiederholt wird.

---

[1]) Hierüber und über die im folgenden genannten Verfahren ist Ausführliches in diesem Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen nachzulesen.

[2]) M. TSCHERNING, Kgl. Danske Vid. Selsk. Math. Pys. Medd. I. Bd. 9, S. 3—20. 1918.

[3]) H. ERFLE, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 40, S. 165—168. 1919.

[4]) Vgl. dazu diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 23 u. 39.

[5]) S. D. CHALMERS, Proc. Opt. Conv. Bd. 1, S. 198—201. 1905.

Schließlich sei noch auf ein Verfahren hingewiesen, das allerdings meist ziemlich ungenaue, kaum verwertbare, nur orientierende Werte liefert. Dies Verfahren besteht darin, daß für die Linse, nachdem deren Radien und Dicke ermittelt sind, bei einfallenden einfarbigen Parallelstrahlen die Schnittweite bestimmt wird. Mit den so gemessenen Werten wird mit Hilfe der Durchrechnungsformeln rückwärts die Brechungszahl gefunden werden können. Etwas günstiger werden die Ergebnisse, wenn es gelingt, die Schnittweite für Strahlen einer bestimmten Einfallshöhe festzustellen, was sich mit Hilfe der HARTMANNschen Methode (Ziff. 123) durchführen läßt.

c) Die Messung der Grundgrößen der optischen Abbildung.

α) Die Ermittelung der Lage der Brennebenen.

74. Allgemeine Bemerkungen. Bei der Auswahl des Verfahrens zur Ermittelung der Brennpunktslage eines optischen Systems müssen wir darauf achten, zu welchen Zwecken die Lage bekannt sein muß. Für die in der Praxis vorkommenden Fälle werden wir im allgemeinen mit einem weniger genauen Verfahren zufrieden sein können. Handelt es sich aber darum, durch genaue Untersuchungen den Korrektionszustand eines Systems festzustellen, so werden wir nur die genauesten Verfahren, die HARTMANNsche Extrafokalmethode oder die ABBEsche Fokometermethode, in Anwendung bringen können, weil diese beiden Methoden Rücksicht auf die Abhängigkeit der Brennpunktslagen von Zone und Wellenlänge nehmen. Unter Umständen käme dafür auch noch die FOUCAULTsche Messerschneidenmethode in Frage, doch erreichen deren Ergebnisse nicht die von den beiden genannten Methoden gelieferte Genauigkeit.

Da, wie bekannt, bei allen Systemen eine ideale Vereinigung der aus dem Unendlichen kommenden Strahlen in einem einzigen Brennpunkt wegen der vorhandenen Systemfehler (sphärische und chromatische Abweichungen) nicht stattfindet, müssen wir uns immer dessen bewußt sein, daß wir nach den gewöhnlichen Einstellverfahren nur eine mittlere Brennpunktslage[1]) auffinden werden, die bei einem System, das keine Abweichungen höherer Ordnung besitzt, jedenfalls zwischen dem Brennpunkt der achsennahen Strahlen und dem der Randstrahlen zu suchen sein wird. Die Strahlen der verschiedenen Zonen treffen eine Einstellebene in (dem Abstand ihrer Brennpunkte von dieser Ebene entsprechenden) Zerstreuungskreisen, die alle innerhalb des größten Zerstreuungskreises liegen und damit die Erscheinung eines *Zerstreuungsscheibchens* geben. Wir könnten nun vermuten, daß das beobachtende Auge beim Scharfeinstellen die Einstellungsebene auswählt, wo das Zerstreuungsscheibchen am kleinsten wird. Bei dieser Einstellung beträgt theoretisch der Scheibchendurchmesser $^1/_4$ der Zerstreuungsscheibe, die auftritt, wenn die Einstellebene in den Brennpunkt der achsennahen Strahlen gebracht wird. Außerdem liegt diese „Stelle engster Einschnürung" näher beim Brennpunkt der Randstrahlen und teilt den Abstand zwischen dem Brennpunkt der Randstrahlen und dem der achsennahen Strahlen im Verhältnis 1:3. Schon GAUSS[2]) aber hat darauf aufmerksam gemacht, daß nicht nur die Größe des Zerstreuungsscheibchens, sondern auch die Helligkeitsverteilung im Innern dieses Scheibchens eine wesentliche, ausschlaggebende Rolle für die Scharfstellung mit dem Auge spielt. Doch führt auch dann die rein geometrische Behandlung des Problems nicht vollständig zum Ziel. Nach

[1]) S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Theorie d. opt. Instr. 3. Aufl., Kap. 7, Artikel H. BOEGEHOLD, S. 238. Leipzig: J. A. Barth. 1924.

[2]) C. F. GAUSS, Gehlers Wörterbuch, Artikel Linsenglas, Bd. VI, 1. Abt., S. 437 bis 439. Leipzig: E. B. Schwickert 1831.

STREHL[1]) muß unbedingt die Beugung mit in Betracht gezogen werden, wonach dann nicht die „Stelle engster Einschnürung", sondern die Mitte zwischen den Brennpunkten der achsennahen und der Randstrahlen als Punkt bester Bildschärfe für das Auge anzusehen ist.

Liegt eine sphärisch gut korrigierte Linsenfolge vor, oder brauchen wir aus sonstigen Gründen keine Rücksicht auf den Korrektionszustand der zu untersuchenden Linsenfolge zu nehmen, so können wir durch ein einfaches Mittel die Einstellung auf den Bildpunkt bzw. Brennpunkt verschärfen. Wie beim HENDERSCHEN Scheitelbrechwertmesser (Ziff. 76) bringen wir vor das Objektiv eine Blende mit zwei symmetrisch gelegenen Spalten, Löchern oder sonstigen Öffnungen. Dadurch erhalten wir hinter dem Objektiv zwei gegeneinander abgegrenzte, abbildende Strahlenbüschel, die außerhalb des Brennpunkts immer getrennt erscheinende Beugungsscheibchen liefern, die nur im Brennpunkt zusammenfallen und dort als ein einziges, gutes Bildscheibchen wahrgenommen werden, wenn wir ein leuchtendes Ding, z. B. einen künstlichen oder natürlichen Stern, verwenden. Das Bild eines solchen Sternes wird sich also, wenn wir etwas außerhalb des Brennpunkts gehen, sofort in Richtung der beiden Öffnungen auseinanderziehen. Verwenden wir ein in Salter gerichtetes, von hinten beleuchtetes Fadenkreuz als Ding, so erscheint beim Herausgehen aus dem Brennpunkt der Arm des Fadenkreuzes zweifach, der senkrecht zur Richtung der beiden Öffnungen steht.

Ist der Ort der Brennpunktseinstellung gefunden, so gilt es nur noch, die Lage dieses Punktes gegenüber dem System selbst festzulegen. Dazu wird als Bezugspunkt entweder der dem Brennpunkt zu liegende Linsenscheitel, die Ebene des Fassungsrandes oder ein anderer geeigneter, mit dem System selbst fest verbundener Punkt gewählt, dessen Abstand vom Brennpunkt, auf der optischen Achse gemessen, mit geeigneten Hilfsmitteln festgestellt wird. Im allgemeinen dürfte es wohl heute üblich sein, den dem Brennpunkt zugewandten, d. h. den dem gleichen Abbildungsraum zugehörigen Linsenscheitel als Bezugspunkt zu wählen, in welchem Falle wir also damit unmittelbar die Schnittweite der achsenparallelen Strahlen ausmessen. Die Ermittelung dieser Schnittweite achsenparalleler Strahlen und nicht einer anderen Abstandsangabe ist auch deshalb von Vorteil, weil sie später bei der Bestimmung der Brennweite und der Lage der Hauptpunkte mehrfach gebraucht wird. Wir wollen uns deshalb bei den folgenden Verfahren auf das Ausmessen dieser Schnittweite beschränken.

75. Die Verfahren, die auf Bildschärfstellung beruhen. Wir verwenden einen im Unendlichen befindlichen Dingpunkt, nach dem wir das zu prüfende System richten, so daß der Bildpunkt auf die optische Achse des Systems in den gesuchten Brennpunkt zu liegen kommt. Je nach der Genauigkeit, die wir wünschen, können wir nun die vorzunehmende Längenmessung auf verschiedenen Wegen durchführen. Genügt schon die Scharfstellung auf einer Mattscheibe, so messen wir einfach deren Abstand vom Linsenscheitel mit einem guten Maßstab aus. Eine bessere Genauigkeit erzielen wir durch Verwendung eines optischen Hilfsgerätes, sei es, daß wir mit einer Lupe, einem Mikroskop oder einem auf endliche Entfernung eingestellten Fernrohr beobachten. Im letzteren Falle können wir, falls der Fernrohrauszug nicht ausreicht, vor dem Fernrohrobjektiv noch ein positives Zusatzsystem anbringen, so daß der Dingpunkt für dieses Beobachtungsfernrohr, das dadurch eigentlich zu einem mehr oder minder langbrennweitigen Mikroskop geworden ist, in den vorderen Brennpunkt des

[1]) K. STREHL, Theorie des Fernrohres auf Grund der Beugung des Lichts, 1. Teil, S. 69. Leipzig: J. A. Barth 1894.

Zusatzobjektivs zu liegen kommt, wenn wir das ursprüngliche Fernrohr ohne Zusatzsystem auf Unendlich eingestellt haben. Um die Scharfeinstellung dem Auge zu erleichtern, werden wir als Okular ein solches mit Fadenkreuz oder ähnlicher Einstellmarke wählen, da wir damit die Scharfstellung in eine Einstellung auf Parallaxenfreiheit zwischen Bild und Fadenkreuz (vgl. Ziff. 68) umwandeln.

Die Aufstellung der Meßanordnung geschieht vorteilhaft auf einer mit Millimeterteilung versehenen optischen Bank. Das Beobachtungsmikroskop befindet sich auf einem Reiter, dessen Lage mit Hilfe eines Nonius an der Bankteilung festgestellt werden kann. Nach gehöriger Ausrichtung der einzelnen Teile wird zunächst das Mikroskop auf den Brennpunkt eingestellt, um danach so weit verschoben zu werden, bis der z. B. durch Staub oder Fingerspuren sichtbar gemachte Linsenscheitel im Fadenkreuz parallaxenfrei einsteht. Die Differenz der Noniusablesungen in diesen beiden Mikroskopstellungen ist unmittelbar die gesuchte Schnittweite der achsenparallelen Strahlen.

Dieses Verfahren läßt sich nicht nur auf positive, sondern auch auf negative Linsen anwenden und auf solche positive Systeme, die keinen reellen Brennpunkt haben, wie z. B. beim HUYGHENSschen Okular, wo der dingseitige Brennpunkt virtuell ist. Im letzteren Falle müssen wir nur ein Beobachtungsmikroskop mit genügend großem Dingabstand verwenden und darauf achten, daß die Schnittweite der achsenparallelen Strahlen auch hier vom bildseitigen Linsenscheitel zu rechnen ist, also vom Scheitel, der auf der Seite des Beobachtungsmikroskops liegt, während der Bildpunkt selbst ein scheinbarer ist.

Was nun den unendlich-fernen Dingpunkt anbetrifft, so können wir entweder einen wirklich unendlich-fernen Lichtpunkt, wie z. B. einen Stern, oder einen irdischen Dingpunkt, verwenden, von dem nur zu verlangen ist, daß er in genügend großer Entfernung vom zu prüfenden System sich befindet. Beachten wir, daß auf Grund der Grundgleichung für die Abbildung

$$x \cdot x' = -f^2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}$$

der Abstand x des Dingpunktes vom dingseitigen Brennpunkt im Verhältnis zur Brennweite um so größer sein muß, je kleiner x', der Abstand des Bildes vom bildseitigen Brennpunkt, werden soll, so erkennen wir, daß wir ein vernachlässigbares x' bekommen werden, wenn wir x sehr groß gegenüber f wählen. So müßte z. B. $x = 1000 \cdot f$ werden, wenn wir verlangen, daß die Abweichung der Einstellebene vom Brennpunkt, also x', nur 0,1% der Brennweite betragen soll, was etwa der besten mit solchen Einstellmethoden zu erzielenden Genauigkeit entspricht. Für Systeme von kurzer Brennweite ($f < 30$ mm), wie Mikroskopobjektive, Okulare u. ä. können also schon die in einem größeren Laboratorium erzielbaren Strecken (z. B. 30 m) als genügend groß betrachtet werden.

Stehen keine größeren Strecken zur Verfügung, so können wir uns einen im Unendlichen liegenden Dingpunkt dadurch herstellen, daß wir einen auf Unendlich eingestellten Hilfskollimator (Ziff. 77) verwenden, in dessen Brennebene sich das Ding z. B. ein Spalt, eine Lochblende, eine Strichplatte u. ä. befindet. Der Gebrauch eines solchen Hilfskollimators verlangt aber, da wir nur vernachlässigbare Fehler beim Messen der Schnittweite begehen wollen, daß wir die Brennweite F des Kollimators größer wählen als die Brennweite f des zu prüfenden Systems. Ein Fehler Δx, in der Einstellung des Kollimators F auf Unendlich, bedingt nämlich bei der Einstellung des Prüfsystems einen Fehler $\Delta x'$, der der Proportion

$$\Delta x' : \Delta x = f^2 : F^2 \tag{30}$$

genügt[1]), der also kleiner als Δx ist und um so kleiner wird, je größer F gegenüber f gewählt wird. Die Vergrößerung von F kann aber anderseits auch nicht zu weit getrieben werden, wenn wir nicht gleichzeitig auch den Durchmesser, die Öffnung des Systems wesentlich vergrößern, weil nur für nicht zu spitze Büschel eine genügend scharfe Einstellung erzielt werden kann.

Sollte aber kein Hilfskollimator mit genügend großer Öffnung zur Verfügung stehen, so können wir auch mit einem Kollimator kleinerer Öffnung, der aber eine hinreichend große Brennweite besitzen muß, auskommen, indem wir die Anordnung so, wie in Abb. 88 gezeichnet, treffen, wobei der von HARTMANN[2]) ursprünglich verwendete, unter 45° gegen die optischen Achsen geneigte Planspiegel durch ein Pentagonalprisma[3]) ersetzt ist. Die aus dem Fernrohr B kommenden Parallelstrahlen werden dadurch senkrecht abgelenkt und achsenparallel in das zu prüfende Objektiv geworfen. Das Pentagonalprisma P befindet sich auf einem Schlitten, der senkrecht zur optischen Achse des zu prüfenden Systems O sich verschieben läßt. Das Pentagonalprisma macht das Verfahren unabhängig von einer im anderen Falle zu fordernden genauen Schlittenführung, da bei nur kleinen Führungsfehlern des Schlittens der Strahl immer noch die gleiche Ablenkung um 90° erfährt. Beobachten wir mit Hilfe eines Mikroskops M das von dem System O in F entworfene Bild, so werden wir beim Vorüberschieben des Pentagonalprismas vor dem Objektiv so lange ein Hin- und Herwandern des Bildes beobachten, als wir nicht das Mikroskop auf den Brennpunkt F selbst eingestellt haben. Wir ändern deshalb die Mikroskopeinstellung stetig solange, bis das zu beobachtende Bild beim Verschieben des Schlittens unbeweglich stehenbleibt, oder, da kein Objektiv aberrationsfrei ist, bis das Bild nur eine kleinste Bewegung ausführt.

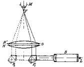


Abb. 88. Die Einstellung eines Systems O großer Öffnung auf Unendlich unter Zuhilfenahme eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs B kleinerer Öffnung, erfolgt zweckmäßig unter Zuhilfenahme eines Pentagonalprismas P_1 das auf einem senkrecht zur optischen Achse von O laufenden Schlitten aufgebracht ist und das den Strahlengang um genau 90° bricht derart, daß diese Ablenkung unverändert bleibt, auch wenn die Führung des Schlittens nicht einwandfrei ist. Durch Verschieben des Prismas P vor der Öffnung von O durchsetzen die aus B austretenden Parallelstrahlen nacheinander die verschiedenen Zonen des Prüfsystems O. Das Mikroskop M ist dann auf den Brennpunkt F eingestellt, wenn bei dieser Verschiebung das beobachtete Bild unverändert stehenbleibt.

Bei Benutzung eines Sternes, eines weit entfernten Lichtpunktes oder eines Hilfskollimators mit Lochblende im Brennpunkt, können wir zur Feststellung der Lage des Brennpunktes auch die Messerschneidenmethode nach FOUCAULT (Ziff. 121) zu Hilfe nehmen. Wir stellen dabei die Schneide gerade in solcher Entfernung vom System auf, daß bei ihrem Einschieben in den Strahlengang die dem dicht hinter dem Brennpunkt befindlichen Auge zunächst gleichmäßig hell erscheinende Objektivöffnung mit einem Schlage über ihre ganze Fläche

[1]) A. CORNU, Spectre normal du Soleil. Bd. II, S. 35 u. 36; J. HARTMANN, Eders Jahrb. f. Photogr. u. Reproduktionstechn. Bd. 16, S. 152 u. 153. 1902. Vgl. dazu auch Ziff. 89.

[2]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 109, § 48. 1904.

[3]) E. BRODHUN u. A. WETTHAUER, ZS. f. Instrkde. Bd. 40, S. 96—97. 1920; Tätigkeitsber. d. Phys.-Techn. Reichsanst. für 1919.

gleichmäßig dunkel wird. Dies ist nur dann der Fall, wenn wir gerade im Brennpunkt einschneiden.

76. Der Scheitelrefraktionsmesser von Henker. Hierher gehört der Scheitelrefraktionsmesser von Henker[1]), der zur Messung des Scheitelabstandes des hinteren Brennpunktes von Brillengläsern dient, dessen Kehrwert als Scheitelrefraktion bezeichnet wird, und der für die Korrektion des nicht rechtsichtigen Auges durch ein Brillenglas maßgebend ist. Die aus einem mit einem Testobjekt O ausgestatteten, auf Unendlich eingestellten Kollimator Ob_1 (Abb. 89)

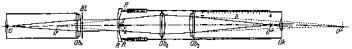


Abb. 89. Der Scheitelrefraktionsmesser nach Henker. Die aus dem auf Unendlich eingestellten Testkollimator Ob_1 austretenden Parallelstrahlen treten in das Brillenglas B ein, dessen Scheitel S sich im vorderen Brennpunkt F_2 des Hilfsobjektivs Ob_2 befindet. Das dabei im Brennpunkt O' des Brillenglases auftretende Bild wird durch Ob_2 nach O'' abgebildet, das seinerseits wieder mittels des Beobachtungssystems $Ob_3 Ok$ betrachtet wird, wobei das Bild in O''' liegt. An einer linearen Skala wird die dem Brillenglas zugehörige Dioptrienzahl abgelesen.

austretenden Parallelstrahlen treffen auf das Brillenglas B, in dessen Brennpunkt O' sie vereinigt werden. Um nun nicht den wirklichen Schnittweiten entsprechende Verschiebungen des Beobachtungssystems zu erhalten, die wir sonst mit einer kleinen Apparatur nicht mehr ausmessen können, bringen wir den bildseitigen Brillenglasscheitel S in den dingseitigen Brennpunkt F_2 eines feststehenden Hilfsobjektivs Ob_2. Ehe aber nun das Bild O'' entsteht, treten die Strahlen in ein Beobachtungsfernrohr $Ob_3 Ok$ ein, das meßbar verschiebbar ist und so eingestellt wird, daß das Bild O''' scharf erscheint. Da die Anordnung des Brillenglases im dingseitigen Brennpunkt des Hilfsobjektivs den Vorteil mit sich bringt, daß die Verschiebung des Fernrohrs in geradliniger Abhängigkeit zur Scheitelrefraktion steht, können wir die Teilung für die Verschiebung unmittelbar in Dioptrien ausführen.

Um den vorderen Brennpunkt F_2 des Hilfsobjektivs Ob_2 immer wieder ohne Schwierigkeiten finden zu können, ist die Ausführung so getroffen, daß sich dort eine feststehende Spitze S befindet. Die Zentrierung des Brillenglases B wird erleichtert durch einen federnden Ring R, an den das Brillenglas B angelegt und gegen die Spitze S gedrückt wird. Als Testobjekt O dient ein in Silber geritztes, von hinten beleuchtetes Fadenkreuz. Zur Verschärfung der Einstellung wird für achsensymmetrische Gläser vor den Kollimator Ob_1 eine Zonenblende Bl mit zwei symmetrisch gelegenen Löchern gebracht, was zur Folge hat, daß wir zwei enge Strahlenbüschel erhalten, die verursachen, daß wir den einen Strich des Kreuzes nur dann deutlich und einfach sehen, wenn das Beobachtungsinstrument parallaxenfrei auf das Bild eingestellt ist. Bei der geringsten Abweichung von dieser Einstellung erscheint sofort ein Doppelbild.

Bei Verwendung einer zum Strichkreuz parallelen Kreuzlochblende eignet sich das Gerät auch zur Messung von astigmatischen Gläsern, wobei diese allerdings noch so gedreht werden müssen, daß ihre beiden Hauptschnitte durch die beiden Striche des Kreuzes gehen, in welchem Falle wir überhaupt nur die Bilder der beiden Kreuzstriche erhalten.

Von Vorteil für die praktische Durchführung des Meßgeräts selbst ist es, den Strahlengang umzukehren. Für diesen Fall wird das Testobjekt an die

[1]) O. Henker, ZS. f. ophthalm. Opt. Bd. 3, S. 21–32. 1915.

Stelle O''' gebracht, während das jetzt im Kollimator Ob_1 in O entstehende Bildchen mit Hilfe eines Okulars betrachtet wird. Der Beobachtungskollimator Ob_1 + Okular wird ein für allemal unveränderlich auf Unendlich eingestellt. Die Handhabung ist im übrigen die gleiche, wie oben beschrieben. Insbesondere erfolgt auch hier wieder die Messung durch meßbare Verschiebung des Kollimators Ob_3, der jetzt aber nicht Beobachtungs- sondern Testkollimator ist.

77. Die Verfahren, um einen Kollimator auf Unendlich einzustellen, die gleichzeitig auch als weitere Verfahren zur Ermittelung der Brennpunktslage ausgebaut werden können. Die Einstellung eines Hilfskollimators auf Unendlich können wir in vierfacher Weise vornehmen.

a) An erster Stelle kommt naturgemäß als Ding ein Stern oder ein genügend weit entfernter irdischer Gegenstand, z. B. eine Kirchturmspitze oder ähnliches, in Frage, auf das wir den Kollimator bei Beobachtung durch ein auf seine Strichplatte eingestelltes Okular parallaxenfrei einstellen.

b) Verwenden wir als Okular des Hilfskollimators ein passend gebautes Autokollimationsokular[1]) und setzen wir vor das Objektiv einen guten Planspiegel, der so ausgerichtet ist, daß er die austretenden Strahlen wieder in den Kollimator zurücksendet, so brauchen wir nur das dadurch entstehende Autokollimationsbildchen der Strichplatte mit dieser selbst durch Verschieben des Autokollimationsokulars in parallaxenfreie Deckung zu bringen. Nur in diesem Falle steht die Strichplatte im Brennpunkt des Kollimatorobjektivs. Dieses Autokollimationsverfahren besitzt eine ausgezeichnete Einstellgenauigkeit.

c) In einem dritten Falle brauchen wir nach König[2]) drei Kollimatoren oder Fernrohre, um Unendlichstellung zu erreichen. Wir stellen zwei dieser Kollimatoren zum dritten parallaxenfrei ein und ändern dann die Einstellung des dritten derart und so lange, bis auch die zwei Hilfskollimatoren aufeinander parallaxenfrei eingestellt sind. Es stehen dann alle drei Kollimatoren auf Unendlich.

d) Kerber[3]) benutzt zwei Kollimatoren, die aufeinander eingestellt werden. In den Strahlengang zwischen den beiden wird schräg eine genau planparallele Platte eingeschoben. Nur wenn die diese Platte durchsetzenden Strahlen parallel sind, bleibt das im Beobachtungskollimator betrachtete Bild beim Drehen der Platte ruhig stehen. Sind die Strahlen dagegen z. B. schnittflüchtig, so wird durch die Platte der Schnittpunkt der Strahlen verschoben und dadurch auch eine seitliche Verschiebung des Bildes hervorgerufen. Wir werden deshalb die Einstellung des einen Kollimators und damit auch die des anderen so lange ändern, bis die Lage des beobachteten Bildes durch das Drehen der Platte nicht mehr beeinflußt wird. Besonders empfindlich wird dieses Verfahren bei Anwendung sehr dicker Planparallelplatten. Noch mehr gesteigert wird die Meßgenauigkeit, wenn wir mit Lippmann[4]) die Platte, unter etwa 45° gegen die optische Achse geneigt, nur vor eine Objektivhälfte setzen, wodurch wir im Beobachtungskollimator zwei Bilder erhalten, die in einem bestimmten Abstand voneinander stehen, wenn die Kollimatoren nicht auf Unendlich eingestellt sind. Mit zunehmender Annäherung an die Unendlichstellung wandert das durch die mit der Glasplatte bedeckte Objektivhälfte erzeugte Bild gegen das feststehende Bild der freien Hälfte, bis im Augenblick der Unendlichstellung beide Bilder sich decken. Dieses

[1]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. Kessler, Brechungszahlen. Ziff. 8.

[2]) S. Czapski u. O. Eppenstein, Theorie der opt. Instr., 3. Aufl., Kap. 21: A. König, S. 634. Leipzig: J. A. Barth. 1924.

[3]) A. Kerber, D. R. P. Nr. 11521 v. 27. IV. 1880; ZS. f. Instrkde. Bd. 1, S. 67—68. 1881.

[4]) S. Lippmann, Séanc. de la soc. franç. de phys. Nr. 174, S. 18—19. 1902; Journ. de phys. (4) Bd. 1, S. 625—626. 1902; C. R. Bd. 134, S. 16—17. 1902.

Verfahren ist nur dann einwandfrei, wenn die benutzte Planplatte nicht keilig, sondern vollkommen planparallel ist. Im allgemeinen werden solche Platten aber schwerlich vorhanden sein. Meist werden sie einen Keilfehler besitzen, weshalb wir nach LIPPMANNschem Vorschlage auch so vorgehen können, daß wir vor jede der beiden Hälften der Objektivöffnung eine Platte bringen. Diese beiden Platten sind aus einer größeren so herausgeschnitten, daß der Schnitt senkrecht zur Keilkante liegt. Wir treffen dann die Anordnung so, daß die beiden Platten senkrecht zueinander und gleichzeitig unter etwa 45° gegen die optische Achse geneigt stehen. Auch in diesem Falle bekommen wir zwei Bilder. Die Erscheinung ist symmetrisch und die Keilwirkung wird dadurch aufgehoben. Mit Annäherung der Kollimatoreinstellungen an die Unendlichstellung werden sich die beiden Bilder einander immer mehr nähern, um schließlich in der Unendlichstellung zusammenzufallen. Das Verfahren, die Kollimatoren auf Unendlich einzustellen, besteht deshalb darin, daß wir die Einstellung des einen Kollimators so lange ändern, bis die beiden Bilder im Beobachtungsfernrohr als eines erscheinen.

Diese zur Unendlicheinstellung eines Hilfskollimators entwickelten Methoden sind naturgemäß alle durch geeignete Änderungen im Aufbau gleichzeitig auch brauchbar, um die Lage des Brennpunktes zu bestimmen. Wir werden nach der Scharfstellung nur nötig haben, in bekannter Weise (Ziff. 74 und 75) den Abstand der Einstellebene vom zugeordneten Linsenscheitel zu messen.

Die Verfahren, die einen Hilfskollimator (Ziff. 74 und 75) verwenden, können wir auch so handhaben, daß wir den auf Unendlich eingestellten Kollimator als Beobachtungsfernrohr benutzen und auf der Dingseite des Prüfsystems ein geeignetes Ding (Strichplatte od. ä.) so lange verschieben, bis sein Bild mit dem Fadenkreuz des Beobachtungsrohrs parallaxenfrei einsteht. Dieses Verfahren hat HARTMANN (vgl. Ziff. 89) „Umkehrmethode" genannt. Der Vorteil der Methode gründet sich auf die schon erwähnte Tatsache (Ziff. 75), daß ein Fehler bei der Einstellung des einen Kollimators sich im Verhältnis der Quadrate der Brennweiten beim anderen Kollimator äußert. Verwenden wir einen Hilfskollimator, dessen Brennweite F größer als die Brennweite f des zu prüfenden Systems ist, so macht sich also ein Fehler Δx bei der Einstellung des Prüfkollimators f auf $\Delta x' = \Delta x \cdot \frac{F^2}{f^2}$ vergrößert im längerbrennweitigen Beobachtungskollimator F bemerkbar. Ein geringer Einstellfehler $\Delta x'$, den wir schließlich noch für den Beobachtungskollimator F zulassen müssen, würde somit nur stark verkleinert im zu prüfenden Kollimator f als $\Delta x = \Delta x' \cdot \frac{f^2}{F^2}$ auftreten.

78. Die Ermitteiung derBrennpunktslage bei der ABBEschen Fokometermethode. Die Anwendung der ABBEschen Fokometermethode liefert uns neben der Brennweite f (Ziff. 97) noch den Abstand $\mathfrak{S}H_0$ (Abb. 102) des zugehörigen Hauptpunktes H_0 vom Linsenscheitel $\mathfrak{S}$ (Ziff. 103). Die Schnittweite $F\mathfrak{S}$ für die achsenparallelen Strahlen erhalten wir deshalb hierbei unmittelbar als Differenz

$$\mathfrak{S}F = f - H_0\mathfrak{S}. \tag{31}$$

Zu beachten ist dabei, daß wir mit diesem Verfahren im strengen Sinne nur die Schnittweiten achsenparalleler Strahlen in Abhängigkeit von der Einfallhöhe (Zone) und des zur Messung benutzten einfarbigen Lichtes ermitteln können. Bei Beobachtung mit weißem Licht werden wir nur einen mittleren Wert dieser Schnittweiten erhalten, der dadurch aber naturgemäß mit wesentlich größeren Fehlern behaftet ist, als sie sonst dieser ABBEschen Methode eigen sind.

79. Die Bestimmung der Brennpunktslage mit Hilfe der HARTMANNschen Extrafokal-Methode. Das genaueste Verfahren neben dem eben genannten

ABBESchen zur Ermittelung der Lage des Brennpunktes ist die HARTMANNsche Extrafokalmethode (Ziff. 123). Bei ihr wird die Lage des Brennpunktes bestimmt in bezug auf zwei außerhalb des Brennpunktes des untersuchten Systems senkrecht zur optischen Achse desselben stehende Ebenen, deren Entfernung vom zugewandten Linsenscheitel durch eine einfache Abstandsmessung mit bester Längenmeßgenauigkeit festgestellt werden kann. Damit ist wieder die Möglichkeit der rechnerischen Ermittelung der gesuchten Schnittweite gegeben. Auch hiernach wird die Lage des Brennpunktes insbesondere in seiner Abhängigkeit von Zone und Wellenlänge bestimmt.

β) Die Ermittelung der Brennweite.

80. Allgemeine Bemerkungen. Für die Herleitung der bei der Brennweitenbestimmung üblichen Verfahren wollen wir von dem sonst in der geometrischen Optik geübten Gebrauch etwas abweichen und die Abbildgleichung in der Form

$$x \cdot x' = f^2 \tag{32}$$

verwenden, wobei wir uns nun aber dessen bewußt sein müssen, daß wir alle Strecken im Dingraum entgegen der Lichtrichtung und alle Strecken im Bildraum in der Lichtrichtung positiv rechnen.

Da wir dabei voraussetzen, daß die Brennweiten des Ding- und Bildraumes einander gleich sind, da ja beiderseits das gleiche optische Mittel Luft angenommen wird, ist dann die Lateralvergrößerung

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f} \tag{33}$$

die Winkelvergrößerung

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{x}{f} = \frac{f}{x'}. \tag{34}$$

Die zuerst zu klärende Frage vor Inangriffnahme der Messung der Brennweite einer zu prüfenden Linsenfolge wird stets die Klarstellung der zu fordernden Meßgenauigkeit sein. Ganz abwegig erscheint es mir dort, wo geringere Meßgenauigkeiten genügen, mit Verfahren größerer Meßgenauigkeit zu arbeiten, die nicht nur mehr Mühe machen, deren Ergebnis auch gar nicht voll verwertet werden kann.

Bei der Auswahl des Verfahrens müssen wir außerdem auch noch davon ausgehen, welche optischen Bedingungen der praktisch vorliegende Fall gerade verwirklicht. Es ist nicht angängig, jede Methode für jeden Fall zu gebrauchen. Im allgemeinen ist es vorzuziehen, die Methode so auszusuchen, daß die untersuchte Linsenfolge dabei möglichst in ihrer Gebrauchsstellung oder wenigstens in deren Nähe benutzt wird. Fernrohre werden für Fernsicht gebraucht, wenn also das Ding im Unendlichen liegt. Für Fernrohrobjektive werden wir deshalb die Brennweite nach Verfahren ermitteln, wo entweder Ding oder Bild im Unendlichen liegt, wie z. B. Ziff. 89, 94, 97, u. a. Bei Mikroskopobjektiven liegt das Ding nahezu im Brennpunkt; dafür kämen also die Verfahren Ziff. 90, 97, 98, u. a. in Frage.

Die Durchführung der einzelnen Verfahren geschieht, wo wir im folgenden nichts anderes vermerkt finden, auf einer mit Teilung versehenen optischen Bank, während die Zeiten zweckmäßig mit Ablesenonien ausgerüstet sind.

Bei der Messung ist auf ein gutes Ausrichten aller Teile zueinander zu achten, weil dies eine wesentliche Vorbedingung zur Erzielung bester Genauigkeit ist.

Bildscharfstellungen erfolgen immer so, daß das Bild mit einer Marke im Beobachtungsinstrument parallaxenfrei eingestellt wird (Ziff. 68, 74 und 75).

Werden dabei ausgedehntere Strecken senkrecht zur optischen Achse gemessen, so müssen solche Strecken immer symmetrisch zur optischen Achse des untersuchten Systems gelegen sein.

Verwenden wir ding- oder bildseitig einen auf Unendlich eingestellten Hilfskollimator, so muß von diesem verlangt werden, daß er, um einen dabei unter Umständen zu begehenden Fehler auf einen kleinsten Teil herabzudrücken, wesentlich länger brennweitig ist als das damit untersuchte System (vgl. dazu Ziff. 75, 77 und 89).

Um die Genauigkeit des Ergebnisses zu erhöhen, werden wir die Messung der Brennweite nach dem gleichen Verfahren mehrmals mit anderen Zahlen wiederholen.

Für die meisten praktisch vorkommenden Fälle genügt nach meinen Erfahrungen im allgemeinen eine Genauigkeit von 1‰. Nur bei Paarungen von Objektiven, wie sie z. B. für stereoskopische Geräte gebraucht werden, wird eine größere Genauigkeit notwendig sein. Nun aber nicht etwa eine größere absolute Meßgenauigkeit, sondern nur eine größere Vergleichsgenauigkeit (vgl. Ziff. 94). Die absoluten Werte selbst brauchen auch hierbei nicht genauer als auf 1‰ bekannt zu sein.

Beachten wollen wir bei allen Brennweitenmessungen immer, daß wir in der Praxis das Hauptgewicht auf die Wirkung des untersuchten Systems bei voller Öffnung legen und nicht auf die Wirkung einzelner Zonen allein. Da kein System vollkommen frei von Abweichungen, Zonenfehlern ist, hat es gar keinen Zweck, die Meßgenauigkeit bei voller Öffnung etwa noch wesentlich steigern zu wollen. Alle Bemühungen werden dadurch hinfällig, daß jedes Verfahren bei voller Öffnung nur soweit eine Genauigkeitssteigerung zuläßt, als es der Korrektionszustand des Systems gestattet.

Nur zur Ermittelung des Korrektionszustandes selbst ist eine wesentliche Genauigkeitssteigerung notwendig und auch erreichbar, weil wir hierbei die Brennweiten der einzelnen Zonen ermitteln, die wir je nach Wunsch und Bedarf so eng als möglich wählen können.

Zur Messung von Brennweiten sind sehr zahlreiche Verfahren angegeben worden. Wir werden deshalb im folgenden nur die gebräuchlichsten Verfahren, die sich im Laboratorium schnell und sicher durchführen lassen, ausführlicher besprechen. Dabei ordnen wir die einzelnen Methoden je nach der Art der Anordnung und je nach den dabei ermittelten Größen in verschiedene Gruppen ein.

1. Die rechnerische Ermittelung der Brennweite.

81. Die Verwendung der Durchrechnungsformeln. Wenn wir die Bestimmungsstücke des Systems, als da sind, Dicken und Luftabstände, Radien und Brechungszahlen der einzelnen Linsen auf Grund eines der in Ziff. 63—73 angegebenen Verfahren gemessen haben, können wir mit Hilfe der Durchrechnungsformeln[1] die Brennweite berechnen, sowohl für jede Zone, d. h. für jede Einfallshöhe als auch für jede Wellenlänge, wodurch gleichzeitig der Korrektionszustand des Systems gefunden ist. Da die Durchrechnung auch die Schnittweiten liefert, sind neben der Lage der Brennpunkte auch die Hauptpunktslagen damit rechnerisch ermittelt.

2. Die Brennweitenbestimmung aus der Lage der Grundpunkte.

82. Die Ermittelung der Lage der Brenn- und Hauptpunkte. Sind wir in der Lage, die Schnittweite der achsenparallelen Strahlen nach einem der in Ziff. 74—79 mitgeteilten Verfahren und die Lage der Hauptpunkte gegen-

[1] Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel W. MERTÉ, Geometrische Optik. Ziff. 29 ff.

über den Linsenscheiteln nach einem der in Ziff. 102 bis 106 angegebenen Verfahren durch Versuch auszumessen, so ergibt eine einfache Addition die gesuchte Brennweite.

In vielen Fällen gelingt es auch, die Hauptpunktabstände $\mathfrak{S}H$ bzw. $H'S$ (Abb. 93) durch Rechnung mit genügender Genauigkeit festzustellen.

In bestimmten Fällen von Einzellinsen können wir die Lage der Hauptpunkte unmittelbar angeben. Eine Brechzahl $n = 1{,}5$ vorausgesetzt ergibt sich aus den Durchrechnungsformeln, daß bei einer doppelterhabenen Linse mit beiderseits gleicher Krümmung die Hauptpunkte die Dicke der Linse in drei gleiche Teile zerlegen. Bei einer planhohlen oder planerhabenen Linse liegt ein Hauptpunkt in der gekrümmten Fläche, der andere um $^1/_3$ der Linsendicke von dieser gekrümmten Fläche aus nach dem Linseninnern. Für sehr dünne Linsen, oder dort wo keine große Genauigkeit erforderlich ist, wird von der Linsenmitte aus gerechnet.

3. Die Bestimmung der Brennweite durch Ermittelung von Bildorten auf der Achse bei Bildscharfstellung.

88. Die Bestimmung von Ding- und Bildweite. Dünne Linsen und große Brennweiten. Bei einfachen dünnen Linsen und auch dort, wo es uns nur darauf ankommt, die ungefähre Brennweite zu kennen, legen wir der Messung der Brennweite die Abbildgleichung in der Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \tag{35}$$

zugrunde, wobei wir unter a und a' die Abstände von Ding bzw. Bild von ihren zugeordneten Hauptpunkten verstehen. Für den praktischen Fall setzen wir diese Abstände von den Hauptpunkten gleich den Abständen von der Linsen- oder Systemmitte, die wir durch Ausmessen für zwei zugeordnete Punkte leicht ermitteln können. Zwei zugeordnete Punkte legen wir in einfachster Weise dadurch fest, daß wir zu einem Ding, z. B. einer beleuchteten Teilung oder Strichplatte, deren Abstand von der Linse größer als deren Brennweite ist, den Bildpunkt dadurch aufsuchen, daß wir eine Mattscheibe im Bildraum so einstellen, allenfalls unter Zuhilfenahme einer Einstell-Lupe, daß das Bild darauf scharf erscheint.

Dieses Verfahren ist jedoch ziemlich roh und ungenau. Es leistet jedoch vor allem wegen seiner Einfachheit dann gute Dienste, wenn der durch ungenaue Berücksichtigung der Hauptpunktlage begangene Fehler, infolge des sehr großen Wertes der zu ermittelnden Brennweite, vernachlässigbar klein ist, um so mehr, als für den Fall sehr großer Brennweiten die anderen genauen Methoden teils versagen, teils auch keine genaueren Werte liefern.

Für große Brennweiten ist das Verfahren auch in folgender Weise durchführbar. Ein Hilfsfernrohr wird fest auf ein Ding eingestellt, das den Abstand a' vom Fernrohrobjektiv hat. Wir setzen das zu untersuchende System dicht vor das Hilfsfernrohr und müssen dann das Ding verschieben, damit das Bild im Fernrohr abermals scharf erscheint. Für diese Scharfstellung befindet sich das Ding im Abstande a vor dem Fernrohr. Beachten wir, daß bei dieser Beobachtung, bei Vernachlässigung von Dicke und Abstand der beiden Systeme voneinander, die Entfernung a' nichts anderes darstellt als eine scheinbare Bildweite für das Prüfsystem, dessen Brennweite f wir suchen, während die Dingweite a ist, so erhalten wir die Brennweite aus der Beziehung (35) als

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} \tag{36}$$

aus welcher Gleichung wir bei vorzeichenrichtigem Einsetzen von a und a' die Brennweite auch vorzeichenrichtig erhalten.

84. Die Bestimmung großer Brennweiten mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Beobachtungsfernrohres von bekannter Objektivbrennweite. — Die Autokollimationsmethode. Wir benutzen ein Beobachtungsfernrohr B, am besten mit sehr großer Brennweite F, das wir in bekannter Weise (Ziff. 77) auf Unendlich einstellen, indem wir entweder das Fernrohr nach einem sehr weit entfernten Punkt richten, oder was noch besser und für Laboratoriumszwecke noch geeigneter ist, auf die Strichplatte eines auf Unendlich eingestellten gleichartigen zweiten Fernrohres, eines sog. Kollimators K, parallaxenfrei einstellen (Abb. 90a). Wir setzen das Prüfsystem O dicht vor das Objektiv des Fernrohres (Abb. 90b) und müssen, um das nun hinter dem Fernrohrobjektiv entstehende Bild A' parallaxenfrei mit dem Fadenkreuz des Beobachtungsokulares zur Deckung zu bringen, dieses Okular entsprechend aus der Unendlichkeitsstellung heraus verschieben, um eine bestimmte Strecke Δ, deren Größe wir durch Noniusablesung an der Auszugsmillimeterteilung oder an der Teilung der optischen Bank, auf der wir die Anordnung aufgestellt haben, auf Zehntelmillimeter genau ermitteln können. Bei positiven Systemen O muß der Auszug verkürzt, bei negativen verlängert werden. Entsprechend rechnen wir Δ negativ bzw. positiv. Ist der Abstand der einander benachbarten Hauptpunkte von Prüfobjektiv und Fernrohrobjektiv (Abb. 90b) gleich d, so ist die gesuchte Brennweite f des Prüfobjektivs gegeben durch die Gleichung

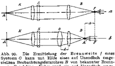


Abb. 90. Die Ermittelung der Brennweite f eines Systems O kann mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Beobachtungsfernrohres B von bekannter Brennweite F erfolgen. Dabei wird ein auf Unendlich eingestellter Testkollimator K zu Hilfe genommen, der allerdings auch durch einen Planspiegel S ersetzt werden kann, wenn wir bei Verwendung eines Autokollimationsokulars am Fernrohr B das Verfahren als Autokollimationsmethode durchführen.
a) Zunächst wird die Unendlichstellung von B aufgesucht.
b) Nachdem die Linsenfolge O so in den Strahlengang eingeschaltet worden ist, daß ihr dem Beobachtungsfernrohr zugekehrter Hauptpunkt vom dingseitigen Hauptpunkt des Fernrohrobjektivs den Abstand d besitzt, wird parallaxenfrei auf das nunmehrige in A' liegende Bildchen eingestellt und dabei eine Auszugsveränderung um die Strecke Δ festgestellt. Es ist dann vorzeichenrichtig

$$f = -\left(\frac{F\cdot(F+\Delta)}{\Delta} - d\right),$$

worin $\Delta \gtrless 0$ zu nehmen ist, je nachdem der Auszug verlängert oder verkürzt wird.

$$f = -\left(\frac{F(F+\Delta)}{\Delta} - d\right), \tag{37}$$

die die Brennweite auch vorzeichenrichtig wiedergibt. Im allgemeinen werden wir den Abstand d der benachbarten Hauptpunkte nicht kennen und auch schwerlich in einfacher Weise ermitteln können. Da aber bei den nach diesem Verfahren gemessenen großen Brennweiten über $f = \pm 10$ m der Fehler δf in f, bedingt durch den in Δ gemachten Beobachtungsfehler $d\Delta$, $\delta f = \frac{F^2}{\Delta^2}\cdot d\Delta$ ist, also mit wachsender Brennweite f beschleunigt wächst, dürfen wir, ohne eine außerhalb dieses Fehlers liegende Meßungenauigkeit hereinzubringen, an Stelle des Hauptpunktabstandes den Abstand der beiden benachbarten Linsenscheitel voneinander verwenden, den wir bei sehr großen Brennweiten sogar noch ganz vernachlässigen können.

Das Verfahren läßt sich auch als **Autokollimationsmethode** durchführen, wenn wir ein Autokollimationsokular und an Stelle des auf Unendlich eingestellten Kollimators K einen Planspiegel S (Abb. 90) verwenden, der die aus dem Beobachtungsfernrohr B kommenden Strahlen wieder in sich zurückkehren läßt.

85. Das erste Verfahren von Gauss bei Bestimmung des Bildortes für drei verschiedene Dingpunkte. Dem Verfahren liegt die dreifache Anwendung der Gleichung

$$x \cdot x' = f^2$$

zugrunde. Da die Größen x und x', die Abstände von Ding und Bild vom zugehörigen Brennpunkt, aber nur auf Umwegen (vgl. Ziff. 87) zu ermitteln sind, wählte Gauss[1]) die folgende Anordnung. Mit dem zu prüfenden System sei eine Marke D (Abb. 91) fest verbunden. Als solche Marke können wir den Fassungsrand oder auch einen der äußeren Linsenscheitel auffassen. Alle Abstände werden gegenüber dieser Marke D gemessen. Es seien die Brennpunktsabstände $DF = z$ bzw. $DF' = z'$ und Ding- und Bildabstand $DO = a$ bzw. $DO' = a'$. Es wird also $x = a - z$ und $x' = a' - z'$, weshalb die Abbildgleichung die Form

$$(a - z) \cdot (a' - z') = f^2 \tag{38}$$

annimmt. Wir führen die Bestimmung von a und a' für drei verschiedene Dinglagen durch, indem wir zu jedem Dingort den dazugehörigen Bildort durch Scharfstellung des Bildes auf einer Mattscheibe oder durch parallaxenfreie Einstellung auf ein mit einer stark vergrößernden Lupe betrachtetes, auf einer Glasplatte aufgerissenes Strichkreuz aufsuchen. Wir erhalten so drei Wertepaare

$$a_\varkappa,\ a'_\varkappa; \qquad \varkappa = 1, 2, 3,$$

denen ein System von drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a_1 - z) \cdot (a'_1 - z') &= f^2, \\ (a_2 - z) \cdot (a'_2 - z') &= f^2, \\ (a_3 - z) \cdot (a'_3 - z') &= f^2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

entspricht, aus dem wir nacheinander durch Elimination für die **Lage der Brennpunkte** die Beziehungen



Abb. 91. Die Anordnung beim ersten Gaussschen Verfahren der Brennweitenmessung. Zu dem Ding O entwirft die zu prüfende Linsenfolge ein Bild in O'. Durch eine einfache Ausmessung ermitteln wir die Abstände des Dinges und des Bildes, a und a', von einer Marke D, die fest mit der Linsenfolge verbunden ist, z. B. vom Fassungsrand oder vom dingseitigen Linsenscheitel. Diese Abstände a und a' suchen wir für drei verschiedene Dingpunkte auf, worauf wir in der Lage sind, die gesuchte Brennweite rechnerisch zu ermitteln.

$$\left.\begin{aligned} z &= a_1 - \frac{(a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a'_2 - a'_3)}{(a_3 - a_1) \cdot (a'_1 - a'_2) - (a_2 - a_1) \cdot (a'_1 - a'_3)}, \\ &= a_2 - \frac{(a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \cdot (a'_1 - a'_3)}{(a_3 - a_2) \cdot (a'_1 - a'_2) - (a_2 - a_1) \cdot (a'_2 - a'_3)}, \\ &= a_3 - \frac{(a_3 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \cdot (a'_1 - a'_2)}{(a_3 - a_2) \cdot (a'_1 - a'_3) - (a_3 - a_1) \cdot (a'_2 - a'_3)} \\ \text{und} \qquad z' &= a'_1 - \frac{(a'_1 - a'_2) \cdot (a'_1 - a'_3) \cdot (a_2 - a_3)}{(a_3 - a_1) \cdot (a'_1 - a'_2) - (a_2 - a_1) \cdot (a'_1 - a'_3)}, \\ &= a'_2 - \frac{(a'_1 - a'_2) \cdot (a'_2 - a'_3) \cdot (a_3 - a_1)}{(a_3 - a_2) \cdot (a'_1 - a'_2) - (a_2 - a_1) \cdot (a'_2 - a'_3)}, \\ &= a'_3 - \frac{(a'_1 - a'_3) \cdot (a'_2 - a'_3) \cdot (a_2 - a_1)}{(a_3 - a_2) \cdot (a'_1 - a'_3) - (a_3 - a_1) \cdot (a'_2 - a'_3)}, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

[1]) C. F. Gauss, Dioptrische Untersuchungen, S. 22–25 (Art. 15 u. 16). 1841.

und für die gesuchte **Brennweite** f die Gleichung

$$f^2 = \frac{(a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\cdot(a_3 - a_2)\cdot(a_1' - a_2')\cdot(a_1' - a_3')\cdot(a_2' - a_3')}{[(a_3 - a_1)\cdot(a_1' - a_3') - (a_2 - a_1)\cdot(a_1' - a_2')]^2} \tag{41}$$

erhalten.

Bei der Durchführung dieses Verfahrens werden wir vorteilhaft Dingpunkte benutzen, die außerhalb der Brennweite liegen, um auffangbare Bildpunkte zu bekommen, wobei wir allerdings darauf achten müssen, daß die Dingpunkte nicht zu dicht beisammenliegen, damit alle drei gesuchten Größen z, z' und f mit gleicher und genügend großer Genauigkeit bestimmt werden können.

Auch nicht auffangbare Bilder lassen sich zur Messung verwenden, wenn wir nur besondere Beobachtungsvorrichtungen zu Hilfe nehmen (Ziff. 75). Diese Möglichkeit der Messung, mit Hilfe nicht auffangbarer Bilder, macht dieses Verfahren auch geeignet für die Messung negativer Brennweiten, wenn wir dabei die Werte nur mit dem richtigen Vorzeichen versehen. Die Formel (41) liefert jedoch nur den absoluten Wert der Brennweite; doch macht es keine Schwierigkeiten anderweitig festzustellen, ob ein positives oder negatives System vorliegt.

Die Differenzen $(f - z)$ und $(f - z')$ sind die Abstände der Hauptpunkte von der festen Marke D.

86. Das zweite Verfahren von GAUSS bei festgehaltenem Abstand Ding-Bild und meßbarer Verschiebung des Systems. Wählen wir den Abstand von Ding und Bild größer als die vierfache Brennweite der Linsenfolge, so gibt es zwischen diesen beiden zugeordneten Punktlagen zwei Stellungen des abbildenden Systems, in denen vom gleichen Ding am gleichen Bildort eine scharfe Abbildung erfolgt. Suchen wir mit GAUSS[1]) diese beiden Systemlagen (Abb. 92a und 92b) auf, die uns die Abstände von Ding und Bild von der Marke D als a_1 und a_1' bzw. a_2 und a_2' liefern, so kommt zu den beiden Abbildgleichungen



Abb. 92. Die Anordnung beim zweiten GAUSSschen Verfahren der Brennweitenmessung wird so getroffen, daß Ding O und Bild O' in gleicher Entfernung $l > 4f$ voneinander stehen bleiben.
a) Beim ersten Versuch wird die zu prüfende Linsenfolge so eingestellt, daß in O' ein scharfes Bild entsteht. Dabei wird die Lage der Marke D festgestellt.
b) Beim zweiten Versuch wird die zweite Stellung der Linsenfolge zwischen O und O' aufgesucht, wo abermals in O' ein scharfes Bild von O entworfen wird. Dabei erleidet die Marke D die Lagenveränderung Δ. Bezeichnen wir den Abstand der beiden Hauptpunkte voneinander mit $HH' = i$, so ist

$$f = \frac{1}{4}\cdot\frac{(l - i)^2 - \Delta^2}{l - i}.$$

Im allgemeinen kann der Hauptpunktsabstand i vernachlässigt werden (BESSELsches Verfahren).

$$\left.\begin{aligned}(a_1 - z)\cdot(a_1' - z') &= f^2,\\ (a_2 - z)\cdot(a_2' - z') &= f^2,\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

noch eine dritte Gleichung

$$z + z' = 2f + i, \tag{43}$$

wenn wir unter i den Abstand HH' der beiden Hauptpunkte der Linsenfolge verstehen. Aus diesem Gleichungssystem erhalten wir durch Ausscheiden von z und z' für f eine quadratische Bestimmungsgleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(a_2 + a_2') - (a_1 + a_1')}{(a_2 - a_1)\cdot(a_2' - a_1')}\cdot f^2 + 2\cdot[(a_1 + a_1') + (a_2 + a_2') - 2i]\cdot f&\\ - [(a_1 + a_2' - i)\cdot(a_2 + a_1' - i)] = 0.&\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

[1]) C. F. GAUSS, Dioptrische Untersuchungen, S. 25–27 (Art. 17 u. 18). 1841.

Beachten wir nun, daß beim Versuch die Entfernung zwischen Ding und Bild erhalten bleibt, daß

$$a_1 + a_1' = a_2 + a_2' = l$$

ist, so wird der Faktor von f^2 zu Null. Anderseits können wir diese Strecke l mit jeder gewünschten Genauigkeit ausmessen und können also $a_1 = l - a_1'$ und $a_2 = l - a_2'$ in (44) einsetzen. Wir bekommen dadurch für f eine lineare Bestimmungsgleichung:

$$4 \cdot (l - i) \cdot f = (l - i)^2 - (a_2' - a_1')^2 . \tag{45}$$

In dieser Gleichung tritt nur noch $(a_2' - a_1')$ auf. Wir brauchen also gar nicht die Ding- und Bildabstände von der Marke D zu bestimmen, es genügt vielmehr, daß wir allein die Verschiebung $\Delta = a_2' - a_1'$ des Systems (Abb. 92) genau ermitteln. Wir erhalten dann für die gesuchte Brennweite den Wert:

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{(l - i)^2 - \Delta^2}{l - i} . \tag{46}$$

In dieser Formel ist allerdings vorausgesetzt, daß der Hauptpunktsabstand i bekannt ist, den wir entweder durch Rechnung oder auf dem Versuchswege aufsuchen müßten

Im allgemeinen ist nun der Hauptpunktsabstand i so klein, daß der durch Vernachlässigung von i in dieser Formel entstehende Fehler in f ebenfalls vernachlässigbar klein ist. In dieser Form wurde das Verfahren schon von BESSEL[1]) durchgeführt, unter dessen Namen es bekannt ist.

HASSELBERG[2]) hat dieses vereinfachte Verfahren angewandt, um mit seiner Hilfe die Brennweiten eines Systems bei voller Öffnung für verschiedene Wellenlangen zu bestimmen. Als Ding benutzt HASSELBERG dabei nacheinander die einzelnen Spektrallinien eines Monochromators. Bei den von ihm mit größter Sorgfalt durchgeführten Messungen erzielt er angeblich eine Genauigkeit von 0,01%. Die Unterschiede in den so ermittelten Brennweiten sind die chromatischen Brennweitenabweichungen, die wir nicht mit den chromatischen Brennpunktabweichungen (Ziff. 130 u. 131) verwechseln dürfen.

Ein Nachteil dieses Verfahrens ist der, daß dabei im allgemeinen das System nicht für den Dingabstand geprüft wird, für den es in Wirklichkeit benutzt wird.

87. Das dritte Verfahren von GAUSS[3]) durch Bestimmung der Lage der Brennpunkte und Ermittelung der Bildlage für einen Dingpunkt. Der Abstand der beiden Hauptpunkte voneinander. Wenn wir die Lage der Brennpunkte in bezug auf die Marke D kennen würden, würde die Bildortbestimmung für einen Dingpunkt genügen, um die Brennweite berechnen zu können. Wir erreichen die Kenntnis der Brennpunktslage dadurch, daß wir in bekannter Weise einen auf Unendlich eingestellten Kollimator zu Hilfe nehmen (Abb. 93a und 93b), wodurch wir die Örter der Brennpunkte F und F' und damit ihre Entfernungen z bzw. z' von der Marke D festlegen.

Wir verwenden nun als Ding O eine Strichplatte, die wir innerhalb der Brennweite sehr nahe an das System in einem bekannten Abstande a von der Marke D heranbringen (Abb. 93c), weshalb wir ein nicht auffangbares Bild in O' erhalten werden. Den Abstand $(a' - a)$ dieses Bildes von der Strichplatte finden wir, wenn wir mit Hilfe eines Meßmikroskops, dessen Verschiebung längs seiner

[1]) F. W. BESSEL, Astron. Nachr. Bd. 17, S. 289—294. 1840; C. F. GAUSS, Dioptrische Untersuchungen, S. 27—28 (Art. 19). 1841.

[2]) B. HASSELBERG, Mél. math. et astr., aus dem Bull. de l'acad. Imp. des Sc. de St.-Pétersbourg Bd. 6, S. 412—433. 1888; C. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 9, S. 16—18. 1889.

[3]) C. F. GAUSS, Dioptrische Untersuchungen, S. 28—30 (Art. 20 u. 21). 1841.

optischen Achse an einer Teilung mit Nonius (möglichst auf $^1/_{100}$ mm genau) abgelesen werden kann, zunächst durch das System hindurch auf das Bild in O' einstellen. Nachdem wir das System entfernt haben, verschieben wir das Mikroskop bis zu seiner Scharfeinstellung auf die Strichplatte selbst. Die Mikroskopverschiebung ist unmittelbar die gesuchte Strecke $(a' - a)$. Da wir a kennen, ist damit auch a' bekannt. Aus der Gleichung

$$(a - z) \cdot (a' - z') = f^2$$

erhalten wir deshalb:

$$f = \sqrt{(a - z) \cdot (a' - z')} . \quad (47)$$

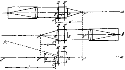


Abb 93. Die Anordnung beim dritten GAUSSschen Verfahren der Brennweitenmessung

a u. b) Mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Testkollimators wird die Lage der beiden Brennpunkte F' und F der zu prüfenden Linsenfolge in bezug auf die Marke D festgestellt, wodurch die Größen z' und z gewonnen werden.

c) Zu einem zwischen $\mathfrak{S}$ und F, also innerhalb der dingseitigen Brennweite gelegenen Dingpunkte O, der den Abstand a von der Marke D besitzt, wird das virtuelle Bild O' aufgesucht, dessen Abstand a' von der Marke D in geeigneter Weise ermittelt wird. Es ist dann $f = \sqrt{(a - z) \cdot (a' - z')}$.

Für den praktischen Fall können wir das Verfahren im dritten Versuch (Abb. 93c) etwas umgestalten, wenn wir mit einem auffangbaren Bilde arbeiten wollen. Wir werden dann so vorgehen, daß wir zunächst F' (Abb. 93a) festhalten dadurch, daß wir das Meßmikroskop auf F' einstellen. Auf der Dingseite stellen wir dann außerhalb des Brennpunktes F (Abb. 94) in O die auf einer Glasplatte befindliche Strichfigur auf und verschieben das Mikroskop so lange, bis das Bild O' der Strichplatte parallaxenfrei einsteht. Die dazu notwendige Mikroskopverschiebung ist x'. Nunmehr bringen wir das Meßmikroskop auf die Dingseite und stellen es auf die Strichplatte ein. Darauf setzen wir auf der Bildseite den auf Unendlich eingestellten Kollimator vor und verschieben das Mikroskop, bis das Brennpunktbild in F scharf erscheint, womit wir x gemessen haben. Es ist dann

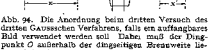


Abb. 94. Die Anordnung beim dritten Versuch des dritten GAUSSschen Verfahrens, falls ein auffangbares Bild verwendet werden soll. Dabei muß der Dingpunkt O außerhalb der dingseitigen Brennweite liegen. Seine Entfernung von F sei x, während das Bild in der Entfernung x' von F' entsteht, dann ist $f^2 = x \cdot x'$; x und x' können in geeigneter Weise genau gemessen werden.

$$f^2 = x \cdot x' .$$

Die Beobachtungen dieses dritten GAUSSschen Verfahrens können auch dazu benutzt werden, um den **Abstand der beiden Hauptpunkte** voneinander, $HH' = i$, zu ermitteln. Da wir die Entfernungen z und z' der Brennpunkte von der Marke D kennen, kommt zu der Gleichung (47) noch eine zweite hinzu:

$$z + z' = 2 \cdot f + i \qquad \text{oder} \qquad f = \frac{z + z' - i}{2} \quad (48)$$

Aus den beiden Gleichungen (47) und (48) erhalten wir dann als Bestimmungsgleichung für den Abstand i der beiden Hauptpunkte voneinander

$$i = z + z' - 2 \cdot \sqrt{(a - z) \cdot (a' - z')}\,, \tag{49}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$i = a + a' + \frac{[z - a \cdot \sqrt{(z - a) \cdot (z' - a')}]^2}{z - a}\,. \tag{50}$$

Dabei stellt der Nenner $(z - a)$ des Bruches den Abstand x des Dingpunktes O beim dritten Versuch (Abb. 93c) vom dingseitigen Brennpunkt F vor und der Klammerausdruck im Zähler entspricht dem absoluten Wert des Abstandes $OH = |x - f|$ des nämlichen Dingpunktes O von der Hauptebene H. Wählen wir, was für die Durchführung des Versuchs vorteilhaft ist, den Dingpunkt O dicht bei der Marke D, so wird durch geeignete Wahl der Lage von O der Klammerausdruck kleiner als der Nenner gemacht werden können, was zur Folge hat, daß der Bruch einen kleinen Wert annimmt, der von Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der einzelnen Größen nur wenig beeinflußt wird. Die Meßgenauigkeit von i wird also im wesentlichen von der Meßgenauigkeit der Summe $(a + a')$ abhängen.

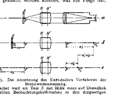


Abb. 95. Die Anordnung des Erfleschen Verfahrens der Brennweitenmessung.

a) Zunächst wird ein Test S mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Beobachtungskollimators in den dingseitigen Brennpunkt F der zu untersuchenden Linsenfolge gebracht.
b) Wird dieses Test S um die Strecke x_1 außerhalb von F in O_1 aufgestellt, so liegt das Bild in O_1', dessen Lage mit Hilfe eines Mikroskops festgehalten wird.
c) Wird darauf das Test S um die Strecke x_2 von F entfernt nach O_2 gebracht, dann liegt jetzt das Bild in O_2', so daß wir das Beobachtungsmikroskop um die Strecke $(x_1' - x_2')$ verschieben müssen, wenn wir es scharf auf O_2' einstellen. Es ist dann die gesuchte Brennweite

$$f^2 = \frac{x_1' - x_2'}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \cdot x_2\,.$$

88. Das Verfahren nach Erfle[1]) durch Bestimmung der Lage des Brennpunktes im Dingraum und Ermittlung des Unterschiedes der Bildweiten für zwei verschiedene Dingpunkte. Das Verfahren ist eine Abänderung des dritten Gaussschen Verfahrens (Ziff. 87). Die zu prüfende Linsenfolge bleibt bei den Versuchen unverändert stehen. Zunächst bringen wir auf die Dingseite eine Strichplatte S (Abb. 95a), deren Bild wir in einem auf der Bildseite befindlichen Fernrohr, dessen Unendlicheinstellung uns bekannt ist, beobachten. Wir verschieben die Strichplatte so lange, bis das Fernrohr auf Unendlich einsteht; dann befindet sich die Strichplatte gerade im Brennpunkte F. Wir verschieben nun die Strichplatte um eine Strecke x_1 und stellen ein Meßmikroskop um das in O_1' liegende Bild ein. Verschieben wir darauf das Ding um die Strecke x_2 gegenüber dem Brennpunkt F, so müssen wir, um

[1]) H. Erfle, ZS. f. Instrkde. Bd. 43, S. 54–58. 1923.

wieder Bildschärfe zu bekommen, das Meßmikroskop um die Strecke $O_1'O_2'$ $= x_1' - x_2'$ verschieben. Es ist:

$$x_1 \cdot x_1' = f^2 \qquad \text{oder} \qquad x_1' = \frac{f^2}{x_1},$$

$$x_2 \cdot x_2' = f^2 \qquad \text{oder} \qquad x_2' = \frac{f^2}{x_2}.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen bekommen wir

$$x_1' - x_2' = f^2 \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$$

und damit die Bestimmungsgleichung für die Brennweite

$$f^2 = \frac{x_1' - x_2'}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \cdot x_2. \tag{51}$$

Das Verfahren läßt sich bei geeignet großer Wahl des Dingabstandes des Meßmikroskops neben den positiven Linsenfolgen mit auffangbaren Bildern auch auf negative Linsenfolgen mit nicht auffangbaren Bildern ausdehnen.



Abb. 96. Eine Abänderung des ERFLEschen Verfahrens in ein Autokollimationsverfahren wird insbesondere dadurch erreicht, daß beim zweiten und dritten Versuch (Abb. 95 b und c) ein ebener Spiegel Sp so lange längs der optischen Achse verschoben wird, bis die von diesem Spiegel Sp zurückgeworfenen, die Linsenfolge nochmals durchsetzenden Strahlen auf der Dingseite ein Autokollimationsbildchen liefern, das mit dem Ding O_1 (bzw. O_2) zusammenfällt. Für diesen Fall steht dann der Spiegel Sp gerade im Bildpunkt O_1' (bzw. O_2'). Die Spiegelverschiebung von O_1' nach O_2' ist die gesuchte Strecke $(x_1' - x_2')$ der ERFLEschen Formel (51).

Außerdem liegt die Möglichkeit vor, das Verfahren als Autokollimationsverfahren auszubilden, wodurch seine Meßgenauigkeit erhöht wird. Dazu bringen wir, wenn das Test S auf der linken Seite der zu untersuchenden Linsenfolge (Abb. 95) liegt, auf die rechte Seite (Abb. 96) einen zur optischen Achse senkrecht stehenden, längs der optischen Achse meßbar verschiebbaren Spiegel Sp. Zunächst suchen wir, entsprechend Abb. 95 a, die Lage des Brennpunktes auf, indem wir den Spiegel dicht an die Linsenfolge heranbringen und das Test so lange verschieben, bis sein Autokollimationsbildchen mit dem Test selbst zusammenfällt. Die Versuche der Abb. 95 b und c sind darauf so vorzunehmen, daß wir dem Test S gegenüber der ermittelten Brennpunktstellung die jeweils gewünschte Lage O_1 (bzw. O_2) geben und dann den im Bildraum befindlichen Planspiegel Sp so lange verschieben, bis die Strahlen von ihm so zurückgeworfen werden, daß sie nach abermaligem Durchtritt durch die Linsenfolge ein Bild entstehen lassen, das mit dem Ding O_2 (bzw. O_2) selbst zusammenfällt. Dies ist dann der Fall, wenn die spiegelnde Ebene Sp gerade durch den Bildpunkt O_1' (bzw. O_2') geht, weil dann die ankommenden Strahlen so zurückgeworfen werden, daß sie in der Bahn des symmetrisch liegenden, ankommenden Strahls zurücklaufen. Die Spiegelverschiebung zwischen dem zweiten und dritten Versuch von O_1' nach O_2' ist die für die Rechnung notwendige Strecke $(x_1' - x_2')$.

89. Die „Umkehrmethode" von HARTMANN[1]). Bei dieser Methode wird ein System von bekannter Brennweite f_1 zu Hilfe genommen. Mit dem System f_1 (Abb. 97) wird ein außerhalb des Brennpunktes F_1 liegender Dingpunkt O abgebildet in den Bildpunkt O', der nun seinerseits wieder Dingpunkt für das

[1]) J. HARTMANN, Eders Jahrb. f. Photogr. u. Reprodukt. Bd. 16, S. 151–160. 1902; ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 107–108. 1904.

zweite System von der Brennweite f_2 ist, das davon ein Bild in O'' entwirft. Ding- und Bildabstände von den Brennpunkten sind x_1, x_1' bzw. x_2, x_2'. Für das erste System gilt:

$$x_1 \cdot x_1' = f_1^2 \qquad \text{oder} \qquad F_1'O' = x_1' = \frac{f_1^2}{x_1}.$$

Für das zweite System wird demnach der Dingabstand x_2 vom Brennpunkt F_2:

$$x_2 = F_2 O' = F_2 H_2 - H_1' H_2 + H_1' F_1' + F_1' O' = f_2 - d + f_1 + \frac{f_1^2}{x_1}, \qquad (52)$$

wenn wir unter d den Abstand zwischen den beiden einander benachbarten Hauptpunkten H_1' und H_2 der beiden Systeme verstehen. Bei Anwendung der



Abb. 97. Die Anordnung der HARTMANNschen „Umkehrmethode" verlangt die Zuhilfenahme einer Linsenfolge $H_1 H_1'$ von bekannter Brennweite f_1, wenn wir die Brennweite f_2 der Linsenfolge $H_2 H_2'$ messen wollen. Dabei wird ein um x_1 von F_1 entferntes Ding O durch die beiden Systeme nach einem um x_2' von F_2' entfernten Punkte O'' abgebildet. Wählen wir die Strecke x_1 sehr klein gegenüber f_1, so verhalten sich die Strecken x_1 und x_2' wie die Quadrate der zugehörigen Brennweiten $x_1 \cdot x_2' = f_1^2 : f_2^2$.

Abbildungsgleichung auf das zweite System müssen wir darauf achten, daß sowohl x_2 als auch x_2' negativ ist. Wir erhalten dann unter Berücksichtigung von (52)

$$f_2^2 = x_2' \cdot \left(\frac{f_1^2}{x_1} + (f_1 - d)\right) + f_2 \cdot x_2'$$

oder

$$\frac{x_2'}{f_2^2 + f_2 \cdot x_2'} = \frac{x_1}{f_1^2 + (f_1 - d) \cdot x_1}. \qquad (53)$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, daß wir daraus immer eine der beiden Brennweiten berechnen können, wenn wir x_2 und x_2' durch Versuch bestimmen und d ausmessen.

Beim Versuch werden wir so vorgehen, daß wir beide Linsenfolgen als Fernrohrobjektive verwenden, die wir zunächst in bekannter Weise unter Verwendung eines Autokollimationsokulars auf Unendlich einstellen; dabei wird die Stellung des Okularauszugs vermerkt. Wir verlängern (verkürzen) darauf den Auszug mit dem Autokollimationsokular beim Objektiv f_1 um eine Strecke x_1, die wir an der Auszugsteilung ablesen; dadurch kommt die Strichplatte dieses Okulars nach O (Abb. 97). Wir richten das zweite Fernrohr auf das erste und müssen nun dessen Okularauszug um eine Strecke x_2' verkürzen (verlängern), um parallaxenfreie Scharfstellung des Bildes O'' zu erhalten. Als Abstand d der beiden Hauptpunkte voneinander können wir, ohne einen großen Fehler zu begehen, den Abstand der beiden einander zugekehrten Linsenscheitel verwenden.

Die Rechnungsformel (53) können wir vereinfachen, wenn wir die Verschiebungen x_1 und x_2' sehr klein wählen. Bleiben wir nur in genügender Nähe der Brennpunkte, so sind wir in der Lage, diese Größen beliebig klein gegenüber den Brennweiten zu halten, so daß die Produkte $x_1 \cdot f_1$ und $x_2' \cdot f_2$ gegenüber den Quadraten der Brennweiten zu vernachlässigen sind. Machen wir außerdem d so klein als irgendmöglich, indem wir die beiden Systeme dicht hintereinander

setzen, dann ist $d \cdot f_1$ vernachlässigbar gegen f_1^2 und wir erhalten die vereinfachte Formel

$$\frac{x_2'}{f_2^2} = \frac{x_1}{f_1^2} \qquad \text{oder} \qquad x_2' = x_1 \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2, \tag{54}$$

d. h. verschieben wir ein Ding in der Nähe des Brennpunktes eines Systems f_1 längs der optischen Achse um die kleine Strecke x_1 und ist die Strecke, um welche sich das durch ein zweites Objektiv f_2 erzeugte Bild aus dessen Brennpunkt fortbewegt, x_2', so verhalten sich diese beiden Strecken, absolut genommen, unmittelbar wie die Quadrate der zugehörigen Brennweiten: $x_1 : x_2' = f_1^2 : f_2^2$.

Wollen wir nach diesem Verfahren die Brennweite des zweiten Systems berechnen als $f_2^2 = f_1^2 \cdot x_2'/x_1$, so verwenden wir zur Erzielung einer guten Meßgenauigkeit als Hilfssystem ein möglichst langbrennweitiges Objektiv; denn je größer f_1 gegenüber f_2 ist, desto geringer wird nach Formel (54) ein in x_1 gemachter Fehler sich in x_2 auswirken, da er hier mit dem Quotienten $(f_2/f_1)^2$, der ein echter Bruch ist, multipliziert erscheint.

Wegen dieser starken Verkleinerung des bei der Einstellung des längerbrennweitigen Kollimators auf Unendlich begangenen Fehlers bei der Übertragung desselben auf das kürzerbrennweitige Prüfsystem ist diese HARTMANNsche „Umkehrmethode" ein vorzügliches und scharfes Hilfsmittel zur Ermittelung der Lage der Brennebene (Ziff. 75 und 77).

4. Die Bestimmung der Brennweite durch Einstellung auf den Bildort und durch Ermittelung der Lateralvergrößerung.

90. Die Messung der Lateralvergrößerung für ein zugeordnetes Punktepaar. Wir bilden eine Teilung, die außerhalb des Brennpunktes liegt, durch die zu prüfende Linsenfolge ab und messen im Bilde, am sichersten und genauesten mittels eines Meßmikroskops, das senkrecht zu seiner optischen Achse meßbar verschoben werden kann, die Bildgröße y' aus, die einer bekannten Dinggröße y entspricht. Es ist dann die Lateralvergrößerung $\beta = y'/y$. Anderseits ist aber (Ziff. 80) $\beta = f/x = x'/f$. Kennen wir also x oder x', so können wir damit f berechnen.

Um x zu bekommen, gehen wir beim Versuch so vor, daß wir bei Beginn auf der Bildseite des Systems einen auf Unendlich eingestellten, längerbrennweitigen Beobachtungskollimator auf das System richten und die Teilung auf der Dingseite des Systems so lange verschieben, bis ihr Bild parallaxenfrei im Beobachtungskollimator erscheint, d. h. bis die Teilung sich im dingseitigen Brennpunkt F befindet. Jetzt verschieben wir die Teilung um eine leicht auszumessende Strecke x und messen die zugehörige Lateralvergrößerung.

Wollen wir umgekehrt x' verwenden, so suchen wir uns in ähnlicher Weise erst die Lage des bildseitigen Brennpunktes F' auf, indem wir das Beobachtungsmikroskop parallaxenfrei auf das Bild eines im Unendlichen liegenden Dingpunktes einstellen. Um dann das von der im Endlichen liegenden Teilung durch die Linsenfolge entworfene Bild, dessen Lateralvergrößerung wir messen, scharf zu sehen, müssen wir das Beobachtungsmikroskop in seiner Achse um eine Strecke x' verschieben. Es ist dann

$$f = x \cdot \beta = \frac{x'}{\beta}. \tag{55}$$

Dieses Verfahren eignet sich besonders dazu, um bei kurzbrennweitigen Systemen die Brennweite aufzufinden, wie z. B. bei Mikroskopobjektiven, bei Lupen u. a. Nach ABBE bringen wir ein solches kurzbrennweitiges System auf einen Mikroskoptisch und stellen das Beobachtungsmikroskop auf das Bildchen

ein, das das System von einem im Abstande a vom System befindlichen Ding entwirft und dessen Bildgröße wir mit einem Mikrometerokular ausmessen, dadurch die gesuchte Lateralvergrößerung β ermittelnd. Wählen wir den Abstand a nur groß genug, so können wir, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, ihn gleich x setzen. Bei diesem Verfahren müssen wir noch darauf achten, daß wir das System so auf den Tisch bringen, daß der Strahlengang bei der Messung dem beim gewöhnlichen Gebrauche des Systems entspricht. Ein Mikroskopobjektiv z. B. wäre also so aufzulegen, daß die Frontlinse nach der Bildseite, dem Beobachtungsmikroskop zu, liegt.

Ein besonderer Fall dieses Verfahrens, der sich bei mittleren Brennweiten empfiehlt, ist der, daß das zugeordnete Punktepaar mit der Lateralvergrößerung Eins aufgesucht wird. Es ist dann der Ding- bzw. Bildabstand vom entsprechenden Brennpunkte unmittelbar gleich der gesuchten Brennweite. Ist der Abstand der beiden Hauptpunkte der untersuchten Linsenfolge zu vernachlässigen, dann ist der leicht abmeßbare Abstand von Ding und Bild im vorliegenden Falle gleich der vierfachen Brennweite.

91. Die Messung der Lateralvergrößerung für zwei zugeordnete Punktepaare. Haben wir die Vergrößerungen für zwei zugeordnete Punktepaare $(x_1; x_1')$ und $(x_2; x_2')$ als β_1 und β_2 bestimmt, so gilt

$$f = x_1 \cdot \beta_1 \qquad \text{und} \qquad f = x_2 \cdot \beta_2 .$$

Daraus können wir weiter folgern

$$x_2 - x_1 = f\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right),$$

so daß wir für die Brennweite die Bestimmungsgleichung

$$f = \frac{x_2 - x_1}{1/\beta_2 - 1/\beta_1} = \frac{x_2 - x_1}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \tag{56}$$

erhalten. Wir erkennen, daß wir im vorliegenden Falle die einzelnen Dingabstände und damit auch die Brennpunktsorte gar nicht zu kennen brauchen, sondern daß es vielmehr nur darauf ankommt, den Versuch so einzurichten, daß wir die Differenz der Dingabstände leicht ausmessen können. Um dies zu erreichen, brauchen wir nach Durchführung der ersten Vergrößerungsbestimmung bei feststehendem System die als Ding benutzte Teilung nur um eine bekannte Strecke $\Delta = x_2 - x_1$ oder bei feststehender Teilung das System um diese Strecke Δ zu verschieben.

Das Verfahren ist als identisch mit dem des Abbeschen Fokometers (Ziff. 97) zu betrachten und kann auch ähnlich wie dieses im bildseitigen telezentrischen Strahlengang durchgeführt werden, wenn wir zur Bildausmessung ähnlich wie dort ein senkrecht zur optischen Achse verschiebbares Mikroskop, das während der Messung sich genau parallel bleibt, in Anwendung bringen.

92. Das Verfahren von Meyerstein. Auch dieses Verfahren vermeidet die Ermittelung der Brennpunktsörter.

Nach Meyerstein[1]) bleiben Dingort und Bildort während der ganzen Versuchsreihe in einem festen Abstande voneinander erhalten. Wir erreichen das dadurch, daß wir der Einstellebene eine bestimmte unverändert bleibende Entfernung l, die größer als der vierfache Betrag der zu messenden Brennweite f sein muß, von der Teilung T (Abb. 98), die in O steht, geben. Die Einstellebene wird zur Erzielung bester Genauigkeit nicht durch eine Mattscheibe verwirklicht, sondern durch die Einstellebene eines Mikroskops, deren Entfernung c vom Mikro-

[1]) M. Meyerstein, Wied. Ann. Bd. 1, S. 315–319. 1877; Carls Repert. Bd. 14, S. 363 bis 366. 1877.

skopobjektivrand wir in einfacher Weise ermitteln können. Die Strecke l können wir dann als Differenz zwischen der Entfernung des Mikroskoprandes vom Dingort O und dieser Entfernung c bestimmen. Mit der zu untersuchenden Linsenfolge ist eine Marke D fest verbunden (z. B. der Fassungsrand). Wir verschieben zwischen O und O' (Abb. 98a) das System so lange, bis das Bild in O' scharf erscheint und messen die Bildgröße y_1', die zu einer Dinggroße y_1 gehört, wodurch wir die Lateralvergrößerung β_1 erhalten. Außerdem messen wir für diese Systemlage als Entfernung der Marke D vom Dingpunkt O die Strecke b_1 ab. Wir drehen zum zweiten Versuch (Abb. 98b) die Linsenfolge um 180°, so daß Bild- und Dingseite vertauscht werden, und verschieben auch jetzt wieder das System so, daß das Bild der Teilung in O' nicht nur scharf, sondern auch gleich groß wie beim ersten Versuch erscheint. Dabei kommen jetzt die Hauptebenen der Linsenfolge, wenn auch vertauscht, an die gleichen Örter wie vor der Drehung beim ersten Versuch. Der Kontrolle halber bestimmen wir auch für diese zweite Lage der Linsenfolge die der Dinggröße y_2 entsprechende Bildgröße y_2', wodurch die Vergrößerung β_2 erhalten wird. Sind die Versuche, insbesondere die Bildscharfstellungen, einwandfrei durchgeführt, so müssen die beiden gefundenen Vergrößerungen gleich groß sein. Sie können aber infolge kleiner Ungenauigkeiten um allerdings nur ganz geringe Beträge voneinander abweichen, weshalb wir für die Ausrechnung die beiden Vergrößerungen zu einem Werte $\beta = (\beta_1 + \beta_2) : 2$ mitteln. Beim zweiten Versuch finden wir durch Abmessen außerdem noch als Abstand der Marke D vom Dingpunkte O die Strecke b_2.

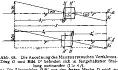


Abb. 98. Die Anordnung des MEYERSTEINschen Verfahrens. Ding O und Bild O' befinden sich in festgehaltener Stellung zueinander ($l > 4f$).
a) Die Linsenfolge HH' mit der festen Marke D wird so eingestellt, daß das Bild in O' scharf erscheint. Gemessen wird der Abstand b_1 der Marke D von O und die Bildgroße y_1', wodurch die Vergroßerung $\beta = \frac{y_1'}{y_1}$ gefunden werden kann.
b) Die zu prüfende Linsenfolge wird um 180° gedreht und abermals verschoben, bis das Bild in O' scharf erscheint. Gemessen wird der jetzige Abstand b_2 der Marke D von O. Die Vergroßerung β muß die gleiche wie bei Versuch a sein. Es ist dann die gesuchte Brennweite

$$f = \frac{b_1 + b_2 - l}{\frac{1}{\beta} - \beta}.$$

Bezeichnen wir den unbekannten Abstand HH' der beiden Hauptpunkte voneinander mit i, so bekommen wir aus den bei diesen Versuchen gefundenen Abständen für Ding- und Bildabstand von den Hauptebenen die Werte

$$a = b_1 + HD = b_2 - i - HD = \frac{b_1 + b_2}{2} - \frac{i}{2}$$

und

$$a' = l - b_1 - i - HD = l - b_2 + HD = l - \frac{b_1 + b_2}{2} - \frac{i}{2}$$

und damit

$$a - a' = b_1 + b_2 - l. \tag{57}$$

Die Abbildungsgleichung (35) können wir etwas umformen zu

$$1 + \frac{1}{a'/a} = \frac{a}{f} \qquad \text{oder} \qquad \frac{a'}{a} + 1 = \frac{a'}{f}. \tag{58}$$

Beachten wir nun, daß die Lateralvergrößerung β auch wiedergegeben wird durch den Bruch a'/a, so wird aus (58)

$$1 + \frac{1}{\beta} = \frac{a}{f} \qquad \text{und} \qquad \beta + 1 = \frac{a'}{f}.$$

Durch Subtraktion folgt daraus unter Berucksichtigung von (57)

$$\frac{1}{\beta} - \beta = \frac{a - a'}{f} = \frac{b_1 + b_2 - l}{f}.$$

Die gesuchte Brennweite ist somit zu berechnen aus der Beziehung:

$$f = \frac{b_1 + b_2 - l}{1/\beta - \beta}. \tag{59}$$

93. Das Verfahren von Hoppe. Eine Abanderung dieses Meyersteinschen Verfahrens bildet die von Hoppe[1]) mitgeteilte Methode insofern, als dabei in der zweiten umgekehrten Lage des Systems nicht die Entfernung der Marke D vom Dingpunkt, sondern vom Bildpunkt bestimmt wird $DO' = b_2'$ (Abb. 98b). Die Entfernung der Marke D vom ersten Hauptpunkt H ist $DH = \frac{1}{2} \cdot (l - b_1 - b_2' - i)$, weshalb wir als Werte der Ding- und Bildweite erhalten

$$a = b_1 + DH = \tfrac{1}{2} \cdot (l + b_1 - b_2' - i)$$

und

$$a' = b_2' + DH = \tfrac{1}{2} \cdot (l - b_1 + b_2' - i).$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in den Wert fur die durch den Versuch ermittelte Lateralvergrößerung $\beta = a'/a$ ein, so folgt daraus nach Absonderung von i für den Abstand der beiden Hauptpunkte voneinander

$$i = l - \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \cdot (b_2' - b_1). \tag{60}$$

Anderseits ist $l = a + a' + i$, somit also nach Einsetzen von (60)

$$a + a' = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \cdot (b_2' - b_1).$$

Ziehen wir in Betracht, daß $a = a'/\beta$ und $a' = a \cdot \beta$ ist, so liefert uns diese Gleichung für die Ding- und Bildweite die Beziehungen:

$$a = \frac{b_2' - b_1}{\beta - 1} \qquad \text{und} \qquad a' = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot (b_2' - b_1).$$

Diese Werte setzen wir in die Abbildungsgleichung (35) ein und bekommen dadurch für die gesuchte Brennweite die Bestimmungsgleichung

$$f = (b_2' - b_1) \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - 1}, \tag{61}$$

in der nur noch die durch das von Hoppe vorgeschlagene Verfahren ermittelten Größen vorkommen. Dabei haben wir nebenbei den Abstand i der Hauptpunkte noch gefunden und können nun auch noch die Beziehung für den Abstand des ersten Hauptpunktes von der Bezugsmarke D aufstellen; es ist

$$DH = a - b_1 = \frac{b_2' - \beta \cdot b_1}{\beta - 1}. \tag{62}$$

Hoppe gibt an, daß bei diesem Verfahren für die Brennweite eine Meßgenauigkeit von $2^0/_{00}$ zu erzielen sei.

94. Die Zuhilfenahme eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres von bekannter Brennweite. Hierher gehören auch die Verfahren, die den Dingort

[1]) E. Hoppe, Pogg. Ann. Bd. 160, S. 169—173. 1877.

in den Brennpunkt des zu prüfenden Systems verlegen. Die Beobachtung des im Unendlichen liegenden Bildes erfolgt mittels eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres, dessen Brennweite wir vorher genau ermittelt haben.

Nach Hartmann[1]) bringen wir auf die Dingseite des zu prüfenden Systems f_1 eine senkrecht und symmetrisch zur optischen Achse liegende Millimeterteilung y (Abb. 99) und verschieben diese längs der optischen Achse so lange, bis das im Beobachtungsfernrohr f_2, das aus bekannten Gründen (Ziff. 75, 77 und 89) langbrennweitiger als das Prüfsystem gewählt wird, sichtbare Bild in dessen Brennpunkt F_2 scharf erscheint. Dann steht die Teilung im Brennpunkt F_1 des Prüfsystems. Wir messen zu einer bekannten Dinggröße y die Größe des Bildes y' aus. Dies kann leicht dadurch geschehen, daß wir entweder ein Okular mit Okularteilung oder ein solches mit Schraubenmikrometer verwenden, wobei naturgemäß vorher der Längenwert eines Intervalls ermittelt worden sein muß.

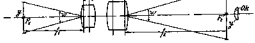


Abb. 99. Die Messung der Brennweite f_1 unter Zuhilfenahme eines längerbrennweitigen, auf Unendlich eingestellten Fernrohrs f_2, wobei Ding und Bild sich wie die beiden zugehörigen Brennweiten verhalten: $y : y' = f_1 : f_2$.

Bei einer solchen Abbildung durch zwei Linsenfolgen, wo die Brennebenen einander zugeordnet sind, schließen die Hauptpunktstrahlen bei beiden Systemen gleiche Winkel w ein. Es gilt deshalb das Verhältnis

$$y : y' = f_1 : f_2 ,$$

auf Grund dessen wir das gesuchte f_1 berechnen können als

$$f_1 = \frac{y}{y'} \cdot f_2 . \tag{63}$$

Dieses Verfahren führt rasch und zuverlässig zum Ziel und besitzt eine für die Fälle der Praxis gute Genauigkeit, wozu noch der Vorteil kommt, daß dabei der für die volle Öffnung des Systems geltende Mittelwert der Brennweite gefunden wird.

Schon Porro[2]) hat dieses Verfahren mitgeteilt und einen darauf sich gründenden Brennweitenmesser, das sog. Phozometer, angegeben. Dabei tritt allerdings eine kleine Abänderung gegenüber dem Hartmannschen Verfahren auf insofern, als beim Phozometer die Strichplatte T sich im Brennpunkt des bekannten Systems f_2 befindet und dort ein für allemal unveränderlich festgehalten wird. Auf der Platte T befinden sich zwei symmetrisch zur optischen Achse liegende Striche, deren Abstand y' bekannt ist. Dadurch wird also der Vorteil erreicht, daß der Faktor f_2/y' der Gleichung (63) zu einer Apparatkonstanten wird, wodurch wir in die Lage versetzt sind, eine Tabelle aufzustellen, aus der zu jeder beobachteten Bildgröße y gleich die zugehörige Brennweite f_1 entnommen werden kann.

Neuerdings hat dieses Porrosche Verfahren Anwendung gefunden bei dem v. Hofeschen[3]) Okularfokometer und Objektivkomparator, wobei die Geräte so vervollkommnet sind, daß beim Okularfokometer Meßgenauigkeiten

[1]) J. Hartmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 115–116. 1904.
[2]) J. Porro, C. R. Bd. 33, S. 50–51. 1851.
[3]) Chr. v. Hofe, ZS. f. techn. Phys. Bd. 1, S. 191–197. 1920.

von 1‰ beim Objektivkomparator Vergleichsgenauigkeiten von 0,1‰ erzielt werden können. Beide Geräte gestatten auch noch die Messung der Verzeichnung, wozu nur eine Platte mit bestimmter Strichanordnung verwendet werden muß. Während das Okularfokometer mit einem bekannten System f_2 arbeitet, werden beim Objektivkomparator zwei Systeme verglichen, die gleiche Brennweite besitzen sollen. Sind die beiden Objektive gleichbrennweitig, so müssen Ding und Bild gleich groß sein. Nach v. HOFE wählen wir deshalb die in den Brennpunkten befindlichen Strichplatten so, daß die Abstände der Striche gleich groß sind. Zur Erleichterung der Einstellung wird die eine Platte (Abb. 100/2) mit Doppelstrichen versehen, deren Mittenabstände genau gleich den Strichabständen der anderen Platte (Abb. 100/1) sind. Nur wenn die einfachen Striche bei allen drei Doppelstrichen in deren Mitte einstehen, ist Brennweitengleichheit der beiden Objektive vorhanden. Ist $f_1 \neq f_2$, so werden sich nicht alle Einfachstriche mit den Doppelstrichen zur Deckung bringen lassen. Mit Hilfe einer Mikrometerschraube bringen wir einmal den äußersten rechten, dann den äußersten linken Doppelstrich[1]) mit dem entsprechenden Einfachstrich des Bildes zur Deckung und haben dadurch unmittelbar den Unterschied von Bild und Ding $dy = y' - y$ gemessen, dem ein Brennweitenunterschied ($f_2 = f_1 - df$)

$$df = f_1 \cdot \frac{dy}{y'} \tag{64}$$

entspricht.



Abb. 100. Die Testplatten für den v. HOFEschen Objektivkomparator, mit dessen Hilfe Objektive gleicher Brennweite verglichen werden. Platte 1 ist (Abb. 99) die in F_1 befindliche Dingplatte, deren Bild in F_2 entsteht und sich bei genau gleichen Brennweiten mit den Doppelstrichen der dort befindlichen Platte 2 decken muß.

95. Die Ermittelung des ding- oder bildseitigen Hauptstrahlneigungswinkels. Das Ausmessen der Ding- oder Bildgröße kann vermieden werden, wenn wir den Winkel w ausmessen, unter dem die Skala vom ersten Hauptpunkt aus erscheint (Abb. 99).

Nach MOSER[2]) können wir im allgemeinen Falle so vorgehen, daß wir von einem Gegenstand $y = 2y_1$, der sich in großer Entfernung a vom Objektiv befindet (Abb. 98), ein reelles Bild entwerfen, dessen Größe $y' = 2y_1'$ wir messen. Es ist $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = y_1/a$. Da nun die Hauptpunktstrahlen im Ding- und Bildraum den gleichen Winkel $w/2$ mit der optischen Achse bilden, können wir diesen Winkel w dadurch ermitteln, daß wir nach Wegnehmen des Objektivs mit Hilfe eines an seine Stelle gesetzten Theodoliten den Winkel w ausmessen, indem wir das Theodolitfernrohr nacheinander auf die Endpunkte von y einstellen. Damit ist dann $a' = y_1' : \operatorname{tg}\frac{w}{2}$ bekannt. Wählen wir das Ding nur in genügend großer Entfernung, so können wir a mit dem Abstand des Dinges vom zugekehrten Systemscheitel gleichsetzen. Würden wir dabei einen Fehler da machen, so ist der dadurch für die Brennweite folgende Fehler nur $(f/a)^2 \cdot da$, den wir also durch geeignete Wahl von a beliebig klein und damit vernachlässigbar machen können.

Für die Ausführung des Versuches zweckmäßiger und einfacher wird das Verfahren, wenn wir als Dingort den Brennpunkt des Prüfsystems wählen

[1]) Dabei sollen die Einfachstriche auf der Seite der Brennweite f_1 als Strichplatte verwendet werden.

[2]) L. MOSER, Pogg. Ann. Bd. 63. S. 39–49. 1844.

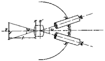


Abb. 101. Die Anordnung bei der Brennweitenmessung durch Ermittelung des dingseitigen Hauptstrahlneigungswinkels w für eine bekannte Dinggröße y, die mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs in den Brennpunkt F der zu prüfenden Linsenfolge HH' gebracht worden ist. Objektiv HH' und Ding y befinden sich auf dem Tisch eines Spektrometers, dessen Drehachse durch H' geht. Das Spektrometerfernrohr wird nacheinander auf die beiden Enden von y eingestellt, wodurch der dingseitige Hauptstrahlneigungswinkel w ermittelt wird, mit dessen Hilfe sich die gesuchte Brennweite als

$$f = \frac{\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{w}{2}}$$

berechnen läßt.

(Abb. 101)[1]) und die Gegenstandsgröße y messen. Wir bringen das Objektiv auf den feststehenden Tisch eines Spektrometers, so daß die Drehachse des Beobachtungsfernrohrs in der Hauptebene H' liegt. In bekannter Weise schieben wir dann mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Beobachtungsfernrohres die Strichplatte in den Brennpunkt F des Systems und stellen darauf das Spektrometerfernrohr einmal auf das eine, dann auf das andere Ende des Bildes von y ein. Am Teilkreis lesen wir dabei den Winkel w ab. Es ist

$$f = \frac{y/2}{\operatorname{tg}\frac{w}{2}}. \tag{65}$$

Die Meßgenauigkeit dieses Verfahrens hängt stark von der Größe des benutzten Winkels w ab. Mit wachsendem Winkel w wird sie wesentlich besser.

5. Die Verfahren der Brennweitenmessung, die unabhängig von der Auffassung des Bildortes sind.

96. Die Abbeschen Grundbedingungen „jeglicher mikrometrischer Messung mittels optischer Bilder". ABBE[2]) hat die Grundbedingungen aufgestellt, die bei jeder „mikrometrischen Messung mittels optischer Bilder" erfüllt sein müssen, wenn das Verfahren genaue Ergebnisse liefern soll:

1. Eine Präzisionsmessung darf nicht abhängig gemacht werden von der Auffassung des Ortes eines optischen Bildes. Denn dieser Ort ist stets unsicher, da bei derartigen Scharfeinstellungen eines Bildes ein gewisser Spielraum sich nicht vermeiden läßt. Dieser Spielraum hängt einerseits ab von der Schärfe des beobachtenden Auges, gemessen durch den Winkelwert des kleinsten, eben noch merkbaren Streuungskreises, dessen Winkelgröße für die einzelnen Augen verschieden ist und zwischen 30″ bis 60″ beträgt. In zweiter Linie wird der Einstellungsspielraum beeinflußt von dem Öffnungswinkel[3]) der Strahlen, die das letzte vor dem Auge vorhandene Bild entwerfen, und zwar wird der Einstellspielraum um so größer, je kleiner dieser Öffnungswinkel ist. Je mehr wir durch Abblenden der Linsenfolge die Bildfehler zu verringern suchen, desto kleiner wird aber dieser Öffnungswinkel werden. Wir müssen deshalb eine Präzisionsmessung so einrichten, daß ihr Ergebnis nicht von der genauen Messung

[1]) S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente. III. Aufl. Kap. 21. Artikel A. KÖNIG, S. 642. Leipzig: J. A. Barth. 1924.

[2]) E. ABBE, Sitzungsber. d. Jenaer Ges. f. Med. u. Naturw. 1878; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 165—172. 1904; S. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 185—189. 1892.

[3]) Beim Sehen mit normalem Auge z. B. aus 250 mm deutlicher Sehweite und bei 4 mm Pupillenöffnung ist dieser Öffnungswinkel der ins Auge gelangenden Strahlen 55′.

des Achsenabstandes eines optischen Bildes von einem anderen optischen Bilde oder von einem Festpunkt beeinflußt wird.

2. Eine Präzisionsmessung darf auch nicht mittelbar von der Einstellung abhängig sein, insofern, als die Größe des zu messenden Bildes infolge des Einstellspielraums mit einem mehr oder minder großen Fehler behaftet sein kann. Diese Forderung ist damit gleichwertig, daß der Strahlengang nach der Bildseite telezentrisch ist. Einen solchen bildseitig telezentrischen Strahlengang erhalten wir, wenn wir durch eine genügend enge Blende im dingseitigen Brennpunkt der abbildenden Linsenfolge oder durch ein geeignetes Ersatzmittel die Hauptstrahlen der austretenden bildseitigen Bündel zur optischen Achse parallel machen. Nur in diesem Falle wird die Größe des Bildes gänzlich unabhängig von der Auffassung des Bildortes sein, da wir infolge der Parallelität der Bildhauptstrahlen mit der optischen Achse stets die gleiche Bildgröße ausmessen werden, ganz gleichgültig, ob wir das mit seiner Achse parallel zur Systemachse stehende Meßmikroskop auf die Bildebene scharf oder unscharf eingestellt haben.

3. Bei jeder Präzisionsmessung darf nur der Grundwert der Vergrößerung, d. h. die Vergrößerung, mit der in dem unendlich kleinen zentralen Teile des Bildes die Abbildung stattfindet, in die Rechnung eingehen. Bei allen Linsenfolgen wird die Vergrößerung je nach dem Korrektionszustand mehr oder minder von der Öffnung des abbildenden Büschels, also von den benutzten Zonen des Systems und von der Dinggröße abhängen. Wir werden deshalb die Messung der Vergrößerung selbst an großen Bildern durchführen, wobei wir die Bildgrößen geeignet abstufen, um dann aus einer solchen Meßreihe den Grundwert der Vergrößerung als Anfangsglied einer Potenzreihe abzuleiten (Vgl. Ziff. 97).

Die Abbeschen Forderungen 1. und 2. führen dazu, die Brennweitenmeßmethode so auszubauen, daß wir im Grunde genommen die Winkelvergrößerungen, Konvergenzverhältnisse, ermitteln. Messen wir für zwei verschiedene Dingörter die Konvergenzverhältnisse γ_1 und γ_2, so erhalten wir nach Gleichung (34) die beiden Beziehungen

$$\gamma_1 = \frac{x_1}{f} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \frac{x_2}{f},$$

woraus wir durch Subtraktion für die Brennweite f zu der Formel

$$f = \frac{x_2 - x_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \tag{66}$$

kommen.

97. Die Abbesche Fokometermethode. Die in Ziff. 96 behandelten Grundbedingungen jeglicher genauen Messung führten Abbe[1]) zu seiner Fokometermethode.

Die Bestimmung der Brennweite gründet sich bei diesem Verfahren auf die Ermittelung der Konvergenzverhältnisse, die in diesem Falle gleich den umgekehrten Lateralvergrößerungen sind, die die untersuchte Linsenfolge für zwei verschiedene Dingorte der optischen Achse ergibt, während gleichzeitig nur noch eine Ausmessung der gegenseitigen Entfernung der beiden Dingorte zu erfolgen braucht, womit die erste Abbesche Bedingung erfüllt ist.

Nach Abbe werden dazu zwei in einem bekannten Abstande Δ voneinander entfernt stehende Teilungen T_1 und T_2 (Abb. 102) benutzt, deren Bilder im bildseitig telezentrischen Strahlengang beobachtet werden. Diesen letzteren erhalten wir dadurch, daß wir ein Beobachtungsmikroskop M verwenden, dessen optische Achse, die allein zur Messung benutzt wird, parallel zur Achse des zu

[1]) S. Czapski, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 185—197. 1892.

prüfenden Systems steht, während die Öffnung des Mikroskopobjektivs die Öffnung der abbildenden Bündel bestimmt.

Mit diesem Mikroskop beobachten wir durch die Linsenfolge hindurch die beiden Teilungen T_1 und T_2, deren Bilder in $A_1'B_1'$ bzw. $A_2'B_2'$ liegen. Von diesen Teilungen werden wir dann bei Scharfstellung des Mikroskops auf das betreffende Bild gerade den Teilstrich sehen, dessen Hauptstrahl im Bildraum parallel zur optischen Achse läuft, d. h. wir werden den Strich sehen, der auf dem von H_1 bzw. H_2 ausgehenden Brennpunktsstrahl liegt. Im Falle der Abb. 102 sehen wir so die Punkte A_1 und B_1 auf der Teilung T_1 und die Punkte A_2 und B_2 auf

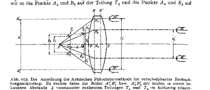


Abb. 102. Die Anordnung der ABBEschen Fokometermethode bei verschiebbarem Beobachtungsmikroskop. Es werden dabei die Bilder $A_1'B_1'$ bzw. $A_2'B_2'$ der beiden in einem bekannten Abstande Δ voneinander entfernten Teilungen T_1 und T_2 im bildseitig telezentrischen Strahlengang beobachtet dadurch, daß zur Beobachtung ein Mikroskop M verwendet wird, dessen optische Achse parallel zur optischen Achse des Prufsystems HH' verläuft. Dies hat zur Folge, daß die jeweils abbildenden Hauptstrahlen bildseitig parallel zur Achse verlaufen, dingseitig also durch den Brennpunkt gehen. Sie schneiden deshalb bei symmetrischen Stellungen des Beobachtungsmikroskops M_1 und M_1' bzw. M_2 und M_2' auf den Teilungen die symmetrisch gelegenen Punkte A_1 und B_1 auf T_1 bzw. A_2 und B_2 auf T_2 heraus. So beobachten wir zur Dinggroße y_1 auf T_1 die Bildgroße y_1', zu y_2 auf T_2 die Bildgroße y_2' und erhalten damit die Vergroßerungen $\beta_1 = \frac{y_1'}{y_1}$ und $\beta_2 = \frac{y_2'}{y_2}$ und daraus die gesuchte Brennweite

$$f = \frac{\Delta}{1/\beta_2 - 1/\beta_1}.$$

der Teilung T_2. Indem wir das Beobachtungsmikroskop aus der Stellung M_1 bzw. M_2 genau parallel zu sich selbst und zur optischen Achse der zu prüfenden Linsenfolge bis in die Stellung M_1' bzw. M_2' verschieben, messen wir damit die zu den Dinggrößen y_1 und y_2 gehörigen Bildgrößen y_1' und y_2' aus. Die Vergrößerungen sind dann $\beta_1 = y_1'/y_1$ und $\beta_2 = y_2'/y_2$. Beobachten wir nun, daß nach Gleichung (33) und (34) die Lateralvergrößerung β_i gleich dem umgekehrten Werte der Winkelvergrößerung γ_i ist, so können wir für dieses ABBEsche Beobachtungsverfahren die Brennweitenformel (66) auch schreiben

$$f = \frac{x_2 - x_1}{1/\beta_2 - 1/\beta_1}. \tag{67}$$

Neben den Vergrößerungen β_i brauchen wir somit nur den Abstand $\Delta = x_2 - x_1$ der beiden Teilungen voneinander zu bestimmen, um f berechnen zu können.

Um die Bildgrößen y_i' zu messen, sind wir bei der Ableitung so vorgegangen, daß wir das Beobachtungsmikroskop verschoben haben. Die mechanische Ausführung einer solchen Mikroskopverschiebung würde sich aber sehr schwierig gestalten, da dafür ein sehr guter Schlitten notwendig sein würde, weil das

Mikroskop immer genau in seiner Lage parallel zur optischen Achse der zu prüfenden Linsenfolge bleiben muß. ABBE schlug deshalb bei dem von ihm für dieses Verfahren gebauten Brennweitenmesser einen anderen Weg ein, indem er nicht das Mikroskop verschiebt, sondern die zu prüfende Linse, während das Mikroskop und die Teilungen dabei fest stehen bleiben. Eine solche Verschiebung der Linsenfolge läßt sich mechanisch unvergleichlich leichter und mit einfacheren Mitteln mit genügender Genauigkeit ausführen, weil in diesem Falle keine so große Abhängigkeit des Ergebnisses von einer Verkippung oder Drehung vorliegt wie im erstgenannten Falle. Die Entfernung des Hauptpunktes vom Schlitten, die gewissermaßen den Hebelarm für die Drehung des Objektivs und damit den ausschlaggebenden Faktor für die Verfälschung der Versuchsbedingungen vorstellt, kann im vorliegenden Falle sehr klein, jedenfalls aber zu einem kleinen Bruchteil des entsprechenden Faktors im erstgenannten Falle der Mikroskopverschiebung gemacht werden.

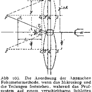


Abb. 103. Die Anordnung der ABBEschen Fokometermethode, wenn das Mikroskop und die Teilungen feststehen, während das Prüfsystem auf einem verschiebbaren Schlitten steht. Gemessen werden jetzt aber die Strecken y' und y_0, so daß die zur Berechnung von f notwendige Vergrößerung

$$\beta = \frac{y'}{y' - y_0}$$

wird.

Für diese von ABBE vorgeschlagene Versuchsdurchführung gibt Abb. 103 das Bild für die Verwertung der Beobachtungen. Wir stellen zunächst das Mikroskop M auf A ein, verschieben dann die zu prüfende Linse um die Strecke $y' = 2h$ und sehen nun im Mikroskop den symmetrisch zu A liegenden Strich B eingestellt. Es sei $AB = y_0$. Zum Gebrauch der Formel (67) müssen wir aber $A_0 B = y$ kennen. Es ist die Bildgröße

$$y' = C_1 C_2 = C_1 A + AB + BC_2 = y + y_0,$$

also die Dinggröße

$$y = y' - y_0. \tag{68}$$

Die Vergrößerung ist demnach:

$$\beta = \frac{y'}{y' - y_0}.$$

Richten wir die Beobachtung so ein, daß wir bei beiden Teilungen die gleiche Bildgröße $y' = y'_1 = y'_2$ messen (Abb. 103), d. h. nehmen wir beide Male die gleiche Verschiebung des Prüfobjektivs vor, so liefern uns die dabei ermittelten Vergrößerungswerte β einen Brennweitenwert f_h, der gerade einer ganz bestimmten Zone $2h = y'$ zugehört, wenn wir unter h die Einfallshöhe verstehen. Wir sind also durch das ABBEsche Verfahren in der Lage, die Brennweite jeder einzelnen Zone zu bestimmen, wodurch ohne weiteres die sphärischen Längsabweichungen der Brennweiten bekannt sind. Benutzen wir einfarbiges Licht, so besteht dann auch die Möglichkeit, gleichzeitig die chromatischen Abweichungen der Brennweiten zu ermitteln. In allen diesen Abweichungen stecken aber noch die

Hauptpunktsabweichungen, die wir zur Kenntnis der Brennpunktsabweichungen vorher erst noch aufsuchen müssen (vgl. Ziff. 103).

Das ABBEsche Fokometer sieht in seinem äußeren Aufbau wie ein Mikroskop aus. Der Tisch, auf den die zu untersuchende Linse gelegt wird, ist als Schlitten ausgebildet. Unter dem Tisch, parallel zur Schlittenführung, sind zwei Teilungen T_1 und T_2 (Abb. 103) angebracht. T_2 kann eine kurze Teilung sein, sitzt dicht unter dem Schlitten und ist so gefaßt, daß sie weggeschlagen werden kann. T_1 (0,5 mm Strichabstand) befindet sich um die einstellbare Strecke Δ tiefer als T_2 und ist eine wesentlich größere Teilung als T_2 (0,1 mm Strichabstand). Die Mitten dieser beiden Teilungen bilden die optische Achse des Beobachtungsmikroskops, das sich in fester unveränderlicher Lage über dem Schlitten befindet und dessen Einstellung an einer Teilung abgelesen werden kann. Damit ein möglichst großer Bereich für die Lage der Bilder zugelassen werden kann, sind dem Meßgerät fünf Mikroskopobjektive verschiedener Brennweite ($f = 50$, 75, 100, 125 und 150 mm) beigegeben, so daß stets das von der zu prüfenden Linse entworfene Bild auch der unteren Teilung T_1 scharf eingestellt werden kann. Die Verschiebung des Schlittens, auf dem sich das Prüfobjektiv befindet, kann mit Hilfe eines Nonius auf 0,02 mm an einer Teilung abgelesen werden.

Mit diesem ABBEschen Fokometer, mit dem eine Meßgenauigkeit von $0{,}1^0/_{00}$ sich gut erzielen läßt, können infolge seiner räumlichen Beschränktheit nur Brennweiten größer als 80 mm bei Öffnungen von 20 bis 100 mm ermittelt werden. Für alle anderen Brennweiten ist die Methode an sich selbstverständlich auch brauchbar; sie erfordert dann allerdings einen anderen instrumentellen Aufbau. Für große Öffnungen von 100 bis 500 mm wird es schwierig, einen guten Schlitten herzustellen, weshalb es für diesen Fall vorzuziehen ist, das Mikroskop zu verschieben, wie dies bei einem von C. BAMBERG-Friedenau für die P.T.R. gebauten Fokometer[1]) ausgeführt wurde.

Wenn sich bei der Ermittelung der Vergrößerungen zeigt, was meistens der Fall sein wird, daß die Größen β merklich von y abhängen, d. h. daß wir bei der Beobachtung einer der Teilungen verschiedene, stetig sich ändernde β bekommen je nach der Zone, die wir zur Abbildung benutzen, dann dürfen wir nicht einfach das arithmetische Mittel der Einzelwerte von β zu der Berechnung der Brennweite verwenden. Wir müssen vielmehr die Reihendarstellung

$$\beta = \beta_0 + a_1 \cdot y^2 + a_2 \cdot y^4 + \cdots$$

aufsuchen, deren Konstanten wir durch die entsprechende Anzahl von Beobachtungen ermitteln. Aus dieser Reihenentwicklung entnehmen wir dann den zur Öffnung $y = 0$ gehörigen, also dem achsennahen Raum entsprechenden Grundwert als den in die Gleichung (67) eingehenden Vergrößerungswert β_0. Von Ausnahmefällen abgesehen genügt im allgemeinen die Verwendung der beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung, weshalb wir in den meisten Fällen mit zwei Beobachtungen an einer Teilung auskommen werden. Es ist vorteilhaft, dabei zwei Zonen zur Beobachtung zu verwenden, deren Einfallshöhen die Bedingung $y_1' : \bar{y}_1' = 1 : \sqrt{2}$ erfüllen. Gerade in dieser Möglichkeit, aus größeren gemessenen Werten auf die Grundwerte zurückzugehen, welche unendlich kleinen Verschiebungen der Linse und unendlich kleinen Bildausdehnungen entsprechen, liegt ein entscheidender Vorteil dieses ABBEschen Verfahrens.

Das ABBEsche Verfahren kann auch bei einigen Zusatzbeobachtungen dazu ausgebaut werden, die Lage der Hauptpunkte und deren sphärische und chromatische Abweichungen zu ermitteln (Ziff. 103, 122 und 130), wodurch

[1]) O. LUMMER, Die Lehre von der strahlenden Energie (Optik). Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie II. Bd., X. Aufl. 3. Buch, S. 566. 1909.

gleichzeitig die Möglichkeit gegeben ist, die sphärischen und chromatischen Abweichungen der Brennpunkte der einzelnen Zonen festzustellen.

98. Die Brennweitenbestimmung bei Mikroskopobjektiven mit Hilfe der numerischen Apertur. Unter der numerischen Apertur a eines von einem Achsenpunkte ausgehenden Strahlenbündels verstehen wir nach Abbe das Produkt aus der Brechungszahl n des Mittels, in dem die Strahlen verlaufen, und dem Sinus des halben Öffnungswinkels u des Büschels: $a = n \cdot \sin u$. Eine Folge der Gültigkeit des Sinussatzes ist dann die, daß der halbe Durchmesser p' des Kreises, in dem das Büschel die bildseitige Brennebene durchstößt, bis auf kleine Korrektionsglieder gleich dem Produkt aus dingseitiger Apertur und bildseitiger Brennweite f' ist:

$$p' = a \cdot f'. \tag{69}$$

Das Abbesche Apertometer (Ziff. 139) gibt uns nun aber ein einfach zu handhabendes Mittel an die Hand, um die numerische Apertur von Mikroskopobjektiven zu bestimmen. Wenn wir also noch p' kennen, können wir die bildseitige Brennweite f' aus (69) berechnen. p' können wir aber leicht ausmessen, indem wir mit einem nach der Dingseite telezentrischen Hilfsmikroskop, wie es überhaupt schon zusammen mit dem Apertometer gebraucht wird, den Durchmesser des in der bildseitigen Brennebene ausgeleuchteten Kreisfeldes bestimmen.

Bei Immersionssystemen, deren numerische Apertur $a > 1$ ist, können wir ohne Messung der numerischen Apertur auskommen. Für solche Immersionssysteme wird nämlich die numerische Apertur $a = 1$, wenn sie ohne Immersionsflüssigkeit, also nur mit Luft, vor der Frontlinse benutzt werden, und wenn der Kondensor eine numerische Apertur besitzt, die, wenn auch nur wenig, größer als 1 ist, so daß wir sicher sind, daß er in Luft Strahlen bis zum streifenden Austritt liefert. Wir senken das Mikroskopobjektiv bis zur Berührung der Frontlinse mit dem Kondensor, so daß die Strahlen streifend in die Frontlinse eintreten. Um ganz sicher zu gehen, daß wir wirklich streifenden Eintritt in das Mikroskopobjektiv haben, was unter Umständen durch etwas vorstehende Fassungsränder der Frontlinse, die eine ganz dichte Annäherung der Frontfläche an den Kondensor verhindern, eintreten könnte, kleben wir vor die Frontlinse mit Hilfe eines Tröpfchens Immersionsflüssigkeit ein dünnes Deckglas und nähern das Mikroskopobjektiv mit diesem Deckglas dem Kondensor bis zur dichten Berührung, dabei streng darauf achtend, daß keine Immersionsflüssigkeit zwischen Deckglas und Kondensor kommt. Wir messen nun mit einem Mikrometermikroskop in der bildseitigen Brennebene den Durchmesser $2p'$ des hellen Kreises aus und haben damit, da ja $a = 1$ ist, unmittelbar die gesuchte Brennweite $f' = p'$.

6. Die negativen Brennweiten.

99. Die Verwendung der bisher genannten Verfahren. Verschiedene der angegebenen Verfahren der Brennweitenmessung lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten auch auf negative Linsen oder Linsenfolgen anwenden, wie z. B. die in den Ziff. 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94 und 97 beschriebenen Verfahren. Wir müssen dabei immer nur beachten, daß wir virtuelle Bilder in der schon mehrfach beschriebenen Weise mit einem langbrennweitigen Mikroskopobjektiv beobachten können, dessen freier Dingabstand genügend groß sein muß, um damit durch die Linse hindurch den Ort des nichtauffangbaren Bildes zu erreichen.

Bei Verwendung eines positiven Hilfssystems sind wir sogar in der Lage, den Dingort in den dingseitigen Brennpunkt oder in Punkte in dessen Nähe zu legen. Dazu entwerfen wir mit dem positiven Hilfssystem S' dessen Brenn-

weite größer als die der negativen Linsenfolge S sein muß, in bekanntem Maßstabe von dem Ding O in O' ein Bild und setzen nun (Abb. 104) das negative System S so in den bildseitigen Strahlengang des positiven Hilfssystems S', daß der nun in Wirklichkeit nicht mehr zustandekommende Bildpunkt O' von der Linsenfolge S bzw. von deren dingseitigem Brennpunkte F den gewünschten Abstand hat, z. B. mit F zusammenfällt (Abb. 104). In diesem Falle müssen die Strahlen parallel austreten, was wir mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Beobachtungsfernrohres feststellen können. Von dieser Lage ausgehend, können wir dann jede gewünschte Dingweite x einstellen, vorausgesetzt, daß $S'O'$ ausreichend groß ist.

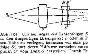


Abb. 104. Um bei negativen Linsenfolgen S den Dingort in den dingseitigen Brennpunkt F oder in Punkte in dessen Nähe zu verlegen, benutzen wir eine positive Linsenfolge S', mit deren Hilfe wir zunächst einen reellen Bildpunkt O' vom Ding O herstellen. Durch Einschieben der negativen Linsenfolge S in den bildseitigen Strahlengang von S' und unter Zuhilfenahme eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs können wir die negative Linse in eine solche Lage bringen, daß die Strahlen aus ihr parallel austreten, daß also O' mit F zusammenfällt.

100. Die Vereinigung mit einer größeren positiven Brennweite. Die genannten Verfahren lassen sich ohne weiteres grundsätzlich alle verwenden, wenn wir das zu prüfende Negativsystem mit einem kurzerbrennweitigen positiven System vereinigen, so daß die Gesamtwirkung eine positive sein wird. Ist nach einem der obigen Verfahren dann die Gesamtbrennweite f ermittelt, so gilt bekanntlich für diese die Formel

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}, \tag{70}$$

worin f_1 und f_2 die Brennweiten der Einzelsysteme und d der Abstand der beiden einander zugekehrten Hauptebenen der Systeme sind. Kennen wir den Wert von d, so ist dann die gesuchte Brennweite f_2 gegeben durch

$$f_2 = \frac{(f_1 - d) \cdot f}{f_1 - f}. \tag{71}$$

Im allgemeinen wird es nun aber schwer sein, den Abstand d für genaue Brennweitenmessungen genügend genau zu ermitteln. Dieses Verfahren wird deshalb in der Hauptsache nur für dünne Linsen von einer einigermaßen guten Genauigkeit sein, weil wir dann als Abstand d den Abstand der beiden Linsen voneinander benutzen können, ohne dadurch einen wesentlichen Fehler zu begehen.

101. Die Messung negativer Brennweiten durch Vergrößerungsmessung im holländischen Fernrohr. Im holländischen Fernrohr ist die Augenlinse eine Negativlinse und die Vergrößerung eines solchen Fernrohres ist

$$N_F = \frac{f_1}{f_2}, \tag{72}$$

wenn f_1 die Brennweite des Objektivs und f_2 die Brennweite der Augenlinse vorstellt. Wir stellen uns deshalb aus einem bekannten Fernrohrobjektiv f_1 und dem zu untersuchenden negativen System f_2 ein holländisches Fernrohr zusammen und ermitteln dessen Vergrößerung N_F (vgl. dazu Ziff. 142). Aus (72) ist dann f_2 ohne weiteres zu berechnen.

γ) Die Ermittelung der Lage der Haupt- und Knotenpunkte.

102. Die Grundeigenschaft der Haupt- und Knotenpunkte. Für das Aufsuchen der Lage dieser Grundpunkte kommt grundsätzlich nur ihre Definition als Ausgangspunkt in Frage. Suchen wir die zugeordneten Achsenpunkte einer Abbildung, für die bei aufrechtem Ding und Bild diese beiden auch gleich groß sind, d. h. für die die Lateralvergrößerung $\beta = +1$ ist, so kommen wir dadurch zu den Hauptpunkten. Suchen wir dagegen die zugeordneten Achsenpunkte einer Abbildung, für die einander entsprechende Geraden mit der optischen Achse der abbildenden Linsenfolge gleiche Winkel einschließen, für die also die Winkelvergrößerung $\gamma = +1$ ist, so erhalten wir dadurch die Knotenpunkte. Diese Definitionen bringen es mit sich, daß die Haupt- und Knotenpunkte die gleichen sind für Systeme, deren Bildraum vom gleichen Mittel wie der Dingraum erfüllt ist. Die im folgenden zu besprechenden Verfahren sind für luftumgebene Linsenfolgen gedacht. Sie mussen also alle zum selben Ergebnis fuhren, einerlei ob wir ein Verfahren benutzen, das sich auf die Eigenschaft der Hauptpunkte, oder ein solches, das sich auf die Eigenschaft der Knotenpunkte grundet. Welches Verfahren Anwendung findet, ist also nur eine Frage der Zweckmäßigkeit.

Auf einfache, wenn auch nicht gerade sehr genaue Weise können wir die Lage der Hauptpunkte auffinden, wenn wir neben einer Brennweitenbestimmung noch eine Bestimmung der Schnittweite achsenparalleler Strahlen (Ziff. 74—79), also der Brennpunktsentfernung vom Linsenscheitel, durchführen. Der Unterschied zwischen dieser Schnittweite und der Brennweite ist der Abstand des betreffenden Hauptpunktes vom zugehörigen Linsenscheitel.

1. Die Verfahren, die sich auf die Hauptpunktseigenschaft gründen.

103. Die Fokometermethode von ABBE. Anschließend an die Messung der Brennweite einer Linsenfolge nach dem ABBEschen Fokometerverfahren (Ziff. 97) läßt sich eine einfache Zusatzmessung[1]) durchführen, die gestattet, zusammen mit der entsprechenden Beobachtung der Brennweitenmessung den Abstand des dingseitigen Hauptpunktes H_0 (Abb. 102) vom dingseitigen Scheitel $\mathfrak{S}$ als $\mathfrak{S}H_0 = i_1$ aufzufinden.

Beim ABBEschen Verfahren (Abb. 103) verschieben wir das System unter dem Mikroskop M und beobachten z. B. die Verschiebung $y' = 2h$ des Prüfsystems, die notwendig ist, damit nacheinander die beiden zur optischen Achse des Mikroskops symmetrisch liegenden Striche A und B der Teilung T_2 im Fadenkreuz einstehen. Damit haben wir $AB = y_0$ abgelesen, woraus wir anderseits auf

$$A_0B \equiv y = y' - y_0 \qquad (73)$$

schließen können. Damit sind wir aber in der Lage, den Abstand H_0C_2 des Hauptpunktes H_0 von der Ebene der Teilung T_2 zu errechnen. In den ähnlichen Dreiecken FC_2A_0 und FH_0H_1 gilt das Verhältnis $C_2F:H_0F = C_2A_0:H_0H_1$ oder unter Beachtung der Bedeutung der einzelnen Strecken

$$\frac{C_2F}{f_h} = \frac{y}{y'},$$

woraus wir weiter folgern können

$$\frac{H_0F - C_2F}{f_h} = \frac{y' - y}{y'} \qquad \text{oder} \qquad H_0C_2 = \frac{y' - y}{y'} \cdot f_h$$

[1]) S. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 12, S. 185—195. 1892; H. FASSBENDER, ebenda Bd. 33, S. 210—218. 1913.

oder durch Einsetzen von (73)

$$H_0 C_2 = \frac{y_0}{y'} \cdot f_h . \tag{74}$$

Kennen wir nun noch $C_2 \mathfrak{S} = d_1$, den Abstand der Teilung T_2 vom Systemscheitel $\mathfrak{S}$, so sind wir dadurch in die Lage versetzt, den gewünschten Hauptpunktsabstand $H_0 \mathfrak{S} = i_1$ ohne weiteres festzustellen. Um den fraglichen Abstand $C_2 \mathfrak{S} = d_1$ zu bekommen, ist es nur nötig, durch eines der bekannten Dickenmeßverfahren ihn auszumessen. Mit einem Tiefentaster werden wir den Abstand d_1 auf $^1/_{10}$ mm genau ermitteln können. Wollen wir eine größere Genauigkeit erreichen, so können wir so vorgehen, daß wir im Anschluß an die für die Bestimmung von f_h am ABBEschen Fokometer durchgeführte Schlußmessung die Messung von d_1 in einfacher Weise mit dem Beobachtungsmikroskop M selbst durchführen. Wir stellen das Mikroskop, dessen Verschiebung längs seiner optischen Achse an einer Millimeterteilung mit Nonius auf $^1/_{100}$ mm abgelesen werden kann, zunächst auf den bildseitigen Systemscheitel S und dann nach Wegnahme des Systems auf die Teilung T_2 ein. Von der so gefundenen Strecke SC_2 brauchen wir dann nur noch die Gesamtdicke der untersuchten Linsenfolge abzuziehen, um den gewünschten Abstand d_1 zu bekommen. Damit ist dann der Hauptpunktsabstand $H_0 \mathfrak{S} = i_1$ unter Berücksichtigung der Gleichung (74) gegeben als

$$i_1 = \frac{y_0}{y'} \cdot f_h - d_1 . \tag{75}$$

Den Wert der Brennweite f_h errechnen wir auf Grund der Beobachtung, wie dies in Ziff. 97 ausgeführt worden ist.

Die Genauigkeit des Verfahrens wird im wesentlichen beeinflußt von dem in der Messung von y_0 gemachten Fehler, der mit dem Faktor f_h/y', der im allgemeinen erheblich größer als Eins ist, multipliziert in die Rechnung eingeht. Bei vorsichtig und mit entsprechend genauen Meßmitteln durchgeführten Messungen wird es aber stets möglich sein, diesen Meßfehler in $(y' - y)$ auf einige (1 bis 2) tausendstel Millimeter herabzudrücken, so daß das ABBEsche Fokometerverfahren den Hauptpunktsabstand $H_0 \mathfrak{S}$ etwa mit der gleichen absoluten Meßgenauigkeit liefert wie die Brennweite (Ziff. 97).

Wir sind somit durch eine einfache Ergänzungsdickenmessung in der Lage, beim ABBEschen Brennweitenmeßverfahren neben der Brennweite f_h einer Zone h auch gleichzeitig die Lage des zugehörigen Hauptpunktes zu ermitteln.

Ziehen wir in Betracht, daß wir die Beobachtungen am ABBEschen Fokometer für die verschiedenen einfarbigen Lichtsorten durchführen können, so können wir also durch verhältnismäßig einfache Messungen mit dem Fokometer folgende Systemuntersuchungen mit den höchst erreichbaren Meßgenauigkeiten durchführen:

1. Abhängigkeit der Brennweite von Zone und Wellenlänge (sphärische und chromatische Abweichungen der Brennweite).

2. Abhängigkeit der Lage des Hauptpunktes von Zone und Wellenlänge (sphärische und chromatische Abweichungen des Hauptpunktes).

3. Abhängigkeit der Lage des Brennpunktes von Zone und Wellenlänge (sphärische und chromatische Abweichungen des Brennpunktes).

104. Das Verfahren von HARTMANN. Das von HARTMANN[1]) angegebene Verfahren ist ganz ähnlich dem von ABBE (Ziff. 103) mitgeteilten.

---

[1]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 40—41. 1904; H. FASSBENDER, ebenda Bd. 33, S. 210—218. 1913.

Eine Glasteilung T wird auf einen meßbar zu verschiebenden Schlitten $S_1 S_2$ (Abb. 105) parallel zur Verschiebungsrichtung gelegt und befestigt. Darüber wird die zu prüfende Linsenfolge gebracht derart, daß die Teilung T längs eines Durchmessers des Objektivs zu liegen kommt, und daß die Striche der Teilung paarweise symmetrisch zur Objektivmitte liegen. Im allgemeinen werden wir das System mit seinem unteren Fassungsrand unmittelbar auf die Glasteilung aufstellen. Zur Beobachtung dient ein feststehendes Mikroskop M, dessen optische Achse parallel zu der der zu prüfenden Linsenfolge verlaufen muß. Die richtige Ausrichtung des Objektivs zum Beobachtungsmikroskop M erkennen wir daran, daß ein Strich der Teilung, auf den wir das Mikroskop vor dem Zwischenbringen des Systems eingestellt haben, nach Zwischenschalten desselben keine Versetzung erlitten haben darf. Wir werden das Objektiv so lange hin und her rücken, bis dies einwandfrei der Fall ist.

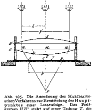


Abb. 105. Die Anordnung des HARTMANNschen Verfahrens zur Ermittelung des Hauptpunktes einer Linsenfolge. Das Prüfsystem HH' steht auf einer Teilung T, die ihrerseits auf einem verschiebbaren Schlitten $S_1 S_2$ sich befindet, während das Beobachtungsmikroskop M feststeht. Das durch die Linsenfolge hindurch auf die Teilung T eingestellte Mikroskop wird durch Verschieben des Schlittens $S_1 S_2$ in zwei zur optischen Achse symmetrische, um y' voneinander abstehende Stellungen M_1 bzw. M_2 gebracht. Dabei werden die beiden um y voneinander entfernten Punkte A und B im Fadenkreuz von M einstehen. Ist f_h die Brennweite der betreffenden Zone $h = \frac{y'}{2}$ und ist der Linsenscheitel $\mathfrak{S}$ um $C\mathfrak{S} = d_1$ von der Teilung T entfernt, so ist der Hauptpunktsabstand

$$H_0 \mathfrak{S} = s_1 = \frac{y' - y}{y'} \cdot f_h - d_1 .$$

Nach gehöriger Ausrichtung des Systems verschieben wir nun den Schlitten $S_1 S_2$ zusammen mit der darauf untergebrachten Teilung und dem System unter dem Beobachtungsmikroskop M und zwar so, daß nacheinander zwei zur optischen Achse symmetrisch liegende Striche A und B im Okularfadenkreuz des Mikroskops einstehen (Stellung M_1 und M_2 des Mikroskops). Dabei verläuft dann die optische Achse des Mikroskops und damit dessen Hauptabbildstrahl parallel zur optischen Achse des Systems. Dieser Strahl wird also vor seinem Eintritt in das System so verlaufen, als er ob vom Brennpunkte F (Abb. 105) des Objektivs herkäme, also z. B. in der Richtung FH_1, wenn H_1 der Hauptpunkt der betreffenden Zone ist. Auf diesem Strahl muß somit auch der Teilstrich A liegen. Wir bezeichnen $H_0 F = f_h$ als Brennweite der Zone $H_1 H_2 = y' = 2h$, wobei h der Zonenradius ist, dessen doppelten Wert $2h$ wir als Verschiebung des Schlittens erhalten, wenn wir im Mikroskop M die beiden symmetrisch liegenden Teilstriche einstellen, deren Abstand $AB = y$ sein soll. Aus den so gewonnenen Beobachtungswerten werden wir zunächst den Abstand $H_0 C$ des dingseitigen Hauptpunktes H_0 von der Ebene der Teilung T ermitteln. Es ist auch hier wieder, ähnlich wie in Ziff. 103 abgeleitet,

$$H_0 C = \frac{y' - y}{y'} \cdot f_h . \tag{76}$$

Die zur Ermittelung von $H_0 \mathfrak{S} = i_1$ noch notwendige Entfernung $C\mathfrak{S} = d_1$ finden wir in gleicher Weise, wie in Ziff. 103 beschrieben, so daß dann für den Hauptpunktsabstand die Formel folgt

$$i_2 = \frac{y' - y}{y'} \cdot f_h - d_2 . \tag{77}$$

Der in dieser Formel (77) vorkommende, zunächst noch unbekannte Wert der Brennweite f_h wird nach einem in Ziff. 80 bis 101 mitgeteilten Verfahren festgestellt. Dabei brauchen wir durchaus nicht die genauesten Methoden anzuwenden. Da der Bruch sehr viel kleiner als Eins ist, z. B. $^1/_{25}$ bis $^1/_{60}$, und ein Fehler in f_h mit diesem Faktor multipliziert in das Ergebnis eingeht, brauchen wir das f_h nur mit geringerer Genauigkeit zu kennen. Im allgemeinen werden wir beim Gebrauch der Formel (77) bei gut korrigierten Objektiven mit einem einzigen Brennweitenwert für alle Zonen auskommen. Ausschlaggebend für die Genauigkeit des Verfahrens wird, wie beim ABBEschen, der in der Differenz $(y' - y)$ gemachte Meßfehler sein (vgl. dazu das in Ziff. 103 Gesagte). Wird die Ermittelung aller Größen mit bestmöglicher Genauigkeit durchgeführt, so ist die zu erzielende Meßgenauigkeit δi_2 etwa der gleich, mit der bei der HARTMANNschen Extrafokalmethode (Ziff. 123) die Lage des Brennpunktes für die einzelnen Zonen gefunden werden kann. Trotz dieser guten Meßgenauigkeit werden wir aber doch vorteilhafter nach dem ABBEschen Verfahren arbeiten, weil dieses einmal eine einfachere Apparatur aufweist, und weil die letzte Beobachtung bei dieser Brennweitenmessung gleich mit zur Hauptpunktsbestimmung verwendet werden kann.

2. Die Verfahren, die sich auf die Knotenpunktseigenschaft gründen.

105. Das erste HARTMANNsche Verfahren unter Benutzung eines sehr weit entfernten Dingpunktes. HARTMANN hat zwei Verfahren ausgearbeitet, die die Knotenpunktseigenschaft benutzen, um die Hauptpunktslage aufzufinden.

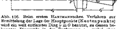


Abb. 106. Beim ersten HARTMANNschen Verfahren zur Ermittelung der Lage der Hauptpunkte (Knotenpunkte) wird ein weit entferntes Ding y in O benützt, zu dessen bekannter Dinggröße in der Entfernung s_1, wobei ohne einen großen Fehler zu begehen, an Stelle von s_1 der Scheitelabstand $O\mathfrak{S}$ verwendet werden kann, die Bildgröße y' ermittelt wird, so daß sich die Bildweite

$$s_1' = y' \cdot \frac{s_1}{y}$$

berechnen läßt, die um die experimentell ermittelte Schnittweite $O'S = s'$ vermindert den Hauptpunkts-(Knotenpunkts-)abstand

$$K'S = s_1' - s'$$

ergibt.

Beim ersten Verfahren[1]) wird ein Ding O, das in sehr großer Entfernung (Abb. 106) vom System sich befindet und dessen Größe y und Entfernung s_1 bekannt sind, durch das System nach O' abgebildet. Die Bildgröße y' wird mit Hilfe eines Mikrometerokulars ausgemessen. Ist w der ding- bzw. bildseitige Hauptstrahlneigungswinkel, so gilt

$$\operatorname{tg} w = \frac{y}{s_1} = \frac{y'}{s_1'}$$

oder

$$s_1' = y' \cdot \frac{s_1}{y} , \tag{78}$$

woraus also der Bildabstand s_1' vom bildseitigen Knotenpunkt K' berechnet werden kann. Anderseits wird die bildseitige Schnittweite s', d. h. der Ab-

[1]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 36—37. 1904.

stand der Einstellebene vom bildseitigen Systemscheitel S in bekannter Weise mit Hilfe eines Meßmikroskops, das wir einmal auf die Einstellebene und dann auf den durch Staub sichtbar gemachten Linsenscheitel S einstellen, ausgemessen, so daß dann der Abstand des Knotenpunktes K' vom bildseitigen Scheitel S gegeben ist als

$$K'S = s_1' - s'. \tag{79}$$

Diese Methode ist unabhängig von der richtigen Scharfstellung des Bildes, weil wir die Einstellung, strenggenommen, beliebig wählen dürfen, da ja in die Rechnung [Formel (78)] nur das Verhältnis von Bildgröße und Bildabstand eingeht, das aber stets das gleiche ist, einerlei wie wir scharfgestellt haben. Ein bei der Scharfstellung gemachter Fehler in s_1' wird sich in gleicher Größe und gleicher Richtung bei der Ausmessung von s' bemerkbar und so das Endergebnis der Gleichung (79) wieder richtig machen.

Ein Nachteil des Verfahrens ist nur der, daß die Bildgröße y' sehr klein ist, weshalb ein bei ihrer Ausmessung gemachter Fehler wesentlich stärker das Ergebnis beeinträchtigt als bei größerem y', da er mit seinem mit dem Faktor s_1/y, der wesentlich größer als 1 ist, multiplizierten Vielfachen in den gesuchten Abstand s_1' eingeht.

Anderseits ist es, wenn s_1 nur groß genug ist, nicht so ängstlich mit der für s_1 zu erzielenden Genauigkeit, da der hierbei gemachte Fehler nur verhältnismäßig gering in Erscheinung tritt, multipliziert mit dem sehr kleinen echten Bruch y'/y.

Um y' größer zu bekommen, muß y größer gewählt werden, was aber zur Folge hat, daß dann auch y und s_1 mit größerer Genauigkeit gemessen werden müssen. Dies ist jedoch mit genügender Schärfe bei genügender Größe von y' kaum noch durchzuführen.

Als Ding verwenden wir bei diesem Verfahren am geeignetsten eine in gerader Linie liegende Reihe von Lochblenden, deren Abstände y voneinander bekannt sind. Die Ermittelung von y' erfolgt dabei vorteilhaft in der Weise, daß wir die Lage der Lochblendenbilder auf einer Platte, deren Abstand s' vom Scheitel S vorher genau ausgemessen wurde, festhalten und ihre Entfernung y' nachträglich am entwickelten Bilde ausmessen, was wohl die günstigste Genauigkeit liefern dürfte.

Die Meßgenauigkeit wird im allgemeinen nicht günstiger als $^{10}/_{00}$ der Brennweite sein, aber auch 2 bis $^{30}/_{00}$ kaum überschreiten.

106. Das zweite Hartmannsche Verfahren unter Benutzung eines innerhalb der Brennweite aufgestellten Dinges. Bei diesem zweiten Verfahren benutzen wir nach Hartmann[1]) als Ding eine genau gemessene Strecke y. Eine solche können wir uns herstellen, indem wir in eine geschwärzte photographische Platte oder in eine versilberte Glasplatte zwei parallele feine Striche einritzen, die wir beim Gebrauch von hinten beleuchten.

Ein solches Strichpaar wird in O aufgestellt (Abb. 107). Das durch das System in O' entstehende Bild wird mit Hilfe eines auf diese Entfernung eingestellten Fernrohres betrachtet, das gleichzeitig Beobachtungsfernrohr eines Winkelmeßgerätes ist, dessen Drehpunkt in T liegen soll. Als Winkelmeßgerät wird es am praktischsten sein, ein Spektrometer oder einen Theodoliten zu verwenden. Indem wir das Beobachtungsfernrohr des verwendeten Instrumentes nacheinander auf die beiden Strichbilder einstellen, lesen wir am Teilkreis des Meßgerätes den Winkel φ ab.

[1]) J. Hartmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 37–39. 1904.

Ist z der Abstand des Drehpunktes T vom Bildort O' und t sein Abstand vom bildseitigen Knotenpunkt K', so besteht neben der Abbildgleichung

$$s_1' = \frac{f \cdot s_1}{f - s_1}$$

noch die Beziehung

$$z = s_1' + t = \frac{f \cdot s_1}{f - s_1} + t = \frac{f \cdot s_1 + t \cdot (f - s_1)}{f - s_1}.$$

Anderseits ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y'}{z} = \frac{y \cdot s_1'}{s_1} \cdot \frac{f - s_1}{f \cdot s_1 + t \cdot (f - s_1)} = y \cdot \frac{1}{s_1 + t/f \cdot (f - s_1)}.$$

Für die Dingweite s_1 erhalten wir demnach die Gleichung

$$s_1 = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{t}{f} \cdot (f - s_1). \tag{80}$$

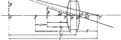


Abb. 107. Beim zweiten HARTMANNschen Verfahren zur Ermittelung der Hauptpunkts-(Knotenpunkts-)lage benutzen wir als Ding eine innerhalb der Brennweite liegende, genau gemessene Dinggröße y in O. Die Linsenfolge steht auf einem Spektrometertisch, dessen Drehpunkt in T liegt und von dem bildseitigen Knotenpunkt K' um t entfernt ist. Mit dem auf das Bild y' von y eingestellten Spektrometerfernrohr messen wir den Winkel φ aus und erhalten als Dingweite

$$s_1 = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{t}{f} \cdot x$$

und damit

$$K\mathfrak{S} = s_1 - s.$$

In dieser Formel ist $(f - s_1) = x$ die Strecke, um die der Dingpunkt O vom dingseitigen Brennpunkt F des Systems abweicht, und die wir leicht mit genügender Genauigkeit feststellen können, wenn wir die Brennpunktslage durch einfache Einstellung auf Unendlich in bekannter Weise (Ziff. 75) ermittelt haben.

Aus der Formel (80) ist ersichtlich, daß die Tatsache, daß der Drehpunkt T nicht mit K' zusammenfällt, also nicht richtig zentriert ist, ein Korrektionsglied zur Folge hat, weil der gemessene Winkel φ nicht genau genug dem bildseitigen Hauptstrahlwinkel w entspricht. Um dieses Korrektionsglied möglichst klein zu halten, werden wir einerseits den Drehpunkt T nach Möglichkeit dicht an K' heranlegen, wodurch t nahezu gleich Null wird. Diese Bedingung ist besonders einfach dann einzuhalten, wenn wir zur Winkelmessung ein Spektrometer benutzen, auf dessen Tisch wir die zu prüfende Linsenfolge so aufbringen, daß der bildseitige Knotenpunkt K' ungefähr über der Drehachse liegt. Anderseits werden wir den Dingpunkt O dicht an den dingseitigen Brennpunkt F heranrücken, um $(f - s_1) = x_1$ so klein als möglich zu machen. In solchem Falle ist das Korrektionsglied zu vernachlässigen. Um die Unsicherheit in der Bestimmung von t ganz auszumerzen, machen wir am besten eine ganze Reihe von Beobachtungen bei verschiedenen Dinglagen, also bei verschiedenen Werten von $(f - s_1) = x_1$. Aus den Messungen der beiden äußersten Beobachtungen s_{11} und s_{1n} können wir dann den Wert von t/f errechnen; denn wir erhalten für diese beiden Beobachtungen

$$s_{11} = \frac{y_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{t}{f} \cdot (f - s_{11})$$

$$s_{1n} = \frac{y_n}{\operatorname{tg}\varphi_n} - \frac{t}{f} \cdot (f - s_{1n}).$$

Aus diesem Gleichungssystem erhalten wir durch Subtraktion und bei Beobachtung, daß $s_{1n} - s_{11} = x_{11} - x_{1n}$ ist:

$$\frac{t}{f} = \frac{\frac{y_n}{\operatorname{tg}\varphi_n} - \frac{y_1}{\operatorname{tg}\varphi_1}}{x_{1n} - x_{11}} + 1. \tag{81}$$

Den so ermittelten Wert von t/f verwenden wir, um auch für die anderen Beobachtungen das Korrektionsglied und damit s_1 zu berechnen.

Ermitteln wir nun noch jeweils experimentell den Abstand des Dingpunktes O vom Linsenscheitel $\mathfrak{S}$ als s in bekannter Weise (vgl. Ziff. 103), so ist damit ohne weiteres der Abstand des dingseitigen Knotenpunktes K vom Scheitel $\mathfrak{S}$ gegeben als $K\mathfrak{S} = s_1 - s$.

Dieses zweite HARTMANNsche Verfahren ist zuverlässiger als das erste in Ziff. 105 entwickelte. Trotzdem besitzt es keine wesentlich erhöhte Genauigkeit diesem gegenüber. Im allgemeinen werden wir mit einer Meßgenauigkeit innerhalb von 1‰ der Brennweite zufrieden sein müssen, während eine solche von ±0,1‰ nur bei sehr sorgfältig durchgeführten Messungen zu erzielen ist.

δ) Die Ermittelung der Grundgrößen bei Spiegeln und Spiegelsystemen.

107. Die Brennweitenbestimmung bei Spiegeln. Wir müssen unterscheiden zwischen Kugel- und Parabolspiegeln. Bei Kugelspiegeln begnügen wir uns im allgemeinen mit einer Radiusmessung (vgl. Ziff. 64 bis 72), da die Brennweite eines Kugelspiegels $f = r/2$ ist. Am einfachsten, insbesondere für großbrennweitige Spiegel, ist die in Ziff. 70 beschriebene Autokollimationsmethode. Wir benutzen dabei eine von hinten beleuchtete Lochblende als Lichtpunkt, deren Autokollimationsbildchen wir auf die Blendenebene selbst fallen lassen. Die Ausmessung des Abstandes dieser Blende vom Spiegel, der gleich dem Radius $r = 2f$ ist, erfolgt mit einem guten Stahlbandmaß, dessen Fehlerkurve für genaue Messungen bekannt sein muß.

Letzteres Verfahren läßt sich auch für Parabolspiegel gebrauchen.

Daneben können wir naturgemäß verschiedene in Ziff. 80 bis 98 genannte Brennweiten-Meßmethoden bei geeigneter Anpassung in Anwendung bringen. Am einfachsten gestaltet sich dabei noch das Verfahren von Ziff. 83, das sich auf die Formel $1/a + 1/a' = 1/f$ gründet, bei dem also zu einer gegebenen Dingweite a in einfacher Weise die Bildweite a' durch Versuch ermittelt werden muß.

Eine unmittelbare Messung der Hohlspiegelbrennweite gestattet ein Autokollimationsverfahren bei Zuhilfenahme eines Planspiegels Sp (Abb. 149). Wir stellen dabei in einfacher Weise den Ort des Zusammenfallens von Ding und Bild fest, dessen Achsenentfernung vom Spiegel gleich der Brennweite ist.

d) Die Untersuchung des Korrektionszustandes von optischen Systemen.

α) Die Glasprüfung.

108. Die Prüfung des Glases auf optische Homogenität. Schlieren. Vor jeder Untersuchung des Korrektionszustandes empfiehlt es sich, eine Prüfung des Glasmaterials vorzunehmen, die die Homogenität des Glasstückes und dessen Spannungszustand betrifft. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind nicht unwichtig zur Erklärung gewisser, möglicherweise auftretender Bildfehler.

Der Untersuchung auf optische Homogenität dient die Töplersche Schlierenmethode[1]). Mit Hilfe der zu untersuchenden Linsenfolge oder einfachen Linse *Ob* (Abb. 108) wird ein sehr heller Lichtpunkt *L*, der z. B. durch eine beleuchtete Lochblende dargestellt werden kann, nach *L'* abgebildet, wo das Bildchen auf einem kleinen Schirm, der gerade die Ausdehnung des Bildchens besitzt, aufgefangen wird. Bringen wir unser Auge nach *L'*, so wurden wir die Öffnung von *Ob* ganz hell erleuchtet sehen, wenn keine Blende das Bildchen *L'* abschirmt. Durch Vorschalten der Blende, die kleiner als die Augenpupille sein muß, vor unser Auge erreichen wir, daß die Linsenöffnung vollständig dunkel erscheint so lange, als nicht durch Inhomogenitäten im Glase der Linse *Ob* Unregelmäßigkeiten im Strahlenverlauf hervorgerufen werden, die verursachen, daß die durch solche Inhomogenitäten (Schlieren) ausgezeichneten Stellen der Linse dem beobachtenden Auge hell erscheinen. Solche Schlieren sind Orte anderer Brechzahl und lenken deshalb die Strahlen vom ordnungsgemäßen Weg ab, so daß diese Strahlen an der kleinen Schirmblende vorbeigehen und ins Auge treffen. Ein deutliches Sichtbarwerden der Schlieren ist die Folge.



Abb. 108. Bei der Töplerschen Schlierenbeobachtung wird durch das Prüfsystem *Ob* von einem Lichtpunkt *L* möglichst im Abbildmaßstab 1:1 in *L'* ein Bild entworfen. Das in diesen Punkt gebrachte Auge sieht die ganze Öffnung von *Ob* hell. Fangen wir durch Vorschalten eines kleinen Schirms (kleiner als die Augenpupille) das Bildchen *L'* ab, so ist die Öffnung von *Ob* für das beobachtende Auge dunkel. Nur vorhandene Glasschlieren und andere Inhomogenitäten rufen Unregelmäßigkeiten im Strahlenverlauf hervor, was die Ursache abgibt, daß das Auge diese Schlieren im dunkeln Felde hell herausleuchten sieht. Platten werden zur Untersuchung auf Schlieren bei Verwendung eines schlierenfreien Objektivs *Ob* bei *P* in den Strahlengang gebracht.

An Stelle eines kleinen, undurchsichtigen Scheibchens können wir auch die Foucaultsche Messerschneide (Ziff. 121) benutzen, die, von einer Seite kommend, vor die Augenpupille vorgeschoben wird.

Dieses Verfahren können wir noch abändern, indem wir an Stelle des Auges ein Fernrohr oder einen photographischen Apparat verwenden, die auf die Linsenöffnung von *Ob* eingestellt sind (Abb. 109). Dabei werden wir dann vor der Mitte des Beobachtungsobjektivs Ob_2 die kleine, das Lichtbild *L'* abfangende Schirmblende *B* in geeigneter Weise anbringen. Besteht das untersuchte System Ob_1 aus mehreren Linsen, so ermitteln wir die mit der festgestellten Schliere behaftete Linse durch Drehen der einzelnen Linsen nacheinander.

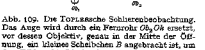


Abb. 109. Die Töplersche Schlierenbeobachtung. Das Auge wird durch ein Fernrohr $Ob_2 Ok$ ersetzt, vor dessen Objektiv, genau in der Mitte der Öffnung, ein kleines Scheibchen *B* angebracht ist, um den Bildpunkt *L'* abzufangen. Das Fernrohr ist auf die Öffnung von Ob_1 eingestellt.

Bei negativen Linsen und Planplatten oder Prismen nehmen wir eine entsprechende positive schlierenfreie Linse zu Hilfe und schieben die zu untersuchende Platte *P* dicht bei der Linse *Ob* in den Strahlengang (Abb. 108). Diese

[1]) A. Töpler, Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode. Ein Beitrag zur Experimentalphysik. 1864. Erschienen in Ostwalds Klassiker Nr. 157; Pogg. Ann. Bd. 127, S. 557—580. 1866; Bd. 131, S. 33—55 u. 180—215. 1867.

Methode ist um so empfindlicher, je größer der Abstand des Auges von der Linse *Ob* ist.

Aus diesem Grunde, und um noch bequemer beobachten zu können, hat ABBE[1] die Versuchsanordnung der Abb. 110 angegeben, wobei er die zu untersuchende Platte *P* zwischen die beiden in gerader Durchsicht stehenden Fernrohre eines Spektrometers, die auf Unendlich eingestellt sind, bringt. Dabei wird der Spalt durch eine kleine Lochblende ersetzt und im Brennpunkt des Beobachtungsfernrohres, wo das Lochbild entsteht, eine undurchsichtige Schirmblende angebracht, die das Lochbild gerade eben verdeckt.

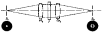


Abb. 110. Bei der ABBEschen Abänderung der TÖPLERschen Schlierenbeobachtungsmethode werden zwei in gerader Durchsicht stehende, auf Unendlich eingestellte Fernrohrobjektive Ob_1 und Ob_2 benutzt. Im Brennpunkt von Ob_1 befindet sich eine kleine beleuchtete Lochblende B_1, während in den Brennpunkt von Ob_2 eine undurchsichtige das Bild von B_1 abfangende Schirmblende B_2 gebracht wird, hinter der das beobachtende Auge durch die Kreisringblende von B_2 hindurch nach der Objektivöffnung schaut. Die zu untersuchende Platte *P* wird zwischen die beiden Objektive gebracht; ihre Schlieren sind dann für das Auge als leuchtende Striche und Bänder auf dunkelm Grunde sichtbar.

Eine weniger gebräuchliche, aber sehr empfindliche Methode zur Feststellung von Brechzahländerungen in Platten ist die Untersuchung im RAYLEIGHschen Interferometer[2], wo eine Verzerrung der Streifen den Ort der Inhomogenität bezeichnet. Das Verfahren verlangt sehr gute Planflächen der zu untersuchenden Platte.

109. Die Spannungsprüfung.

Die Prüfung einer Linse auf ihre Verspannung erfolgt in ähnlicher Anordnung wie die Schlierenprüfung mit dem Unterschiede, daß das vom Lichtpunkt ausgehende Licht erst durch einen Nikol *P* (Abb. 111) polarisiert wird, und daß die im Bildort sich vereinigenden Strahlen einen zweiten Nikol, den Analysator *A*, durchsetzen, durch den das beobachtende Auge nach der Linse schaut. Das Spannungsbild wird zwischen gekreuzten Nikols beobachtet.



Abb. 111. Zur Spannungsprüfung einer Linsenfolge *Ob* wird in deren doppelter Brennweite als Ding eine Blende aufgestellt, die von einer Lichtquelle *L* durch einen Polarisator *P* hindurch mit linear polarisiertem Lichte beleuchtet wird. Auf der Bildseite befindet sich in doppelter Brennweite, also im Bildpunkt, ein Analysator *A*. Das durch diesen gekreuzt zum Polarisator *P* stehenden Analysator *A* blickende Auge sieht die halbe Öffnung der Linsenfolge *Ob* von der den Spannungszustand kennzeichnenden Spannungsfigur durchzogen.

Ist das Gesichtsfeld ein schwarzes Kreuz auf hellem Felde, so haben wir es mit regelmäßiger Spannung zu tun, die, wenn sie nicht zu stark ist, für das Bild so gut wie unschädlich ist, da sie nur eine Änderung der Brechzahl in Richtung der Linsenachse verursacht. Zu achten ist dabei besonders darauf, daß das Kreuz sich mit der Linse auch wirklich dreht. Für den Fall, daß dies nicht geschieht, haben wir es nicht mit Spannung zu tun, sondern mit einer Depolarisationserscheinung, bei der die schwarzen Achsen des Kreuzes parallel zur Analysator- und Polarisatorschwingungsrichtung liegen, und für die wir in dem schrägen Einfall der

[1]) S. CZAPSKI, ZS. f. Instrkde. Bd. 5, S. 117–121. 1885.

[2]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen. Ziff. 56 und 57; EARL OF BERKELAY u. D. E. THOMAS, Phil. Mag. Bd. 29, S. 613–617. 1915.

Strahlen auf die Randteile der untersuchten Linse, die Ursache zu suchen haben[1]).

Bedenklicher, für das Bild ist eine unregelmäßige Spannung, bei der das Gesichtsfeld von unregelmäßigen dunkeln Streifen und Kurven durchzogen ist.



Abb. 112. Zur Spannungsprüfung von Platten *Pl* wird vorteilhaft ein Hohlspiegel *S* zu Hilfe genommen. Das Bild der von der Lichtquelle *L* durch den Polarisator *A* beleuchteten Blende liegt im Analysator *P*, hinter dem das beobachtende Auge nach der Platte blickt. Es ist von Vorteil, Analysator und Polarisator dicht nebeneinander zu verwenden, d. h. vom Mittelpunkt des Spiegels aus zu beobachten.

Benutzen wir an Stelle des Auges eine photographische Kamera, so können wir das Spannungsbild auch im Bilde festhalten.

Um Platten mit ebenen Begrenzungsflächen und auch Prismen auf Spannung zu untersuchen, bringen wir diese einfach in den Strahlengang der Abb. 111, möglichst dicht hinter die abbildende Linse *Ob*, von der in diesem Falle allerdings vollkommene Spannungsfreiheit verlangt werden muß. Diese schwer zu erfüllende Bedingung können wir umgehen, wenn wir für solche Plattenuntersuchungen einen Kugelspiegel *S* in Autokollimationsanordnung (Abb. 112) benutzen.

β) Die Prüfung der Flächengüte von kugeligen und ebenen Flächen.

110. Die Prüfung mit Hilfe von NEWTONschen Interferenzen. Die schnellste Prüfung erlaubt die von FRAUNHOFER erfundene Probeglasmethode. Diese besteht darin, daß wir sog. Probegläser zu Hilfe nehmen, die in einem besonderen Verfahren genau kugelig hergestellt wurden. Die zu prüfende Fläche (erhaben, eben oder hohl) und das entsprechende, mit der betreffenden Krümmung versehene Probeglas (hohl, eben oder erhaben) werden gut gereinigt und aufeinandergelegt, so daß in der zwischen den beiden befindlichen dünnen Luftschicht NEWTONsche Interferenzen (vgl. Ziff. 72) auftreten, aus deren Form und Farbenerscheinung auf die Gestalt und auf möglicherweise vorhandene Fehler der zu prüfenden Fläche geschlossen werden kann.

Zur Prüfung ebener Flächen sind besondere Geräte[2]) gebaut worden (Abb. 113), die eine gut ebenpolierte Platte als Normalfläche *N* verwenden. Die zu prüfende Fläche *P* wird am vorteilhaftesten auf einem justierbaren Tischchen, das gehoben und gesenkt werden kann, der Normalfläche *N* bis auf einige Zehntelmillimeter genähert. Das Licht, am besten einfarbig, kommt von einer Lichtquelle *L*, wird durch den halbdurchlässig versilberten Würfel *W* nach unten reflektiert und durch die Linse *Ob* parallel gemacht. Die von *N* und *P* reflektierten Strahlen treten wieder durch *Ob* hindurch und werden im Punkte *A*, dem Augenort, vereinigt. Das auf die Ebene *N* akkomodierte Auge sieht die zwischen *N* und *P* auftretenden Interferenzstreifen. Nur wenn die Streifen vollkommen

[1]) H. ROSENBUSCH u. E. A. WÜLFING, Mikroskopische Physiographie der petrographisch wichtigen Mineralien. V. Aufl., Bd. I, 1. Hälfte: Untersuchungsmethoden. S. 640. Stuttgart: E. Schweizerbartsche Verlagsbuchhandlung 1921/24.

[2]) L. LAURENT, C. R. Bd. 96, S. 1035—1038. 1883; ZS. f. Instrkde. Bd. 3, S. 292—293. 1883; E. BRODHUN u. O. SCHÖNROCK, ebenda Bd. 22, S. 353. 1902; O. SCHÖNROCK, ebenda Bd. 26, S. 188. 1906; Bd. 28, S. 180. 1908; Bd. 29, S. 188. 1909; M. SCHULTZ, ebenda Bd. 32, S. 258—261. 1912; H. SCHULZ, ebenda Bd. 34, S. 252—257. 1914; W. KÖSTERS, Präzision Bd. 1, S. 2—5 u. 19—20. 1922; H. KESSLER, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 389—393 u. 407—411. 1922.

geradlinig sind, ist die Fläche P einwandfrei eben. Sind die Linien durchgebogen, so ist die Fläche P hohl oder erhaben, je nachdem beim Annähern der Fläche P an N die Streifen in der Streifenwanderungsrichtung hohl oder erhaben durchgebogen sind[1]. Die Durchbiegung der Streifen, gemessen in Streifenbreiten, gibt zugleich ein Maß für die Abweichung von der Ebenheit.

111. Die Prüfung auf Ebenheit unter Zuhilfenahme eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs. In Ziff. 71 haben wir ein Verfahren kennengelernt, das mittels Autokollimation den Radius einer Fläche zu messen gestattet. Ist die Prüffläche eben, so darf sich danach bei ihrer Verwendung kein Einstellunterschied gegenüber einer als gut eben bekannten Normalfläche ergeben. In Ermangelung einer ebenen Normalfläche können wir das Fernrohr zur Ermittelung seiner Unendlichkeitsstellung auch auf einen sehr weit entfernten Dingpunkt einstellen. Unter Umständen müssen einzelne Stellen der Fläche herausgeblendet und nacheinander geprüft werden. Das Autokollimationsbildchen eines beleuchteten Fadenkreuzes darf bei einer gut ebenen Fläche für irgendeine Stelle nicht nur keine Längsabweichungen gegen die Unendlichkeitsstellung, sondern auch keine astigmatische Differenz (Einstellunterschied zwischen wagerechtem und lotrechtem Faden) aufweisen. Das Verfahren ist sehr empfindlich.

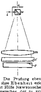


Abb. 113. Die Prüfung ebener Flächen auf ihre Ebenheit erfolgt am besten mit Hilfe Newtonscher Streifen, die zwischen der zu prüfenden Planplatte P und einer Normalplatte N, die einwandfrei plan ist, entstehen. Zur Beleuchtung dient ein besonderer Apparat. Das von einer im Brennpunkte einer Linse Ob stehenden möglichst einfarbigen Lichtquelle L ausgehende Licht (der halbdurchlässig versilberte Würfel W dient zur Strahlenknickung) trifft als Parallelstrahlenbündel auf die Planplatten, wird in die Linse Ob zurückgeworfen und im Punkte A vereinigt. Das hier befindliche Auge sieht die zu prüfende Fläche von mehr oder minder durchgebogenen oder verzerrten Newtonschen Interferenzstreifen durchzogen, aus deren Abweichung von einer geraden Linie auf den Grad der Unebenheit geschlossen werden kann.

Noch empfindlicher ist jedoch die folgende Anordnung, bei der als Ding ein sehr weit entferntes Kreuz, das unter Umständen durch einen auf Unendlich eingestellten Kollimator mit Fadenkreuz ersetzt werden kann, verwendet wird. Bringen wir die zu prüfende Fläche unter einem beliebigen Winkel zur optischen Achse vor das Beobachtungsfernrohr, und richten wir dieses System so aus, daß ein Bild des Dingkreuzes wahrzunehmen ist, so darf dieses keine Parallaxe gegenüber der Unendlichkeitsstellung und keine astigmatische Differenz aufweisen. Vor allem für diese letzte Bedingung gibt die Anordnung eine scharfe Prüfungsmöglichkeit, deren Schärfe mit größer werdendem Einfallswinkel wächst.

112. Die Prüfung auf Ebenheit unter Zuhilfenahme eines Kugelspiegels. Das Verfahren[2] ähnelt dem in Ziff. 111 zuletzt erwähnten. Es ist ein Autokollimationsverfahren (Abb. 114). Ist M der Mittelpunkt des Kugelspiegels S, so soll O' dessen Spiegelbild in bezug auf die zu prüfende ebene Fläche P sein, die unter etwa $\alpha = 20°$ bis $30°$ gegen die optische Achse des Spiegels geneigt steht. Die von

[1] H. Kessler, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 43, S. 389–393 u. 407–411. 1922.

[2] W. Ritchey, Astrophys. Journ. Bd. 19, S. 53–69. 1904; Smithonian Contrib. to Knowledge Bd. 34, S. 1–51. 1904.

einem in O befindlichen Lichtpunkte ausgehenden Strahlen werden durch die Planfläche P auf den Spiegel S zugeworfen und von diesem in sich zurückreflektiert, so daß sie über P wieder in O' zu einem Bildpunkt vereinigt werden, der mit Hilfe eines Vergrößerungsgerätes, Lupe oder Mikroskop, beobachtet wird.

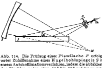


Abb. 114. Die Prüfung einer Planfläche P erfolgt unter Zuhilfenahme eines Kugelhohlspiegels S in einem Autokollimationsverfahren, indem die abbildenden Strahlen unter etwa 60° bis 70° auf die zu prüfende Planfläche auftreffen und an ihr zweimal (beim Hin- und Rückgang) reflektiert werden. Das in O' entstehende Bild des in O befindlichen künstlichen Sterns wird mit Hilfe eines stark vergrößernden Okulars Ok oder sonstigen geeigneten Beobachtungssystems betrachtet. Aus seinem Aussehen bzw. aus der Form der intra- und extrafokalen Zerstreuungsscheibchen kann auf die Güte der Planheit geschlossen werden.

Ist die Fläche P einwandfrei eben, so erhalten wir einen scharfen, astigmatismusfreien Bildpunkt. Weicht die Fläche P dagegen auch nur ganz wenig von der Ebenheit ab, ist z. B. ihr Radius mehrere Kilometer lang, so erscheint der Bildpunkt infolge des großen Einfallswinkels der Strahlen auf P astigmatisch verzerrt. Die Größe der astigmatischen Differenz (s. Ziff. 111) ist ein Maß für die Abweichung von der Ebenheit und kann zur Errechnung des Flächenradius dienen.

Beobachten wir ohne Okular, aber mit FOUCAULTscher Schneide (Ziff. 121), so können wir auch die möglicherweise vorhandenen Zonenfehler der ebenen Prüffläche erkennen.

113. Die Prüfung der Planparallelität. Am einfachsten, aber auch am ungenauesten, in den meisten Fällen jedoch ausreichend, ist die Prüfung vor einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr bei Verwendung eines Autokollimationsokulars mit Fadenkreuz. Die Autokollimationsbildchen der Vorder- und Hinterfläche müssen in eins zusammenfallen.

Erscheinen sie getrennt, so ist die Platte keilig. Der Abstand l der beiden Bilder voneinander ist ein Maß für den Keilwinkel φ.

Ist f die Brennweite des Beobachtungsfernrohres, so ist der zwischen den Hauptstrahlen der beiden Bilder bestehende Winkel δ, da wir es mit sehr kleinen Winkeln zu tun haben: $\delta = l/f$. Für den Keilwinkel selbst ergibt sich bei bekannter Brechzahl n der Platte: $\varphi = \delta/2n$. Daraus erkennen wir, daß die Genauigkeit des Verfahrens mit wachsender Brennweite f des Beobachtungsfernrohres gesteigert wird, wobei allerdings eine gewisse Brennweite nicht überschritten werden darf, weil sonst die abbildenden spitzen Büschel kein genügend scharfes Bild mehr liefern.

Etwas günstiger wird das Verfahren, wenn wir mit KRÜSS[1]) nach dem Vorgange von EYLERT[2]) und PLATH[3]) zwei unter einem Winkel von 140 bis 150° gegeneinander geneigte, auf Unendlich eingestellte Fernrohre verwenden, von denen das eine mit Fadenkreuz, das andere mit Skalenokular ausgerüstet ist. Die Platte wird so ausgerichtet, daß im Beobachtungsrohr ein Bild des Fadenkreuzes zu sehen ist. Ist die Platte nicht streng planparallel, so treten zwei getrennte Bilder, herrührend von der Spiegelung an der Vorder- und Rückseite der Platte, auf, deren Abstand ein Maß für den Keilwinkel ist.

[1]) H. KRÜSS, ZS. f. Instrkde. Bd. 40, S. 33–37. 1920.
[2]) H. EYLERT, Arch. d. D. Seewarte. H. 4, S. 23. 1881.
[3]) C. PLATH, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 3, S. 266. 1882.

Wesentlich schärfer sind die Verfahren, die die Interferenz des Lichtes zu Hilfe nehmen.

Das in ähnlicher Weise wie in Abb. 119 parallel gemachte Licht einer einfarbigen Lichtquelle fällt senkrecht auf die zu prüfende Platte und wird von Ober- und Unterseite der Platte zurückgeworfen. Das beobachtende Auge sieht die Platte durchzogen von den Newtonschen Interferenzstreifen, den Kurven gleicher Dicke. Sind gerade, parallele Streifen zu sehen, so ist die Platte keilig, und zwar senkrecht zum Verlauf der Streifen. Eine Streifenbreite bedeutet einen Dickenunterschied der beiden Stellen von $\lambda/2n$, wenn n die Brechzahl der Platte ist. Liegen zwischen zwei um den Abstand l voneinander entfernten Punkten der Platte m Streifenbreiten, so ist dann deren Dickenunterschied $m \cdot \lambda/2n$ und der Keilwinkel φ selbst ist in Winkelsekunden

$$\varphi = m \cdot \frac{\lambda}{2n_\lambda} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{648000}{\pi}.$$

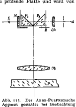


Abb. 115. Der Abbe-Pulfrichsche Apparat gestattet bei Beobachtung der Haidinger-Lummerschen Interferenzstreifen gleicher Neigung in der Platte P die Parallelität der Begrenzungsflächen dieser Platte zu beurteilen. Das von der mit einfarbigem Lichte beleuchteten Mattscheibe M ausgehende Licht wird durch das Prisma P_1 und das Objektiv Ob auf die zu prüfende Platte P geworfen. Die bei genügender Parallelität auftretenden Haidinger-Lummerschen Ringe liegen im Unendlichen, werden also vom Objektiv Ob in die in dessen Brennpunkt befindliche Blende B abgebildet, um durch das Okular Ok beobachtet zu werden. Bewegen wir die Platte P auf einem Schlitten unter dem Objektiv vorbei, so sind immer andere Punkte der Platte für die Mitte des Ringsystems maßgebend, so daß, wenn beim Verschieben die Ringe aus der Mitte hervorzuquellen oder zu versickern scheinen, wir mit einer Dickenzunahme bzw. Abnahme zu rechnen haben.

Bei einer guten planparallelen Platte dürfen überhaupt keine Streifen zu sehen sein. Sie muß in ganz gleichmäßiger Helligkeit ohne hellere oder dunklere Flecken erscheinen. Die verwendete Lichtfarbe muß um so einfarbiger sein, je dicker die Platte ist. Natriumlicht ist nur bis etwa 2 mm, grünes (546 $m\mu$) und violettes (436 $m\mu$) Quecksilberlicht bis etwa 10 mm Plattendicke zu verwenden. Die Methode versagt, wenn die beste Genauigkeit erzielt werden soll. Dickenfehler unter $^5/_{16}$ Streifenbreite sind mit Sicherheit nicht mehr festzustellen. Mit der höchsten Genauigkeit und trotzdem in einfacher Weise läßt sich die Planparallelität am Abbe[1]-Pulfrichschen Apparat prüfen, der die Haidinger-Lummerschen Interferenzstreifen, die Streifen gleicher Neigung, benutzt. Die Blende B (Abb. 115), die sich im Brennpunkte der Linse Ob befindet, wird mit einfarbigem Lichte beleuchtet. Zweckmäßig geschieht dies dadurch, daß das grüne Licht einer Quecksilberlampe L durch eine Mattscheibe M diffus gemacht wird. Das Prisma P_1 wirft das Licht nach unten auf die rechte Hälfte der kreisförmigen Blende B. Die aus der Linse Ob parallel austretenden Strahlen treffen auf die zu prüfende planparallele Platte P, werden an deren beiden Begrenzungsflächen reflektiert und nach abermaligem Durchgang durch Ob in der linken Hälfte der Blende B vereinigt, auf die das Okular Ok eingestellt ist. Das be-

[1]) S. Czapski, ZS. f. Instrkde. Bd. 5, S. 149–158. 1885; O. Lummer, Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Bd. II, 3. Buch, S. 735–758. 1909.

obachtende Auge sieht die Blendenhalböffnung und in ihr die von der Planparallelplatte erzeugten HAIDINGER-LUMMERschen Ringe, die im Unendlichen liegen. Ist P eine einwandfrei planparallele Platte, so ist es gleichgültig, welche Stelle der Platte die Interferenzen erzeugt, weil dann den Strahlen immer der gleiche Gangunterschied zuteil wird, so daß die Helligkeit des Ringmittelpunktes immer die gleiche sein wird. Wir werden deshalb bei einer guten planparallelen Platte keine Bewegung des Ringsystems wahrnehmen, wenn wir die Platte unter der Linse Ob vorbeischieben. Tritt jedoch eine Änderung des Ringsystems dabei ein, so können wir mit Bestimmtheit sagen, daß die Platte nicht einwandfrei planparallel ist. Dabei werden wir beobachten, daß beim Übergang von einer dünneren zu einer dickeren Stelle die Interferenzringe aus dem Mittelpunkt herausquellen, während sie im umgekehrten Falle in den Mittelpunkt hineinlaufen, dort versinken. Die Zahl m der dabei an einer feststehenden Gesichtsfeldmarke vorbeiwandernden schwarzen Ringe ist ein Maß für die vorhandene Dickenänderung, deren Größe gleich $m \cdot \lambda/2n_2$ ist, wenn n_2 die Brechzahl der Platte vorstellt.

Die Maßgenauigkeit beträgt etwa $^1/_{10}$ Streifenbreite, was bei einer mittleren Brechzahl einer Dickendifferenz von 0,016 μ entspricht.

Entfernen wir das Okular Ok und akkomodieren wir unmittelbar durch die Blende hindurch nach der Platte P, so können wir dadurch die in der Platte liegenden NEWTONschen Interferenzfransen gleicher Dicke wahrnehmen, so daß also diese Vorrichtung gleichzeitig auch der Beobachtung mit NEWTONschen Streifen dienen kann. Durch Einschalten einer ebenen Normalfläche kann damit auch die Planheit (Ziff. 110) geprüft werden.

Zu den genannten Verfahren kommen noch die Interferenzverfahren von WAETZMANN, TWYMAN u. a. (Ziff. 125 bis 127), deren Hauptanwendungsgebiet allerdings das sein dürfte, bei der Herstellung von Planparallelplatten als Prüfmittel benutzt zu werden.

γ) Die Prüfung des Korrektionszustandes von Linsenfolgen.

1. Die Gütebewertung des Korrektionszustandes durch Bild-Beobachtung bei Verwendung von Testobjekten.

114. Die Prüfung auf Zentrierung. Eine Folge mehrerer Linsen kann nur dann, abgesehen von anderen Fehlern, ein gutes Bild liefern, wenn die optischen Achsen aller Linsen in eine zusammenfallen. Um diese Vorbedingung zu prüfen, brauchen wir nur in einfacher Weise die Linsenfolge in ein durchbohrtes, justierbares, gut laufendes Drehbankfutter zu spannen und einen Lichtpunkt durch das System hindurch zu beobachten. Sämtliche von den einzelnen Linsenflächen herrührenden Bilder des Lichtpunktes müssen auf einer geraden Linie liegen.

Auf das gleiche Kennzeichen können wir prüfen, wenn wir in Autokollimation unter Benutzung eines Planspiegels prüfen.

115. Die Bildgüte von Brillengläsern. Der Punktuellitätsprüfer von HENKER. Bei Brillengläsern ist eine der Forderungen, daß bei ihrer Benutzung auf der Netzhaut des Auges beim Blicken in jeder Richtung ein deutliches Bild entsteht. Dies verlangt, daß der Astigmatismus schiefer Büschel für eine am Orte des Augendrehpunktes anzunehmende Blende und für einen gewissen, nicht zu klein zu wählenden Winkel aufgehoben sein muß. Die Brillengläser müssen punktuell abbildend sein. Um Brillengläser auf diese Eigenschaft der punktuellen Abbildung zu prüfen, hat HENKER[1]) den Punktuellitätsprüfer (Abb. 116) an-

[1]) O. HENKER, ZS. f. ophthal. Opt. Bd. 4, S. 172—183. 1916; Bd. 6, S. 75—88 u. 106 bis 119. 1918.

gegeben. Dabei ist das Auge ersetzt durch das Objektiv Ob_1. Das in Wirklichkeit auf der Netzhaut entstehende Bild liegt in O'' und wird zum Zwecke besserer Beurteilungsmöglichkeit durch ein optisches Vergrößerungsgerät, Mikroskop oder Lupe, betrachtet. In Abb. 116 ist ein Mikroskop Ob_2 bis Ok gewählt. Das ganze System Ob_1 bis Ok ist um den Augendrehpunkt D drehbar angeordnet. Das Brillenglas B wird vor dieses künstliche Auge gesetzt, so daß sein augennaher Scheitel S vom Drehpunkt D um 25 mm entfernt ist. Es muß dieser Abstand deshalb gewählt werden, weil bekanntlich die punktuell abbildenden Gläser in der Praxis alle so berechnet sind, daß sie vom wirklichen Augendrehpunkt gerade um diese Strecke entfernt vor dem Auge sitzen.

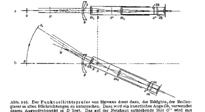


Abb. 116. Der Punktuellitätsprüfer von HENKER dient dazu, die Bildgüte der Brillengläser in allen Blickrichtungen zu untersuchen. Dazu wird ein künstliches Auge Ob_1 verwendet dessen Augendrehpunkt in D liegt. Das auf der Netzhaut entstehende Bild O'' wird mit Hilfe eines Beobachtungsmikroskops Ob_2Ok betrachtet.

a) Das Brillenglas B wird 25 mm vom Augendrehpunkt D entfernt vor das Auge Ob_1 gebracht. Das Auge Ob_1 wird auf die in 8,25 m Entfernung aufgestellte Lesetafel O eingestellt und die vorhandene Sehschärfe festgestellt.

b) Um in seitlichen Blickrichtungen beobachten zu können, braucht das künstliche Auge mit dem Beobachtungssystem zusammen nur um D in die entsprechende Richtung gedreht zu werden.

Als Testobjekte O für die Prüfung werden zweckmäßig die üblichen Lesetafeln benutzt, die in 5 m Abstand vom zu prüfenden Auge aufgestellt sind. Da aber beim HENKERschen Punktuellitätsprüfer die Brennweite des das Auge ersetzenden Objektivs Ob_1 so gewählt worden ist, daß das in O'' entstehende Bildchen 1,65fach größer ist als das in einem normalen Auge entstehende, muß das Testobjekt O in $5 \times 1{,}65 = 8{,}25$ m Entfernung vom Gerät aufgestellt werden.

Zunächst (Abb. 116a) wird das Gerät in der Richtung der optischen Achse des Brillenglases auf das Testobjekt O eingestellt. Dabei ist aber zu beachten, daß für verschieden starke Brillengläser im allgemeinen das in O'' entstehende Bild verschieden groß sein wird, wodurch aber vergleichbare Ergebnisse unmöglich sind. Es ist deshalb darauf Bedacht zu nehmen, daß bei der Untersuchung verschiedener Brillengläser die Gesamtvergrößerung des Bildes O'' stets dieselbe sein wird. Dies erreichen wir dadurch, daß wir den bildseitigen Hauptpunkt

des Brillenglases mit dem dingseitigen Brennpunkt des Augenersatzobjektivs Ob_1 zusammenfallen lassen, was wir vor Versuchsbeginn durch Verschieben des Beobachtungssystems vornehmen können. Die richtige Einstellung können wir beim Einblick in das Gerät ohne weiteres daran erkennen, daß die an der Teilung Sk abgelesene Größe des Mikroskopbildes O''' stets die gleiche ist, einerlei ob wir ein Brillenglas vorgesetzt haben oder nicht. Im letzteren Falle soll der Drehpunkt D um 13 mm, dem Abstand des Augendrehpunktes vom Hornhautscheitel, hinter dem dingseitigen Scheitel des Augenersatzobjektivs Ob_1 liegen.

Die Beobachtung der Bildgüte außerhalb der Achse erfolgt darauf bei optisch unverändertem Beobachtungsapparat Ob_1 bis Ok, indem wir diesen einfach um den Drehpunkt D um die gewünschten Winkel, entsprechend den verschiedenen Blickrichtungen, drehen (Abb. 116 b) und die dabei auftretenden Bilder beurteilen. Bei einiger Übung läßt sich leicht feststellen, welche der Leseproben in diesen Richtungen noch zu entziffern sind, welche Sehschärfe also in diesen Richtungen noch vorliegt. Damit die Probetafel nicht übermäßig groß sein muß, werden wir nach Einstellung des Ersatzauges (Ob_1 bis Ok) in die gewunschte Blickrichtung das ganze Gerät zuruckschwenken, so daß O_1 nach O zurück zu liegen kommt.

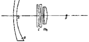


Abb. 117. Der STOKESsche Zylinderkompensator C, der aus zwei gleichstarken Zylindergläsern von D Dioptrien entgegengesetzten Vorzeichens besteht, gestattet durch Verdrehen der Achsen der beiden Zylinder gegeneinander jede Zylinderdioptrie zwischen 0 und $2\,D$ Dioptrien herzustellen. Durch Vorschalten eines solchen Kompensators vor das kunstliche Auge Ob_1 des HENKERschen Punktuellitatsprüfers (Abb. 116) können wir deshalb dieses Auge mit jedem gewünschten, innerhalb $2\,D$ liegenden Astigmatismus behaften, um so die entsprechenden Brillengläser mit Zylinderwirkung prufen zu können.

Um auch astigmatische Gläser prüfen zu können, muß das Ersatzauge in erster Linie ebenfalls astigmatisch gemacht werden, was wir dadurch erreichen, daß wir vor das Objektiv Ob_1 einen Zylinderkompensator C nach STOKES[1]) (Abb. 117) setzen, der aus zwei gleichstarken Zylindergläsern entgegengesetzten Vorzeichens besteht. Durch gegenseitiges Verdrehen dieser beiden Zylindergläser können wir zylindrisch wirkende Systeme zwischen 0 und $2 \cdot D$ Dioptrien herstellen, wenn D die Stärke des einzelnen Glases wiedergibt. Beim Versuch wird deshalb, beim Durchblick in der optischen Achse durch das vorgesetzte zu prüfende Zylinderglas, zunächst der Zylinderkompensator C so eingestellt, daß für diese Richtung der astigmatische Fehler beseitigt und volle Bildschärfe erreicht ist. Erst hierauf kann in gleicher Weise wie oben zur Bildprüfung bei schrägem Durchblick geschritten werden.

116. Die Bildschärfe und das Auflösungsvermögen von Mikroskopobjektiven. Am einfachsten, wenn auch nicht am einwandfreiesten, prüfen wir die Leistung eines Mikroskops mit Hilfe von natürlichen Präparaten, wie sie in den Lehrbüchern der Mikroskopie[2]) beschrieben sind. Es werden dabei einmal

[1]) G. G. STOKES, Rep. Brit. Assoc. P. II, S. 10–11. 1849; abgedruckt in seinen gesammelten Schriften „Mathematical and physical papers by G. G. STOKES". Bd. II, S. 172 bis 175. 1883. Cambridge: Univ. Press. 1883.

[2]) L. DIPPEL, Das Mikroskop und seine Anwendung, 1. Aufl. 1872; 2. Aufl. 1882/83. 1896/98. Grundzüge der allgemeinen Mikroskopie. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1885; R. J. PETRY, Das Mikroskop von seinen Anfängen bis zur jetzigen Vervollkommnung für alle Freunde dieses Instruments. Berlin: R. Scheetz 1896; F. S. SPIERS, The microscope,

insbesondere Präparate mit scharfen Umrißlinien, wie z. B. Stärkekörner, Pollenkörner, Schuppchen von den Flügeln des Kohlweißlings (Pieris brassicae) benutzt, um durch Beobachtung der Schärfe der Ränder, die nicht verschwommen oder verwaschen sein dürfen, die **Bildschärfe** zu beurteilen.

In zweiter Linie werden Präparate mit feinen Strukturen, Längs- und Querstreifen, gebraucht, um das **Auflösungsvermögen** eines Mikroskops zu prüfen. Es gibt solche Präparate von den feinsten, deren Streifenabstand etwa 0,00029 mm beträgt, bis zu den gröbsten, deren Streifenabstand 0,00222 mm beträgt. Um nur einige zu nennen, sei hingewiesen auf[1]:

Bezeichnung der natürlichen Probeobjekte (Präparate)	Streifenabstand in mm
1 **Insekten.**	
Körperschuppchen des Insektes Lepisma Saccharina	0,00222
und	0,00142
Hellgefärbte Flügelschuppchen des Weibchens vom Sommerschmetterling „gelbes Sandauge" (Hipparchia Janira) in Balsam eingebettet .	0,00099
2 **Diatomeen**	
Navicula elliptica (in Balsam)	0,00111
„ veneta (trocken)	0,00040
„ rhomboides (in Balsam)	0,00033
Pleurosigma formosum (in Balsam)	0,00083
„ balticum (in Balsam)	0,00074
„ attenuatum (in Balsam)	0,00069
„ angulatum (trocken)	0,00046
Frustulia saxonica	0,00029

Als künstliches Testobjekt zur Prüfung des Auflösungsvermögens kommt die **Nobertsche Probeplatte** in Betracht. Die Platte besteht aus einer größeren Anzahl von Strichgruppen, die mit Diamant in Glas gerissen sind. Während Gruppe 1 die stärksten Striche und den größten Strichabstand von 0,00256 mm ($= {}^1/_{1000}$ Pariser Linien) aufweist, nimmt mit jeder weiteren Gruppe die Strichstärke und der Strichabstand ab, so daß bei Gruppe 19 die dünnsten vorhandenen Striche einen Abstand von 0,0001128 mm ($= {}^1/_{20000}$ Pariser Linien) besitzen.

Bei allen diesen Testobjekten zur Beurteilung des Auflösungsvermögens eines Mikroskopobjektivs müssen wir peinlichst darauf achten, daß eine Streifen- oder Liniengruppe nur dann als aufgelöst zu betrachten ist, wenn alle Linien ganz ausgeprägt und scharf voneinander getrennt erscheinen. Eine nur verschwommen wahrzunehmende Streifung ist nicht als Auflösung anzusprechen.

Ein eindeutiges, einwandfreies und wissenschaftlich begründetes Maß für **das Auflösungsvermögen** eines Mikroskopobjektivs besitzen wir in dem Wert seiner „**numerischen Apertur**" (Ziff. 139). Kennen wir diese, so können wir sagen, daß von einem Objektiv der numerischen Apertur a zwei Punkte dann noch getrennt gesehen werden können, wenn ihr Abstand b

$$b \geqq \frac{\lambda}{2 \cdot a}$$

ist, wobei λ die Wellenlänge der benutzten Lichtart in Luft vorstellt.

its design, construction and applications. A symposium and general discussion by many authorities. London: C. H. Griffin & Co. 1920; E. Abbe, Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung; M. Schultzes Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. 9, S. 413 bis 468. 1879; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 45–100. 1904.

[1] L. Dippel, l. c. 4. Aufl., 1. Teil, S. 117–138. 1872.

117. Die Prüfung der sphärischen und chromatischen Korrektion von Mikroskopobjektiven. Die ABBEsche Testplatte. Am einwandfreiesten erfolgt die Prüfung eines Mikroskopobjektivs durch die Zerlegung der sichtbaren Abweichungen in ihre Einzelbestandteile. Dieses Verfahren können wir leicht ausführen unter Benutzung einer Abbeschen Testplatte[1]). Eine solche besteht aus einem Deckglas, das keilig gehalten ist, so daß von seinem einen Ende ab die Dicke von 0,09 mm ab zunimmt, um in geradliniger Abhängigkeit auf 0,24 mm anzusteigen (Abb. 118). Die einzelnen Dicken sind an einer Teilung abzulesen. Auf der Unterseite dieses länglichen Deckglases sind in einer durch das chemische

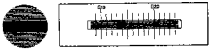


Abb. 118 Die ABBEsche Testplatte zur Prüfung der sphärischen und chromatischen Korrektion von Mikroskopobjektiven besteht aus einem versilberten Deckglas, in dessen Versilberung zackige Längsstriche (s. Abb. links) eingerissen sind, und das auf einen Objektträger aufgekittet ist. Das Deckglas ist keilig gehalten, so daß entsprechend der Teilung alle Deckglasdicken von 0,09 bis 0,24 mm vorhanden sind



Abb. 119 Bei Verwendung eines einwandfreien Mikroskopobjektivs und enger, gerader Beleuchtung müssen die Ränder der Längsstriche der ABBEschen Testplatte scharf sein. Sie dürfen keine Farbensäume oder sonstige Unschärfen aufweisen

Verfahren niedergeschlagenen Silberschicht Längsstriche eingekratzt, deren Ränder aber nicht geradlinig, sondern absichtlich zackig gehalten sind (Abb. 118 links und 119). Mit dieser Silberschicht ist das Deckglas auf einen Objektträger gekittet.

Zur Untersuchung wird eine solche Testplatte quer über den Mikroskoptisch gelegt und so ausgerichtet, daß gerade ein dunkler Streifen durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht, auf den das Mikroskop scharf eingestellt wird.

Über das weitere Verfahren selbst sagt ABBE:

„Das Verfahren der Prüfung zielt darauf ab, das Zusammenwirken der sämtlichen Zonen der Objektivöffnung in der Mitte und am Rand des Sehfeldes zur Anschauung zu bringen und dabei dennoch die Bilder, welche sie einzeln gewähren, deutlich unterscheidbar zu erhalten. Zu dem Zweck wird die Beleuchtung so reguliert, daß in den Spuren der eintretenden Strahlenkegel in der oberen Fokalebene alle Zonen der freien Öffnung, jede aber nur durch einen schmalen Streifen, repräsentiert sind, während diese Spuren selbst möglichst weit voneinander abstehen. Je nach der Größe des Öffnungswinkels werden zwei oder drei isolierte Strahlenbüschel verwandt. Sie werden so angeordnet, daß, wenn z. B. die Öffnungsfläche des Objektivs 6 mm linearen Durchmesser besitzt, im ersteren Falle die — nahezu kreisförmige — Spur des einen von der Mitte bis auf ca. 1,5 mm Abstand des anderen auf der entgegengesetzten Seite von der Achse von 1,5 bis auf 3 mm, d. h. bis zum Rand, sich erstreckt; im zweiten Falle aber der erste die Zone von der Achse aus bis zu 1 mm Abstand, der zweite die Zone zwischen 1 mm und 2 mm auf der entgegengesetzten Seite und der dritte die Randzone zwischen 2 und 3 mm, wieder auf der Seite des ersten, in Tätigkeit setzt. Diese Anordnung gibt den empfindlichen Strahlengang, bei welchem alle Korrektionsmängel am stärksten zur Geltung kommen, weil die verschiedenen Strahlenkegel im Bilde unter möglichst großen Winkeln zusammentreffen. — Soviel isolierte Teile der Öffnungsfläche wirksam werden, soviel unterscheidbare Bilder erhält man von einer das Gesichtsfeld ausfüllenden Liniengruppe des Präparats. Bei einem in allen Stücken absolut vollkommenen Objektiv müßten alle diese bei einer bestimmten Einstellung in ein einziges scharfes und farbenfreies Bild zusammenfließen. Die Abbildungsfehler, soweit sie von der Art der sphärischen Aberration sind, haben aber zur Folge, daß eine derartige vollständige Verschmelzung

[1]) E. ABBE, M. Schultzes Arch. f. mikrosk. Anat. Bd. 9, S. 433—437. 1873; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 65—69. 1904; H. AMBRONN u. A. KÖHLER, Methoden zur Prüfung der Objektivsysteme. Apertometer und Testplatte nach ABBE. Heft 3 der Übungen zur wiss. Mikroskopie, S. 13—21. Leipzig: S. Hirzel 1914.

der zwei oder drei partiellen Bilder wenigstens nicht durch das ganze Sehfeld zustande kommt und, soweit sie von der Farbenzerstreuung herrühren, daß die hellen Linien auf dunklem Grunde, sowohl die getrennten Bilder je einer wie auch die korrespondierenden Bilder von mehreren an anderen Stellen des Gesichtsfeldes die verschiedensten Farbensäume erhalten. Ein derartiges Probebild legt den ganzen Korrektionszustand eines Mikroskops in allen Einzelheiten gleichzeitig vor Augen. Mittels der Anleitung, welche die Theorie zur Diagnose der verschiedenen Abbildungsfehler gibt, genügt die Vergleichung der Farbensäume der einzelnen partiellen Bilder, die Beobachtung ihres lateralen Auseinandertretens und ihrer Niveaudifferenzen, in der Mitte des Sehfeldes und in den vier Quadranten der Randzone, alle Korrektionsmängel in ihren letzten Bestandteilen nach Art und Größe genau zu definieren. Dabei erhält man namentlich dasjenige, was von den eigentlichen Aberrationen — den Fehlern der Fokalwirkung — herrührt, deutlich getrennt von solchen Unvollkommenheiten, welche aus bloßen Differenzen der Vergrößerung zwischen ungleich geneigten und ungleich brechbaren Strahlen — den Anomalien — entspringen und kann außerdem durch eine einfache Manipulation den Einfluß des Okulars auf die Beschaffenheit des Bildes außerhalb der Achse vollständig eliminieren.

Die erforderliche theoretische Orientierung und praktische Erfahrung vorausgesetzt, um den Befund bei einer derartigen Prüfung in allen Punkten richtig würdigen zu können, gewährt das angedeutete Verfahren ein so erschöpfendes Urteil über die Beschaffenheit eines Objektivs, daß daraufhin, wenn Brennweite und Öffnungswinkel nebenbei ermittelt werden, seine Leistungsfähigkeit nach allen Richtungen hin voraus zu bestimmen ist."

Danach ist also ein springender Punkt des Verfahrens die Art der Beleuchtung. Durch geeignete Regelung der Kondensorblende[1]) erreichen wir, daß nur gewisse engbegrenzte Zonen des Objektivs zur Bildentstehung beitragen. Dazu legen wir zunächst in den Blendenträger des Beleuchtungsapparates eine Mattscheibe ein und verengern die Kondensorblende so weit, bis ihr Bildchen, das wir nach Entfernen des Okulars in der Objektivöffnung sehen, nur etwa $^1/_3$ bis $^1/_4$ dieser Öffnung beträgt. Der Blendenträger ist durch Trieb in der Richtung senkrecht zum Verlauf der Streifen der Testplatte verschiebbar. Wir stellen damit die Blende so ein, daß das Blendenbild in der Mitte der Objektivöffnung liegt. Diese Art der Beleuchtung nennen wir enge, gerade Beleuchtung. Verschieben wir die Blende von uns weg, so wird das Blendenbildchen an den uns zugewandten Rand der Objektivöffnung wandern. Für die Randlage des Bildchens haben wir eine äußerst schiefe Beleuchtung, während dazwischen alle Abstufungen schiefer Beleuchtung liegen.

Für die Untersuchung ist noch zu berücksichtigen, daß die Tubuslänge auf 160 mm eingestellt sein muß, und daß die Stelle der Testplatte verwendet wird, die die Deckglasdicke, für die das Objektiv korrigiert ist, besitzt. Denn im gegenteiligen Falle erhalten wir durch einen zu langen (bzw. zu kurzen) Tubus oder durch ein zu dickes (bzw. zu dünnes) Deckglas schon an und für sich sphärische Über- (bzw. Unter-) Korrektion.

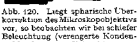


Abb. 120. Liegt sphärische Überkorrektion des Mikroskopobjektivs vor, so beobachten wir bei schiefer Beleuchtung (verengerte Kondensorblende vom Betrachter weg verschoben) an den dem Beobachter abgekehrten Rändern der Streifen verwaschene Umrisse.

Beobachten wir bei gerader Beleuchtung, so werden die Ränder des durch die Gesichtsfeldmitte gehenden dunkeln Streifens scharf und nicht farbig sein (Abb. 119). Gehen wir nunmehr aber zur schiefen Beleuchtung über, wobei wir die verengerte Kondensorblende von uns weg verschieben, so können wir deutlich die in dem Objektiv auftretenden Fehler erkennen.

Hat der Streifen das Aussehen der Abb. 120, zeigt er sich also verwaschen an dem dem Beobachter abgekehrten Rande, so liegt sphärische Überkorrektion vor. Die Erscheinung sieht so aus, als wenn sich ein dichter grauer Vorhang über diesen Rand legte.

[1]) Verwendet wird dazu zweckmäßig ein ABBEscher Beleuchtungsapparat. E. ABBE, Schultzes Arch. f. mikroskop. Anat. Bd. 9, S. 469—480. 1873; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 101—112. 1904.

Ist der Streifen an dem dem Beobachter zugekehrten Rande verwaschen, sieht er dort so aus, als wenn sich ein grauer Schleier über diesen Rand lagerte (Abb. 121), so besitzt das Objektiv sphärische Unterkorrektion.

Nun wenn auch beim Übergang von der geraden zur schiefen Beleuchtung die Bildschärfe gemäß Abb. 119 erhalten bleibt, ist das Objektiv sphärisch einwandfrei korrigiert. Es ist dann aber nicht nur dies allein der Fall, vielmehr ist in diesem Falle das Objektiv auch chromatisch vollkommen korrigiert.

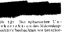


Abb. 121. Bei sphärischer Unterkorrektion des Mikroskopobjektivs beobachten wir bei schiefer Beleuchtung (verengerte Kondensorblende vom Beobachter weg verschoben) an den dem Beobachter zugekehrten Rändern der Teststreifen einen grauen Schleier.

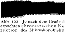


Abb. 122. Je nach dem Grade der erreichten chromatischen Korrektion des Mikroskopobjektivs sind bei schiefer Beleuchtung (verengerte Kondensorblende vom Betrachter weg verschoben) die Streifenränder mehr oder minder farbig. Der dem Beobachter zugekehrte Rand (Abb. unten) ist grünlichgelb, der abgekehrte Rand purpur, violett oder rosa umsäumt.

Im allgemeinen wird das aber nicht der Fall sein, sondern wir werden je nach dem erreichten Grade der chromatischen Korrektion bei der oben gekennzeichneten Beleuchtung die Ränder mehr oder minder farbig sehen, und zwar zeigt der dem Beobachter zugekehrte Rand einen grünlichgelben (Abb. 122 unten) und der dem Beobachter abgekehrte Rand einen purpur, violett oder rosa gefärbten Saum (Abb. 122 oben). Je schmaler und je weniger gesättigt diese Farbsäume in Erscheinung treten, desto besser ist das Objektiv chromatisch korrigiert.

Der sphärische Korrektionszustand eines Mikroskopobjektivs läßt sich auch in einfacher Weise bei Dunkelfeldbeleuchtung[1]), also bei Verwendung eines Dunkelfeldkondensors, prüfen, indem wir dabei das Mikroskop auf ein möglichst alleinliegendes undurchsichtiges, kleinstes Teilchen einstellen, z. B. auf eines der kleinsten Silberteilchen, wie sie vielfach noch zwischen den Streifen der ABBEschen Testplatte zu finden sind. Wir werden ein solches Teilchen als ein helles Beugungsscheibchen mit einem oder zwei feinen Beugungsringen wahrnehmen (Abb. 123b, m). Gehen wir nun mit dem Mikroskop etwas höher oder tiefer, so werden sich die Beugungsringe ändern. Bei guter sphärischer Korrektion erfolgen diese Änderungen in gleicher Weise nach beiden Seiten (Abb. 123b, h und t). Bei schlechter Korrektion verändern sich die Beugungsscheibchen nach beiden Seiten ganz ungleichartig, so erhalten wir z. B. bei sphärischer Unterkorrektion eine der Abb. 123a, bei sphärischer Überkorrektion eine zwar ähnliche aber umgekehrte, der Abb. 123c entsprechende Erscheinung.

118. Die Prüfung auf Erfüllung der Sinusbedingung, insbesondere bei Mikroskopobjektiven. Die von ABBE[2]) angegebene Prüfungsmethode gründet sich auf die grundsätzliche Verschiedenheit zwischen dem aplanatischen[3]) und

[1]) H. SIEDENTOPF, Dunkelfeldbeleuchtung. Heft 1 der Übungen zur wiss. Mikroskopie, S. 8–10. Leipzig: Verlag S. Hirzel 1912.

[2]) E. ABBE, Sitzungsber. d. Jen. Ges. f. Med. u. Naturwiss. S. 129–142. 1879; Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 213–226. 1904.

[3]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel W. MERTÉ, Geometrische Optik Artikel 55ff.

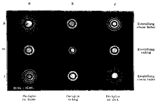


Abb. 123. Bei Beobachtung eines einzelnen, undurchsichtigen, kleinsten Teilchens bei **Dunkelfeldbeleuchtung** können wir aus dem Aussehen des Bildchens und der dieses umgebenden Beugungsringe auf den sphärischen Korrektionszustand schließen. Dabei wird von der Scharfstellung (*m*) des Teilchens ausgehend einmal das Aussehen der Beugungsscheibchen intra- (*t*) und extra- (*h*) fokal festgestellt. *b/h, m, t* geben das Aussehen der Beugungsscheibchen bei guter Korrektion wieder, während *a/h, m, t* die Erscheinung für sphärische Unterkorrektion und *c/h, m, t* für sphärische Überkorrektion zeigen.

dem orthoskopischen[1]) Punktepaar einer Linsenfolge. ABBE[2]) selbst sagt darüber folgendes:

„Wenn durch irgendein optisches System von einem ausgedehnten ebenen Objekt ein richtig gezeichnetes, d. h. ähnliches Bild entworfen werden soll, so müssen die von den Objektpunkten ausgehenden, in einem Punkte der Achse sich kreuzenden Hauptstrahlen und die entsprechenden, im konjugierten Punkte der Achse sich kreuzenden, nach den Bildpunkten hinzielenden Hauptstrahlen der abbildenden Strahlenbüschel in den **Tangenten** ihrer Neigungswinkel ein konstantes Verhältnis zeigen. Nur dann, wenn ein Linsensystem für ein Paar konjugierter Punkte der Achse dieser Bedingung genügt [wie z. B. ein richtig konstruiertes Okular für den Ort der Objektivöffnung und den ihm konjugierten Augenpunkt tun soll], ist es orthoskopisch, d. h. vermag es winkelgetreue, verzerrungsfreie Bilder auch dann zu entwerfen, wenn das Objekt, oder das Bild, oder beide unter endlicher Winkelausdehnung sich darstellen. Da nun aplanatische Punkte, kraft der Bedingung des Aplanatismus, diesem Merkmal orthoskopischer Punkte widersprechen, so muß ein aplanatisches System eine dem ihm eigentümlichen Konvergenzverhältnis gemäß **vorauszubestimmende** Verzerrung des Bildes ergeben, sobald es eine von dem aplanatischen Punkt **entfernte** Ebene durch Strahlenkegel abbildet, deren Hauptstrahlen in diesem aplanatischen Punkt sich kreuzen. Die spezifische Art der zu erwartenden Unähnlichkeit oder Verzerrung läßt sich aber genügend kennzeichnen, indem man die Umgestaltung bestimmt, die ein System paralleler gerader Linien bei der Abbildung erleidet, oder indem man umgekehrt die Gestalt derjenigen Kurven aufsucht, welche im Bilde als parallele Gerade sich darstellen müssen.

Auf die hier vorliegenden Voraussetzungen angewandt, ergibt eine leicht auszuführende Rechnung das Resultat: irgendeine Schar paralleler Geraden in einer zur optischen Achse senkrechten Ebene bildet sich durch ein aplanatisches System als eine Schar von Ellipsen über derselben Hauptachse, aber mit verschiedenen Nebenachsen ab (die unendlich entfernte Gerade als einschließender Halbkreis), und eine bestimmte — unten näher zu bezeichnende — Schar von Hyperbeln mit gleichem Mittelpunkte und gleicher Nebenachse, aber verschieden großen Hauptachsen wird im Bilde als ein System von parallelen Geraden wiedergegeben. Dabei ist vorausgesetzt, daß die abbildenden Strahlenkegel beim Eintritt in das optische

[1]) Vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel W. MERTÉ, l. c. Artikel 55ff.
[2]) E. ABBE, l. c. S. 137—139 bzw. 220—223.

System sich in dem aplanatischen Punkt auf der Objektseite kreuzen, und außerdem ist, zur Vereinfachung, noch angenommen, daß der Konvergenzwinkel der Strahlen im konjugierten aplanatischen Punkt auf der Bildseite als verschwindend klein angesehen, auf dieser Seite also der Sinus der Tangente gleichgesetzt werden konne

Zur experimentellen Erprobung dieser Folgerung sind begreiflicherweise nur solche Linsensysteme geeignet, welche mit weitgeoffneten Strahlenkegeln abbilden Wo der Divergenzwinkel der Strahlen auf wenige Grade beschrankt ist, wie z B beim Fernrohrobjektiv, entzieht sich das Konvergenzverhaltnis der Prufung auf diesem Wege, weil, welches auch sein spezifischer Charakter sein mochte, bei kleinen Winkeln eine bemerkbare Abweichung von der Proportionalitat der Tangenten keinesfalls vorkommen kann Spielraum fur mogliche große Verschiedenheiten in der Art der Strahlenkonvergenz bieten dagegen die an den Mikroskopen gebrauchten Linsensysteme, zumal die Objektive mit den ausnehmend großen Öffnungswinkeln, von denen oben die Rede war Bei Linsensystemen dieser Art mussen daher die erwahnten Erscheinungen anorthoskopischer Abbildung augenfallig sichtbar werden, sobald geeignete Figuren in einer vom aplanatischen Fokus beliebig entfernten Objektebene beobachtet werden und dabei Kreuzung der abbildenden Strahlenkegel in diesem Fokus herbeigefuhrt wird Letztere Forderung ist ohne alle Umstande dadurch zu erfullen, daß bei der Beobachtung die Pupille des beobachtenden Auges — oder die sonst den Strahlenzutritt zum Auge vermittelnde Öffnung — in die Achse des Systems, und zwar an den Ort des konjugierten aplanatischen Fokus auf der Bildseite gebracht wird, weil in diesem Falle kein Strahl zum Auge gelangen kann, der nicht beim Eintritt in das System das der Pupille — oder der sonst wirksamen Öffnung — konjugierte Flachenelement auf der Achse passiert hat Die oben bemerkte besondere Voraussetzung uber die Konvergenzwinkel im aplanatischen Punkte auf der Bildseite ist aber bei Mikroskopobjektiven augenscheinlich immer in genugender Annaherung erfullt.



Abb. 124 Die Abbesche Doppelschar von Hyperbeln, die zur Prufung der Erfullung der Sinusbedingung bei Mikroskopobjektiven dient, wird bei der in dieser Abbildung gewahlten Große in 12,5 mm Abstand vom zu prufenden Objektiv auf den Mikroskoptisch gelegt Das beobachtende, fur großere Brennweiten unbewaffnete Auge wird in den bildhaltigen aplanatischen Punkt gebracht und muß dann eine Doppelschar rechtwinklig sich schneidender, gerader Linien (Abb. 125) von gleichen Abstanden wahrnehmen, wenn die Sinusbedingung erfullt ist.

Die fur das Gesetz des Aplanatismus am meisten charakteristische Erscheinung erhalt man, wenn als Objektfigur zwei Scharen von Hyperbeln (Abb. 124) mit gemeinsamen Mittelpunkten und senkrecht sich schneidenden Hauptachsen genommen werden, beide entworfen nach der Gleichung

$$y = \frac{\varDelta}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\,,$$

wo $\varDelta$ — die gemeinsame Nebenachse in beiden Scharen — den Abstand der Objektebene von dem betreffenden aplanatischen Fokus darstellt; und wenn zugleich die Werte von a in beiden Scharen nach der Formel

$$a = \frac{\varDelta \cdot u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

gleichen Zunahmen des u entsprechend — z. B. fur die Betrage $u = 0 \ldots, 0{,}2 \ldots, 0{,}4 \ldots, 0{,}6 \ldots, 0{,}8$ — gewählt werden. Diese Figur ergibt, nachdem der gemeinsame Mittelpunkt

aller Kurven in die Achse, die Ebene senkrecht zur Achse und in den richtigen Abstand Δ vom aplanatischen Fokus gebracht ist, als Bild zwei Scharen von aquidistanten Parallelen (Abb 125), die sich rechtwinklig schneiden Die krummlinig begrenzten, nach außen hin immer weiter sich ausdehnenden und immer starker deformierenden Felder der Objektfigur stellen sich demnach im Bilde samtlich als kongruente quadratische Felder dar, die Kreuzung der Hyperbeln, die nach außen hin unter immer spitzer und stumpfer werdenden Winkeln erfolgt, wird allenthalben als eine rechtwinklige Kreuzung wiedergegeben, und auch die entfernteren Kurven beider Hyperbelsysteme, deren Aste in der Figur uberhaupt keinen Durchschnitt ergeben, vielmehr sichtlich divergent verlaufen (z B die beiden fur $s = 0.8$), erscheinen im Bild unter rechtwinkliger Kreuzung, ihr Durchschnittspunkt aber freilich — entsprechend dem mathematisch Imaginaren — in einem Abstand von der Mitte des Bildes, zu welchem kein vom Luftraum ausgehender Lichtstrahl mehr gelangen kann (außerhalb desjenigen Kreises in der Bildflache, welcher der Grenze eines Strahlenkegels von 180° im Luftraum entspricht) "

Die Ausfuhrung der Prufung gestaltet sich dann folgendermaßen. Auf den Mikroskoptisch legen wir das in Abb. 124 dargestellte Probeobjekt so, daß sein Mittelpunkt in der optischen Achse des Mikroskopobjektivs liegt. Das Mikroskopobjektiv wird dann in eine solche Entfernung vom Probeobjekt gebracht, daß dessen Abstand vom dingseitigen Brennpunkt (aplanatischer Punkt) des Objektivs gleich dem Werte von Δ wird, fur den die Hyperbelschar berechnet ist. Bei der in Abb. 124 wiedergegebenen Hyperbelschar ist dies fur den Abstand $\Delta = 12{,}5$ mm geschehen. Das vom Objektiv entworfene Bild dieser Hyperbelschar wird bei Mikroskopobjektiven von großeren, nicht unter 3 mm liegenden Brennweiten mit bloßem Auge beobachtet, wahrend fur die Beobachtung der stark verkleinerten Bildchen sehr kurzer Brennweiten (unter 3 mm) ein schwaches Hilfsmikroskop benutzt wird, das wir in den Mikroskoptubus einschieben und auf das Bild einstellen Zu beachten ist dabei insbesondere noch die fur diese Prufung notwendig zu erfullende Grundbedingung, daß die aplanatischen Punkte Pupillenmitten sind. Wir erreichen die Erfullung dieser Bedingung dadurch, daß wir bei Beobachtung mit bloßem Auge dieses nach Entfernung des Mikroskopokulares ungefahr an die Stelle bringen, wo beim gewohnlichen Gebrauche des Mikroskops das reelle Bild entstehen würde, da dann die die Blende ersetzende Augenpupille sich genugend genau im bildseitigen aplanatischen Punkt befindet. Beim Gebrauch des Hilfsmikroskops mussen wir an einer Stelle, die dem Ort des bildseitigen aplanatischen Punktes zugeordnet ist, eine den Strahlengang begrenzende Blende anbringen.



Abb 125 Das Bild, zwei Scharen von sich rechtwinklig schneidenden, gleichweit voneinander abstehenden, parallelen Geraden, wie es bei Verwendung der Abbeschen Hyperbel-Doppelschar (Abb. 124) als Test wahrgenommen werden muß, wenn das abbildende Mikroskopobjektiv die Sinusbedingung erfullt.

Das Aussehen des so zu beobachtenden Bildes des Abbeschen Probeobjektes (Abb. 124) gibt einen Anhalt für die Erfullung der Sinusbedingung insofern, als dieses nur dann streng für das geprufte System gilt, wenn das Bild aus zwei Scharen von sich rechtwinklig schneidenden parallelen Geraden, die gleiche Abstande besitzen, besteht (Abb. 125). Abweichungen von dieser Form bezeugen auch Abweichungen von der Sinusbedingung.

119. Die Prüfung von photographischen Objektiven. Die Prüfverfahren, die hierher gehören, sind keine unmittelbar messenden. Sie beschränken sich darauf, die Schärfe der Wiedergabe von gewissen Testobjekten, die nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten auf Ebenen und im Raume verteilt sind, in der Einstellebene, sei es auf Mattscheibe oder Platte, zu beurteilen, um aus dieser Erkenntnis heraus auf die Korrektion des Objektivs besonders für schiefe Büschel zu schließen.

Im allgemeinen werden dazu quadratische Probetafeln[1]) von 2,5 bis 3,5 m Seitenlänge verwendet, die in 3 bis 4 m Entfernung vom zu prüfenden Objektiv senkrecht zu dessen optischer Achse aufgestellt werden, was daran erkennbar ist, daß an symmetrisch zur Mitte gelegenen Punkten die Bildschärfe die gleiche ist. Um ihren Zweck zu erfüllen, wird eine solche Probetafel zweckmäßig folgendermaßen ausgestattet In den diagonalen Richtungen und deren Winkelhalbierenden sind über die ganze Ausdehnung der Tafel Maßstäbe angebracht. Dicht neben diesen auf beiden Seiten werden Liniengruppen aus wagerechten, senkrechten und diagonalen Strichen von verschiedenen Strichabständen eingezeichnet. Außerdem ist die Probetafel über ihre ganze Fläche mit 9 bis 10 Schriftarten von verschiedener Größe bedeckt, die an verschiedenen Stellen durch Kreuzgitter und Systeme konzentrischer Kreise von verschiedener Strichstärke und verschiedenen Strichabständen abgelöst werden. Zwischen diesen Schriftzeichen und Strichzeichnungen sind dann noch Sterne, Spitzen u. a. eingestreut. Das Ganze ist durch schwarze gerade Striche eingerahmt Bei der Prüfung stellen wir die Mattscheibe der mit dem zu prüfenden Objektiv versehenen photographischen Kamera scharf auf die Probetafel ein und können nun entweder mit dem mit einer Lupe bewaffneten Auge das Bild beurteilen oder eine Aufnahme des Bildes machen, die wir dann bei feinem Plattenkorn mit einem stärker vergrößernden Mikroskop betrachten können. Ein solches Bild gestattet uns eine gute Beurteilung des Objektivs hinsichtlich verschiedener Forderungen. Verstehen wir unter Schärfe die Tatsache, daß bei genügend starker Vergrößerung im Bilde (Negativ) gerade noch bestimmte Feinheiten wahrgenommen werden können, so werden wir als Grenze der Auflösung, die ein Maß für die Schärfe sein wird, die Schriftgröße betrachten, bei welcher gerade noch die einzelnen Worte lesbar sind. Für die Beurteilung der Gesamtwirkung wird es notwendig sein, den Abfall der Schärfe gegen den Rand zu festzustellen. Vorhandenen Astigmatismus erkennen wir daran, daß die lotrechten bzw. wagerechten bzw. diagonalen Striche nicht gleichzeitig gleich scharf erscheinen. Auf die Klarheit der Zeichnung im Bilde können wir aus der Schärfe der Sterne und Spitzen und ähnlicher ausgeprägt scharf umgrenzter Figuren schließen. Die dem Objektiv eigene Verzerrung werden wir an der mehr oder weniger kissen- oder tonnenförmigen Verzeichnung des die Probetafel begrenzenden Strichquadrates nachweisen können. Zentrierfehler werden vorliegen, wenn wir an entsprechend liegenden Bildorten, die über die ganze Einstellebene verteilt liegen, ungleiche Schärfe feststellen.

Neben diesem wohl meist angewandten Probetafelverfahren ist noch ein weiteres Verfahren zur bildlichen Darstellung der Leistungsfähigkeit photographischer Objektive von RUDOLPH[2]) angegeben worden. Im Prinzip handelt es sich um eine erweiterte Anwendung des ROSS[3])-CLAUDETschen[4]) Focimeters. Dieses besteht aus einem in der optischen Achse der zu prüfenden Linsenfolge liegenden Stabe von etwa 3 m Länge, auf dem etwa 20 Flügel mit Schriftproben ähnlicher Art, wie oben beschrieben, spiralig angeordnet sind. Beim RUDOLPHschen Testobjekt sind nun mehrere solcher ROSS-CLAUDETschen Focimeter auf einer Schiene, die senkrecht zur optischen Achse des Objektivs eingestellt wird und selbst noch mit verschiedenen Abbildungen bedeckt ist, in verschiedenen

---

[1]) W. ZSCHOKKE, Eders Jahrb. f. Photogr u Reprod -Techn Bd. 20, S. 70—75 1906.

[2]) P. RUDOLPH, Atelier. Bd. 1, S 102—105. 1894.

[3]) M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. d. photogr. Obj , S 104, 142 u 149. Berlin: Julius Springer 1899.

[4]) A. CLAUDET, Phil. Mag. (3) Bd. 35, S. 374—385. 1849; (4) Bd 1, S. 478—490. 1851; Dinglers Journ Bd. 115, S. 32—45 1850; Bd. 123, S. 223—237. 1852.

Winkelabständen, z. B. etwa bei 0°, 16°, 31°, 41° usw., nach beiden Seiten vom Durchstoßungspunkte der optischen Achse aus drehbar angebracht. Dabei befindet sich der mittlere Flügel in der Ebene der Schiene. Nachdem zunächst die Schiene ausgerichtet ist, werden die Focimeter so gedreht, daß ihre Tragstäbe in den Richtungen der jeweiligen Hauptstrahlen liegen, also nach dem Mittelpunkte der Eintrittspupille hinzielen. Die Erfüllung dieser Bedingung kann leicht daran erkannt werden, daß von den Stäben im Bilde nur der Querschnitt, das vordere Ende zu sehen ist. Machen wir von einem solchen Testobjekt eine Aufnahme, nachdem wir die Mattscheibe auf die Schiene scharf eingestellt haben, so können wir aus dem Aussehen der Schrift- und Strichproben der Schienenebene in bekannter Weise auf Schärfe, Astigmatismus, Verzeichnung und Winkelausdehnung des brauchbaren Bildes schließen. Durch eine entsprechende kritische Beurteilung der Bilder der hinter und vor der Schiene liegenden Flügel können wir die Verteilung der Tiefenschärfe um die Einstellebene herum feststellen. Anderseits geben uns die Schärfen dieser Flügelbilder auch Aufschluß darüber, ob die aktinische Scharfstellung mit der Mattscheibeneinstellung übereinstimmt. Erscheint ein anderer als der Nullflügel am schärfsten, so besteht ein dementsprechender Unterschied zwischen der aktinischen und Mattscheibenscharfstellung. Von der Praxis wird gefordert, daß beide dicht beisammenliegen, damit keine Änderung des Kammerauszuges für die Aufnahme notwendig wird.

Wegen weiterer ähnlicher und anders gearteter Prüfverfahren von photographischen Objektiven sei auf die Arbeiten hingewiesen von EDER[1]), MOESSARD[2]), HOUDAILLE[3]), FABRE[4]), ZSCHOKKE[5]), KLEPP[6]), BECK[7]), SCHMIDT[8]), HARTMANN[9]), JEWELL[10]), BENNETT[11]), HAUSER[12]) u. a.

120. Die Prüfung der Fernrohrobjektive. Als Testobjekte für die Prüfung von Fernrohrobjektiven werden vielfach die Sterne selbst benutzt. Da dies aber an vielen Tagen unmöglich ist, werden künstliche Sterne verwendet, die dadurch gewonnen werden, daß ein feines, in einer Metallscheibe befindliches, genau rundes Loch von hinten beleuchtet wird. Für kurze Brennweiten genügt es, einen solchen künstlichen Stern in 30 bis 40 m Entfernung aufzustellen. Für große Brennweiten ist es aber unbedingt erforderlich, den Stern ins Unendliche zu bringen. Dies geschieht, indem wir entweder einen Hilfskollimator verwenden, in dessen Brennebene sich der Stern befindet, und aus dem die Strahlen parallel austreten, oder indem wir ein Autokollimationsverfahren in Anwendung bringen.

---

[1]) F. M. EDER, Ausführliches Handb. der Photographie. Bd. I, 4. Heft, S. 199–248. Halle: W. Knapp 1891.

[2]) P. MOESSARD, Étude des lentilles et objectifs photographiques. I. Part. Étude expérimentale complète d'une lentille ou d'un objectif photographique, S. 1–63. Paris: Gauthier-Villars et fils 1889.

[3]) F. HOUDAILLE, Sur une méthode d'essai scientifique et pratique des objectifs photographiques et des instruments d'optique, S. 1–77. Paris: Gauthier-Villars et fils 1894.

[4]) CH. FABRE, Traité encyclopédique de photographie II. Suppl.-Bd., S. 1–424. Paris: Gauthier-Villars et fils 1897.

[5]) W. ZSCHOKKE, Photogr. Korresp. Bd. 33, S. 377–482. 1896; Bd. 36, S. 131–134. 1899.

[6]) H. KLEPP, D. Photogr.-Ztg. Bd. 22, S. 3–7. 1898.

[7]) K. BECK, Eders Jahrb. f. Photogr. u. Reprod.-Techn. Bd. 17, S. 257–274. 1903.

[8]) H. SCHMIDT, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 26, S. 37–38, 49–51, 62–63 u. 108 bis 109. 1903.

[9]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 1–21, 33–47 u. 97–117. 1904; vgl. dazu auch Ziff. 123.

[10]) L. E. JEWELL, Journ. Opt. Soc. Amer. Bd. 2/3, S. 51–61. 1919.

[11]) A. H. BENNETT, Scient. Pap. Bureau of Stand. Bd. 19, S. 587–640. 1924.

[12]) F. HAUSER, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 46, S. 96–99. 1925.

Im letzteren Falle wird ein Planspiegel *Sp* zu Hilfe genommen, der senkrecht zur optischen Achse des zu prufenden Objektivs justiert wird. In der Brennebene des Objektivs *S* befindet sich der kunstliche Stern *O* (Abb 126). Im gezeichneten Falle wird der Stern durch ein kleines Reflexionsprisma beleuchtet. Es laßt sich aber auch so vorgehen, daß die von dem seitlich stehenden Stern *O* ausgehenden Strahlen durch eine unter 45° gegen die optische Achse geneigte Planplatte *P* (Abb. 127), die unter Umstanden zur Erhohung des Reflexionsvermogens geeignet durchlassig versilbert sein kann, in der Richtung der optischen Achse reflektiert wird.

Die parallel aus *S* austretenden Strahlen werden vom Planspiegel *Sp* ins Objektiv *S* wieder zuruckgeworfen und in dessen Brennebene in *O'* vereinigt. Das Bildchen *O'* kann mittels Lupe oder Mikroskop betrachtet werden. Bei diesem Autokollimationsverfahren handelt es sich also um ein verscharftes Prufverfahren, da die Strahlen durch das Objektiv zweimal hindurchgehen, wodurch dessen Fehler verdoppelt sich im Bilde *O'* bemerkbar machen.

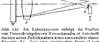


Abb 126 Im Laboratorium erfolgt die Prufung von Fernrohrobjektiven *S* zweckmaßig in Autokollimation unter Zuhilfenahme eines einwandfrei ebenen Spiegels *Sp* Das vom kunstlichen Stern *O* kommende Licht durchsetzt das Objektiv *S* zweimal und wird in *O'* zum Sternbild vereinigt Bei der hier gezeichneten Sternanordnung wird allerdings nicht genau in der optischen Achse, sondern etwas seitlich beobachtet



Abb 127 Um fur die in Abb 128 gezeichnete Autokollimationsanordnung genau in der optischen Achse beobachten zu konnen, werden die von dem seitlich stehenden, kunstlichen Stern *O* kommenden Strahlen durch eine unter 45° gegen die optische Achse des Objektivs *S* geneigt stehende, halbdurchlassig versilberte Platte *P* geknickt Das Bild liegt dann in *O'* auf der Achse

Bei Knickung des Strahlenganges durch die Platte *P* (Abb. 127) wird das Bildchen genau in der optischen Achse liegen. Dies Verfahren hat allerdings den Nachteil, daß das Bildchen infolge der die Intensitat schwachenden Platte *P* selbst sehr schwach wird. Um großere Helligkeit zu bekommen, werden wir deshalb mit Vorteil den Stern *O* (Abb. 126) verwenden, der durch ein kleines Reflexionsprisma sein Licht empfängt. Dabei wird allerdings durch dieses die eine Hälfte des Gesichtsfeldes zum Teil verdeckt, während der Bildpunkt *O'* symmetrisch zur Achse in der freien Gesichtsfeldhalfte entsteht. Aus diesem Grunde werden wir in diesem Falle nicht die Abweichungen genau in der optischen Achse des Systems untersuchen können, sondern nur die in der Nachbarschaft derselben auftretenden Abweichungen. Bei aplanatischen Linsenfolgen größerer Brennweite, und um solche dreht es sich meist bei Fernrohrobjektiven, können wir ohne Bedenken die Untersuchung des Achsenbüschels durch die eines achsennahen Buschels ersetzen. Dies ist noch zulässig für Brennweiten bis 1 m herunter, doch ist hierbei schon ausdrücklich darauf zu achten, daß *O* und *O'* dicht nebeneinander liegen, weil sonst schon die Fehler schiefer Büschel auftreten.

Aus der Form des Bildes im Brennpunkt und aus dessen Lichtverteilung sowie aus dem Aussehen und der Lichtverteilung des intra- und extrafokalen Beugungsscheibchens können wir auf die Leistungsfähigkeit und auf den Kor-

rektionszustand des Objektivs schließen. Bestimmte Deformationen der Beugungsscheibchen außerhalb des Brennpunktes geben auch Hinweise auf unter Umständen vorhandene Schlieren, Glas- und Fassungsspannungen.

Diese Art der Fehlerbeurteilung wurde ursprünglich schon von FOUCAULT[1]) angewandt. Sie wurde nach ihm immer wieder benutzt, nicht nur während der Herstellung zum Verfolgen der erreichten Verbesserung, sondern auch zur Prüfung fertiger Fernrohre. Die Firma T. COOKE & SONS[2]) hat eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens veröffentlicht und auch CLARK[3]) hat nach diesem Verfahren gearbeitet. Auf Grund der Versuche und Erfahrungen dieser Verfasser finden wir die Kennzeichen für die einzelnen Fehler in der Abb. 128 zusammengestellt.

Das Sternbild eines fehlerfreien guten Objektivs ist im Brennpunkt ein helles Scheibchen mit einem oder zwei schwächeren Beugungsringen (Abb. 128 A/2). Beobachten wir durch Verschieben des Okulars extra- oder intrafokal, so ändert sich das Beugungsscheibchen mit seinen Ringen in beiden Richtungen gleichartig (Abb. 128 A/1, 3). Je weiter wir uns vom Brennpunkt entfernen, desto mehr kommen die Zonenfehler zum Vorschein (Abb. 128 A/4).

Ändert sich das Beugungsscheibchen in beiden Richtungen ungleichartig, bleibt es aber rund, so liegen sphärische Abweichungen vor (Abb. 128 B u. C). Die einfache sphärische Über- (Unter-) Korrektion ist vorhanden, wenn bei extra- (intra-) fokaler Beobachtung, wie dies Abb. 128 B/2 zeigt, der äußerste Ring sehr hell und scharf begrenzt ist, während bei intra- (extra-) fokaler Beobachtung der äußerste Ring schwach und verwaschen aussieht (Abb. 128 B/1).

Mehrere Zonenfehler, Zonenhäufung, weist die Linsenfolge auf, wenn die Beugungsringe intra- (Abb. 128 C/1) und extra- (Abb. 128 C/2) fokal abwechselnd sehr helle und sehr schwache Ringe in nicht gleichartiger Reihenfolge zeigen. In Abb. 128 C/a besitzen Rand- und Achsenstrahlen gleiche Schnittweite, während eine dazwischenliegende Zone davon abweicht. In Abb. 128 C/b besitzen die Strahlen in der Nähe der Achse und in einer in der Nähe des Randes liegenden Zone zu kurze Schnittweiten, während in Abb. 128 C/c die Achsenstrahlen eine zu lange Schnittweite aufweisen.

Sind die Linsen nicht gut zentriert, so erhalten wir bei Nichterfüllung der Sinusbedingung die Erscheinung des Koma, das sich durch birnenförmige und einseitige Lichtverteilung außerhalb des Brennpunktes (Abb. 128 D) äußert.

Ist die Sinusbedingung erfüllt, so erhalten wir die Erscheinung des Astigmatismus, der sich sowohl im Brennpunkt (Abb. 128 E/2) als außerhalb desselben (Abb. 128 E/1, 3, 4, 5) durch ein länglich geformtes Beugungsbild kundgibt. Der Astigmatismus kann allerdings auch durch nichtsphärische Flächen und leichte Verspannung hervorgerufen werden.

Schlieren oder sonstige Einschlüsse im Glas verbiegen und verkrümmen das außerhalb des Brennpunktes beobachtete Beugungsbild (Abb. 128 F).

Verspannung des Glases, wie sie bei schlechter Kühlung vorliegt, verändert das extrafokale Beugungsbild je nach der Art und Stärke der vorhandenen Spannung (Abb. 128 G).

---

[1]) L. FOUCAULT, Recueil des travaux scientifiques de L. Foucault. Bd. I u. II. Paris: Gauthier-Villars 1878; C. R. Bd. 44, S. 339–342. 1857; Bd. 47, S. 205–207 u. 958–959. 1858; Bd. 49, S. 85–87. 1859; Bd. 54, S. 859–861. 1862; H. SCHRODER, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 2, S. 5–8 u. 15–18. 1881.

[2]) T. COOKE & SONS, Buckingham works, York: „On the adjustment and testing of telescopic objectives." York: Johnson & Co. Die Justierung und Prüfung von Fernrohrobjektiven. Übersetzt von R. STRAUBEL; ZS. f. Instrkde. Bd. 14, S. 113–124, 153–163 u. 189–201. 1899.

[3]) J. CLARK, Improvement in altiscopes. U.S.P. 53115 v. 13. III. 1866.

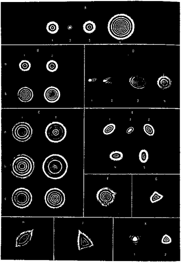


Abb. 128. Die Beugungsbilder eines Sterns, wie sie zur Beurteilung der Objektivfehler dienen.

A. Bild für ein fehlerfreies Objektiv. B. Sphärische Über- und Unterkorrektion. C. Zonenhäufung. D. Koma (Zentrierfehler). E. Astigmatismus (Zentrierfehler). F. Schlieren im Glase. G. Glasspannung. H u. J. Fassungsspannung. K. Durchbiegung einer Linse.

Verspannung der Linsen, wie sie durch schlechte Fassung hervorgerufen werden kann, liefert ebenfalls eine kennzeichnende Verzerrung des extrafokalen Beugungsbildes. Abb. 128 H deutet auf gleichmäßigen Fassungsdruck, während Abb. 128 J durch schlechte Dreipunktauflage bedingt ist.

Schließlich kann eine Verspannung des Glases infolge Durchbiegung einer Linse (zu geringe Dicke) vorkommen. Liegt dabei die Linse, wie das bei Fernrohrobjektiven üblich ist, an drei Punkten auf, so wird die Erscheinung der zuletzt erwähnten Fassungsspannung ähnlich sein Abb. 128 K/1 gibt die Erscheinung im Brennpunkt, Abb 128 K/2 außerhalb desselben wieder.

Die Beurteilung der chromatischen Korrektion erfolgt durch Beobachten der Farben des Beugungsbildchens intra- und extrafokal Zu beachten ist dabei der Farbenfehler des Beobachtungssystems: Okular + Auge

2. Die Bestimmung des Korrektionszustandes durch Messung.

Die sphärischen Abweichungen.

121. Das Schneidenverfahren von FOUCAULT. Um die Zonenfehler einer Linsenfolge, die die sphärischen Abweichungen bedingen, unmittelbar zu sehen, schlagen wir mit FOUCAULT[1]) den folgenden Weg ein.

Als Ding verwenden wir einen natürlichen oder künstlichen Stern Im letzteren Falle werden wir in Autokollimation unter Zuhilfenahme eines durchaus einwandfreien Planspiegels beobachten. Wir bringen unser Auge an den Ort des Sternbildchens, d. h in den Brennpunkt der Linsenfolge, und erblicken dadurch deren Öffnung voll ausgeleuchtet Schieben wir nun von rechts oder links kommend (Abb 129) eine scharfe Schneide *Schn* dicht vor dem Auge in den Strahlengang, das Sternbildchen dadurch nach und nach verdeckend, so werden wir folgende Wahrnehmungen machen können Ist die Linsenfolge sphärisch fehlerfrei, werden also alle vom Stern kommende Strahlen tatsächlich in einem einzigen Bildpunkte vereinigt, so wird dieses Bildchen mit einem Schlage von der Schneide verdeckt, und wir sehen in eben dem Maße, wie wir mit der Schneide in den Strahlengang einschneiden, die Erleuchtung der Linsenöffnung gleichmäßig über die ganze Fläche verschwinden. Besitzt die Linsenfolge jedoch einzelne Zonen derart, daß die entsprechenden Strahlen entweder schon vor dem Orte des Hauptbildes, wo wir einschneiden, oder erst hinter diesem vereinigt werden, so werden bei geeignet eingeschobener Schneide die ersteren Strahlen noch ins Auge gelangen, während die letzteren schon vorher abgefangen werden (Abb. 129). Sind die sphärischen Abweichungen der Zonen nur gering, so werden wir beim



Abb 129 Die Anordnung beim Schneidenverfahren von FOUCAULT Das zu untersuchende System *S* entwirft von dem natürlichen oder künstlichen Stern ein Bildchen, an dessen Ort wir das beobachtende Auge bringen Dicht vor dem Auge schieben wir darauf die FOUCAULTsche Messerschneide in den Strahlengang bis zur optischen Achse vor Dadurch werden die Strahlen längerbrennweitiger Zonen abgeschirmt, weshalb sie dem Auge dunkel erscheinen, während kurzerbrennweitige Zonen dem Auge hell erscheinen Das sich dem Auge darbietende Bild hat Reliefwirkung (Abb. 130).

[1]) L. FOUCAULT, l. c. Ziff. 120, Anm. 1; H. SCHRÖDER, Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 2, S. 16–18. 1881.

Betrachten der Öffnung den Eindruck eines Reliefs haben, das der Gestalt entspricht, die die Wellenfläche haben würde, wenn die Abweichungen stark übertrieben wären. Denken wir uns dabei die Linsenfolge durch eine Lampe von der Seite beleuchtet, von der her wir die FOUCAULTsche Schneide gegen die optische Achse vorschieben, so sehen die Zonen zu kurzer Brennweite, die noch hell sind, aus wie nach außen liegende Abhänge von Wällen, während die Zonen zu großer Brennweite, die dunkel sind, sich darstellen, als ob sie die inneren Abdachungen von Ringwällen wären (Abb. 130).

Dieses Verfahren ist sehr empfindlich und zeigt noch die geringsten Fehler an. Eine Art Umkehr der Methode erhalten wir, wenn wir mit STRAUBEL[1]) so vorgehen, daß wir das von einer Zone entworfene Sternbildchen nicht durch einen Schirm abblenden, sondern durch eine feine Schirmöffnung absondern. Es erscheinen dann gerade die Stellen hell, die zu diesem Bildchen beitragen, die anderen sind dunkel. Dabei geht allerdings die Reliefwirkung verloren. Dafür gibt uns diese Umkehr einen anderen Vorteil. Richten wir die Anordnung so ein, daß wir die feine Öffnung längs der optischen Achse meßbar verschieben können, so können wir nacheinander auf die einzelnen Zonen einstellen und dadurch die Längsabweichungen messen.

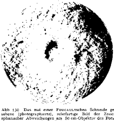


Abb. 130. Das mit einer FOUCAULTschen Schneide gesehene (photographierte), reliefartige Bild der Zonen sphärischer Abweichungen am 80 cm-Objektiv des Potsdamer Refraktors.

Doch gestattet in ähnlicher Weise nach einem Vorschlage von WETTHAUER[2]) auch die ursprüngliche FOUCAULTsche Schneidenmethode die Messung der sphärischen Abweichungen, wenn wir mit der Schneide meßbare Verschiebungen ausführen können. Die sich im Brennpunkt vereinigenden Strahlen gehen hinter diesem wieder auseinander und erzeugen auf einer vom Brennpunkt in bestimmter Entfernung stehenden Mattscheibe einen Lichtkreis. Dieser kann durch photographisch hergestellte, der Mattscheibe dicht anliegende Ringblenden nacheinander in Kreisringe von verschiedenem Durchmesser zerlegt werden, die den einzelnen Zonen der Linsenfolge entsprechen. Dabei kann von der erfahrungsgemäß nicht störenden, durch die Zonenfehler bedingten geringen Übereinanderlagerung benachbarter Zonen abgesehen werden. Die Schneide wird in der optischen Achse verschoben und befindet sich gerade dann im Brennpunkt der gerade ausgeblendeten Ringzone, wenn dieser Kreisring gleichmäßig hell erscheint. Wir können also auf diese Weise die Brenn-

[1]) R. STRAUBEL, Bericht d. I. Internat. seismolog. Konferenz, S. 290—304. Leipzig: W. Engelmann 1902.

[2]) A. WETTHAUER, ZS. f. Instrkde. Bd. 34, S. 192—193. 1914; Bd. 41, S. 184 bis 187. 1921.

punktslage für die einzelnen Zonen unmittelbar an der Teilung der die Schneide tragenden Schlittenführung ablesen.

Um bei Benutzung von natürlichen Sternen bei der Beobachtung die Luftunruhe auszuschalten, hat es sich als vorteilhaft erwiesen, wie dies HARTMANN[1]) zuerst getan hat, an Stelle des Auges eine photographische Kammer zu benutzen, die auf die Linsenöffnung eingestellt ist und vor deren Objektiv die Schneide vorgeschoben werden kann. Die dabei gemachten Aufnahmen „Fokogramme" (Abb. 130) zeigen nicht nur das Relief, sondern geben noch mehr Einzelheiten als die Augenbeobachtung wieder, wie z. B. Polierriefen, Schlieren, Blasen, Steinchen u. a.

Ohne photographische Kammer können wir arbeiten, wenn wir, wie das PORTER[2]) gemacht hat, eine photographische Platte allein einfach in gewissem Abstande hinter der Schneide aufstellen und die Lichtwirkung an dieser Stelle photographisch festhalten. Dabei müssen wir beachten, daß, wenn wir die Schneide mehr intrafokal einschieben, das Bild so aussieht, als ob eine stark erhabene Fläche vorläge, während, wenn wir mehr im Extrafokalen einschneiden, wir ein Bild erhalten, als ob eine stark hohle Fläche vorläge. Nur beim Einschneiden im richtigen Bildpunkt erhalten wir das richtige Bild der Längsabweichungen des Systems.

122. Die Verwendung des ABBEschen Fokometers. Um die sphärischen Abweichungen einer Linsenfolge zu messen, ist es notwendig, daß wir mit dem ABBEschen Fokometer in bekannter Weise für alle gewünschten Zonen die Brennweite f_h (Ziff. 97) und die jeweilige Lage des bildseitigen Hauptpunktes gegenüber dem bildseitigen Linsenscheitel (Ziff. 103) ermitteln, um so für jede Zone die Schnittweite achsenparalleler Strahlen zu erhalten. Die Unterschiede dieser Schnittweiten gegenüber einer bestimmten Schnittweite, z. B. der der kleinsten (Null-)Zone, sind dann die gesuchten sphärischen Abweichungen[3]).

123. Die HARTMANNsche Extrafokalmethode. Das Verfahren von HARTMANN[4]) ist eine Übersetzung der Durchrechnung in das Experiment. Während bei der trigonometrischen Durchrechnung des Strahlenverlaufes durch eine Linsenfolge ein einziger Strahl rein rechnerisch verfolgt wird, wird beim HARTMANNschen Verfahren im Prinzip ebenfalls ein einziger Strahl, oder besser ein schmales Strahlenbündel, experimentell verfolgt, um die Lage des zugehörigen Brennpunktes festzustellen. Dies geschieht dadurch, daß dicht vor der zu untersuchenden Linsenfolge den aus dem Unendlichen kommenden Strahlen eine Blende B mit zwei symmetrisch zur Achse gelegenen, einer bestimmten Zone h entsprechen-

---

[1]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 29, S. 217–232. 1909; Berl. Ber. Bd. 32, S. 935 bis 940. 1908; Astrophys. Journ. Bd. 27, S. 234–239. 1908.

[2]) R. W. PORTER, Astrophys. Journ. Bd. 47, S. 324–328. 1918.

[3]) E. BRODHUN, H. FASSBENDER u. A. WETTHAUER, ZS. f. Instrkde. Bd. 33, S. 163 bis 165. 1913; H. FASSBENDER, ebenda Bd. 33, S. 210–218. 1913.

[4]) J. HARTMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 20, S. 51–57. 1900, Bd. 24, S. 1–21, 33–47 u. 97–117. 1904; Publ. Astrophys. Obs. Potsdam Bd. 15, Nr. 46 (2 Stück). 106 S. Leipzig: W. Engelmann 1908. Außerdem vgl. noch: H. SCHUMANN, ZS. f. Instrkde. Bd. 22, S. 103 bis 109 u. 325–330. 1902; H. ERFLE, ebenda Bd. 28, S. 289–293. 1908; PH. FOX, Astrophys. Journ. Bd. 27, S. 237–253. 1908; H. FASSBENDER, ZS. f. Instrkde. Bd. 33, S. 177–183. 1913; E. BRODHUN, H. FASSBENDER u. A. WETTHAUER, ebenda Bd. 33, S. 163–165. 1913; E. BRODHUN u. A. WETTHAUER, ebenda Bd. 40, S. 96–97. 1920; K. W. F. KOHLRAUSCH, Mitt. d. Techn. Versuchsamtes Wien. Bd. 8, Heft 1 u. 2. 1919; Ref. in ZS. f. Instrkde. Bd. 40, S. 204. 1920; A. WETTHAUER, ebenda Bd. 41, S. 106. 1921. Verwiesen sei auch auf eine Arbeit von: H. GRAF, Phys. ZS. Bd. 25, S. 489–495. 1924, der das HARTMANNsche Blendenverfahren benutzt, um bei geeigneter Gestaltung der Blende, z. B. spiralige Anordnung der Löcher, die Fehler qualitativ darzustellen.

den kleinen Löchern entgegengestellt wird (Abb. 131). Die dadurch abgesonderten beiden Strahlenbündel werden nach dem Durchsetzen der Linsenfolge sich in dem Brennpunkt F_h der ausgeblendeten Zone h vereinigen. Schneiden wir nun von einem beliebigen, aber festen Achsenpunkt A aus in der Entfernung s_1 durch eine vor dem Brennpunkt gelegene, zur optischen Achse senkrechte Ebene E_1 die Strahlen, so wird der Abstand ihrer Durchstoßungspunkte durch diese Ebene als Abstand $A_1B_1 = e_1$ der Mitten der Zerstreuungskreise der Lichtbüschel an dieser Stelle sich leicht mikrometrisch ausmessen lassen. In gleicher Weise erhalten wir für eine hinter dem Brennpunkt in der Entfernung s_2 von A gelegene Ebene E_2 als Abstand der zugehörigen Durchstoßungspunkte $A_2B_2 = e_2$. Aus der Abb. 131 erkennen wir, daß dann der Vereinigungspunkt der beiden Bündel, der Zonenbrennpunkt F_h, vom festen Punkt A den Abstand

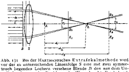


Abb. 131. Bei der HARTMANNschen Extrafokalmethode wird vor der zu untersuchenden Linsenfolge S eine mit zwei symmetrisch liegenden Löchern versehene Blende B den aus dem Unendlichen kommenden Strahlen in den Weg gebracht. Die dadurch entstehenden sehr schmalen Büschel vereinigen sich im Brennpunkt F_h der herausgeblendeten Zone h. Wir bringen in den Abständen s_1 und s_2 von einem festen Punkte A, d. h. intra- und extrafokal gegenüber F_h, in E_1 und E_2 zwei photographische Platten in den Weg der durch die Blende B abgesonderten Strahlenbüschel. Diese geben auf E_1 an den Stellen A_1 und B_1, auf E_2 an den Stellen A_2 und B_2 dem Durchmesser der Büschel entsprechende Zerstreuungskreise, deren Abstände voneinander $A_1B_1 = e_1$ und $A_2B_2 = e_2$ wir mikrometrisch ausmessen. Aus den so durch Versuch ermittelten Größen erhalten wir den Abstand s_h des Zonenbrennpunkts F_h vom festen Punkt A als

$$s_h = s_1 + \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot (s_2 - s_1).$$

Aus den so für alle Zonen ermittelten Werten s_h ($h = a$ bis s) finden wir dann die sphärischen Abweichungen Δf_h als Differenzen gegenüber dem Wert s_0 für den Hauptstrahl ($h = 0$).

$$s_h = s_1 + \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot (s_2 - s_1) \tag{82}$$

besitzt. In dieser Weise ermitteln wir für jede Zone den Brennpunktsabstand s_h, um als Differenzen dieser Werte gegenüber dem Wert s_0 für den Hauptstrahl die sphärischen Abweichungen Δf_h für jede Zone zu erhalten.

Der Durchmesser der Blendenlöcher soll etwa $^1/_{200}$ bis $^1/_{400}$ der untersuchten Brennweite betragen. Nicht größer sollen sie sein, weil sonst die Zonen nicht eng genug werden, und nicht kleiner dürfen sie sein, weil in diesem Falle infolge der Beugung[1]) die Beugungsscheibchen groß und verwaschen und damit für genaue Messungen ungeeignet werden.

Sehr einfach wird das Verfahren, wenn wir einmal in der Lage von E_1 und dann in der Lage von E_2 je eine photographische Aufnahme machen und hinterher auf einem Komparator die gesuchten e-Abstände ausmessen. Dabei kommen wir mit zwei Aufnahmen für alle Zonen aus, wenn wir die HARTMANNsche Blende B (Abb. 131) von vornherein mit den entsprechenden Löchern für alle Zonen ver-

[1]) Über die Verwendung dieser Beugungserscheinung zur Messung, die sich die Verfahren von MERLAND und GARDNER-BENNETT zunutze machen, vgl. Ziff. 127.

sehen, wie dies Abb. 132 beispielsweise zeigt. Dabei dürfen wir allerdings nicht vergessen, streng darauf zu achten, daß die Ebenen E_1 und E_2 nur in so großer Entfernung von F_k gewählt werden, daß die den einzelnen Zonen entsprechenden Zerstreuungsscheibchen in gleicher Reihenfolge auftreten wie die zugehörigen Löcher der Blende, weil sonst ein Zurechtfinden unmöglich ist.

Bei Verwendung von weißem Lichte werden die Zerstreuungsscheibchen infolge der Farbenzerstreuung birnenförmig und dadurch für eine gute Messung ungeeignet. Aus diesem Grunde werden wir einfarbiges Licht verwenden, das scharfe Bildscheibchen liefert.

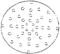


Abb. 132. Zur Vereinfachung der Durchführung der Hartmannschen Extrafokalmethode wird vorteilhaft eine Hartmannsche Blende, bei der in gesetzmäßiger Anordnung alle Zonenblenden auf einer Scheibe untergebracht sind, benutzt, wodurch mit je einer Aufnahme in E_1 und E_2 (Abb. 131) alle Zonen auf einmal aufgenommen sind.

Durch Neigen der Linsenfolge gegen die einfallenden Lichtstrahlen können wir auf diese Weise auch die Abweichungen für Dingpunkte seitlich der Achse ermitteln.

Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, einen unendlich fernen Lichtpunkt zu verwenden, wie dies bisher angenommen wurde. Befindet sich der Lichtpunkt zwar im Endlichen, aber immerhin noch in einer im Verhältnis zur Brennweite sehr großen Entfernung l, so müssen die bei einer solchen Versuchsanordnung gefundenen sphärischen Abweichungen Δs_l des Bildpunktes eine Verbesserung erfahren. Nach Lehmann[1]) gilt für die wirklichen sphärischen Abweichungen $\Delta f_k = -\Delta s_\infty$ des Brennpunktes

$$\Delta f_k = \left(\frac{l-f}{l}\right)^2 \cdot \Delta s_l, \tag{83}$$

wenn dabei die Brennweite f angenähert bekannt ist.

Das Hartmannsche Verfahren besitzt eine außerordentlich günstige Meßgenauigkeit. Nach Untersuchungen von Lehmann[2]) läßt sich damit eine mittlere Meßgenauigkeit von $\pm 0{,}00007 \cdot f$, also unter $\pm 0{,}1$‰ der Brennweite, für die sphärischen Abweichungen erzielen.

Diese hohe Genauigkeit gestattet es, das Verfahren dazu zu benutzen, um den Einfluß des Verkittens, geringer Fassungsspannung, geringer Luftdickendifferenzen und eingeschalteter Planparallelplatten oder Filter auf die sphärische Korrektion zu untersuchen[3]).

Der Vergleich des Korrektionszustandes verschieden brennweitiger, nach diesem Verfahren behandelter Linsenfolge kann in zweierlei Weise erfolgen:

Der eine Weg ist der, daß wir, wie es nach von Rohr[4]) üblich ist, die gemessenen sphärischen Abweichungen auf eine Äquivalentbrennweite von 100 mm umrechnen und sie der besseren Übersicht halber in Abhängigkeit von ihren Einfallshöhen (Zonen) in ein Schaubild eintragen.

Der zweite Weg ist der, daß wir mit Lehmann[5]) und Hartmann[6]) die „technische Konstante" der Linsenfolge ermitteln. Wir beachten dabei,

[1]) H. Lehmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 22, S. 325—336. 1902; Bd. 23, S. 289—301. 1903.

[2]) H. Lehmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 22, S. 325. 1902.

[3]) H. Lehmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 22, S. 326—330. 1902; G. Eberhard, ebenda Bd. 23, S. 274—277. 1903.

[4]) M. v. Rohr, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, S. 32. Berlin: Julius Springer 1899.

[5]) H. Lehmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 22, S. 103—109. 1902.

[6]) J. Hartmann, ZS. f. Instrkde. Bd. 24, S. 45—47. 1904, vgl. dazu auch S. Demetrescu, Rev. d'opt. Bd. 2, S. 452—469 u. 493—501. 1923; Bd. 3, S. 331—535. 1924; A. Danjon, ebenda Bd. 3, S. 305—314. 1924.

daß sich im Bildpunkte in der Einstellebene die Zerstreuungskreise aller Zonen überlagern, und daß erst die Gesamtheit dieser Zerstreuungsscheibchen den Bildeindruck wiedergibt. Als Einstellebene wählen wir z. B. die durch einen Brennpunkt F_0 senkrecht zur Achse gelegte Ebene E_F (Abb. 133). Unter dem Bildpunkt einer Zone h verstehen wir dann das Zerstreuungsscheibchen auf E_F vom Durchmesser B_h, der sich aus der Formel

$$B_h = 2 \cdot \Delta f_h \cdot \operatorname{tg} u = \Delta f_h \cdot \left(2 \frac{h}{f}\right), \tag{84}$$

worin f nur als Mittelwert bekannt zu sein braucht, berechnen läßt. Dabei ist Δf_h die nach dem HARTMANNschen Verfahren ermittelte Abweichung des Zonenbrennpunktes F_h vom Brennpunkt F_0 und $(2 \cdot h/f)$ ist nichts anderes als die relative Öffnung der bis zur Zone abgeblendeten Linsenfolge. Den Bildpunktsdurchmesser für eine Zone erhalten wir somit als Produkt aus dem Werte der sphärischen Abweichung dieser Zone und ihrer relativen Öffnung. Der erste Schritt zur Ermittelung der Konstante ist nun der, die Lage der günstigsten Einstellebene zu finden, d. h. die Einstellebene zu suchen, in der alle übereinanderlagernden Zerstreuungsscheibchen das kleinste geometrische Bildscheibchen liefern (vgl. Ziff. 74). Diese Ebene soll vom bildseitigen Linsenscheitel der Linsenfolge die Entfernung $s_m = s_0 + \Delta f_m$ besitzen, wenn s_0 die Schnittweite des Achsenpunktes ist, in bezug auf den wir die sphärischen Abweichungen Δf_h bestimmt haben. Aus der Tabelle dieser sphärischen Abweichungen entnehmen wir die beiden Zonen h_1 und h_2 mit den Schnittweiten $s_1 = s_0 + \Delta f_1$ bzw. $s_2 = s_0 + \Delta f_2$, die dem Objektivrande am nächsten liegen, und denen ein Maximum bzw. ein Minimum der Werte der sphärischen Abweichungen entspricht; es soll sein $s_1 > s_2$. Auf einer Einstellebene mit der Schnittweite $s_m = s_0 + \Delta f_m (s_1 > s_m > s_2)$ werden wir demnach dann das kleinste geometrische Zerstreuungsscheibchen bekommen, wenn die durch die beiden Zonen h_1 und h_2 bedingten Bildscheibchen mit den Durchmessern [vgl. Gl. (84)]



Abb. 133. Um die Größe des Zerstreuungsscheibchens B_h der Zone h in der Einstellebene E_F zu finden, brauchen wir neben der Brennweite f des Systems nur noch Δf_h, die durch das HARTMANNsche Verfahren ermittelte Abweichung des Zonenbrennpunktes F_h vom Brennpunkt F_0, zu kennen. Es ist dann

$$B_h = \Delta f_h \cdot \left(2 \cdot \frac{h}{f}\right),$$

worin $2\frac{h}{f}$ die relative Öffnung der bis zur Zone abgeblendeten Linsenfolge vorstellt.

$$B_1 = 2 \cdot (s_1 - s_m) \cdot \frac{h_1}{f} \qquad \text{und} \qquad B_2 = 2 \cdot (s_m - s_2) \cdot \frac{h_2}{f}$$

gleichen Durchmesser besitzen, wenn also

$$(s_1 - s_m) \cdot h_1 = (s_m - s_2) \cdot h_2$$

oder

$$s_m = \frac{h_1 \cdot s_1 + h_2 \cdot s_2}{h_1 + h_2}, \tag{85}$$

oder

$$\Delta f_m = \frac{h_1 \cdot \Delta f_1 + h_2 \cdot \Delta f_2}{h_1 + h_2}. \tag{86}$$

ist. Nachdem wir die nach dem HARTMANNschen Extrafokalverfahren gefundenen sphärischen Abweichungen Δf_h in bezug auf die so ermittelte günstigste Einstellebene in einfacher Weise

$$\Delta f'_h = \Delta f_h - \Delta f_m$$

umgerechnet haben, ermitteln wir die Durchmesser der Zerstreuungsscheibchen aller Zonen h auf Grund der der Gleichung (84) entsprechenden Beziehung

$$B'_h = 2 \cdot \frac{h}{f} \cdot \Delta f'_h .$$

Entspricht das Maximum der so errechneten Durchmesser B'_h, wie dies eigentlich nach der Ableitung der Fall sein müßte, nicht den beiden Zonen h_1 und h_2, sondern, was sehr wohl möglich ist, einer dritten Zone h_3, so müssen wir mit dieser die Lage der günstigsten Einstellebene (s_m bzw. f_m) aus den Formeln (85) bzw. (86) neu berechnen.

Um nun bei Bekanntsein dieser günstigsten Einstellebene zu einem Maßstabe für die Gütebeurteilung einer Linsenfolge zu kommen, errechnen wir aus den Durchmessern B'_h der Zerstreuungsscheibchen der einzelnen Zonen auf dieser günstigsten Einstellebene einen Mittelwert B', bei dessen Bildung wir aber die auf die einzelnen Zonen auffallende Lichtmenge berücksichtigen müssen, weshalb wir für B' zu folgendem Ausdruck kommen:

$$B' = \frac{\sum h \cdot B'_h}{\sum h} = \frac{2}{f} \cdot \frac{\sum h^2 \cdot \Delta f'_h}{\sum h} = \frac{2}{f} \cdot \frac{\sum h^2 \cdot (\Delta f_h - \Delta f_m)}{\sum h} . \qquad (87)$$

Als HARTMANNsche Konstante T bezeichnen wir dann das 100000fache dieses Mittelwertes B' dividiert durch die Brennweite f der Linsenfolge:

$$T = \frac{100000}{f} \cdot B' . \qquad (87)$$

Wir können also T ansprechen als den 10^5fachen mittleren Durchmesser des für einfarbiges Licht ermittelten kleinsten Bildscheibchens, gemessen in Teilen der Brennweite. Andererseits ergibt das Produkt $2{,}0626 \cdot T$ den scheinbaren Durchmesser des Bildscheibchens günstigster Einstellung in Bogensekunden. Für sehr gute Linsenfolgen muß die Konstante T zwischen 0 und 0,5 liegen. Liegt sie zwischen 0,5 und 1,5, so sind die Linsenfolgen immer noch als gut zu betrachten, während für größere Konstanten T als 1,5 die Linsenfolgen mit wachsendem T als mäßig gut bis schlecht zu bezeichnen sind.

124. Das Verfahren der streifenden Spaltabbildung von WETTHAUER. Nicht so genau wie das HARTMANNsche Verfahren, dafür aber wesentlich einfacher, weniger zeitraubend und außerdem vielseitiger ist das von WETTHAUER[1]) angegebene Verfahren der streifenden Spaltabbildung, das in der Hauptsache der Untersuchung photographischer Objektive dient.

Im Brennpunkt eines Kollimatorobjektivs S_1 (Abb. 134), dessen Fehler nötigenfalls berücksichtigt werden müssen, befindet sich eine Blende O mit zwei von hinten beleuchteten, dicht nebeneinanderliegenden, lotrechtstehenden, feinen Spalten, die für die zu untersuchende Linsenfolge S_2 sich im Unendlichen befinden, deren Bild also in dem Brennpunkt F entsteht. Dicht vor S_2 wird eine Zonenblende B angebracht. Dort, wo ungefähr die Lage des Brennpunktes F

[1]) A. WETTHAUER, ZS. f. Instrkde. Bd. 35, S. 104—105. 1915; Bd. 36, S. 90—93. 1916; Bd. 41, S. 106, 148—152. 1921; Bd. 46, S. 189—198. 1924; E. BRODHUN u. A. WETTHAUER, ebenda Bd. 40, S. 96—97. 1920.

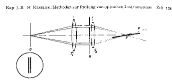


Abb. 134. Die Anordnung beim Verfahren der streifenden Abbildung nach WETTHAUER. Die von einem Doppelspalte O ausgehenden Strahlen werden durch das Objektiv S_1 parallel gemacht und treten durch eine Zonenblende B hindurch in die zu prüfende Linsenfolge S_2 ein. Die Vereinigung der Strahlen würde im Zonenbrennpunkt F stattfinden. Durch diesen hindurch ist eine um etwa 10° gegen die optische Achse geneigte photographische Platte P gelegt, auf der die abbildenden Strahlen ein Bild geben, wie dies in Abb. 135 ersichtlich ist, aus dem auf die Lage des Zonenbrennpunkts geschlossen werden kann. Nachdem die Platte senkrecht zur optischen Achse um eine geeignete Strecke in sich verschoben ist, kann für eine zweite Zone die streifende Aufnahme gemacht werden.

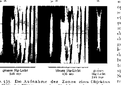


Abb. 135. Die Aufnahme der Zonen eines Objektivs mit Hilfe des WETTHAUERschen Verfahrens der streifenden Abbildung läßt die Lage der einzelnen Zonenbrennpunkte deutlich daran erkennen, daß in der Brennebene der Doppelspalt O (Abb. 134) scharf abgebildet erscheint, während diesseits und jenseits dieser als Einschnürung sich kennzeichnenden Stelle die Spaltbilder unscharf und verwaschen werden entsprechend den auseinandergehenden, den beiden Spalten zugeordneten abbildenden Strahlenbüscheln. Als Bezugspunkt ist der Brennpunkt der Zone $h = 35$ mm für das grüne Licht der Quecksilberlinie 546 mμ gewählt, der durch zwei Aufnahmen am Anfang und am Ende bestimmt wird. Aus dem Photogramm sind unmittelbar die sphärischen Abweichungen bis auf eine kleine im allgemeinen vernachlässigbare Korrektion wegen der Neigung der Platte abzulesen.

zu erwarten ist, wird eine photographische Platte P aus der wagerechten Lage unter etwa 10° gegen die optische Achse geneigt, so daß diese die Platte etwa gerade im Brennpunkt F in der Plattenmitte durchstößt. Auf dieser Platte werden dann die Spalte streifend abgebildet, wobei ein mittlerer Teil der Spalte, der dem Schnitt der Zonenbrennebene mit der photographischen Platte entspricht, in höchster Schärfe erscheint, während die Spalte diesseits und jenseits dieser schärfsten, sich als Einschnürung darbietenden Stelle unscharf und verwaschen verlaufen (vgl. Abb. 135).

Um die verschiedenen Zonen herauszublenden, verwenden wir photographisch hergestellte Kreisringblenden verschiedener Durchmesser. Das Öffnungsverhältnis ihrer

Ringbreiten dürfen wir nicht kleiner als 1 : 100 bis 1 : 125 der untersuchten Brennweite wählen, damit im Bilde keine störenden Beugungserscheinungen auftreten.

Damit die von den einzelnen Zonen herrührenden Bilder sich nicht gegenseitig stören, werden wir nach der Aufnahme eines jeden Zonenbildes die photographische Platte in wagerechter Richtung senkrecht zur optischen Achse um eine bestimmte, gleichbleibende kleine Strecke in ihrer Ebene verschieben. Die erste Aufnahme, die etwa der größten Zone entspricht, wird am Schluß nochmals wiederholt (Abb. 135). Die Stellen engster Einschnürung dieser beiden Aufnahmen bestimmen die Nullinie, gegen die die Abweichungen der Vereinigungspunkte der anderen Zonen mikrometrisch ausgemessen werden. Diese Unterschiede Δx sind allerdings noch nicht die sphärischen Abweichungen Δf selbst, die wir erst auf Grund der Gleichung

$$\Delta f = \Delta x \cdot \cos\alpha$$

erhalten, wenn wir unter α den Neigungswinkel der Platte gegen die optische Achse verstehen. Halten wir den Winkel α klein, z. B. 10° und weniger, so können wir bei den meist sehr kleinen Abweichungen von einer Verbesserung der unmittelbar gemessenen Werte Δx absehen und mit Δf gleichsetzen. Die so erhaltenen Werte werden auf die Brennpunktslage des Achsenstrahls durch eine einfache vorzeichenrichtig durchgeführte Addition umgerechnet.

Das Verfahren eignet sich aber nicht nur für Untersuchungen in der Achse, sondern kann auch Verwendung finden zur Feststellung des Korrektionszustandes außerhalb der Achse (Ziff. 128).

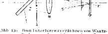


Abb. 136. Beim Interferenzverfahren von Waetzmann zur Prüfung von Linsenfolgen wird eine Jaminsche Platte P zu Hilfe genommen. Durch diese Platte werden die aus dem Unendlichen ankommenden Strahlen in je zwei zerlegt, die die Linsenfolge Ob durchsetzen, im Brennpunkt F vereinigt werden und von einem hinter dem Brennpunkt befindlichen Planspiegel Sp reflektiert werden, um die Linsenfolge Ob an einer ungefähr symmetrisch gelegenen Stelle zum zweiten Male zu durchsetzen. Die austretenden, etwas schnittstrebigen Strahlen werden an der Jaminschen Platte P nochmals reflektiert und im Punkte A, wo sich das Auge befindet, vereinigt. Dieses sieht, nach der Öffnung von Ob blickend, wenn die Linsenfolge sphärisch gut korrigiert ist, die Öffnung von geraden, gleichweit voneinander abstehenden Interferenzstreifen durchzogen, die symmetrisch zu einem etwas seitlich gelegenen Mittelstreifen angeordnet sind. Jede Abweichung von der geraden Linie deutet auf eine sphärische Abweichung der betreffenden Zone.

125. Die Interferenzverfahren von Waetzmann-Bratke und Twyman.

Wir wollen nun noch auf die neueren Interferenzverfahren[7]) eingehen, die sowohl qualitativ als quantitativ durchgeführt werden können. Im allgemeinen werden sie wohl in den meisten Fällen ihrer Anwendung dazu dienen, den Fortschritt der Korrektur bei der Herstellung zu verfolgen. Aus diesem Grunde sollen diese Verfahren nur eine kurze Besprechung erfahren.

Als ältestes Verfahren kommt das von Waetzmann[8]) angegebene in Frage, der eine Art Jaminscher Interferenzrefraktor[9])-Anordnung benutzt. Der auf die unter 45° gegen die Linsenachse geneigte planparallele Platte P (Abb. 136)

[7]) Zusammenfassende Arbeiten darüber sind: Vasco Ronchi, La prova dei sistemi ottici. Hrsg. von Nicola Zanichelli. Attualità Scientifiche Nr. 37. Bologna 1925; Gustave Yvon, Contrôle des surfaces optiques. Qualité des systèmes optiques. Éd. de la Rev. d'Opt. Paris 1926.

[8]) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. (4) Bd. 39, S. 1042–1052. 1912.

[9]) Vgl. diesen Bd. XVIII Artikel H. Kessler, Brechungszahlen (Ziff. 49).

auftreffende Parallelstrahl wird von der Vorder- und Rückfläche dieser Platte parallel in die Linsenfolge geworfen. Die so entstehenden beiden Strahlen werden nach ihrem Durchgang durch die Linsenfolge *Ob* im Brennpunkt vereinigt und von einem hinter diesem befindlichen Planspiegel *Sp* wieder ins System zurückgeworfen, das sie an einer zur ersten ungefähr symmetrisch gelegenen Durchtrittstelle durchsetzen. Sie treten schnittstrahlig aus und werden an der Planparallelplatte *P* abermals vorn und hinten reflektiert. Befindet sich der Spiegel *Sp* genau im Brennpunkt *F*, so besitzen die beiden Strahlen keinen Gangunterunterschied, wir sehen die Linsenöffnung gleichmäßig hell. Verschieben wir aber den Spiegel in Richtung der Linsenachse etwas aus dem Brennpunkt heraus, so fallen die an ihm reflektierten Strahlen unter etwas anderen Winkeln auf die JAMINsche Platte *P* auf und erhalten einen Gangunterschied. Das hat zur Folge, daß wir die Öffnung von einem Interferenzstreifensystem durchzogen sehen. Ist die Linsenfolge *Ob* sphärisch einwandfrei korrigiert, so sind die Interferenzkurven senkrechte, gleichweit voneinander abstehende gerade Streifen, die symmetrisch zu einem etwas seitlich gelegenen Mittelstreifen angeordnet sind. Je weiter der Spiegel vom Brennpunkt entfernt wird, desto kleiner werden die Streifenabstände. Deswegen ist es vorzuziehen, um auch die kleinsten Abweichungen von der Geraden erkennen zu können, den Spiegel *Sp* möglichst dicht beim Brennpunkt aufzustellen. Liegen dagegen sphärische Abweichungen oder sonstige Fehler vor, so treten gewisse, dem betreffenden Fehler eigentümliche Verzerrungen und Umbiegungen der Interferenzstreifen auf[1]. Während die Methode zunächst rein qualitativ war, hat später BRATKE[2] die theoretischen Grundlagen geschaffen, auf Grund deren Ergebnisse die sphärischen Abweichungen aus der beobachteten Interferenzerscheinung auch berechnet werden können. Dabei wurde die Methode der Autokollimation, die immerhin gewisse Unsymmetrien mit sich bringt, verlassen und mit Hilfe eines zweiten bekannten Vergleichsobjektivs und einer zweiten JAMINschen Platte im durchgehenden Lichte beobachtet. Dabei müssen die Brennpunkte der zu prüfenden Linsenfolge und des Vergleichsobjektivs einen kleinen Abstand voneinander besitzen.

Beim Linseninterferometer von TWYMAN[3] wird im Prinzip die Anordnung des MICHELSONschen Interferometers benutzt. Sie ist dabei allerdings etwas abzuändern. Die von einem einfarbigen Lichtpunkte kommenden Strahlen werden durch die 45°-Platte aufgeteilt. Die eine Hälfte trifft auf die Linsenfolge, die zweite auf einen Hohlspiegel. Der Lichtpunkt ist zugleich Brennpunkt der Linsenfolge und Mittelpunkt des Hohlspiegels. Die aus der Linsenfolge deshalb parallel austretenden Strahlen werden von einem dahinter stehenden Planspiegel wieder ins Objektiv zurückgeworfen und zusammen mit den vom Hohlspiegel zurückgeworfenen Strahlen des anderen Büschels in einem Punkte *A* vereinigt. Bringen wir an diese Stelle das Auge, so sehen wir die Öffnung des Objektivs von Interferenzfransen durchzogen, die für jeden der möglichen

[1]) Vgl. dazu auch E. BRATKE u. F. WAETZMANN, Naturwissensch. Bd. 11, S. 225–228. 1923; ZS. f. Phys. Bd. 12, S. 253–257. 1922/23.

[2]) H. BRATKE, Über die WAETZMANNsche Interferenzmethode zur Untersuchung optischer Systeme. Dissert. Breslau 1922; ZS. f. Phys. Bd. 21, S. 9–25 u. 120–127. 1924; Bd. 23, S. 239–257. 1924; E. BRATKE u. E. WAETZMANN, Ann. d. Phys. (4) Bd. 72, S. 501 bis 515. 1923; E. HABERLAND, ZS. f. Phys. Bd. 24, S. 285–323. 1924.

[3]) F. TWYMAN, Phil. Mag. (6) Bd. 35, S. 49–58. 1918; Trans. Opt. Soc. Bd. 22, S. 174 bis 194. 1920/21; Bd. 24, S. 189–208. 1923; Journ. Opt. Soc. Amer. Bd. 7, S. 635–656. 1923; ZS. f. wiss. Photogr. Bd. 22, S. 131–147. 1924; ADAM HILGER, Ltd., London. Engl. Pat. Nr. 103832 v. 4. I. 1916; D. R. P. Nr. 337446 v. 9. X. 1920; Engl. Pat. Nr. 130224 v. 15. X. 1918.

Fehler (sphärische Abweichung, Koma, Astigmatismus, Bildfeldwölbung, Verzeichnung) einen ganz bestimmten und ausgeprägten Verlauf haben. Bei einer fehlerfreien Linsenfolge erscheint die Linsenöffnung gleichmäßig hell.

Es läßt sich auch die ursprüngliche MICHELSONsche Interferenzanordnung, bei der die vom Lichtpunkt kommenden Strahlen vor der Aufteilung durch die 45°-Platte erst parallel gemacht werden, selbst anwenden (Abb. 137). Dem einen Parallelstrahlenbündel setzen wir die zu untersuchende Linsenfolge Ob in den Weg, die die Strahlen in ihrem Brennpunkte F vereinigen würde. Ehe diese Vereinigung zustande kommt, treffen die Strahlen aber auf einen Konvexspiegel KSp, dessen Mittelpunkt mit dem Brennpunkt F der Linsenfolge zusammenfällt, weshalb von ihm die auftreffenden Strahlen in sich zurückgeworfen werden und die Linsenfolge Ob an der gleichen Stelle wieder durchsetzen. Sie werden dann zusammen mit den von dem Planspiegel PSp zurückgeworfenen Strahlen des zweiten Bündels von einer sammelnden Linsenfolge O_2 in deren Brennpunkt vereinigt, in dem sich das beobachtende Auge A befindet. Dieses sieht von hier aus, wieder wie im ersten Falle, die Linsenöffnung von der den vorhandenen Linsenfehler kennzeichnenden Interferenzerscheinung überdeckt.

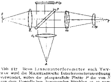


Abb. 137. Beim Linseninterferometer nach TWYMAN wird die MICHELSONsche Interferometeranordnung verwendet, wobei die planparallele Platte P die von S aus dem Unendlichen kommenden Strahlen in je zwei Strahlen aufspaltet. Das eine Bündel geht nach dem Planspiegel PSp und wird von diesem in sich zurückgeworfen, während das zweite Bündel die zu prüfende Linsenfolge Ob durchsetzt, um von dem an richtiger Stelle aufgestellten Kugelspiegel KSp ebenfalls in sich zurückgeworfen zu werden. Die Platte P reflektiert beide Bündel so, daß sie parallel in das Objektiv O_2 eintreten, in dessen Brennpunkt A sich das beobachtende Auge befindet. Dieses sieht die Öffnung von Ob von der die vorliegenden Linsenfehler kennzeichnenden Interferenzerscheinung überdeckt.

Ersetzen wir die Linsenfolge Ob durch ein zu prüfendes Prisma und den Konvexspiegel KSp wieder durch einen Planspiegel, so können wir nach diesem Verfahren auch Prismen auf ihre Fehler prüfen.

Beim TWYMANschen Verfahren können die Interferenzkurven unmittelbar als Höhenschichtlinien aufgefaßt werden. Durch Abtragen an einer Fläche mit Hilfe eines geeigneten Polierers, beginnend mit dem von der innersten Interferenzkurve eingeschlossenen Teil, können wir nach und nach bei öfterem Nachprüfen im TWYMANschen Apparat die optische Folge schließlich fehlerfrei erhalten.

Auch eine zahlenmäßige Feststellung der Abweichungen gestattet dieses Verfahren[1]).

126. Die Interferenzverfahren von RONCHI und LENOUVEL. Beim Verfahren von RONCHI[2]) bringen wir in den Strahlengang zwischen der auf einen

[1]) K. BUTKOW, ZS. f. Phys. Bd. 22, S. 384–396. 1924; Bd. 30, S. 268–276. 1924.

[2]) V. RONCHI, Ann. della R. Scuola Normale Superiore Univ. Pisa. 1923; Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (5) Bd. 32, S. 1 u. 23–28. 1924; (5) Bd. 33, S. 314–318 u. 504. 1924; (6) Bd. 1, S. 209–215. 1924; Bd. 2, S. 319. 1925; ZS. Instrkde. Bd. 46, S. 553–556. 1926; Rev. d'Opt. Bd. 5, S. 441–449. 1926; J. FLÜGGE, ZS. f. Instrkde. Bd. 46, S. 209–213. 1926.

unendlich fernen einfarbigen Punkt eingestellten Linsenfolge *Ob* und ihrem Brennpunkte *F* senkrecht zur optischen Achse (Abb. 138) ein Gitter *G* paralleler, gleichweit voneinander abstehender Striche oder ein Kreisgitter, dessen Kreise konzentrisch und gleich weit voneinander abstehend sind. Auf einem jenseits des Brennpunktes aufgestellten Schirm *Sch* erhalten wir eine Beugungserscheinung, deren Streifen gerade (kreisförmig-konzentrisch) sind und gleichen Abstand voneinander besitzen, wenn wir eine fehlerfreie Linsenfolge benützen. Besitzt das System dagegen sphärische Abweichungen, so sind die Interferenzkurven verzerrt und durchaus nicht mehr gleich weit voneinander abstehend. Aus der Form der Streifen können wir durch eine einfache geometrische Beziehung auf die Größe der sphärischen Abweichungen schließen. Das Verfahren eignet sich auch dazu, um zerstreuend wirkende Linsenfolgen zu prüfen.



Abb. 138. Beim Verfahren von RONCHI bringen wir in den Gang der durch das Objektiv *Ob* gehenden Parallelstrahlen kurz vor ihrer Vereinigung im Brennpunkt *F* ein Gitter *G*. Als Gitter kann sowohl ein Strich- als auch ein Kreisgitter gebraucht werden. Die dadurch zustandekommende Interferenzerscheinung, die dem verwendeten Gitter ähnlich ist, wird auf einem jenseits des Brennpunktes aufgestellten Schirme *Sch* aufgefangen und beurteilt. Abweichungen von der Gitterform kennzeichnen die sphärischen Abweichungen der geprüften Linsenfolge *Ob*

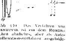


Abb. 139. Das Verfahren von LENOUVEL ist ein dem RONCHIschen ähnliches, aber als Autokollimationsverfahren ausgebildetes Prüfverfahren. Mit Hilfe des Planspiegels *Sp* wird vom Gitter *G*, das von hinten beleuchtet ist und etwas außerhalb des Brennpunktes der zu untersuchenden Linsenfolge *Ob* steht, in *G'* dessen Bild entworfen. Das in *A* dicht hinter *G* befindliche Auge sieht dann bei richtiger Justierung die Linsenöffnung durchzogen von einem zu den Gitterstrichen parallelen Beugungsstreifensystem, dessen Abweichungen von geraden Linien die Stellen schlechter sphärischer Korrektion anzeigen

Dem vorstehenden Verfahren ähnlich ist das von LENOUVEL[1]) angegebene. In der Nähe des Brennpunktes der Linsenfolge *Ob* (Abb. 139) befindet sich ein Strichgitter *G*, von dem ein kleines kreisförmiges Gebiet von hinten beleuchtet wird. Die aus dem System *Ob* austretenden Parallelstrahlen werden von einem Planspiegel *Sp* wieder in die Linsenfolge *Ob* zurückgeworfen und entwerfen dicht vor *G* ein Bild *G'* des Gitters. Der Spiegel *Sp* wird so ausgerichtet, daß der Bildkreis sich mit dem Dingkreis deckt. Bringen wir dann das Auge dicht hinter das Gitter *G*, so sehen wir die Linsenöffnung von einem Beugungsstreifensystem durchzogen. Die Streifen sind geradlinig und besitzen gleichen Abstand, wenn die Linsenfolge frei von Abweichungen ist. Dabei ist es wichtig, daß Ding- und Bildebene nicht zusammenfallen, sondern eine kleine Strecke voneinander entfernt sind, weil sonst im Falle des Zusammenfallens von Ding und Bild das Auge nur eine mehr oder minder starke Aufhellung der Linsenöffnung beobachtet, je nach der Art der Überdeckung der beiden. Sind dagegen Fehler vorhanden, so erleiden die Streifen wieder in kennzeichnender Weise Verzerrungen, aus deren Größe die Abweichungen zahlenmäßig ermittelt werden können.

[1]) L. LENOUVEL, D. R. P. Nr. 417231 v. 20. V. 1923; Franz. Pat. Nr. 553611 v. 26. V. 1923. Rev. d'opt. Bd. 3, S. 211—243 u. 315—333. 1924; Bd. 4, S. 294—298 u. 299—304. 1925.

127. Die Interferenzverfahren von MICHELSON, COTTON, MERLAND, GARDNER-BENNET und VAISALA. Während die genannten Verfahren sozusagen die Verzerrung der Wellenfläche über die ganze Linsenöffnung sichtbar machen, ist dies bei den folgenden Methoden, die im Prinzip an die HARTMANNsche Extrafokalprüfmethode sich anschließen, nicht der Fall.

MICHELSON[1]) setzt vor die Linsenfolge *Ob* (Abb. 140) zwei zu dem im Unendlichen liegenden Dingspalt *O* parallele feine Spaltblenden *B* und erhält dadurch eine FRAUNHOFERsche Beugungserscheinung[2]), die nicht nur im Brennpunkt, sondern auch inner- und außerhalb des Brennpunktes aufgefangen werden kann. Der eine Spalt liegt fest in der optischen Achse, während der zweite Spalt nacheinander vor die verschiedenen Zonen des Systems gebracht werden kann. Zur Beobachtung wird ein Mikroskop benutzt. Würden wir außerhalb des Zonenbrennpunktes beobachten, so könnten wir deutlich zwei Beugungsstreifensysteme entsprechend den beiden Spalten wahrnehmen. Wenn wir uns dem Brennpunkt nähern, überlagern sich die beiden Systeme und geben ein neues Interferenzstreifensystem, das einen ausgeprägten Mittelstreifen aufweist, der, wenn die Zone keine sphärische Abweichung besitzt, mit dem Spaltbild im Brennpunkt zusammenfällt. Ist die Linsenfolge nicht sphärisch einwandfrei korrigiert, so ist der seitliche Abstand dieses mittleren Streifens vom Spaltbild ein Maß für die sphärische Abweichung der betreffenden Zone. Indem wir den beweglichen Spalt langsam von der Achse aus nach dem Rande zu wandern lassen und währenddem die vorbeiwandernden Interferenzfransen vorzeichenrichtig zählen, können wir die sphärische Abweichung jeder Zone in Wellenlängen ermitteln.

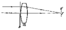


Abb 140. Beim Linsenprüfverfahren von MICHELSON wird den in das Objektiv *Ob* eintretenden Parallelstrahlen eine Blende *B* in den Weg gebracht, die zwei zu dem im Unendlichen liegenden Dingspalt parallele, feine Spalte besitzt. Der eine Spalt liegt fest in der optischen Achse, der andere kann nacheinander vor die verschiedenen Zonen von *Ob* gebracht werden. Dadurch erhalten wir in der Brennebene ein FRAUNHOFERsches Beugungsstreifensystem, dessen ausgeprägter Mittelstreifen am Orte des Spaltbildes im Brennpunkt liegen muß, wenn die Zone keine sphärische Abweichung besitzt. Liegt dieser mittlere Streifen neben dem Spaltbild, so ist sein Abstand vom Spaltbild ein Maß für die vorhandene sphärische Abweichung der betreffenden Zone

Dieses MICHELSONsche Verfahren leidet aber darunter, daß, wenn der bewegliche Spalt sich dem Objektivrande nähert, die Streifen sehr eng und schwierig zu beobachten sind, während gleichzeitig Apparaterschütterungen und Luftschlieren die Messung ungünstig beeinflussen. Um diese Fehlerquellen auszuschalten, tasten wir mit COTTON[3]) die ganze Öffnung mit einem Doppelspalt von festgehaltenem, sehr kleinem Spaltabstand, etwa $^1/_{250}$ der Brennweite, nacheinander ab. Indem wir diesen Doppelspalt auf einem Durchmesser der Öffnung immer um seine eigene Breite verschieben, so daß jedesmal der nach der Linsenachse zu liegende Spalt in die vorhergehende Lage des anderen Spaltes kommt, können wir mit Hilfe eines JAMINschen Kompensators[4]) aus Glimmer die Gangunterschiede der interferierenden Strahlen in jeder Blendenstellung messen. Aus den Gangunterschieden können wir unmittelbar auf die Gestalt der Wellenfläche schließen.

[1]) A. A. MICHELSON, Astrophys. Journ. Bd. 47, S. 283—288. 1918.
[2]) Vgl. dazu diesen Band XVIII Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen (Ziff. 56).
[3]) A. COTTON, Physica Bd. 1, S. 274 1921; A. MERLAND, Rev. d'opt. Bd. 3, S. 401 bis 413. 1924.
[4]) Vgl. dazu diesen Bd XVIII Artikel H. KESSLER, Brechungszahlen (Ziff. 51).

Merland[1]) entwickelt die photographische Durchfuhrung der Methode und gibt außerdem eine Abänderung der Hartmannschen Extrafokalmethode (Ziff. 123) an. Nach ihm verwenden wir vorteilhaft an Stelle der einzelnen Locher der Hartmannschen Blende feine Doppelspalte, die wir in gleichen Abstanden längs eines Durchmessers der Öffnung senkrecht zu diesem anordnen. Auf den intra- bzw. extrafokal gemachten Aufnahmen erhalten wir dann die den Doppelspalten entsprechenden Beugungsstreifensysteme Die Auswertung dieser Aufnahmen zur Ermittelung der Lage des Zonenbrennpunktes erfolgt in ähnlicher Weise wie beim Hartmannschen Verfahren, wobei die mittleren Streifen der einzelnen Fransensysteme die Stelle der Beugungsscheibchen vertreten.

Eine Weiterbildung des Michelson-Cotton-Merlandschen Verfahrens ist das Verfahren von Gardner und Bennett[2]), das im Prinzip nur eine abgeänderte Hartmannsche Extrafokalprufmethode vorstellt Während aber bei letzterer die um die Zerstreuungsscheibchen auftretenden Beugungserscheinungen als storend empfunden werden, werden beim Gardner-Bennettschen Verfahren diese Beugungserscheinungen gerade zur Messung benutzt. Dabei wird die Hartmannsche Blende an die Stelle der Plattenebene E_1 der Abb. 131 gebracht und die Anordnung der Locher in der Blende so gewählt, daß sie alle symmetrisch zur optischen Achse auf einer durch diese gehenden geraden Linie in gleichen Abständen voneinander liegen. Auf der in der Ebene E_2 befindlichen photographischen Platte zeichnen sich dann die Durchstoßungspunkte der von den einzelnen Zonen kommenden Buschel als dunkle Zerstreuungsscheibchen ab, die von Beugungsringen umgeben sind (Abb. 141). Dabei wird die Platte E_2 zweckmäßig in eine solche Entfernung vom Brennpunkt gebracht, daß die beiden ersten Beugungsringe, die von einem Paar benachbarter Öffnungen herrühren, sich überlagern. Ausgemessen werden die Abstände der mittleren Interferenzstreifen. Besitzen sie über die ganze Platte immer gleiche Abstände, so ist das verwendete Objektiv frei von sphärischen Abweichungen. Sind die Abstände ungleich, so liegen sphärische Abweichungen vor, deren Größe mit Hilfe eines einfachen graphischen Verfahrens unmittelbar



Abb 141. Ein Photogramm des Gardner-Bennettschen Verfahrens, das eine unmittelbare Abanderung des Hartmannschen Extrafokalprufverfahrens ist, indem die Hartmannsche Zonenblende nicht vor dem Objektiv (Abb 131) steht, sondern an Stelle der ersten photographischen Platte in der Ebene E_1 aufgestellt wird Die auf der in E_2 befindlichen Platte entstehenden, den einzelnen Löchern der Blende entsprechenden Zerstreuungsscheibchen sind von Beugungsringen umgeben, die einander uberlagern und dadurch Veranlassung zu weiteren, in der Abbildung sichtbaren Interferenzstreifensystemen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Lochbildern geben, deren mittlere, ausgezeichnete Streifen zur Messung dienen.

[1]) A. Merland, Rev d'opt. Bd. 3, S. 406—413. 1924.

[2]) J. C. Gardner u. A. H. Bennett, Journ Opt. Soc. Amer. Bd. 11, S. 441—452. 1925. Übersetzung von H. Kessler in ZS. f. Instrkde. Bd. 47, S. 197—204. 1927.

als in Wellenlangen gemessene Verzogerungen der verschiedenen Teile der von dem System ausgehenden Wellenfläche ermittelt werden kann.

Das Verfahren kann auch so ausgefuhrt werden, daß die GARDNER-BENNETTsche Blende hinter den Brennpunkt, zwischen ihn und die photographische Platte gebracht wird, wodurch das Gerat sehr einfach und handlich wird, und wodurch die Moglichkeit gegeben ist, das Verfahren als Autokollimationsmethode auszubilden. Dabei werden dann allerdings an Stelle der kreisförmigen Blendlocher zweckmaßig feine Spalte benutzt.

Ahnlich wie COTTON geht VÄISÄLÄ[1]) vor, der vor die Linsenfolge eine Blende mit zwei Lochern bringt und aus der Interferenzerscheinung die Sehne der wirklichen Wellenflache und ihre Neigung zu derjenigen der idealen Wellenfläche bestimmt. Durch Hinwegfuhren der Doppelblende über die ganze Linsenoffnung konnen wir die Gestalt der vollstandigen wirklichen Wellenflache auffinden. Neben dieser einfachen „Methode der zwei Locher" hat VÄISÄLÄ noch eine „Methode der drei Locher", die die Eckpunkte eines Dreiecks bilden, eine „Methode der vier Locher", wovon drei ein gleichseitiges Dreieck bilden und das vierte in dessen Mittelpunkt liegt, und eine „Methode der drei Spalten", die in einem Durchmesser liegen, angegeben.

Der Astigmatismus, die Coma und die Bildkrummung.

128. Das Verfahren der streifenden Spaltabbildung nach WETTHAUER[2]). Um mit diesem Verfahren die Fehler außerhalb der Achse zu bestimmen, richten wir die Prufanordnung so ein, daß wir (Abb 142) die zu prufende Linsenfolge O_2 fest verbunden mit der geneigten photographischen Platte *Ph* etwa um den vorderen Knotenpunkt der Linsenfolge O_2 drehen konnen, wodurch wir den einfallenden Parallelstrahlen jeden gewunschten Einfallswinkel erteilen konnen. Dabei ist die Linsenfolge naturgemäß mit voller Öffnung zu verwenden. Die photographische Platte mussen wir entsprechend der Ausdehnung des zu prüfenden Bildfeldes groß genug wahlen.

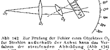


Abb 142 Zur Prufung der Fehler eines Objektivs O_2 fur Strahlen außerhalb der Achse kann das Verfahren der streifenden Abbildung (Abb 134) nach WETTHAUER so abgeandert werden, daß das Prufsystem O_2 mit der photographischen Platte *Ph* fest verbunden um eine mit dem vorderen Knotenpunkt des Objektivs O_2 zusammenfallende Achse gedreht wird. Dadurch erhalten wir auf der Platte *Ph* fur jeden Einfallswinkel die streifende Abbildung des in S_1 befindlichen Testspaltes (Abb. 143).

Das in S_1 befindliche Testobjekt muß gegenuber dem in Abb. 134 gezeichneten etwas abgeändert werden, weil wir damit in den Stand versetzt sein wollen, die tangentiale und die sagittale Bildflache, die wir außerhalb der optischen Achse unterscheiden mussen, jede für sich festzustellen. Wir legen deshalb beiderseits dicht neben den Doppelspalt zwei Systeme einer großen Anzahl von

[1]) Y. VÄISÄLÄ, Neue Methoden zur Untersuchung der Objektive nebst Bemerkungen uber die Beurteilung ihrer Gute. Dissert. Helsingfors 1922; Ann. Univ. Fennicae Aboensis (A) Bd 1, Nr. 2. Turku 1922; Bd 2, Nr 1. Turku 1924; Referate in ZS. f. Instrkde. Bd. 43, S. 198—199. 1923; Bd. 44, S. 463—465. 1924; Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. Bd. 46, S. 306. 1925

[2]) A. WETTHAUER, vgl. Ziff. 124

Spalten, die senkrecht zum Doppelspalt verlaufen (Abb. 143). Der Doppelspalt wird senkrecht zur Ebene, in der die Verschwenkung der Linsenfolge stattfindet, eingestellt. Auf der Platte (Abb 142 und 144) erhalten wir dann die streifende Abbildung. Die Verbindungslinie der Punkte engster Einschnürung bei den Bildern des Doppelspaltes gibt die tangentiale Bildkrümmung wieder, während die Verbindungslinie der schärfsten Spaltbilder der wagerecht liegenden Spaltsysteme die sagittale Bildkrümmung erkennen läßt. Durch Verwendung eines geeigneten Rasters von parallelen, geraden Linien, mit dem wir die Aufnahme so überdecken, daß einander entsprechende, gleichen aber entgegengesetzten Einfallswinkeln zugehörige Bilder symmetrisch liegen, können wir die Abweichungen der Bildfläche von einer Ebene auch ausmessen und damit zahlenmäßig festlegen.



Abb 143. Der zur Feststellung der Fehler seitlich der Achse beim WETTHAUERschen Verfahren der streifenden Abbildung zu benutzende Testspalt besitzt in der Mitte einen feinen Doppelspalt, auf dessen beiden Seiten zwei Systeme von sehr feinen Querspalten angeordnet sind. Der Doppelspalt dient der Ermittelung der tangentialen Bildkrümmung, die Querspalte der Ermittelung der sagittalen Bildkrümmung.

Ein auf diesem Verfahren beruhender Apparat läßt sich auch so ausbauen, daß wir durch eine einfache visuelle Beobachtung die Bildkrümmung beobachten können. Dazu verwenden wir mehrere Kollimatoren O_1, die unter den verschiedenen Einfallswinkeln (z. B. 0°, 5°, 10° usw.) fest aufgestellt sind. Die Platte ersetzen wir durch eine glatte Gipsfläche, die wir längs der optischen Achse mikrometrisch verschieben können, und auf der genau senkrecht zur optischen Achse ein gerader schwarzer Strich, der die ebene Bildfläche darstellt, gezogen ist. Dadurch sind wir in der Lage, gleichzeitig die streifenden Bilder aller Einfallsrichtungen wahrzunehmen und die Abweichungen unmittelbar ausmessen zu können.



Abb 144. a) Das Bild gibt das Aussehen einer nach dem WETTHAUERschen Verfahren der streifenden Abbildung für Abbildung seitlich der Achse gemachten photographischen Aufnahme wieder. Es sind deutlich die Einschnürungen in der streifenden Abbildung des Doppelspaltes zu erkennen, deren Verbindungslinie die tangentiale Bildkrümmung wiedergibt. Bei den seitlich des Doppelspaltes liegenden streifenden Abbildungen der Querspaltsysteme können wir ebenfalls deutlich die Stellen schärfster Abbildung erkennen, deren Verbindungslinie die sagittale Bildkrümmung wiedergibt.

b) Durch Ausmessen der Abstände der tangentialen und sagittalen Bildpunkte von einer zur optischen Achse senkrechten geraden Linie und durch Multiplikation dieser Abstände mit dem Kosinus des Neigungswinkels der photographischen Platte können wir die wirklichen tangentialen und sagittalen Abweichungen ermitteln und in ein graphisches Bild eintragen. Die gestrichelte Kurve stellt die tangentiale, die ausgezogene Kurve die sagittale Bildkrümmung dar.

129. Das Astigmometer von STRAUBEL [1]). Um den Astigmatismus von Flächen zu messen, wird ein Autokollimationsverfahren gewählt. Im Brennpunkt eines Fernrohrobjektivs befindet sich ein beleuch-

[1]) R. STRAUBEL, Wied. Ann. Bd. 64, S. 794–808. 1898.

tetes Kreuzgitter als Testobjekt. Die austretenden Strahlen werden von der Fläche wieder in das Beobachtungssystem zurückgeworfen und erzeugen dort ein durch ein Okular zu beobachtendes Bildchen. Besitzt die Fläche zwei verschiedene Hauptkrümmungen, so liegt Astigmatismus vor, und die lot- und wagerechten Striche des Gitters werden nicht gleichzeitig scharf erscheinen, sondern eine Einstelldifferenz des Okulars aufweisen. Lassen wir nun aber die Strahlen einen Stokesschen Zylinderkompensator (Ziff. 115, Abb. 117) durchsetzen, den wir dicht vor das Fernrohrobjektiv setzen, so können wir durch Verdrehen der beiden Zylinderlinsen dieses Kompensators gegeneinander jeden beliebigen Astigmatismus herstellen, also auch den, der den Astigmatismus der Fläche gerade aufhebt, was wir daran erkennen, daß die lot- und wagerechten Striche des Kreuzgitters beim Verschieben des Okulars gleichzeitig scharf werden. Wenn die Wirkung der einzelnen Zylinderlinsen des Kompensators bekannt ist, läßt sich der Astigmatismus für jede Stellung des Kompensators aus dem Verdrehungswinkel berechnen[1]).

Das Verfahren läßt sich sinngemäß auch zur Prüfung von Linsenfolgen umgestalten.

Die Farbenabweichungen.

130. Die Verwendung bisher genannter Verfahren. Für die Feststellung der Farbenfehler einer Linsenfolge liegt es nahe, einfach die bisher genannten Verfahren zur Ermittelung der sphärischen Abweichungen für die einzelnen Sorten einfarbigen Lichtes gesondert durchzuführen. Es werden so die Verfahren von Abbe[2]) (Ziff. 97, 103 und 112), Hartmann[3]) (Ziff. 123), Wetthauer (Ziff. 124 und 128) und die Interferenzverfahren (Ziff. 125 bis 127) durchaus keine Schwierigkeiten bereiten. Unter Umständen können wir auch, wie das Hasselberg (Ziff. 86) getan hat, das zweite Gausssche (Besselsche) Verfahren benutzen, um die Brennweiten für verschiedene Wellenlängen zu bestimmen.

Das Hartmannsche Verfahren (Ziff. 123) können wir einfacher gestalten, wenn wir bei Verwendung von weißem oder mehrfarbigem Lichte die extrafokalen, birnenförmigen Zerstreuungsscheibchen einer Zone symmetrisch auf den Spalt

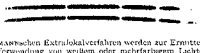


Abb. 145. Beim Hartmannschen Extrafokalverfahren werden zur Ermittelung der Farbenabweichungen bei Verwendung von weißem oder mehrfarbigem Lichte die extrafokalen birnenförmigen Zerstreuungsscheibchen einer Zone symmetrisch auf dem Spalt eines Spektrographen aufgefangen, welch letzterer jedes Zerstreuungsscheibchen in ein Spektrum auseinanderzieht. Indem die Abstände der beiden Spektren für jede Wellenlänge ermittelt werden, sind damit die der betreffenden Zone entsprechenden a-Werte (Abb. 131) für jede einzelne Wellenlänge gefunden. In der Abbildung sind die Spektren für zwei verschiedene Zonen wiedergegeben.

eines Spektrographen fallen lassen, wodurch sie zu zwei untereinander liegenden, entgegengesetzt gekrümmten Spektren (Abb. 145) auseinandergezogen werden.

[1]) Vgl. dazu auch das ausführliche Quellenverzeichnis von Arth. König in H. Helmholtz' Handb. der physiologischen Optik 2. Aufl., Bd. 2, S. 1111–1118. Hamburg u. Leipzig: L. Voß 1896.

[2]) H. Fassbender, ZS. f. Instrkde. Bd. 33, S. 210–218. 1913.

[3]) H. Fassbender u. A. Wetthauer, ZS. f. Instrkde. Bd. 33, S. 265–277. 1913.

Dies müssen wir intra- und extrafokal durchführen. Die ε-Werte für jede einzelne Wellenlänge finden wir, indem wir für jede Aufnahme den Abstand der beiden Spektren an den Orten der betreffenden Wellenlänge ausmessen. Als zweckmäßig hat sich erwiesen, immer gleich mindestens zwei Zonen aufzunehmen. Dabei wird die Zonenausblendung mit Vorteil so vorgenommen, daß die vorgesetzte HARTMANNsche Blende aus zwei entsprechend der auszublendenden Zone symmetrisch gelegenen Spalten besteht, die senkrecht zum Spalt des Spektrographen ausgerichtet werden.

Solange wir es mit großen Linsenfolgen zu tun haben, bei denen wir die Öffnung der Zonenblenden groß genug wählen können, können wir, wie vorstehend beschrieben, arbeiten. Für kleinere Linsenfolgen aber werden die Zerstreuungsscheibchen zu lichtschwach, um als Lichtquellen für den Spektrographen verwendet werden zu können. Deshalb setzen wir in solchen Fällen vor die Zonenblende des Prüfsystems ein Prisma[1]) mit geringer Dispersion, ein sog. Objektivprisma. Dabei legen wir die aus zwei Parallelspalten bestehende Zonenblende parallel zum jetzt an Stelle des Lichtpunktes zu verwendenden Lichtspalt und erhalten, wenn wir eine Lichtquelle mit Linienspektrum benutzen, bei den extra- und intrafokal gemachten Aufnahmen Spektren, bei denen die Linien entsprechend der symmetrischen Zonenblende doppelt auftreten. Damit keine Überlagerung der Linien verschiedener Wellenlängen stattfindet, werden wir die Aufnahmen so nahe als möglich beim Brennpunkt machen. Die Abstände der spektralen Doppellinien werden mikrometrisch ausgemessen, um die ε-Werte zu erhalten.



Abb. 146. Zur Ermittelung der chromatischen Abweichungen eines auf einen Stern eingestellten Fernrohrobjektivs bringen wir nach VOGEL zwischen Okular und Auge ein geradsichtiges Prisma, das das Bild des Sterns in ein Spektrum auseinanderzieht. Dieses Spektrum wird an den Stellen der Wellenlängen Einschnürungen besitzen, auf deren Vereinigungspunkt, Brennpunkt, das Okular gerade eingestellt ist. In der Abbildung sind die Spektren für zwei verschiedene Okulareinstellungen wiedergegeben.

Bei sphärisch korrigierten Linsenfolgen genügt im allgemeinen die Ermittelung der Farbenkurve für eine Zone.

131. Das VOGEL-WOLFsche Verfahren. Nach dem Vorschlage von VOGEL[2]) bringen wir zwischen das Auge und das Okular eines auf einen Stern eingestellten Fernrohres einen geradsichtigen Prismensatz. Dadurch wird das Bild des Sternes in ein Spektrum (Abb. 146) auseinandergezogen, das an den Stellen derjenigen Farben, auf deren Vereinigungspunkt das Okular gerade eingestellt ist, Einschnürungen aufweist. Verschieben wir das Okular in der Achse, d. h. stellen wir es auf andere Bildorte ein, so wandert die Lage der Einschnürungen über das Spektrum weg. Indem wir nacheinander dem Okular verschiedene an einer Millimeterteilung ablesbare Einstellung geben und gleichzeitig die Wellenlängen aufschreiben, für die das Spektrum eingeschnürt ist, können wir die chromatischen Längsabweichungen des Fernrohrobjektivs ermitteln.

Diese Methode leidet daran, daß einmal die Akkomodationsentfernung des Auges sich dauernd ändert und dadurch Fehler in der Einstellung des Okulars hervorruft. Anderseits tritt ein wesentlicher, durchaus nicht zu vernachlässigender Fehler dadurch auf, daß das Beobachtungssystem: Okular + Prisma + Auge,

[1]) Vgl. dazu auch G. EBERHARD, ZS. f. Instrkde. Bd. 23, S. 82–88. 1903.

[2]) H. C. VOGEL, Berl. Monatsber. 1880, S. 433–441; Vierteljahrsschr. d. astron. Ges. Bd. 22, S. 142–143. 1887; Astron. Nachr. Bd. 119, S. 293–298. 1888; Referate in ZS. f. Instrkde. Bd. 1, S. 70–71. 1881; Bd. 8, S. 246–248. 1888.

nicht frei von Farbenabweichungen ist, sondern im Gegenteil ganz erhebliche Abweichungen aufweist, die für jedes System: Okular + Prisma + Auge, für sich zu bestimmen und dann bei dem Ergebnis der Prüfung als Korrektionswert vorzeichenrichtig anzubringen sind. So findet Wolf[1]) für ein von ihm gebrauchtes Okular und sein Auge, sowie für das Listingsche Normalauge die folgenden chromatischen Abweichungen:

Linie	B	C	D	E	F	G	H	
Okular + + Auge	+0 96	+0 86	+0 66	+0 30	±0 00	−0 49	−0 94	mm
Listing'sches Auge	+0 35	+0 32	+0 22	+0 12	±0 00	−0 16	−0 32	mm

Um diese Fehlerursachen zu vermeiden, hat Wolf[2]) das Vogelsche Verfahren zu einem Autokollimationsverfahren ausgebaut (Abb. 147). Vor das Fernrohrobjektiv S wird ein Planspiegel Sp senkrecht zur optischen Achse gestellt, so daß die in die Linsenfolge S zurückkehrenden Strahlen unmittelbar unter dem Dingpunkt O, der mit dem Okular Ok in starrer Verbindung steht, dessen Bildchen O' entwerfen. Beide können gleichzeitig durch das Okular beobachtet werden, wobei der Dingpunkt O als Fixpunkt für das Auge dient, so daß jetzt die Meßergebnisse von dem chromatischen Korrektionszustand des Beobachtungssystems, Okular + Auge, unbeeinflußt sind. Als leuchtenden Dingpunkt O verwenden wir ein kleines Quecksilberkügelchen, das auf einer Kapillare aus dieser herausgepreßt sitzt, und das das durch einen seitlichen Beleuchtungsspiegel auf es geworfene Sonnenlicht allseitig reflektiert, wodurch nicht allein Licht nach dem Objektiv zu, sondern auch nach dem Okular zu geworfen wird.

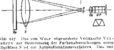


Abb. 147. Das von Wolf abgeänderte Vogelsche Verfahren zur Bestimmung der Farbenabweichungen eines Objektivs S ist ein Autokollimationsverfahren. Das mit Sonnenlicht bestrahlte Dingkügelchen O wird einerseits durch das System [Okular Ok + geradsichtiges Prisma GP] unmittelbar betrachtet. Anderseits wird sein Autokollimationsbildchen O' beobachtet. Beide werden für jede Farbe für sich in Koinzidenz gebracht. Die Unterschiede in den Okulareinstellungen sind unmittelbar die chromatischen Abweichungen.

Schauen wir durch ein geradsichtiges Prisma GP nach Ding O und Bild O', so sehen wir beide in Spektren auseinandergezogen, in denen die Fraunhoferschen Linien als dunkle, runde Scheibchen (entsprechend der Kugelform des Quecksilbertröpfchens) auftreten. Das Spektrum des Dingpunktes wird ein gleichmäßig breites Band sein, während das Spektrum des Bildes die Einschnürungen der Abb. 146 zeigen wird. Die gesuchten Farbenabweichungen erhalten wir, indem wir nacheinander für die einzelnen Linien die Scheibchen jedes Spektrums gleichzeitig scharf stellen und die Okularverschiebung ausmessen.

[1]) M. Wolf, Wied. Ann. Bd. 33, S. 548—554. 1888; Astron. Nachr. Bd. 120, S. 73—74. 1889.

[2]) M. Wolf, Wied. Ann. Bd. 33, S. 212—218. 1888; Astron. Nachr. Bd. 119, S. 293—298. Nr. 2861. 1888; Ref. in ZS. f. Instrkde. Bd. 8, S. 248—249. 1888.

δ) Die Prüfung des Korrektionszustandes von Spiegeln.

1. Die Teleskopspiegel.

132. Die Prüfung von Fernrohrspiegeln. Die Prüfung der sphärischen Abweichungen von Fernrohrspiegeln findet in gleicher, sinngemäß umgeänderter Art und Weise statt, wie dies für Linsenfolgen der Fall ist (Ziff. 121 bis 127). Zur schnellen Übersicht, vor allem bei der Herstellung parabolischer Spiegel, dient die FOUCAULTsche Schneidenmethode. Für genauere Ausmessungen kommt die HARTMANNsche Extrafokalprüfmethode in Frage.

Hinsichtlich der FOUCAULTschen Schneidenmethode ist zusätzlich zu bemerken, daß wir am günstigsten in Autokollimationsanordnung (Abb. 148) beobachten. Der dabei zu Hilfe genommene Planspiegel besitzt am besten eine



Abb. 148. Die Prüfung des Korrektionszustandes eines Hohlspiegels S erfolgt vorteilhaft unter Zuhilfenahme zweier Planspiegel Sp_1 und Sp_2 in Autokollimationsanordnung.



Abb 149. Bei Verwendung eines mit einem zentralen Loche versehenen Planspiegels S kann die im Autokollimationsverfahren der Abb. 148 notwendige Knickung des Strahlengangs durch den zweiten Spiegel Sp_2 vermieden werden.

Durchbohrung (Abb. 149), wodurch wir das Knicken des Strahlenganges durch einen zweiten Planspiegel, der das Ausrichten nur erschweren würde, uns ersparen können.

Wollen wir die FOUCAULTsche Schneidenmethode messend durchführen, so werden wir nach RITCHEY[1]) wagerecht quer über den Spiegel eine Art HARTMANNscher Zonenblende legen, die sich der Form des Spiegels ungefähr anschmiegen soll. Die Zonen sind dabei aus dem verwendeten Metallblech in Form von symmetrisch gelegenen Viertelkreisringen ausgespart. Schneiden wir dann von rechts ein, so werden gerade die beiden zusammengehörigen Viertelkreisringe gleichzeitig dunkel werden, für die die Schneide sich im Zonenbrennpunkt befindet. Denn schneiden wir vor diesem ein, so wird zuerst die rechte Seite der Zone dunkel, während die linke hell bleibt. Schneiden wir hinter dem Brennpunkt ein, so ist es umgekehrt. Der Brennpunkt ergibt sich demnach als eine Art Umkehrpunkt zu erkennen, in dem durch geringe Längsverschiebung der Schneide ein Umspringen, ein Vertauschen von hell und dunkel stattfindet. Verschieben wir somit die Schneide in Richtung der optischen Achse, so werden wir für alle Zonen die Lage ihrer Brennpunkte als solche Umkehrpunkte ermitteln und damit die sphärischen Abweichungen zahlenmäßig ermitteln können.

Dieses Verfahren können wir auch photographisch durchführen, indem wir hinter die Schneide, in festem Abstand von dieser, an Stelle des Auges eine photographische Kammer bringen und bei mehreren Schneidenstellungen längs der optischen Achse Aufnahmen machen. Es wechselt dann der Schwärzungsunterschied der Bilder sein Vorzeichen, wenn wir durch den Zonenbrennpunkt

[1]) G. W. RITCHEY, Astrophys. Journ. Bd. 14, S. 217–233. 1901; Bd. 19, S. 53–69. 1904, Bd. 29, S. 198–210. 1909; Smiths Contr. to Knowl. Bd. 34, S. 51. 1904.

hindurchgegangen sind. Die Schwärzungen werden photometrisch gemessen und die Brennpunktslage durch Interpolation bestimmt. Die Genauigkeit dieses COJANschen[1]) Verfahrens ist besser als das der visuellen Messung.

2. Die Scheinwerferspiegel.

133. Das Linienbildverfahren von TSCHIKOLEW. Nach TSCHIKOLEW[2]) stellen wir in eine Entfernung von der zwei- bis dreifachen Brennweite vom zu untersuchenden Spiegel einen ebenen Schirm auf, der senkrecht und symmetrisch zur optischen Achse steht und auf dessen Fläche ein engmaschiges Netz voneinander rechtwinklig sich kreuzenden, schwarzen, geraden Linien sich befindet. Der Schirm muß zweckmäßigerweise 25% größer als der Spiegel sein. In der Mitte des Schirmes, dort wo der Durchstoßungspunkt der optischen Achse liegt, bringen wir eine Öffnung an, durch die wir nach dem Spiegel blicken. Tun wir das, so sehen wir den Spiegel, wenn nur das Liniennetz ausgedehnt genug ist, mit einem Liniennetz, dem Bilde des Schirmes, überdeckt. Sind die Linien dieses Bildes gerade oder nahezu gerade Linien (Abb. 150), so ist der Spiegel einwandfrei. Sind die Linien des Netzes verzerrt oder weisen sie an bestimmten Stellen nichtsymmetrischen Verlauf auf (Abb. 151), so liegen an den Stellen, wo wir diese Abweichungen feststellen, Fehler in der Fläche vor. Um die Erscheinung zu Vergleichszwecken festzuhalten, wird an die Stelle des beobachtenden Auges die Weitwinkelaufnahmelinse (z. B. ein Zeiß-Tessar) einer photographischen Kammer gebracht und diese so eingestellt, daß das Netzbild auf ihrer Mattscheibe scharf erscheint. Darauf erfolgt die Aufnahme. In welcher Weise diese so festzustellenden Fehler praktisch schädlich wirken oder nicht, läßt sich aus dieser Aufnahme nicht entnehmen. Sie kann nur eine Vergleichsprobe geben gegenüber anderen Spiegeln. Um einen solchen einwandfreien Vergleich für Spiegel von verschiedener Brennweite durchführen zu können, müssen wir bei der Anfertigung dieser TSCHIKOLEWschen Netzbilder darauf Gewicht legen, daß die zu vergleichenden Spiegel bei gleichem Öffnungsverhältnis verwendet werden, und daß für jeden Spiegel der Netzschirm in einem solchen Abstande vom Spiegel steht, daß die Spiegelvergrößerung stets die gleiche wird. Das letztere ist der Fall, wenn sich die Schirm-Spiegelabstände verhalten, wie die zugehörigen Spiegelbrennweiten.

Das TSCHIKOLEWsche Linienbildverfahren kann sowohl auf hohle, als auch auf erhabene und ebene Spiegel Anwendung finden. Es liefert aber nur ein qualitatives Vergleichsurteil, weshalb es einem dringenden Bedürfnis entspricht, auch quantitative Verfahren zu besitzen, die im folgenden (Ziff. 134 bis 136) beschrieben werden.

134. Das Prüfverfahren von SCHUCKERT mit Zonenblende. Dieses von der Firma SCHUCKERT[3]) ausgearbeitete Verfahren geht von der Tatsache aus, daß bei einem einwandfreien Parabolspiegel alle einfallenden Parallelstrahlen in einen Punkt, den Brennpunkt, reflektiert werden. Ganz einerlei, welche Zone des Spiegels benutzt wird, das Bild eines unendlich weit entfernten Lichtpunktes muß immer an derselben Stelle der optischen Achse liegen. Abweichungen davon für einzelne Zonen deuten darauf hin, daß diese Zonen fehlerhaft sind (vgl. dazu Ziff. 123). Zur Ausführung der Beobachtungen benutzen wir einen in genügend

[1]) J. COJAN, C. R. Bd. 179, S. 893—985. 1924; Bd. 180, S. 1016—1018. 1925.

[2]) W. TSCHIKOLEW, Über die Prüfung der elektrischen Scheinwerfer auf photographischem Wege. Petersburg 1892; W. TSCHIKOLEW, R. KLASSON u. W. TJURCH, Die Beleuchtungswirkung der elektrischen Scheinwerfer. Petersburg 1895; A. SONNEFELD, Die Hohlspiegel, S. 115—119. Berlin: Union Deutsche Verlagsgesellschaft 1926.

[3]) O. KRELL, Elektrot. ZS. Bd. 36, S. 481—484 u. 496—498. 1915; A. SONNEFELD, Die Hohlspiegel, S. 119—122. Berlin: Union Deutsche Verlagsgesellschaft 1926.

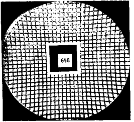


Abb. 150. Aufnahme eines Netzes einander rechtwinklig sich kreuzender, gerader Linien nach dem TSCHIKOLEWschen Linienbildverfahren für einen MANGIN-Hohlspiegel. Der glatte und verhältnismäßig geradlinige Verlauf der Netzlinien läßt auf einen gut bearbeiteten Spiegel schließen.

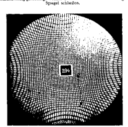
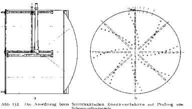


Abb. 151. Linienbildaufnahme eines Glasparabolspiegels von SCHUCKERT. Die Verzerrungen lassen die Bearbeitungsunregelmäßigkeiten des Spiegels erkennen. Inwieweit diese praktisch schädlich sind, läßt sich aus der Aufnahme nicht ableiten.

großer Entfernung vom Spiegel aufgestellten, künstlichen Stern. Der Spiegel wird zu ihm so ausgerichtet, daß das Sternbild tadellos rund erscheint und auch keine Andeutung von Koma mehr aufweist, die gerade beim Parabolspiegel sich schon bei nur wenig seitlich von der optischen Achse liegendem Dingpunkt ganz erheblich bemerkbar macht. Beobachtet wird das auf einer Mattscheibe aufgefangene Bild des Sternes mit Hilfe eines Mikroskops, wobei einerseits der Strahlengang so gebrochen ist (Abb. 152a), daß der Beobachter von der Seite her



a b

Abb 152 Die Anordnung beim SCHUCKERTschen Zonenverfahren zur Prüfung von Scheinwerferspiegeln

a) Das aus dem Unendlichen kommende Licht durchsetzt die Zonenblende und wird im Zonenbrennpunkt des Spiegels vereinigt, dessen Lage mit Hilfe eines geeignet gebauten Mikroskops an einem zur optischen Achse parallelen Maßstabe festgestellt wird Durch aufeinanderfolgendes Ausblenden der einzelnen Zonen werden die einzelnen Zonenbrennpunktsabweichungen bestimmt

b) Die Zonenblende besteht aus einer feststehenden Scheibe mit radialen Schlitzen, vor der eine HARTMANNsche Zonenblende mit spiralig angeordneten Löchern sich vorbeidrehen laßt, so daß nach Wunsch die verschiedenen Zonen nacheinander eingeschaltet werden können.

einblickt, während anderseits die Ausmaße des Mikroskops entsprechend gewählt sind, daß der Einblick außerhalb des Spiegeldurchmessers erfolgt. Das Mikroskop ist mit Hilfe eines Triebes parallel zu sich selbst meßbar verschiebbar. Um die einzelnen Zonen nacheinander herausblenden zu können, wird in ähnlicher Weise wie bei der HARTMANNschen Extrafokalprüfmethode für Linsenfolgen (Ziff. 123) vor den Spiegel eine Lochblende gesetzt, deren kreisrunde Löcher (Abb. 152b) in spiralartigen Reihen angeordnet sind. Unmittelbar vor dieser feststehenden Lochblende ist eine zweite, um die optische Achse drehbare Blende angeordnet, die radial verlaufende Schlitze besitzt, so daß durch Drehen nach Wunsch die verschiedenen Zonen des Spiegels nacheinander zur Abbildung benutzt werden können. Diese beiden Blenden werden vorteilhaft vor dem Spiegel etwa in doppelter Brennweite, jedenfalls außerhalb des Beobachtungsapparates aufgestellt. Wenn der künstliche Stern nur genügend weit entfernt ist, werden die durch die Löcher der Blende ausgesonderten Strahlenbündel für praktische Zwecke als genügend parallel zu betrachten sein, ihr Vereinigungspunkt wird

also praktisch dem Brennpunkt der entsprechenden Zone gleichzusetzen sein. Indem wir nacheinander durch Verschieben des Mikroskops auf die Sternbilder für die einzelnen Zonen einstellen und jedesmal die Lage des Mikroskops auf der optischen Achse an der achsenparallelen Teilung am Nonius ablesen, erhalten wir die Abweichungen der einzelnen Zonenbrennpunkte voneinander als Unterschiede dieser Ablesungen. Abb. 153 zeigt die auf diese Weise ermittelten Brennpunktsabweichungen eines guten SCHUCKERTschen Spiegels und darüber zum Vergleich die nach dem TSCHIKOLEWschen Verfahren für den gleichen Spiegel erhaltene Linienbildaufnahme.

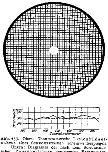


Abb. 153. Oben: TSCHIKOLEWsche Linienbildaufnahme eines SCHUCKERTschen Scheinwerferspiegels.
Unten: Diagramm der nach dem SCHUCKERTschen Zonenverfahren gemessenen Brennweitenabweichungen desselben SCHUCKERTschen Spiegels.
Aus beiden Abbildungen läßt sich schließen, daß hier ein guter Spiegel vorliegt.

135. Das Prüfverfahren von SALMOIRAGHI[1])-GOERZ mit auf Unendlich eingestellten Kollimatoren. Im Prinzip ist das Verfahren das gleiche wie das SCHUCKERTsche (Ziff. 134). Es ist dabei nur die Abänderung getroffen, daß an Stelle des künstlichen, sehr weit entfernten Sternes und unter Vermeidung der Lochblende einfach zwei symmetrisch und parallel der optischen Achse liegende kleine Sternkollimatoren verwendet werden, die auf Unendlich eingestellt sind und deshalb achsenparallele Strahlenbündel auf den Spiegel fallen lassen. Die Beobachtung des Bildes geschieht, wie in Ziff. 134 beschrieben, mit Mattscheibe und Mikroskop. Um die verschiedenen Zonen zur Abbildung heranziehen zu können, kann der Abstand der beiden Kollimatoren geändert werden. Außerdem ist es möglich, in verschiedenen Meridianschnitten die Messung zu wiederholen, indem der Spiegel um seine optische Achse gedreht wird.

136. Das Prüfverfahren von ZEISS mit unmittelbarer photographischer Aufzeichnung der Brennpunktsabweichungen und Streuungen. Die messenden Verfahren von SCHUCKERT (Ziff. 134) und SALMOIRAGHI (Ziff. 135) sind subjektive Verfahren. Im Gegensatz dazu ist das Prüfverfahren der Firma CARL ZEISS, Jena[2]) ein objektives Verfahren. Es unterscheidet sich von den beiden

[1]) A. SALMOIRAGHI, Description d'un nouvel appareil, à mesurer les constantes optiques des miroirs paraboliques pour projecteurs et phares. Milan 1909.

[2]) A. SONNEFELD, Die Hohlspiegel, S. 123—133. [Berlin: Union Deutsche Verlagsgesellschaft 1926; S. CZAPSKI und O. EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl. Kap. 21. Artikel A. KÖNIG, S. 650. Leipzig: J. A. Barth. 1924.

genannten Verfahren darin, daß der umgekehrte Strahlengang zur Abbildung verwendet wird. Im Brennpunkt F wird ein Lichtpunkt (Abb. 154) aufgestellt. Die von diesem ausgehenden Strahlen werden nach der Reflexion am Spiegel zu einem Parallelstrahlenbündel. Zur Beobachtung dient ein auf Unendlich eingestellter Kollimator K von kleiner Öffnung ($f = 250$ mm, $EP = 25$ mm), der längs eines Spiegeldurchmessers senkrecht zur optischen Achse auf einer optischen Bank verschoben werden kann. Es wird nun aber die Beobachtung für alle Zonen nicht visuell durchgeführt, sondern in die Brennebene des Kollimators K wird eine photographische Platte P gebracht. Würde diese Platte, während wir den Kollimator K parallel zu sich selbst wagerecht vor dem Spiegel vorbeischieben, gegen das Kollimatorobjektiv feststehen bleiben, so würden im Falle eines einwandfreien parabolischen Spiegels die Bildpunkte für alle Zonen auf einen Punkt zusammenfallen, wir bekämen ein einziges rundes Zerstreuungsscheibchen F' auf der photographischen Platte (Abb. 155 Mitte). Wäre der Spiegel an einzelnen Zonen mit Abweichungen von der parabolischen Form behaftet, so würden diese sich dadurch bemerkbar machen, daß für diese Zonen das Zerstreuungsscheibchen eine der Zonenbrennweite entsprechende wagerechte Verschiebung erleidet. Auf der Platte bekämen wir also einen mehr oder weniger kurzen, in wagerechter Richtung verlaufenden Strich. Treffen wir nun die Einrichtung so, daß beim Vorbeischieben des Kollimators K damit selbsttätig eine proportionale Verschiebung der Platte in lotrechter Richtung, also senkrecht zur Verschiebungsrichtung stattfindet, so bekommen wir im Falle des einwandfreien parabolischen Spiegels auf der Platte einen auf der Wagerechten senkrechten Strich F', der entsprechend den beiden Spiegelhälften durch die infolge der räumlichen Ausdehnung der Beleuchtungsapparatur für die Mitte statthabenden Abblendung in zwei symmetrische Äste zerlegt ist (Abb. 156 Mitte). Für einen fehlerhaften Spiegel wird dann dieser gerade Strich mehr oder weniger schräg und entartet sein (Abb. 157 Mitte) je nach den vorhandenen Spiegelfehlern. Die Abweichungen von einem senkrechten Strich sind die Brennpunktsabweichungen im Maßstabe $\frac{\text{Kollimatorbrennweite}}{\text{Spiegelbrennweite}}$.

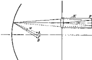


Abb. 154. Die Anordnung beim Zeissschen Verfahren zur Prüfung von Scheinwerferspiegeln. Ein im Brennpunkt F befindlicher Lichtpunkt und zwei dicht daneben befindliche Lichtpunkte A und B, deren Entfernung dem Kraterdurchmesser der bei der endgültigen Scheinwerferanordnung verwendeten Bogenlampe entspricht, werden durch den Scheinwerferspiegel ins Unendliche abgebildet. Auf einer Schiene senkrecht zur optischen Achse des Spiegels ist ein zur Spiegelachse paralleler, auf Unendlich eingestellter Photokollimator K kleiner Öffnung verschiebbar, in dessen Brennebene eine photographische Platte P senkrecht zur Zeichenebene selbsttätig, gleichzeitig und gleichsinnig mit dem Kollimator, verschoben wird. Für jede Stellung des Kollimators K erhalten wir drei Bildpunkte A', F' und B', die für die Abweichungen der betreffenden Zone kennzeichnend sind. Verschieben wir den Kollimator K stetig vor dem Spiegel vorbei, so erhalten wir drei Kurven, die die Zonenfehler des Spiegels aufweisen.

Zur Beurteilung eines solchen Spiegels ist es aber, da ja die beim endgültigen Gebrauch in Betracht kommende Lichtquelle (elektrischer Bogen) nicht eine punktförmige, sondern eine ausgedehntere ist, von Vorteil, gleichzeitig auch noch den Fehlerverlauf für zwei seitlich von F gelegene Punkte A und B (Abb. 154), deren Abstand Δl etwa dem leuchtenden Kraterdurchmesser entspricht und gegenüber der Spiegelbrennweite also als sehr klein angenommen werden darf, mitzubestimmen. Den Winkel, unter dem die Strecke AB von jedem Spiegelpunkt aus erscheint, bezeichnen wir als Streuwinkel ω der betreffenden Zone bzw. der betreffenden Strahlenrichtung. Nach dem Rande des Spiegels zu wird dieser Streuwinkel fortwährend kleiner. Im photographischen Bilde erhalten wir deshalb bei ruhender Platte das Bild der Abb. 155: zu beiden Seiten des dem Punkte F entsprechenden Zerstreuungsscheibchens F' zwei



Abb. 155. Schematisches Bild auf der bei Durchführung des ZEISSschen Verfahrens (Abb. 154) ruhenden photographischen Platte für einen vollkommenen Scheinwerfer (R) = Spiegel.



Abb. 156. Schematisches Bild auf der bei Durchführung des ZEISSschen Verfahrens (Abb. 154) selbsttätig, gleichzeitig und gleichsinnig, mitbewegten photographischen Platte für einen vollkommenen Scheinwerfer (R) = Spiegel.



Abb. 157. Aufnahme eines neueren ZEISS-Paraboloidspiegels $R\ ^{1100}/_{600}$ nach dem ZEISSschen Verfahren. Die Aufnahme zeigt die fast ideale Korrektion des Spiegels.

kurze, wagerecht verlaufende Striche A' und B', weil für die Randzonen die Bildpunkte infolge des kleineren Streuwinkels zusammenrücken. Die Striche verjüngen sich außerdem nach der Mitte zu auch noch, da für die Randzonen die einzelnen Lichtpunkte unter kleinerem Winkel erscheinen. Wird die Platte während des Versuches selbsttätig, wie oben angegeben, mit verschoben, so erhalten wir auf der Platte die Erscheinung der Abb. 156 im idealen Falle, während ein praktischer Fall bei noch vorhandenen, wenn auch geringen Zonenfehlern die Abb. 157 liefert.

In Abb. 154 haben wir die Verbindungslinie der drei Lichtpunkte parallel zur Verschiebungsrichtung des Kollimators gelegt. Wir haben damit also die meridionalen Abweichungen und Streuungen der Bündel festgestellt. Die sagittalen Streuungen können wir in ganz gleicher Weise ermitteln. Wir brauchen dazu nur die drei Lichtpunkte senkrecht zur Verschiebungsrichtung zu stellen und die Bewegung der photographischen Platte in der Verschiebungsrichtung stattfinden zu lassen, welch letzteres ohne eine Änderung der mechanischen Anordnung durch einfaches Vorsetzen eines Reversionsprismas vor das Kollimatorobjektiv erreicht werden kann. Um die Streuungswinkel unmittelbar aus der Photographie entnehmen zu können, ist es von Vorteil, wenn wir auf die photographische Platte vorher im einfachen Kontaktverfahren ein Linien-

system photographisch aufdrucken. Dieses Liniensystem ist auf einer undurchlassig versilberten Glasplatte in der Silberschicht eingerissen. Die Strichabstände sind so gewählt, daß sie je nach der stattfindenden Vergrößerung durch das Kollimatorobjektiv ganzen Winkelgraden oder Teilen davon entsprechen.

e) Die Wirkung der Strahlenbegrenzung in optischen Instrumenten.

α) Die Bestimmung der Apertur.

137. Das Ausmessen der Eintrittspupille. Sind die abbildenden Strahlenbündel auf der Dingseite parallel oder nahezu parallel, wie beim photographischen und Fernrohrobjektiv, so brauchen wir nur den Durchmesser ihrer wirksamen Öffnung zu messen. Wird das Strahlenbündel durch eine außerhalb der Linsenfolge gelegene Blende, z. B. durch den Fassungsrand begrenzt, so benutzen wir Maßstab, Schublehre oder Längenkomparator.

Liegt dagegen die begrenzende Aperturblende im Innern der Linsenfolge, so daß ihr Bild in bezug auf die davorliegenden Linsen die Eintrittspupille (E.P.) darstellt, so bringen wir die Linsenfolge auf einen Längenkomparator [verwendbar dazu ist auch das Abbesche Fokometer (Ziff. 97)] und stellen dessen Mikroskop auf die Ränder der virtuellen E.P. ein.

Bei photographischen Objektiven können wir auch so vorgehen, daß wir die Linsenfolge mit Hilfe eines auf Unendlich eingestellten Kollimators (Ziff. 75 u. 77) selbst auf Unendlich einstellen und in den Brennpunkt eine kleine Lochblende bringen. Legen wir über die Linsenöffnung einen Glasmaßstab und blicken wir durch die im Brennpunkt aufgestellte Lochblende nach diesem Maßstab, so können wir an ihm den Durchmesser der E.P. als Entfernung der äußersten noch sichtbaren Maßstabstriche ablesen. Wir können auch so verfahren, daß wir die Lochblende im Brennpunkt stark beleuchten und auf dem Maßstab den Durchmesser des beleuchteten Kreises ablesen, unter Umständen, um den dingseitig telezentrischen Strahlenverlauf zu erhalten, mit Hilfe eines parallel zur optischen Achse stehenden senkrecht dazu verschiebbaren Meßmikroskops.



Abb. 158. Das Ramsdensche Dynameter zur Messung der Austrittspupille von Instrumenten mit augenseitig telezentrischem Strahlengang besteht aus einer Lupe L, die auf eine am Ende der Röhre A befindliche Teilung S eingestellt ist. Diese Teilung S selbst wird ihrerseits durch Verschieben in der Röhre C an den Ort der AP gebracht, so daß deren Durchmesser an der Teilung abgelesen werden kann.

Die Messung der Austrittspupille (A.P.) bei bildseitigem telezentrischen Strahlengang erfolgt in ähnlicher Weise.

138. Das Dynameter zur Messung von Größe und Lage der Austrittspupille[1]. Dieses ist eine Lupe oder ein Okular (Abb. 158), in dessen vorderem Brennpunkt S sich eine Teilung von 10 mm Länge in $^1/_{10}$ mm geteilt befindet, während im hinteren Brennpunkt eine Blende angeordnet ist, die den dingseitig telezentrischen Strahlengang gewährleistet. Wir setzen dieses Ramsdensche Dynameter auf das zu messende Instrument auf und lesen an der Teilung als Durchmesser der Austrittspupille den Durchmesser des beleuchteten Kreises ab. In der Hauptsache wird dieses Instrumentchen benutzt, um die A.P. von Fernrohren und Mikroskopen zu bestimmen, wenn diese reell ist.

Um auch die Größe unzugänglicher Austrittspupillen, z. B. beim holländischen Fernrohr, der Brückeschen Lupe u. ä. messen zu können, hat Czapski[2]) ein

[1]) H. Kellner, ZS. f. Instrkde. Bd. 20, S. 43—44. 1899.
[2]) H. Kellner, ZS. f. Instrkde. Bd. 20, S. 44—46. 1899.

Mikroskopdynameter (Abb. 159) gebaut. Es ist dies ein Mikroskop mit großem freiem Dingabstand, bei dem das umgekehrte Bild der A.P. mit der Objektivvergrößerung „Eins", also in natürlicher Größe, im vorderen Brennpunkt des Okulars, in dem sich eine Millimeterteilung S befindet, entsteht. Im hinteren Brennpunkt des Okulars muß sich wieder eine den dingseitig telezentrischen Strahlengang während Blende befinden.



Abb. 159. Das CZAPSKIsche Mikroskopdynameter verwendet an Stelle der Lupe des RAMSDENschen Dynameters ein Mikroskop OL mit großem freiem Dingabstand. Die zu messende $A.P.$ wird mit der Objektivvergrößerung „Eins" auf die Teilung S abgebildet, auf der mit Hilfe des Okulars L der Durchmesser der $A.P.$ abgelesen wird.

Jedes dieser beiden Dynameter ist in einem Rohrstutzen meßbar verschiebbar, so daß wir durch aufeinanderfolgendes Scharfstellen auf die letzte Okularfläche des geprüften Instruments und auf dessen A.P. als Unterschied dieser Einstellungen die Entfernung der A.P. von der letzten Okularfläche feststellen können.

139. Die Bestimmung der numerischen Apertur beim Mikroskop. Das Abbesche Apertometer. Das von ABBE[1]) angegebene **Apertometer** dient zur Bestimmung der numerischen Apertur (Ziff. 98) von Mikroskopobjektiven. Unter dieser verstehen wir den Ausdruck $a = n \cdot \sin u$, worin n die Brechzahl des vor der Frontlinse des Objektivs befindlichen Mittels und u der halbe Öffnungswinkel des vom Dingpunkt O ins Objektiv gelangenden Büschels ist (Abb. 160). Wir brauchen somit nur den Öffnungswinkel $2u$ zu messen.

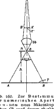


Abb. 160. Zur Bestimmung der numerischen Apertur $a = n \cdot \sin u$ eines Mikroskopobjektivs Ob wird dessen objektseitiger Öffnungswinkel $2u$ ermittelt, indem wir in großem Abstande h von der im Dingpunkt O angebrachten kleinen Lochblende eine Teilung T aufstellen, deren Bild T' ungefähr im bildseitigen Brennpunkt des Mikroskopobjektivs liegt. Das beobachtende Auge befindet sich im bildseitigen, aplanatischen Punkte O'. Dabei werden im Bilde T' die Teilstriche A und B der Teilung T festgestellt, die gerade noch am Rande der Objektivöffnung sichtbar sind. Es ist dann

$$\operatorname{tg} u = \frac{AB}{2 \cdot h}.$$

Um diesen Winkel $2u$ erhalten zu können, müssen wir in einfacher Weise so vorgehen, daß wir in den Dingpunkt O (Abb. 160) des Mikroskops eine genügend kleine Lochblende bringen und auf sie das Mikroskop scharf einstellen. Stellen wir dann im Dingraum in großer Entfernung h vor dem Dingpunkt O eine Teilung T auf, so entsteht deren Bild T' in der Nähe der bildseitigen Brennebene des Mikroskopobjektivs. Entfernen wir das Okular aus dem Mikroskoprohr, so können wir dieses Bildchen deutlich sehen. Für großbrennweitige Mikroskopobjektive können wir mit bloßem Auge beobachten, wenn wir das Auge an den oberen Rand des Mikroskoprohrs bringen, wo bei regelrechter Benutzung des Mikroskops das Bild O' entstehen

[1]) E. ABBE, Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 113—117. Jena: G. Fischer 1904; Journ. Roy. Microsc. Soc. (1) Bd. 1, S. 19—22. 1878; H. AMBRONN u. A. KÖHLER, Methoden zur Prüfung der Objektivsysteme. Apertometer und Testplatte. Heft 3 aus den Übungen zur wiss. Mikroskopie, S. 6—13. Leipzig: S. Hirzel 1914.

würde. Dabei stecken wir auf den freien Rohrrand eine kleine axiale Lochblende, um die Stellung des Auges in der Achse sicherzustellen. Für kleinbrennweitige Objektive mit großer Apertur müssen wir ein Hilfsmikroskop in Anwendung bringen, indem wir an das verschiebbare Okularauszugsrohr des Mikroskops ein entsprechendes schwaches Mikroskopobjektiv einsetzen. Nach ABBE können wir dann das zu prüfende Mikroskop zusammen mit dem Hilfsmikroskop auffassen als ein „Miniaturfernrohr", wobei das Hilfsmikroskop die Rolle eines terrestrischen Okulars übernommen hat. Wir brauchen dann nur das dingseitige Gesichtsfeld dieses Fernrohres, das dem Öffnungswinkel $2u$ des Mikroskopobjektivs Ob gleich ist, zu messen. Dies geschieht, indem wir am Bilde T' der Teilung T die Teilstriche A und B feststellen, die gerade am äußersten Rande des hellen Kreises in der Bildebene T' liegen. Wir erreichen das in einfachster Weise dadurch, daß wir über die Teilung weg, nach den beiden Rändern zu, zwei Zeiger soweit verschieben, bis ihre Bilder, die wir beobachten, am Rande der hellen Objektivöffnung gerade zu verschwinden beginnen. Ist der Abstand h der Teilung T vom Blendenort O bekannt, so ist der Öffnungswinkel $2u$ gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} u = \frac{AB}{2 \cdot h}.$$

Aus diesen Ausführungen ist zu erkennen, daß wir bei der Messung der Brennweite mit dem ABBEschen Fokometer (Ziff. 97) gleichzeitig auch den dingseitigen Öffnungswinkel ermitteln können, wenn wir zur Messung die äußerste Randzone verwenden.

Das oben beschriebene Verfahren hat ABBE vereinfacht dadurch, daß er den Strahlengang zwischen O und T (Abb. 160) mit Hilfe eines unter 45° geneigten Spiegels knickt und aus der Zeichenebene senkrecht nach oben heraus verlegt. Um einfache Versuchsverhältnisse zu bekommen, fertigt er den in Abb. 160 unterhalb von O liegenden Apparateteil aus einer überhalbkreisförmigen zylindrischen Glasplatte (Abb. 161), an die in einem Durchmesser des Kreises die den Strahlengang knickende 45°-Fläche angeschliffen ist. Genau im Mittelpunkte des Kreises liegt die enge Kreis- oder Spaltblende O, die auf einem versilberten Deckglas aus dem Silber herausradiert und dann mit der Silberseite auf die Glasplatte zentrisch aufgekittet wird. Die Teilung T ist durch eine Kreisteilung am Rande des Zylinders ersetzt. In der Abb. 161 dieses ABBEschen Apertometers erkennen wir zwei Teilungen am Zylinderrande. Die nach dem Zylinderrande zu gelegene ist eine nach numerischen Aperturen fortschreitende Teilung, wie sie sich unter Berücksichtigung der Brechzahl des Zylinderkörpers aus dem Winkel der Strahlen innerhalb des Glases berechnen läßt. Die zweite, mehr nach dem Kreismittelpunkte zu gelegene Teilung gibt die den Winkeln in Glas entsprechenden Winkel in Luft wieder. Als Zeiger dient eine Vorrichtung, die am Zylinder entlang verschoben werden kann. Der über den Teilungen weggestreichende Strich ist so ausgerichtet, daß er mit dem Zeiger am Zylinder immer auf dem gleichen Kreisdurchmesser liegt.

Die Messung selbst geht in folgender Weise vor sich. Das Apertometer wird so auf den Mikroskoptisch gelegt, daß die Silberblende möglichst zentrisch unter dem zu prüfenden Mikroskopobjektiv liegt, während die Zylinderfläche einer hellen, breiten und gleichmäßig beleuchteten Fläche zugekehrt ist. Unter Einhaltung des richtigen Rohrauszugs wird das Mikroskop auf die Silberblende eingestellt und in dieser Stellung festgehalten. Nach Entfernung des Okulars erblickt das durch eine aufgesetzte axiale Lochblende beobachtende Auge die helle Objektivöffnung und darin den Zeiger des Apertometers. Bei Objektiven von weniger als 4 mm Brennweite sind diese Bilder so klein, daß wir sie nicht mehr

mit bloßem Auge genügend gut erkennen können. Sie müssen deshalb mit einem Hilfsmikroskop vergrößert werden. Dazu wird das Auszugsrohr aus dem Mikroskoptubus vorsichtig herausgezogen, ohne daß die Einstellung des zu prüfenden Systems auf die Silberblende geändert wird, und durch Anschrauben des jedem Apertometer beigegebenen Apertometersystems (Abb. 161 links) am unteren Ende zu einem Mikroskop umgestaltet, das, in den Mikroskoptubus eingeschoben, auf das Bild des Apertometerzeigers derart eingestellt wird, daß dieser beim Verschieben bis zum Rande des hellen Kreises etwa gleich scharf bleibt. Die Randeinstellungen des Zeigers werden aufgesucht und die zugehörige Einstellung des Ablesestriches an den Teilungen abgelesen. Die halbe Summe der an der Aperturteilung gemachten beiderseitigen Ablesungen ist die numerische Apertur des untersuchten Mikroskopobjektivs, während die Summe der beiden Ablesungen an der Gradteilung den Wert des Öffnungswinkels in Luft (oder seinen Wert bezogen auf Luft) wiedergibt.

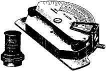


Abb. 161. Das ABBEsche Apertometer vereinfacht die Ermittelung der numerischen Apertur nach dem in Abb. 160 angegebenen Verfahren. Der in Abb. 160 unterhalb von O liegende Apparateteil besteht aus einer überhalbkreisförmigen zylindrischen Glasplatte, an die in einem Durchmesser des Kreises eine den Strahlengang knickende 45°-Fläche angeschliffen ist, über der die enge Kreis- oder Spaltblende O (Abb. 160) liegt. Die Teilung T ist durch eine Teilung, die nach numerischen Aperturen fortschreitet, am Rande des Zylinders ersetzt. Die mehr dem Kreismittelpunkt zu gelegene Teilung gibt die den Winkeln in Glas entsprechenden Winkel in Luft wieder. Die als Zeiger dienende Vorrichtung wird am Zylinder entlang verschoben und besitzt einen über den Teilungen wegstreichenden Strich, der mit dem Zeiger am Zylinder auf dem gleichen Kreisdurchmesser liegt.

Zur Untersuchung von Immersionssystemen bringen wir zwischen Silberblende und Objektiv die betreffende Immersionsflüssigkeit und verfahren genau so, wie oben beschrieben. Zu beachten haben wir dabei, daß Immersionssystemen, deren numerische Apertur ($n \cdot \sin u$) größer als 1 ist, auf der Winkelteilung kein Winkel in Luft mehr entsprechen kann, da der Sinus eines solchen Winkels größer als Eins und der Winkel selbst mithin imaginär sein würde.

β) Die Bestimmung des Gesichtsfeldes.

140. Die Messung des wahren Gesichtsfeldes[1]. In der Hauptsache kommen für die Bestimmung des wahren Gesichtsfeldes die Fernrohre in Frage. Unter dem wahren Gesichtsfeld eines Fernrohres verstehen wir den Winkel w (Abb. 162) unter dem die im Brennpunkt des Objektivs stehende Gesichtsfeldblende von der Mitte der Eintrittspupille (E.P.) aus erscheint.

Beim KEPPLERschen Fernrohr stellt im allgemeinen der Fassungsrand des Objektivs die E.P. vor. Beim holländischen Fernrohr dagegen ist das vom gesamten Fernrohr entworfene Bild der Augenpupille des Beobachtenden, die die Austrittspupille (A.P.) vorstellt, die E.P. des Fernrohrs, die sehr weit

[1]) H. KELLNER, ZS. f. Instrkde. Bd. 20, S. 1—12 u. 38—43. 1900.

vor dem Objektiv liegt. Da diese Gesichtsfeldblende also sehr stark von der Lage der Bildebene abweicht, ist die Begrenzung des Gesichtsfeldes nur unscharf und verwaschen. Dabei ist zu beachten, daß die E.P. des beobachtenden Auges etwa 25 mm (Augendrehpunkt) hinter der Okularlinse liegt. Zu Meßzwecken wird beim holländischen Fernrohr allerdings die die Augenpupille ersetzende Blende (Durchmesser 3 bis 5 mm) nur in 10 mm Entfernung hinter die Austrittsfläche des Okulars gebracht, da bei den KEPLERschen Fernrohren die A.P. auch nur diesen Abstand besitzt.

Das einfachste Verfahren zur **Messung des wahren Gesichtsfeldes** ist das, daß wir in großer bekannter Entfernung E vom Fernrohr eine metrische Teilung aufstellen und im Bilde ablesen, welche Teilstriche mit den Rändern der Gesichtsfeldblende zusammenfallen. Der Abstand dieser beiden Teilstriche sei $2y$, dann ist $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = y/E$. An Stelle einer solchen Teilung werden wir bei sehr großen Entfernungen besser zwei Meßlatten oder Lampen benutzen, die von Helfenden soweit voneinander aufgestellt werden, daß ihre Bilder an die Ränder der Gesichtsfeldblende zu liegen kommen. Das Verfahren hat den Nachteil, daß bei sehr großen Entfernungen beobachtet werden muß, weil sonst Gesichtsfeldblende und Bildebene nicht zusammenfallen und dadurch unscharfe, verwaschene Ränder auftreten, die die Messung unsicher machen.



Abb 162. Zur Messung des wahren Gesichtsfeldes w einer Linsenfolge Ob_2 benutzen wir einen auf Unendlich eingestellten langerbrennweitigen Kollimator Ob_1 mit der Brennweite f', in dessen Brennebene sich eine Teilung T befindet. Ob_1 wird in gerader Durchsicht auf Ob_2 eingestellt. Wir beobachten die Strecke y, deren Bild gerade die Gesichtsfeldblende GB ausfüllt. Es ist dann

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \frac{y}{2f'}.$$

Diese Schwierigkeit umgehen wir, wenn wir (Abb. 162) einen auf Unendlich eingestellten langerbrennweitigen Kollimator Ob_1 mit der Brennweite f' zu Hilfe nehmen, in dessen Brennebene sich eine Teilung T befindet. Wir beobachten, daß im Bilde GB gerade die Strecke y dem Durchmesser der Gesichtsfeldblende GB entspricht. Es ist damit also das **wahre Gesichtsfeld** von Ob_2 gegeben durch:

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \frac{y}{2f'}.$$

Dieses Verfahren ist auch für holländische Fernrohre brauchbar, wobei wir aber fordern müssen, daß das Objektiv des Hilfskollimators einen größeren Objektivdurchmesser als das zu prüfende hat.

Indem wir den Hilfskollimator f' mit einem Okular versehen, können wir die Beobachtung auch umgekehrt durchführen.

Ein drittes Verfahren dient der unmittelbaren Ausmessung des Winkels w. Dazu bringen wir das zu untersuchende Fernrohr auf den Tisch eines Spektrometers, wo wir es so einrichten, daß die E.P. über den Drehpunkt zu liegen kommt (vgl. Abb. 163). Wir stellen das Fadenkreuz des auf Unendlich und damit auf die Gesichtsfeldblende eingestellten Beobachtungsfernrohrs nacheinander auf die beiden Ränder der Gesichtsfeldblende ein. Bei holländischen Fernrohren ist insbesondere streng darauf zu achten, daß die E.P. darstellende Bild einer 10 mm hinter der Augenlinse angebrachten Lochblende (A.P.) vom Durchmesser

der Augenpupille unmittelbar über dem Drehpunkt des Teilkreises sich befindet und nicht etwa das Objektiv.

141. Die Messung des scheinbaren Gesichtsfeldes[1]. Im wesentlichen wird das scheinbare Gesichtsfeld bei Fernrohren, Mikroskopen und Lupen bestimmt. Unter dem scheinbaren Gesichtsfeld wird der Winkel w' verstanden (Abb. 163), unter dem von der Mitte der Austrittspupille AP aus durch das Okular hindurch die Gesichtsfeldblende GB des eingestellten Instruments erscheint.

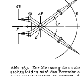


Abb. 163. Zur Messung des scheinbaren Gesichtsfeldes wird das Fernrohr auf dem Tische eines Spektrometers so justiert, daß seine A.P. über der Drehachse D des Tisches liegt. Das Fernrohr des Spektrometers wird dann nacheinander auf die beiden Ränder der Gesichtsfeldblende GB durch das Okular Ok hindurch eingestellt, wodurch unmittelbar das scheinbare Gesichtsfeld w' gemessen wird, als Differenz der Ablesungen am Teilkreis

Von den Verfahren in Ziff. 140 ist ohne Schwierigkeiten für alle Instrumente die unmittelbare Messung des Gesichtsfeldwinkels w' am Spektrometer zu übernehmen. Dabei wird jetzt das zu untersuchende Instrument (Abb. 163) so auf dem Spektrometertische ausgerichtet, daß die A.P. über dem Mittelpunkt D des Teilkreises K sich befindet. Beim holländischen Fernrohr darf auch hier wieder nicht vergessen werden, daß die A.P. durch eine in 10 mm hinter der Augenlinse anzubringende Blende vom Durchmesser der Augenpupille dargestellt wird.

Dagegen muß das in Ziff. 140 an erster Stelle genannte Verfahren etwas abgeändert werden. Die Teilung T (Abb. 164) wird wieder in einer bekannten Entfernung l von der AP des Fernrohrs, AP_1, aus aufgestellt, und von der E.P.

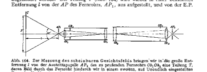


Abb. 164. Zur Messung des scheinbaren Gesichtsfelds bringen wir in die große Entfernung l von der Austrittspupille AP_1 des zu prüfenden Fernrohrs $Ob_1 Ok_1$ eine Teilung T, deren Bild durch das Fernrohr hindurch wir in einem zweiten, auf Unendlich eingestellten Fernrohr $Ob_2 Ok_2$ mit größerem Gesichtsfeld GB_2 beobachten. Wir bestimmen so die beiden äußersten Punkte der Teilung T (also die Strecke y'), die gerade noch am Rande der Gesichtsfeldblende GB_1 sichtbar sind. Es ist

$$\mathrm{tg}\frac{w'}{2} = \frac{y'}{2l}.$$

aus (in Abb. 159 von Ob_1 aus) beobachten wir, welche Strecke y' vom Rande der A.P., z. B. vom Blendenrand der Augenlinse Ok_1, aus der Teilung herausge-

[1] H. KELLNER, ZS. f. Instrkde. Bd. 20, S. 12–17 u. 33–43. 1900.

schnitten wird. Es ist dann das scheinbare Gesichtsfeld $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = y'/2l$. Da nun aber beim Einblick in das Objektiv Ob_1 die Teilung entsprechend der Vergrößerung N_F des Fernrohrs $N_F = z$mal verkleinert erscheint, müssen wir es durch ein Hilfsfernrohr $[Ob_2\ Ok_2]$ zum Zwecke besserer Genauigkeit dem Auge vergrößert darbieten. Verwenden wir ein Fernrohr von der Vergrößerung N'_F, so beobachten wir in diesem das Bild mit der Vergrößerung N'_F, weshalb wir N'_F zweckmäßig nicht kleiner als N_F wählen werden. Von dem Hilfsfernrohr müssen wir auch verlangen, damit keine das Ergebnis fälschende Strahlenbegrenzung eintritt, daß sein Gesichtsfeld größer als das des untersuchten Fernrohrs ist.

Ein einfaches Verfahren sowohl für Fernrohre als auch für Mikroskope ergibt sich bei Verwendung eines zwischen Auge und Augenlinse (Abb. 165) gebrachten, halbdurchlässig versilberten ABBEschen Prismenwürfels W. Ein von A aus beobachtendes Auge sieht dann infolge der an der Diagonalebene stattfindenden Reflexion eine in bekannter Entfernung l von der A.P. (etwa in deutlicher Sehweite) entfernt liegende Teilung T, aus der durch die Ränder der in gerader Durchsicht sichtbaren Gesichtsfeldblende GB ein deren Durchmesser proportionales Stück y' herausgeschnitten wird, so daß das gesuchte scheinbare Gesichtsfeld w' gegeben ist durch die Beziehung $\operatorname{tg}\frac{w'}{2} = y'/2l$. Im allgemeinen werden wir den Würfel W so vor das Okular bringen, daß die A.P. entweder in die Fläche a oder in die Fläche c des Würfels W zu liegen kommt. Die Entfernung l muß dann entsprechend von der Seite a bzw. b aus gemessen werden. Beim holländischen Fernrohr bringen wir die Fläche a des Würfels in 10 mm Abstand von der Augenlinse und beobachten mit möglichst dicht an den Würfel gebrachtem Auge.

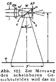


Abb. 165. Zur Messung des scheinbaren Gesichtsfeldes wird das zu prüfende Fernrohr auf Unendlich eingestellt und zwischen Okular Ok und Auge A ein ABBEscher Prismenwürfel W gebracht, der einmal dem Auge gestattet, unmittelbar nach der Gesichtsfeldblende GB zu blicken und anderseits die Teilung T zu sehen. Auf dieser Teilung wird die Strecke y' abgelesen, deren Endpunkte gerade mit den Rändern von GB in Deckung sind. Ist l die Entfernung der Teilung T von der A.P., so ist

$$\operatorname{tg}\frac{w'}{2} = \frac{y'}{2 \cdot l}.$$

Rechnerisch können wir das scheinbare Gesichtsfeld w' ermitteln, wenn wir die Vergrößerung N_F des Fernrohrs und das wahre Gesichtsfeld w kennen. Es ist (Ziff. 142): $N_F = \operatorname{tg}\frac{w'}{2} : \operatorname{tg}\frac{w}{2}$.

γ) Die Bestimmung der Vergrößerung.

142. Die Messung der Vergrößerung beim Fernrohr. Unter der Fernrohrvergrößerung N_F verstehen wir das Verhältnis der Tangente des halben Winkels w'_1, unter dem das Bild von der Mitte der A.P. aus erscheint, zu der Tangente des halben Winkels w_1, unter dem das Ding von der Mitte der E.P. aus gesehen wird:

$$N_F = \frac{\operatorname{tg}\frac{w'_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{w_1}{2}}. \tag{89}$$

Dieses Verhältnis ist aber, wie ohne weiteres aus dem in Ziff. 140 und 141 Gesagten zu erkennen ist, gleichzusetzen mit dem gleichwertigen Verhältnis des wahren und scheinbaren Gesichtsfeldes:

$$N_F = \frac{\operatorname{tg} \frac{w'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{w}{2}}. \tag{90}$$

Haben wir also auf Grund einer der aus Ziff. 140 und 141 bekannten Methoden das wahre und scheinbare Gesichtsfeld gemessen, so ist die Vergrößerung leicht aus Gleichung (90) zu berechnen.

Um Gleichung (89) zu verwenden, brauchen wir nur in bekannter Weise, wie dies für die Gesichtsfeldwinkel geschehen ist, mit einem Spektrometer oder Theodoliten[1]) die Sehwinkel w_1 und w_1' nach einem entfernten Ding einmal ohne Fernrohr und zweitens durch das verkehrt gestellte Fernrohr hindurch zu ermitteln, wobei im letzten Falle die A.P. in der Drehachse des Winkelmeßgeräts liegen muß.

Nach LAGRANGE[2]) können wir die Ermittelung der Fernrohrvergrößerung auch auf die theoretisch abzuleitende Folgerung gründen, daß die Fernrohrvergrößerung gleich dem Verhältnis von E.P. und A.P. ist, die sich anderseits bei astronomischen und holländischen Fernrohren verhalten wie die Brennweite von Objektiv (F) und Okular (f):

$$N_F = \frac{\text{E.P.}}{\text{A.P.}} = \frac{F}{f}. \tag{91}$$

Wir brauchen also nur die E.P. (Ziff. 137) und die A.P. (Ziff. 138) in bekannter einfacher Weise auszumessen oder die Brennweite von Objektiv und Okular nach einem der in Ziff. 80 bis 101 mitgeteilten Verfahren zu ermitteln.

Schließlich müssen wir noch auf ein sehr einfaches, vielfach angewandtes Verfahren, das allerdings keine sehr genauen Ergebnisse liefert, hinweisen. In größerer Entfernung vom Fernrohr wird eine Teilung, z. B. eine Geometermeßlatte oder ein ähnlich gleichmäßig geteiltes Ding, aufgestellt. Während dann das eine Auge durch das Fernrohr sieht, wird mit dem zweiten freien Auge neben dem Fernrohr vorbei nach dem Ding gesehen. Der Beobachter versucht dann, die beiden Bilder zur Deckung zu bringen, um zu entscheiden, wie viele m' Teile des Bildes mit m Teilen des unmittelbar gesehenen Maßstabes zusammenfallen. Die gesuchte Fernrohrvergrößerung ist $N_F = m/m'$. Um den Vergleich zu erleichtern und um gleichzeitig einäugig beobachten zu können, werden wir zwischen Auge und Okular einen halbdurchlässig versilberten Prismenwürfel (vgl. Ziff. 141, Abb. 165) bringen und etwas seitlich unter 45° gegen die optische Achse geneigt einen Spiegel, der die unmittelbar von der Teilung kommenden Strahlen auf die versilberte Diagonalfläche und damit ins Auge wirft.

143. Die Messung der Vergrößerung bei Lupen. Unter der Lupenvergrößerung N_L verstehen wir das Verhältnis des Sehwinkels w', unter dem die Lupe einen kleinen Gegenstand zeigt, zu dem Sehwinkel, unter dem er in „deutlicher Sehweite" (250 mm) dem Auge erscheint. Ist f' die bildseitige Brennweite der Lupe, y die Dinggröße und V das ABBEsche Vergrößerungsvermögen (angenähert $= 1/f'$), dann ist die Lupenvergrößerung[3])

$$N_L = \frac{\operatorname{tg} w'}{y/250} = 250 \cdot V = \frac{250}{f'}, \tag{92}$$

[1]) C. F. GAUSS, Astron. Nachr. Bd. 2, S. 371—376. 1824.

[2]) J. L. DE LAGRANGE, Mém. d. Berlin, S. 3—12. 1803; abgedruckt in Oeuvres de L. Bd. V, S. 701—710. Paris: Gauthier-Villars 1870.

[3]) H. ERFLE, D. Opt. Wochenschr. Bd. 7, S. 345—349. 1921; S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, Kap. 15, Artikel H. BOEGEHOLD, S. 459. Leipzig: J. A. Barth 1924.

worin wir also nur f' nach einem der bekannten Verfahren (Ziff. 80 bis 101) ermitteln müssen.

Zur unmittelbaren Bestimmung verwenden wir zwei Millimeterteilungen, von denen wir die eine durch die Lupe betrachten, während die zweite in deutlicher Sehweite befindliche Teilung mit dem freien, unbewaffneten Auge betrachtet wird. Wir bringen die beiden Bilder zur Deckung und finden, daß m' Teile des Bildes auf m Teile der zweiten Teilung fallen, daß also $N_L = m/m'$ ist. Auch hier können wir wieder wie beim Fernrohr (Ziff. 142) den halbdurchlässig versilberten Prismenwürfel mit dem seitlichen unter 45° geneigten Spiegel zur Anwendung bringen, um einäugig beobachten zu können.

144. Die Messung der Vergrößerung beim Mikroskop. Wie bei der Lupe verstehen wir auch beim Mikroskop unter seiner Vergrößerung N_M das Verhältnis des Sehwinkels, unter dem ein kleiner Gegenstand vom Auge durch das Mikroskop hindurch gesehen wird, zu dem Sehwinkel, unter dem er dem unbewaffneten Auge in deutlicher Sehweite erscheint. Sind f_1' und f_2' die bildseitigen Brennweiten von Objektiv und Okular, Δ die reduzierte Tubuslänge und $f' = -f_1' \cdot f_2'/\Delta$ die bildseitige Brennweite des Mikroskops, so ist, da das ABBEsche Vergrößerungsvermögen V des Mikroskops nahezu $V = 1/f'$ ist, die Mikroskopvergrößerung

$$N_M = \frac{250}{f'} = -\frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{250}{f_2'}, \tag{93}$$

so daß wir demnach zur Ermittelung von N_M neben der reduzierten Tubuslänge Δ, die den Abstand zwischen den beiden einander zugekehrten Brennpunkten von Objektiv und Okular vorstellt und im allgemeinen 160 mm beträgt, nur noch die Brennweiten f_1' und f_2' (Ziff. 80 bis 101) aufzusuchen brauchen.

Eine unmittelbare Feststellung von N_M erfolgt in ähnlicher Weise wie bei der Lupe (Ziff. 143) mit Hilfe zweier Teilungen, wovon die eine durch das Mikroskop, die andere, gröbere, in deutlicher Sehweite liegende Teilung mit dem freien Auge betrachtet wird. Zur Erleichterung des Vergleichs wird der ABBEsche Zeichenapparat gute Dienste leisten, der, mit einem halbdurchlässigen Prismenwürfel (Ziff. 141) und einem seitlichen Spiegel ausgerüstet, das Nachzeichnen eines mikroskopischen Dings auf einer in deutlicher Sehweite seitlich vom Mikroskop liegenden Zeichenebene gestattet. Wird als Ding ein Objektmikrometer verwendet, so können wir auf diese Art und Weise die zu einer bestimmten, im Mikroskopbilde feststellbaren Größe m' gehörige Strecke m auf der Zeichenebene ausmessen und $N_M = m/m'$ daraus berechnen. Für sehr starke Mikroskopvergrößerungen werden wir ein weniger stark vergrößerndes Mikroskop bekannter Vergrößerung zu Hilfe nehmen müssen, indem wir wieder unter Benutzung des ABBEschen Zeichenapparates die Vergrößerungen dieser beiden miteinander vergleichen.

Kennen wir die Vergrößerung N_L des verwendeten Okulars (Ziff. 143), so können wir uns damit begnügen, das vom Objektiv entworfene Bild einer bekannten Dinggröße mikrometrisch auszumessen, wodurch wir die Vergrößerung N_0 des Mikroskopobjektivs erhalten, womit wir dann nur die Okularvergrößerung N_L zu multiplizieren brauchen, um die Mikroskopvergrößerung als

$$N_M = N_0 \cdot N_L$$

zu erhalten.

In einfacher Weise können wir die ungefähre Vergrößerungszahl N_0 eines Mikroskopobjektivs finden, wenn wir dessen numerische Apertur a (Ziff. 139) kennen. Beobachten wir bei einer Wellenlänge λ_0, so ist die Objektivvergrößerung

$$N_0 = \frac{250}{3438} \cdot \frac{2 \cdot a \cdot \varepsilon}{\lambda_0},$$

wenn ε der kleinste Sehwinkel ist, unter dem ein Gegenstand erscheinen muß, wenn wir ihn deutlich beobachten wollen. Nach ABBE[1]) ist dieser Winkel $\varepsilon = 4'$ der vierfache Betrag des Auflösungsvermögens des menschlichen Auges. Wählen wir dazu noch eine mittlere Wellenlänge $\lambda_0 = 550\ \mathrm{m}\mu$, so erhalten wir demnach:

$$N_0 = 264{,}5 \cdot a \cdot \varepsilon = 1058 \cdot a\,. \tag{94}$$

Die Mikroskopobjektivvergrößerung ist somit rund gleich dem Werte der tausendfachen numerischen Apertur des Objektivs.

δ) Die Messung der Lichtstärke von optischen Instrumenten.

145. Das theoretische Maß für die Lichtstärke. Zum Schlusse wollen wir noch kurz eingehen auf die Ermittelung der Lichtstärke bei optischen Instrumenten. Soweit die Lichtstärke durch den geometrischen Strahlenverlauf beeinflußt ist, läßt sie sich auf Grund der in der Lehre von der Strahlenbegrenzung[2]) gefundenen Ergebnisse aus den Konstanten des Systems herleiten. Zu diesen durch die Strahlenbegrenzung verursachten Lichtverlusten treten noch solche, die durch die Reflexion an den optisch wirksamen Flächen und durch Absorption in den verwendeten optischen Mitteln bedingt sind.

Die theoretischen Betrachtungen über die Wirkung der Strahlenbegrenzung ergeben, daß die Beleuchtungsstärke B' im Bildpunkte proportional mit dem Quadrat der numerischen Apertur a und umgekehrt proportional zum Quadrat der Brechzahl n des Dingraumes ist

$$B' = \pi \cdot \frac{a^2}{n^2 \cdot \beta^2} \cdot k\,, \tag{95}$$

worin k die spezifische Intensität des Dingelements, d. h. den auf die Flächeneinheit und auf die Einheit des Öffnungswinkels bezogenen Lichtstrom, und β die Lateralvergrößerung für die beiden zugeordneten Punkte vorstellt. Das Verhältnis der beiden Beleuchtungsstärken B und B' im Ding- bzw. Bildpunkt ist gleich dem Quadrat der Lateralvergrößerung $B/B' = \beta^2$.

Aus diesen Ergebnissen ist zu erkennen, daß das Quadrat der numerischen Apertur a als ein geometrisches Maß für die Lichtstärke von Linsenfolgen, wie z. B. des Mikroskopobjektivs, gebraucht werden kann. Darauf gründet sich auch, daß die Lichtstärke von photographischen Objektiven dem Quadrate der relativen Öffnung $2 \cdot p/f$, worin $2 \cdot p$ der Durchmesser der Eintrittspupille (Ziff. 137) und f die Brennweite des Objektivs (Ziff. 80 bis 101) ist, proportional ist, weshalb die relative Öffnung als ein Maß für die Lichtstärke der photographischen Objektive in der Praxis verwendet wird.

Bei Instrumenten mit teleskopischen Linsenfolgen ist die Lichtstärke bestimmt durch die Fläche der Austrittspupille (Ziff. 138), weshalb für Fernrohre u. ä. die in mm^2 angegebene Fläche der A.P. als Maß in Anwendung kommt.

Die Reflexionsverluste an den Flächen können wir rechnerisch auf Grund der FRESNELschen Formeln ermitteln. In der Achse, also bei senkrechtem Strahleneinfall auf die Fläche, ist der Reflexionsverlust für eine jede an Luft grenzende Fläche

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \tag{96}$$

und beträgt für die üblichen Glassorten, n_D zwischen 1,5 und 1,9, zwischen 4 und 10%.

[1]) E. ABBE, Ges. Abhandlgn. Bd. 1, S. 375–425. Jena: G. Fischer 1904.

[2]) S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, Kap. 5: Artikel O. EPPENSTEIN, S. 146–212. Leipzig: J. A. Barth 1924; vgl. diesen Bd. XVIII: Artikel O. EPPENSTEIN, Kap. 1, Art. 125ff.

Die Absorptionsverluste A können in der Achse aus der Linsendicke d und der für 1 mm ermittelten Durchlässigkeit D des betreffenden Glases auf Grund des BEERschen Gesetzes als

$$A = 1 - D^d$$

gefunden werden. Die Durchlässigkeiten D werden dabei nach einer der Methoden, wie sie sich bei KRÜSS[1]), DORGELO[2]) und SCHACHTSCHABEL[3]) finden, gemessen.

146. Die unmittelbare Messung der Lichtstärke. Im besonderen werden wir es aber vorziehen, die in einem optischen Instrumente auftretenden Lichtverluste bzw. dessen Durchlässigkeit unmittelbar zu bestimmen.

Einen Vergleich zweier Fernrohre können wir in KRÜSSscher[4]) Weise durchführen, indem wir das eine Fernrohr F auf eine im Unendlichen liegende Lichtquelle B_1 (Abb. 166) unter Zuhilfenahme eines Kollimatorobjektivs O_2 einstellen und die gut ausgeleuchtete, für die Lichtstärke des Fernrohrs maß-

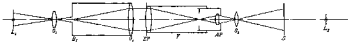


Abb. 166. Die Anordnung des KRÜSSschen Verfahrens zum Vergleich der Lichtdurchlässigkeiten von Fernrohren. Das aus einem auf Unendlich eingestellten Kollimator O_2, in dessen Brennebene eine Lochblende B_1 mit beleuchteter Mattscheibe sich befindet, austretende Parallelstrahlenbündel tritt durch die E.P. in das zu untersuchende Fernrohr F ein. Die A.P. von F wird durch eine Hilfslinse O_3 auf den Photometerschirm S abgebildet, der von der andern Seite von einer bekannten Lichtquelle L_2 beleuchtet wird. L_2 wird so lange verschoben, bis gleiche Beleuchtungsstärken beiderseits vorhanden sind. Die so ermittelte Beleuchtungsstärke ist die für die Lichtdurchlässigkeit des Fernrohrs F kennzeichnende Maßzahl. Die so ermittelten Maßzahlen verschiedener Fernrohre bei gleichen Ausbildungsverhältnissen der A.P. sind vergleichbar.

gebende A.P. durch ein System O_3 auf den Schirm S eines feststehenden Photometers abbilden, dessen Beleuchtungsstärke wir mit Hilfe einer Normallichtquelle L_2 in aus der Photometrie bekannter Weise messen[5]). Indem wir das erste Fernrohr durch das zweite ersetzen unter Beibehaltung der Abbildungsverhältnisse, erhalten wir für dieses die Beleuchtungsstärke auf dem Photometerschirm. Die beiden Beleuchtungsstärken sind ein Vergleichsmaß für die Flächenhelligkeiten der Austrittspupillen. Bilden wir die A.P. für die verschiedenen Fernrohre nacheinander so ab, daß ihre Bilder auf dem Photometerschirm den gleichen Durchmesser besitzen, so sind die dann ermittelten Beleuchtungsstärken den aus den A.P. austretenden Gesamtlichtmengen proportional.

Zum Auffinden der absoluten Größe der Lichtstärke von Fernrohren werden wir nach KRÜSS[6]), zwei gleichartige auf Unendlich eingestellte Fernrohre mit ihren A.P. gegeneinander in F (Abb. 166) in den Strahlengang einschalten. Dabei wird die E.P. des zweiten, dem Photometer zu stehenden Fernrohrs zur A.P. der Gesamtfolge und gleichgroß wie die E.P. der Gesamtfolge selbst, wodurch die Strahlen unter den gleichen geometrischen Verhältnissen, wie sie eintreten, aus der Gesamtfolge austreten. Diese A.P. der Gesamtfolge mit einer

[1]) H. A. KRÜSS, ZS. f. Instrkde. Bd. 23, S. 197—207 u. 229—239. 1903.
[2]) H. B. DORGELO, Phys. ZS. Bd. 26, S. 756—794. 1925.
[3]) K. SCHACHTSCHABEL, Ann. d. Phys. (4) Bd. 81, S. 929—951. 1926.
[4]) H. KRÜSS, ZS. f. Instrkde. Bd. 23, S. 10—14. 1903.
[5]) E. LIEBENTHAL, Praktische Photometrie. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1907; UPPENBORN-MONASCH, Lehrbuch der Photometrie. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1912.
[6]) H. KRÜSS, ZS. f. Instrkde. Bd. 23, S. 14—19. 1903.

dahintergesetzten Mattscheibe bilden wir durch O_3 auf den Schirm S in geeigneter Vergrößerung ab und messen die Beleuchtungsstärke B_{2F} auf dem Photometerschirm. Danach ersetzen wir, ohne an der ganzen Anordnung etwas zu ändern, die beiden Fernrohre durch eine Blende von der Größe der E.P. der Fernrohre, die wir mit der Mattscheibe zusammen an die Stelle der E.P. der Gesamtfolge bringen. Dazu ermitteln wir auf dem Photometerschirm die Beleuchtungsstärke B_B. Das Verhältnis der beiden $D = B_{2F}/B_B$ ist die gesuchte Durchlässigkeit (Lichtstärke) der beiden Fernrohre, so daß wir also für ein Fernrohr die Lichtstärke

$$D_F = \sqrt{D} \tag{97}$$

erhalten.

Im allgemeinen werden wir uns bei der photometrischen Untersuchung von Instrumenten damit begnügen, die **Beleuchtungsstärke am Bildorte**[1]) zu messen, was wir mit jedem geeigneten Photometer, wie z. B. mit dem WEBERschen Photometer, in einfachster Weise durchführen können.

Bei **Scheinwerfern**[2]) werden wir mit einem der üblichen Photometer die Lichtstärke in allen Ausstrahlungsrichtungen messen. Dabei müssen wir vor allem darauf achten, daß der Abstand des Photometerschirms vom Scheinwerfer so gewählt wird, daß ein am Orte des Photometerschirms befindliches Auge die ganze Öffnung ausgeleuchtet sieht. Der Abstand muß größer als die sog. „**photometrische Grenzentfernung**" sein, innerhalb der für ein beobachtendes Auge nie alle Teile der Scheinwerferöffnung gleichzeitig hell erscheinen.

[1]) P. G. NUTTING, Astrophys. Journ. Bd. 40, S. 33–42. 1914; G. W. MOFFIT, Journ. Opt. Soc. Amer. Bd. 4, S. 83–90. 1920.

[2]) G. GEHLHOFF, ZS. f. Beleuchtungsw. Bd. 25, S. 35–41. 1919; Bd. 26, S. 103 u. 103 bis 104. 1920; G. GEHLHOFF u. H. SCHERING, ebenda Bd. 25, S. 83–89. 1919; H. ERFLE, ebenda Bd. 26, S. 4–8, 11–13 u. 111–112. 1920; S. CZAPSKI u. O. EPPENSTEIN, Theorie der optischen Instrumente, Kapitel 18, Artikel H. ERFLE, S. 512–519. Leipzig: J. A. Barth. 1924; A. SONNEFELD, Die Hohlspiegel, S. 133–145. Berlin: Union Deutsche Verlagsgesellschaft 1926.

Namen- und Sachverzeichnis.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.